

# 宇宙航空研究開発機構研究開発報告

## JAXA Research and Development Report

---

### モンテカルロ評価における影響パラメタ検出法

#### Detection of Influential Input Parameters in Monte-Carlo Evaluation

元田 敏和  
Toshikazu MOTODA

2017年10月

宇宙航空研究開発機構  
Japan Aerospace Exploration Agency

# モンテカルロ評価における影響パラメタ検出法\*

元田 敏和 \*<sup>1</sup>

## Detection of Influential Input Parameters in Monte-Carlo Evaluation

Toshikazu MOTODA \*<sup>1</sup>

### ABSTRACT

Monte Carlo (MC) Simulation is a powerful tool for preflight evaluation of flight vehicles, because a number of input uncertain parameters are incorporated simultaneously and non-linear system can be evaluated directly. MC results show some unsatisfactory simulation results which violate system requirements. It is necessary to find the cause of these unsatisfactory cases, namely failure cases, for the study of system improvement. So, detecting the influential inputs of uncertain parameters for the failure cases is important. However, it is often uneasy to detect them because various uncertain parameters are incorporated simultaneously and randomly. This paper presents a methodology to detect influential uncertain parameters. The approach utilizes re-sampling of input uncertain vectors that cause failure cases, and statistical hypothesis test. Since the statistical test is based on hypergeometric distribution, some software which includes statistical tools is usually necessary. Even when statistical software is unavailable, approximated statistical test that utilizes normal distribution is presented and can be applied. MC results of an experimental flight vehicle demonstrate validity and practicality of the presented approach.

**Keywords:** Monte Carlo Simulation, System Evaluation, Parameter Detection, Hypothesis Test

### 概要

モンテカルロ (MC) ・シミュレーションは、入力である多数の不確定パラメタを同時に考慮した非線形システムを直接評価できるため、飛行前の評価手段として強力なツールである。通常、MC 評価結果の中には要求を満足できないケース (失敗ケース) がいくつか現れる。このときシステムの改良検討において、システム要求を満足しない主な原因となる不確定パラメタを特定する必要がある。しかしモンテカルロ評価では多数の不確定パラメタを同時に、かつ、ランダムに加えているため、主因となるパラメタの特定は必ずしも容易ではない。そこで本稿では、この課題を解決するためのパラメタ検出法を提示する。本手法では失敗ケースを引き起こす不確定パラメタ・ベクトルのリサンプリングによる MC 評価と、統計的検定を利用する。超幾何分布に基づく検定を実行するため、通常は統計解析ソフトウェアが必要となる。ただし統計ソフトウェアの利用が難しいケースでも、容易に計算可能な正規分布近似の手法についても記す。最後に適用例として飛行実験の MC 結果に本検出法を適用し、その有効性と実用性を示す。

## 目次

<b>1 はじめに</b> .....	<b>7</b>
<b>2 モンテカルロ評価とパラメタ検出</b> .....	<b>8</b>
2.1 MC 評価 .....	8
2.1.1 MC 評価の処理手順 .....	8
2.1.2 評価結果の処理 .....	9
2.1.3 MC 評価の利点 .....	9
2.2 パラメタ検出の必要性 .....	9
2.3 パラメタ検出の考え方 .....	10
<b>3 パラメタ検出法</b> .....	<b>12</b>
3.1 パラメタ検出アルゴリズム .....	13
3.1.1 全体構成 .....	13
3.1.2 テスト入力の生成 .....	13
3.1.3 統計的検定による検出 .....	15
3.1.4 失敗ケース抑制パラメタ .....	18
3.2 数値例 .....	19
3.3 複数の失敗ケース .....	21
3.4 検出能力 .....	22
3.4.1 試行回数 $N$ の影響 .....	22
3.4.2 $R$ および $N_F/N$ の影響 .....	23
3.4.3 失敗抑制効果 .....	26
<b>4 正規分布近似による検出法</b> .....	<b>27</b>
4.1 正規分布近似法 .....	27
4.1.1 超幾何分布と正規分布の対応 .....	27
4.1.2 正規分布近似による導出 .....	28
4.1.3 失敗ケース抑制パラメタ .....	29
4.1.4 近似法のまとめ .....	30
4.2 数値例 .....	31
4.3 正規分布近似の精度 .....	32
4.3.1 試行回数 $N$ の影響 .....	32
4.3.2 $R$ および $N_F/N$ の影響 .....	33
4.3.3 失敗抑制効果 .....	36
<b>5 適用例</b> .....	<b>38</b>
5.1 小型自動着陸実験 (ALFLEX) .....	38
5.2 MC 評価 .....	44
5.3 主要パラメタの検出 .....	45
5.3.1 全失敗ケース対象 .....	45
5.3.2 特定ケース対象 .....	46
5.4 組み合わせの影響について .....	48

<b>6 まとめ</b> .....	<b>49</b>
<b>[参考文献]</b> .....	<b>49</b>
<b>付録 A ソフトウェアの利用</b> .....	<b>51</b>
A.1 超幾何分布の累積確率 .....	51
A.2 標準正規分布の確率変数値 .....	53
<b>付録 B 超幾何分布と二項分布</b> .....	<b>54</b>
B.1 超幾何分布 .....	55
B.1.1 平均 .....	55
B.1.2 分散 .....	56
B.2 二項分布との関係 .....	57
B.3 有限母集団修正 .....	61



## 記号

$A_X, A_Y, A_Z$	加速度, 機体軸座標系.	$n_j$	$N$ 個の中で, $j$ 番目の不確定パラメタを含む個数.
$C_D$	抗力係数.		
$C_{D-\delta sb}, C_{L-\delta sb}, C_{m-\delta sb}$	スピードブレーキ操舵に対する抗力, 揚力, ピッチングモーメント傾斜.	$n_{Fj}$	$N_F$ 回の失敗ケース中に, $j$ 番目のパラメタを含む個数.
$C_{G.E.}$	地面効果.	$O_{nom}$	ノミナル値 (誤差/不確定性なしの値).
$C_L$	揚力係数.	$\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$	実験機の角速度, 機体軸座標系.
$C_{L-\delta e}$	エレベータ操舵に対する揚力傾斜.	$P_{ERR}$	正規分布近似値の誤差割合.
$C_l$	ローリング・モーメント係数.	$P_N$	正規分布近似における上側累積確率.
$C_{l-p}, C_{l-r}$	ロールおよびヨー角速度に対するローリング・モーメント傾斜.	$P_j$	$p_j(x)$ の上側累積確率.
$C_{m-q}$	ピッチ角速度に対するピッチング・モーメント傾斜.	$p_j(x)$	失敗ケースが $x$ 回発生する確率.
$C_n$	ヨーイング・モーメント係数.	$Q_{Nj}$	$Q_j$ の正規分布近似値.
$C_{n-p}, C_{n-r}$	ロールおよびヨー角速度に対するヨーイング・モーメント傾斜.	$Q_j$	$p_j(x)$ の下側累積確率.
$C_Y$	横力係数.	$R$	テスト入力生成時の各要素のサンプリング確率.
$C_{Y-\beta}, C_{l-\beta}, C_{n-\beta}$	横滑り角に対する横力, ローリングおよびヨーイング・モーメントの傾斜.	$U, V, W$	実験機の実験機速度, 機体軸座標系.
$C_{Y-\delta a}, C_{l-\delta a}, C_{n-\delta a}$	エルロン操舵に対する横力, ローリングおよびヨーイング・モーメントの傾斜.	$V_{grd}$	対地速度.
$C_{Y-\delta r}, C_{l-\delta r}, C_{n-\delta r}$	ラダー操舵に対する横力, ローリングおよびヨーイング・モーメントの傾斜.	$W_{gust}$	連続突風の風速.
$H$	実験機の高度.	$X, Y, Z$	実験機の位置, 滑走路座標系.
$I_{XX}, I_{YY}, I_{ZZ}$	慣性モーメント.	$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$	実験機の実験機速度, 滑走路座標系.
$I_{XZ}$	慣性乗積.	$x$	サンプリングされた $n$ 回のMC評価中に, 失敗ケースとなった回数.
$M$	不確定パラメタの数.	$z$	正規分布近似における, $x$ の標準化量.
$m$	機体質量.	$z_\alpha$	標準正規分布における, 右裾の面積が $\alpha$ となる $z$ の値.
$N$	テスト入力ベクトルの数.	$\alpha$	有意水準.
$N_F$	$N$ 回のMC評価における失敗回数.	$\beta_{grd}$	対地横滑り角.
$n$	$N$ 個のテスト入力からサンプリングされた個数.	$\Delta P$	正規分布近似 $P_N$ と真値 $P$ との差.
		$\epsilon$	不確定パラメタ・ベクトル.
		$\epsilon^*$	失敗ケースを引き起こす $\epsilon$ .
		$\epsilon(j)$	$j$ 番目の不確定パラメタ.
		$\mu$	母集団の平均値.

$\sigma$	母集団の標準偏差.	添字	
$\sigma^2$	母集団の分散.	B	二項分布.
$\Phi, \Theta, \Psi$	ロール角, ピッチ角, ヨー角.	HG	超幾何分布.
$\phi(z)$	標準正規分布の確率密度関数.	<i>min, max</i>	最小値, 最大値.
		NAV	航法出力.
		<i>nom</i>	ノミナル値.

## 1 はじめに

航空宇宙機の開発においては、実環境での飛行試験によってシステムの動作を確認することが困難な場合が多い。このため設計段階から計算機上で飛行運動を模擬して、その性能や特性を評価できる飛行シミュレーションが評価手段として非常に重要となる。なかでも MC シミュレーションによる評価は、多くの不確定パラメタの影響を同時に考慮した非線形システムの評価が可能な方法であり、評価手段として優れた性質を持つ<sup>1)-3)</sup>。過去においては計算負荷が高いことが実用化の障害となっていたが、近年の計算機能力の大幅な向上に伴い、国内外の様々な航空宇宙プロジェクトにおいて利用されるようになってきた<sup>4)-10)</sup>。さらに MC 評価結果を最適化する、設計パラメタの自動チューニング法も研究されてきている<sup>11)-13)</sup>。これらの手法では繰り返し MC 評価を実行する必要があるため、計算負荷はさらに大きくなる。

MC 評価では、多くの不確定パラメタを、それぞれ仮定した分布に従ってランダムに、かつ、同時にシステムに加えて評価する。これは数値的に標本調査を実施することに相当し、この結果から母集団の成功確率などを推定し、統計量として結果を得る。通常いくつかの失敗ケースが現れるが、この主な原因となる入力、つまり、不確定パラメタを特定することは、システムの性能や信頼性向上などの改善検討にとって非常に重要である。しかし多くの不確定パラメタをシステムに同時に加えており、さらにパラメタ間の相互作用も影響する非線形システムであるため、主因の特定は必ずしも容易ではない。この問題を解決し主要パラメタを検出するための手法として、リサンプリングと統計的検定を利用する方法を提案した。

本稿で目的とするパラメタ検出において重要なことは、“評価手段として合理的な手法である MC 評価を実行した結果を解析して、影響パラメタを検出する”ことである。つまり現実的な確率で発生させたパラメタの組合せにより発生する失敗ケースに対して、主因となるパラメタを検出し、システムの改善検討に資することが目的である。

一方で、MC 評価を介さずとも、各パラメタを効率的に組み合わせて失敗ケースを発生させ、その原因となるパラメタを特定する実験計画法のような手法も存在する。通常システムは不確定性なしのノミナルケースをベースに設計されるため、不確定性を表すパラメタ値を大きくするほど失敗ケースは発生しやすくなる。しかし現実には起こりえないほどの極小確率でしか発生しえない大きさや組合せを対象として分析したとしても、実際のシステムの設計では殆ど意味をもたない。また不確定パラメタの組み合わせが 2 個だけでなく 3 個以上の組み合わせで失敗ケースが発生する場合も考えられるが、これらの影響を効率的に評価できるのが MC 評価である。ゆえに MC 評価結果を得たうえで、それを分析して主要なパラメタを検出することが、実用性の面から重要である。

MC 評価結果から、ある程度の失敗ケースのサンプル数が得られる場合には、対応する入力である不確定パラメタ・ベクトルの各成分について統計的検定を適用することにより、影響パラメタを検出できる可能性はある<sup>14)</sup>。簡単な計算で MC 評価結果を処理し、直ちに結果が得られるという利点がある。ただしこの手法では、ある程度の数のサンプルが必要であること、また不確定性の統計的性質は常に一定であっても時系列的に変化するランダム誤差のような入力パラメタについては適用できないこと、さらに不確定パラメタ入力が正規分布でない場合には、分散の検定が正確ではなくなり検出結果に影響するなどの問題がある。本稿で述べる手法は、これらの問題を解消するものであり、あらゆる種類の不確定パラメタ入力に適用可能である。

本稿の構成は以下のとおりである。まず MC 評価においてパラメタ検出がどのような意味をもち、なぜ必要とされるかについて次章で述べる。次に第 3 章でパラメタ検出法について計算方法と手順を含めた詳細を述べる。本手法では超幾何分布に基づく仮説検定を利用するが、通常これを実行するためには統計解析が可能なソフトウェアを必要とする。しかし計算アルゴリズムの中で連続的に検定を実行する必要がある

場合など、統計解析ソフトウェアを使いにくい場面も想定される。よって第4章では正規分布近似による検出法について記述する。また近似誤差についても考察する。第5章では、本手法の適用例を示す。ここでは1996年にオーストラリア・ウーメラ飛行場にて実施された小型自動着陸実験(ALFLEX)のMC評価を取り上げ、着陸性能に重大な影響を及ぼす不確定パラメータを検出する。最後に第6章にてまとめる。

## 2 モンテカルロ評価とパラメータ検出

本稿で述べる影響パラメータの検出では、MC評価結果を利用する。そこで、まずMC評価について概説する。次にパラメータ検出の意義を確認する。そして最後にパラメータ検出における問題と、検出すべきパラメータについて述べる。

### 2.1 MC評価

実システムでは環境条件、機体モデル、センサの計測誤差、初期条件の変動など、様々な不確定性が存在する。これらの条件下においても意図する飛行を実現し、目的を達成することが求められる。この事前評価手段として、MC評価は多くの利点をもつが、以下ではMC評価の手順、結果の処理、利点について順に述べる。

#### 2.1.1 MC評価の処理手順

MC評価では、システムに影響を与える可能

性をもつ多数の不確定パラメータを、同時に入力して評価する。MC評価の手順を図2.1に示す。まず航空宇宙システムの動作を模擬するシステム・モデルを記述したシミュレーション・プログラムを用意し、以下の手順で実施する。

1. 不確定パラメータの分布の設定： 個々の不確定パラメータは、現実の物理現象を考慮して、その分布を設定する。分布を設定するための情報が少ない不確定パラメータも存在するが、それらについても設計の前提条件として、或いは設計パラメータの一部と考えて設定し、設計条件を明確にする。
2. 不確定パラメータの発生： 設定した分布に従って各不確定パラメータの値を、乱数によりランダムに発生させる。発生させた不確定パラメータは、母集団からの標本に対応する。
3. システム評価の実行： 発生させた多数の不確定パラメータを同時にシステムに加え、評価する。航空宇宙システムにおいては通常飛行シミュレーションにより評価する。乱数により発生させる不確定パラメータの値を更新しながら、多数回の評価を繰り返す。
4. 結果の集約： 多数回の結果を集約し、システムの評価基準を満足する割合や結果の分布などを確認する。

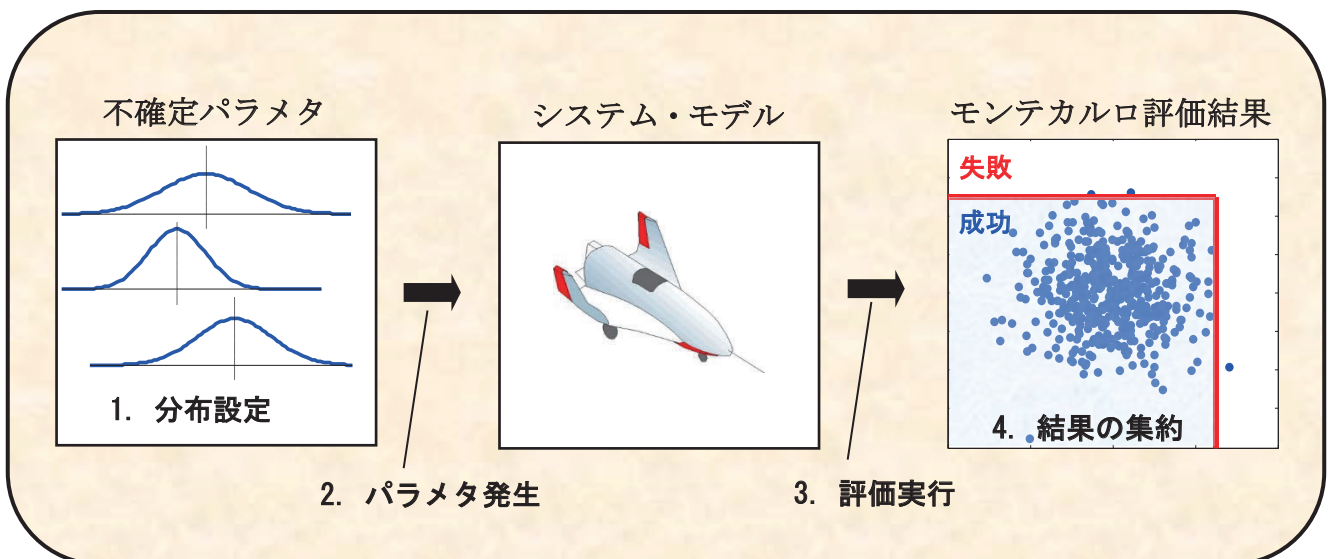


図 2.1 モンテカルロ評価の実行手順

### 2.1.2 評価結果の処理

次に結果データの処理について述べる。飛行シミュレーションにおける評価項目は、通常複数存在する。多数の飛行シミュレーションを実行するMC評価においては、各評価項目について、繰り返し回数分の多数のデータが得られる。得られたデータの代表的な処理方法は、次のようなものである。

- 総合的な成功（失敗）確率： 各シミュレーションケースにおいて、複数の評価項目の全ての設計基準を満たしていれば”成功”，いずれか1つでも満たしていなければ”失敗”とカウントして総合的な成功（失敗）確率とその信頼区間を得る。
- 各評価項目の成功（失敗）確率： ある特定の着目する評価項目のみを対象とし、設計要求を満たす確率とその信頼区間を得る。
- 各評価項目のばらつき： 各評価項目のデータを用いてヒストグラムを描き、平均や標準偏差などを求め、その分布を確認する。または図 2.1 の右図に示すような着目する2つの評価項目を用いた散布図を描いてそのばらつきを確認する。

特に上記の成功（失敗）確率の算出においては、母集団の確率を推定するものであり、結果

の信頼性を表す信頼区間と併せて算出することが重要である<sup>3)</sup>。

### 2.1.3 MC 評価の利点

以上がMC評価の大まかな手順であるが、この手法の利点は次のようなものである。

- 非線形システムを直接評価できる。
- 多数の不確定パラメタの影響が直接結果に現れる。組み合わせによる影響も結果に反映される。
- 発生させた不確定パラメタの組合せは、設定した分布に基づくランダム抽出であるため、物理現象として合理的な発生確率を反映している。
- 不確定パラメタを物理量として設定できるため、設定した不確定性の大きさと評価結果との関係を明確にできる。

### 2.2 パラメタ検出の必要性

ここでは次章以降で述べる主要な不確定パラメタ検出法の必要性について述べる。MC評価を利用する不確定パラメタ検出のイメージを図 2.2 に示す。

評価結果に大きな影響を及ぼす不確定パラメタを知ることは、システムの改善検討にあたって必要不可欠である。このため従来から「感度

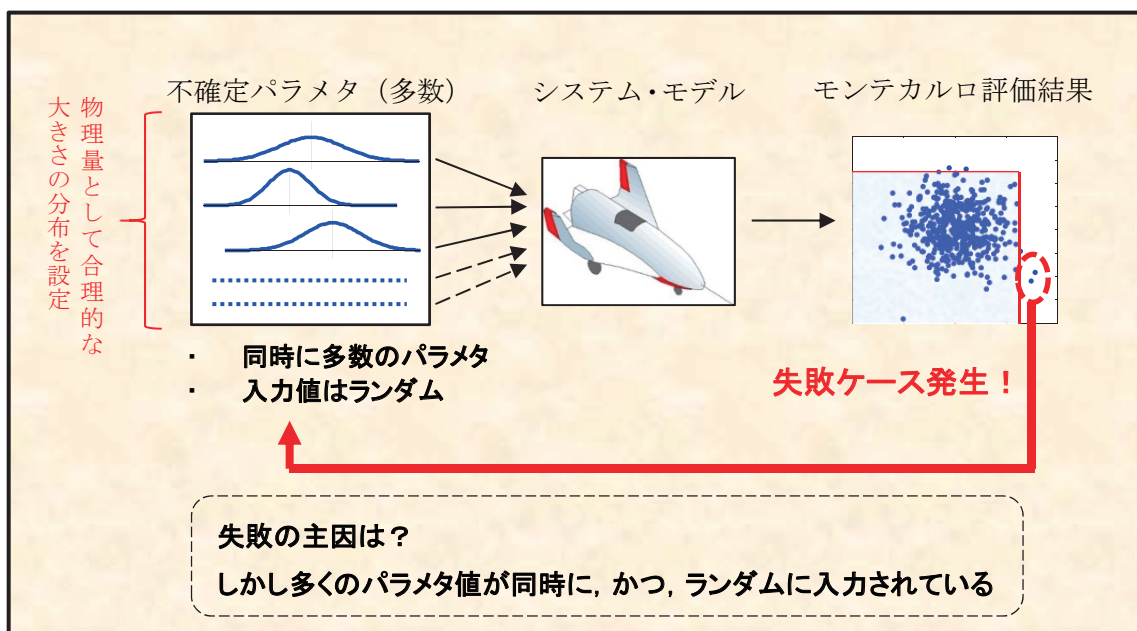


図 2.2 システムに影響する入力パラメタ検出のイメージ



解析」が重用されてきた。感度解析とは、ノミナル・システムに対して1つの不確定パラメタだけを加えて評価し、その影響を確認するものである。このイメージを図2.3に示す。いま考慮している不確定パラメタがM個あるとすれば、これらをそれぞれ個別にシステムに加え、単独の評価を実施して結果を得る。加える各パラメタの大きさは任意であるが、 $3\sigma$ 相当値として定義する値、或いは設計時に想定する最大値を用いることが多い。システムに加えるパラメタが1つだけであるため、当該パラメタが結果に及ぼす影響は明確であり、結果に及ぼす影響が重大であるならシステム改善の情報として貴重である。

MC評価では多数の不確定パラメタを同時に加えるが、事前の感度解析およびシステム改善検討は必要となる。その理由の一つは、先に述べたように単独のパラメタの影響が把握できることである。多数のパラメタを同時に加えるMC評価では、個々の不確定パラメタの影響はわかりにくい。また別の理由として、ただ1つのパラメタで失敗ケースを発生させることのないようなシステムを構築しておかなければ、MC

評価によって多数の失敗ケースが発生する可能性が高いからである。したがって感度解析を実施し、単独のパラメタの影響で失敗ケースが発生することのないように対策を施しておくことが重要である。

次に感度解析とシステム改善を実行したとしても、MC評価で失敗ケースが発生することは多い。感度解析結果はシステム要求を満足しているため、この場合の失敗ケースは複数の不確定パラメタ入力の組合せによって引き起こされていることを意味する。成功確率を高めるための改善検討には、これらの失敗ケースの主因となる入力パラメタを特定することが不可欠である。しかし図2.2に示すように、多数の不確定パラメタを同時に加えるMC評価においては、この特定は必ずしも容易ではないが、失敗ケースの原因を特定しなければシステムを改善するための手がかりが掴めない。従って、信頼性の高いシステムを構築するためには、多数の入力パラメタを同時に解析し、失敗ケースの主因となるパラメタを検出する必要がある。

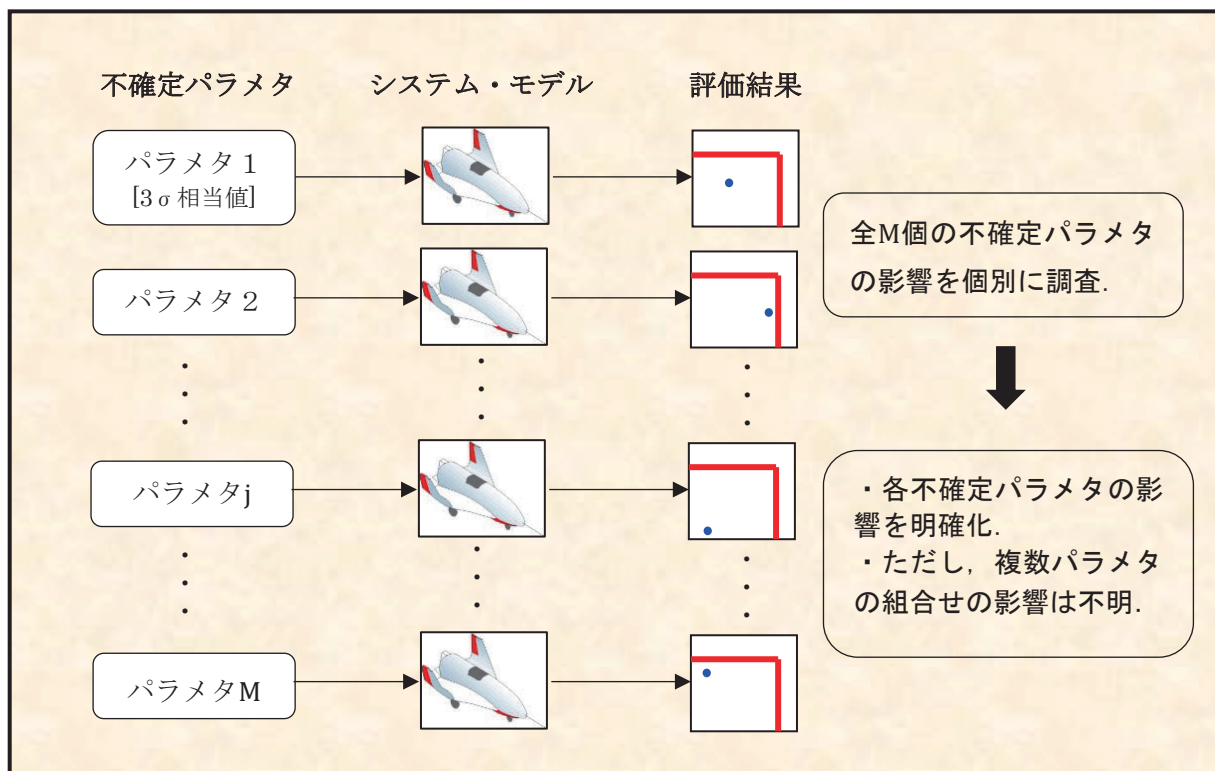


図 2.3 感度解析

### 2.3 パラメタ検出の考え方

MC 評価で失敗ケースが発生した場合、事前の感度解析で問題なければ、複数の不確定パラメタが関与していることになる。これらの「影響が大きなパラメタ」を検出する必要があるが、複数のパラメタが関与するときに、その影響の大きさの組合せとしていくつかのケースが考えられる。これが影響パラメタの検出を困難にする要因ともなっているが、まずどのような組合せが存在する可能性があるかについて考える。

失敗ケースを引き起こすパラメタの組合せのイメージを図 2.4 に例示する。図 (a) はパラメタ A とパラメタ B が同程度の影響力を持つケースである。この場合 A, B いずれのパラメタも主要な影響力を持つ。次に図 (b) は、主要な影響力を持つパラメタ A と、影響はそれほど大きくないものの、複数のパラメタと組み合わせることで失敗ケースを引き起こす場合である。各パラメタ B, C, D の影響はそれほど大きくなく、ランダムに入力される値の大小により、その中の一つが存在しなくても失敗ケースが発生する場合も起こりうる。図 (c) のケースはパラメタ A と他のパラメタの組合せにより失敗ケースが発生す

る場合を示す。失敗ケースが発生するときに、必ずパラメタ A は存在するが、その組合せの相手はランダム入力の大小により、異なることがある場合を示す。図ではパラメタ B, C, D のいずれかがある程度以上の入力値を持つ場合に、パラメタ A と組み合わせることで失敗ケースを引き起こすイメージを示す。

以上のように、失敗ケースを引き起こす場合のパラメタの組合せとして、いくつかのパターンが考えられる。図 2.4 に示した図 (a) ではパラメタ A, B 共に主要な影響を及ぼしているため、双方共に検出すべきパラメタといえる。一方で図 (b)(c) において主要な影響を及ぼしているのはパラメタ A であり、このパラメタが存在しなければ失敗ケースは発生しない。よってパラメタ検出においてパラメタ A は、失敗に寄与している他のパラメタよりも検出の優先度は高い。なぜなら、システムの成功確率を高めるための改善検討において、パラメタ A に対する対策なしに根本的な解決とはならないからである。

また上記の他にパラメタ検出を困難にする要因として、失敗ケースに寄与するパラメタだけ

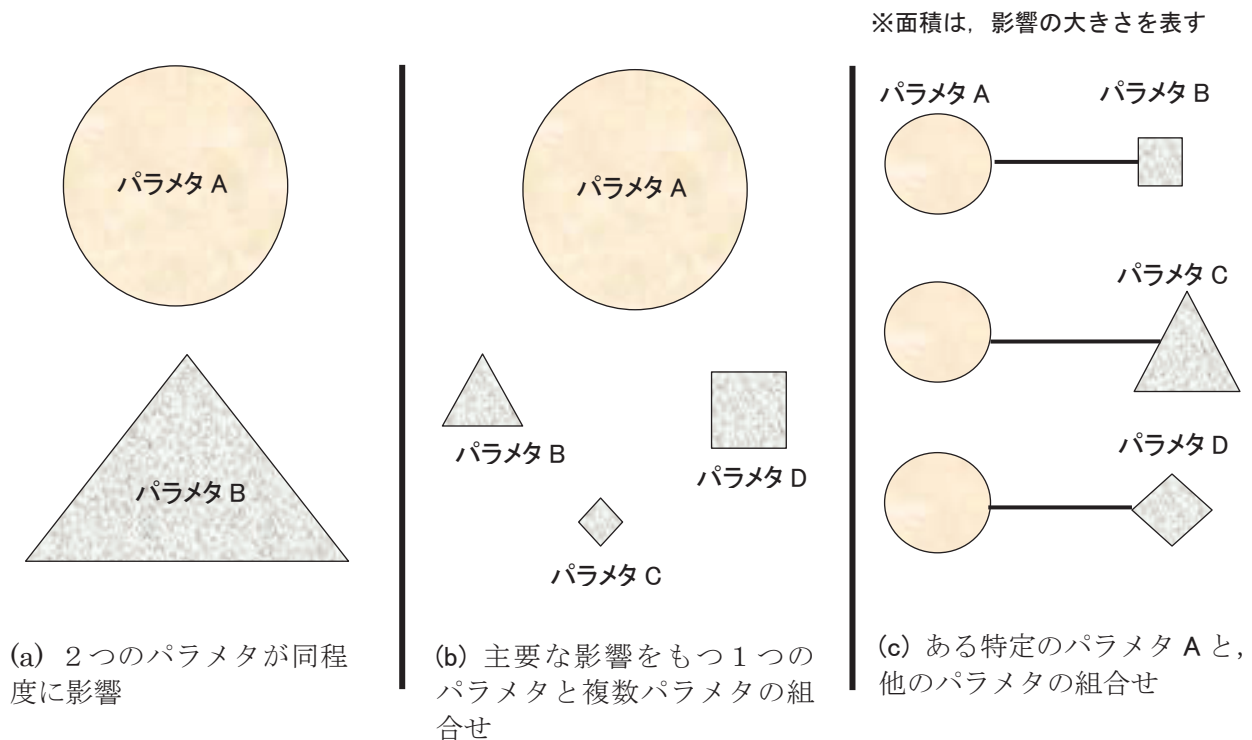


図 2.4 失敗ケースを発生させる不確定パラメタの組合せ例

が存在するのではなく、逆に失敗ケースとなるのを抑制するパラメタも同時に存在する可能性があることである。つまり失敗ケース数を減少させるように作用する不確定パラメタが存在する、ということである。

設計では不確定性の存在しないノミナル・モデルを中心にシステムの性能や安定性を高めるように検討されており、一般に不確定性が付加されてノミナル・モデルから遠ざかるほど失敗ケースは発生しやすくなる。ところが実際の設計では、様々な不確定性に対するロバスト性が考慮されており、ノミナル・モデルにおいてある特定の不確定パラメタに対するロバスト性が、必ずしも最大となっているわけではない。さらに通常システムの評価項目は複数あり、あらゆる評価項目に対して必ずしもノミナル・モデルのロバスト性が最大とはなっていないわけでもない。ある特定の不確定パラメタの存在により、安定性が増すこともあれば、一部の性能がノミナル・モデルよりも改善されることもありうる。以上のように、多数のパラメタが影響す

るシステムの挙動は複雑であり、その中で失敗ケースに主要な影響を及ぼすパラメタを検出することはそれほど単純ではない。

パラメタ検出の目的を再度確認すると、「システム改善検討のための必要な情報を得る」ことである。この観点から具体的には、図 2.4(b) (c) のイメージにおいて、パラメタ A を検出できることである。よって本パラメタ検出法では、比較的影響が小さなパラメタも含めて失敗ケースを引き起すあらゆる組合せを直接検出することを意図してはならず、「多くの失敗ケースに関与する影響の大きなパラメタを検出すること」を主たる目的としたものである。

### 3 パラメタ検出法

MC 評価において主要な影響を及ぼす、不確定パラメタ入力の検出方法のアルゴリズムを記す<sup>15)</sup>。手法の概要を図 3.1 に示すが、ここでは、「失敗ケースを引き起こす不確定パラメタ・ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  の M 個の要素をランダムに組み込んだ“テスト入力”を生成し、その入力を用いた

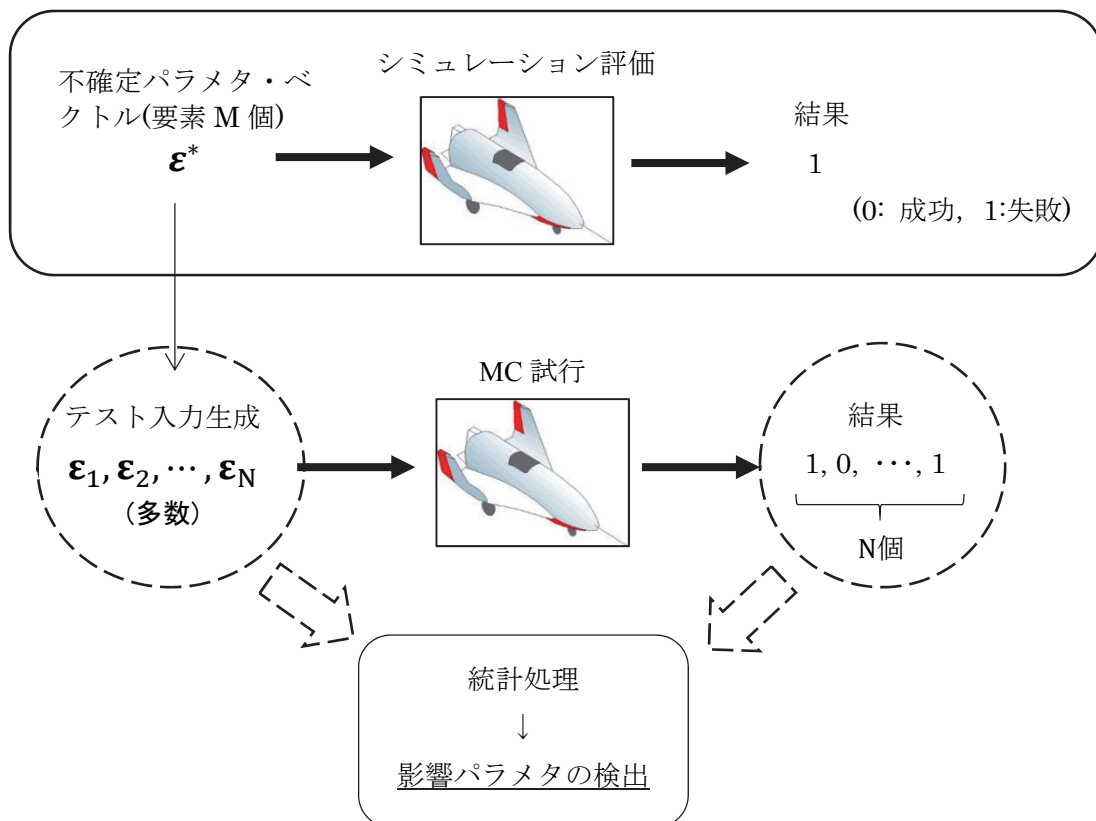


図 3.1 影響パラメタ検出法の概要



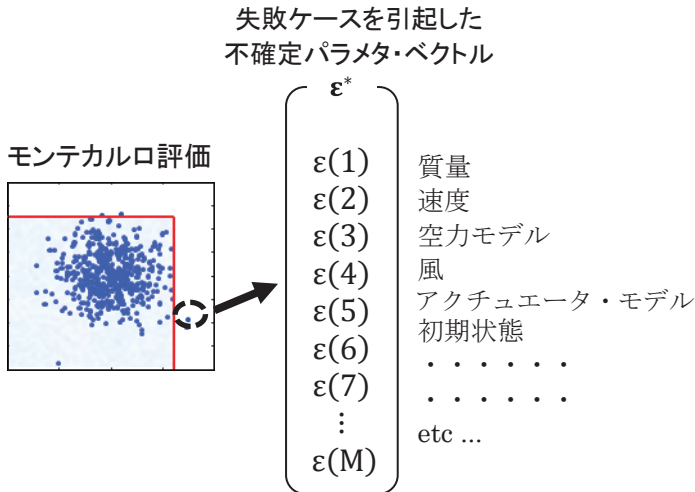


図 3.2 不確定パラメタ・ベクトルの取出し

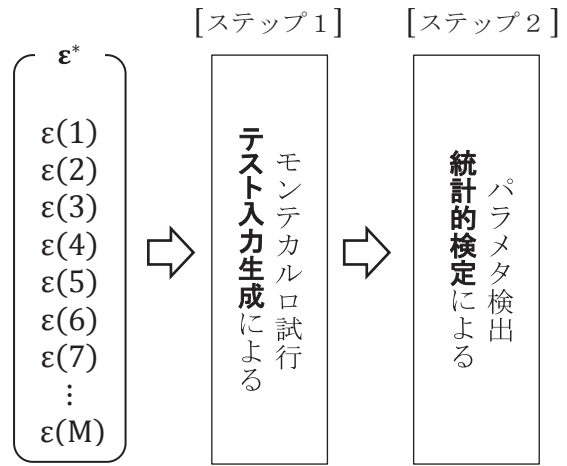


図 3.3 パラメタ検出法の構成

MC 試行結果を統計処理することで、失敗ケースへの影響が大きな  $\epsilon^*$  の要素を検出する」手法を提示する。

以下では本手法のアルゴリズムについて詳述した後に、簡単な数値例を示す。さらに多数の失敗ケースのサンプルがある場合の解析方法について触れ、最後に本検出法の検出能力について考察する。

### 3.1 パラメタ検出アルゴリズム

始めにアルゴリズム全体の構成について述べ、次に主要部である「テスト入力の生成」および「統計的検定」について順に記す。

#### 3.1.1 全体構成

パラメタ検出の大まかな流れを、図 3.2 および図 3.3 に示す。図 3.2 は MC 評価結果を示し、失敗ケースに対応する入力である不確定パラメタ・ベクトル  $\epsilon^*$  を取り出すことを表す。 $\epsilon^*$  の要素の中から、失敗ケースに大きく影響するパラメタを検出することが目的である。

図 3.3 はパラメタ検出の流れを示し、大きく分けて「テスト入力の生成」と「統計的検定」の 2 つの手順から成る。[ステップ 1] のテスト入力生成部では、 $\epsilon^*$  の各要素をランダムサンプリングして、“テスト入力”を生成する。これは  $\epsilon^*$  の各要素をランダムサンプリングしたものであり、多数個生成して MC 試行の入力とする。テスト入力の生成法は次項で述べる。

[ステップ 2] の統計的検定部では、得られた MC 試行結果と対応するテスト入力の情報を統計処理する。統計的検定を用いて、失敗ケースへの影響が大きなパラメタ、つまり  $\epsilon^*$  の要素である  $\epsilon(j)$  を検出する。

以上が本パラメタ検出方法の全体構成である。[ステップ 1] 及び [ステップ 2] の処理の中身について、次に具体的に記す。

#### 3.1.2 テスト入力の生成

テスト入力は、 $\epsilon^*$  の全要素から一部だけランダムに選択してシステムへの新たな入力とし、各要素が及ぼす影響を統計的に調査するためのものである。具体的な生成方法を、図 3.4 に示す。

テスト入力ベクトル  $\epsilon_i$  の要素は、 $\epsilon^*$  の要素  $\epsilon(j)$  を部分的に選択したものとして構成する。このとき各要素  $\epsilon(j)$  を確率  $R$  で、ランダムに選択する。選択されなかった要素については、不確定性を含まないノミナル値  $O_{nom}$  に戻す。

不確定パラメタは不確定性なしのノミナル値に付加する値を示すため、一般的には  $O_{nom}=0$  であることが多い。ただしパラメタの性質によっては、ノミナル値が 0 ではない場合も考えられる。一例としては、一様分布の不確定性として設定するときに、ノミナル値は必ずしもその分布の中心として設定されるわけではない。このためノミナル値を  $O_{nom}$  と表記した。

次に各要素を選択する確率  $R$  の値であるが、一般的には、

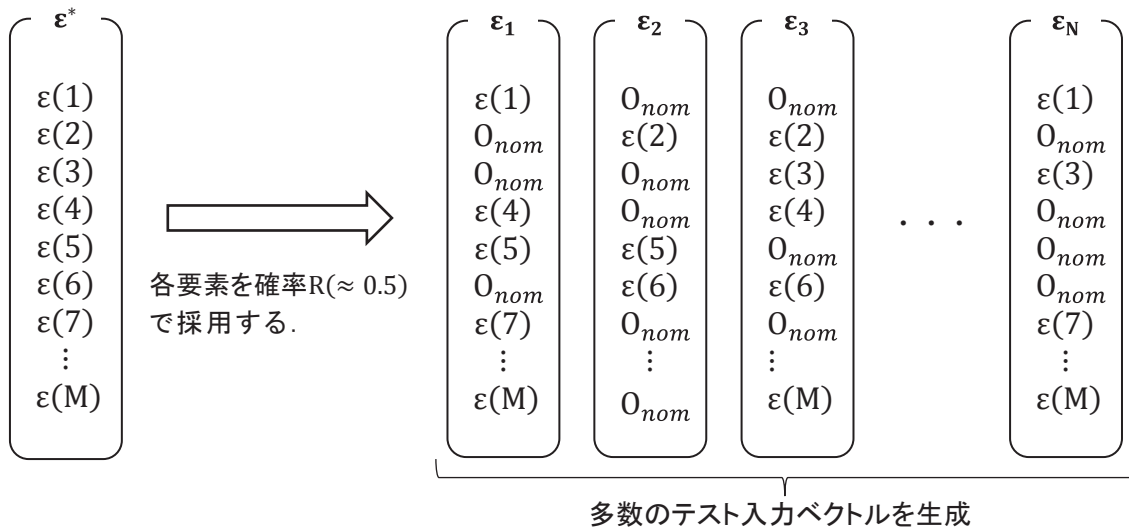


図 3.4 テスト入力の生成

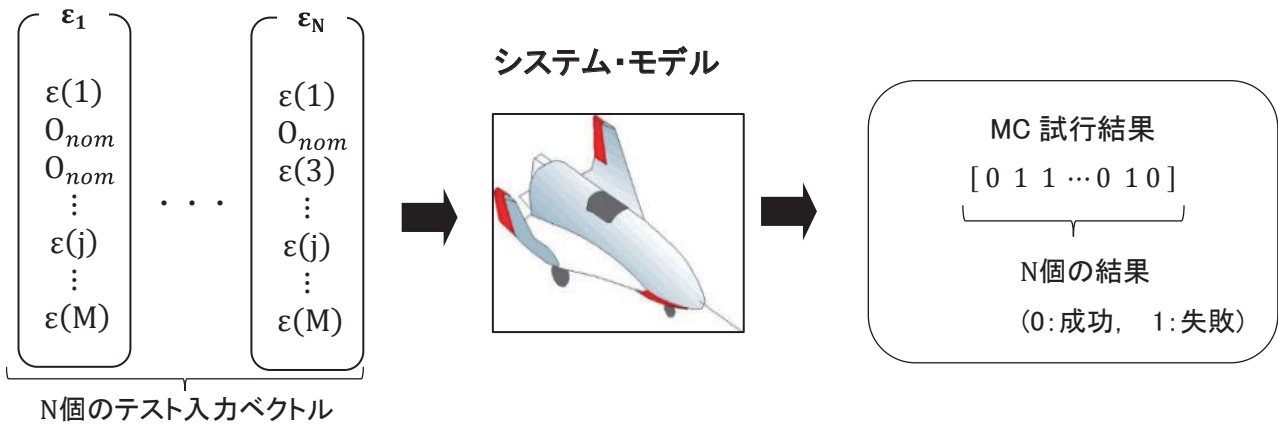


図 3.5 テスト入力による MC 試行

$$R=1/2 \tag{3.1}$$

を推奨する。理由は次のとおりである。テスト入力の目的は、 $\epsilon^*$ の要素を部分的にランダムに選択して、各要素の影響をテストすることである。統計解析ができる情報を得るために、様々な組合せを多数生成することを目的としている。いま不確定パラメタの  $M$  個の要素のなかから、 $m$  個だけ取り出すとすれば、組合せの総数は  ${}_m C_m$  である。ここで  ${}_m C_m$  が最大となるのは、 $m=M/2$  のときであり、これが式 (3.1) を推奨する理由である。

このテスト入力を用いて、図 3.5 に示すように MC 試行を実行し結果を得る。生成した  $\epsilon_i$  をテストすることにより、失敗ケースを引き起こ

す  $\epsilon_i$  が得られるとき、そこに含まれる要素  $\epsilon(j)$  は失敗ケースに寄与している可能性がある。多数の失敗ケースにおいて、ある特定の要素  $\epsilon(j)$  が多く含まれているとすれば、その要素  $j$  は失敗ケースに影響している可能性が高い。この要素  $j$  を、統計的検定を利用して抽出するのが、本パラメタ検出法の考え方である。

以上のことから本パラメタ検出法において重要なことは、テスト入力による MC 試行において、「失敗ケース」のサンプルがある程度得られることである。場合によっては失敗ケース数が極端に少なく、統計的検定が機能せず、パラメタが検出できない可能性もある。この一つの解決法としては、テスト入力の数  $N$  を増やすことである。ただしこの場合 MC 試行の計算負荷

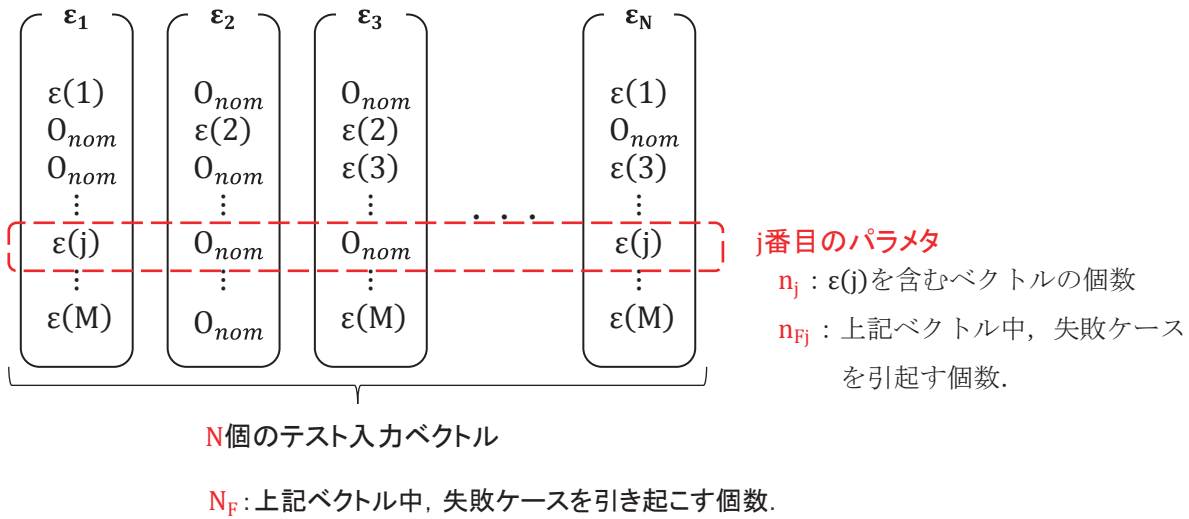


図 3.6 検定に必要な 4 種類の数

が高くなり、結果を得るまでにより時間を要することになる。

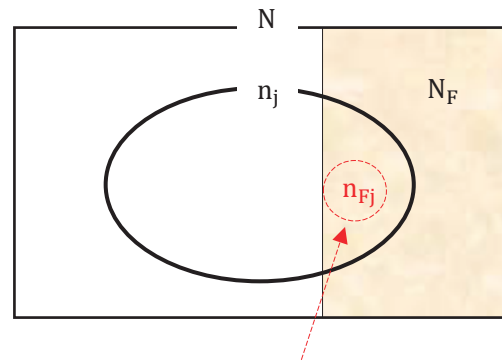
別の解決法として、テスト入力生成時に R の値を 1/2 より大きくすることである。このようにすることで、テスト入力  $\epsilon_i$  に含まれる  $\epsilon^*$  の要素数が増え、失敗ケースが発生しやすくなる。先に R の推奨値を 1/2 と述べたが、必ずしも  $R=1/2$  でなければならないわけではない。テスト入力の目的は、 $\epsilon^*$  の要素の様々な組合せをテストすることであるため、 $R=1/2$  を中心としてその前後の値であれば、テスト入力として機能する可能性は十分にある。

以上がテスト入力の生成方法と MC 試行であり、図 3.3 の [ステップ 1] に相当する部分である。

### 3.1.3 統計的検定による検出

図 3.5 に示す MC 試行結果を処理し、統計的検定を適用することで影響パラメタを検出するのが [ステップ 2] である。MC 試行結果から、検定に必要な 4 種類の数値を取り出す。これらの数値を図 3.6 に赤字で示す。まずテスト入力ベクトルの数 N、失敗ケース数  $N_F$  である。次に、個々の要素  $\epsilon(j)$  に着目する。N 個のテスト入力ベクトル中に、 $\epsilon(j)$  を含む個数を  $n_j$  とする。 $\epsilon(j)$  は確率 R でテスト入力の要素としているため、 $n_j$  はおよそ次式の値となっている。

$$n_j \approx R \cdot N \tag{3.2}$$



**j 番目の要素の影響度合いを表す!**  
図 3.7 モンテカルロ試行結果の整理

次に  $n_j$  個のテスト入力の中で、失敗ケースを引起したテスト入力ベクトルの数を  $n_{Fj}$  とする。ここで  $n_j$  及び  $n_{Fj}$  は、それぞれ M 個の各要素について得られる数値である。

以上の N、 $N_F$ 、 $n_j$ 、 $n_{Fj}$  の 4 種類の数値を取り出し、検定を行う。これらの数値の関係を整理したものが図 3.7 である。全体集合が N 個で、そのうち失敗ケースが  $N_F$  個。この中から無作為に、確率 R で  $n_j$  個を取り出す。以上の N、 $N_F$ 、 $n_j$  の 3 種類の数値の大きさは、要素 j に殆ど依存しない。

ここで無作為に取り出した  $n_j$  個のテスト入力ベクトルの中で、失敗ケースを発生させた個数が  $n_{Fj}$  である。もし要素 j が失敗ケースに大きく影響している場合、要素 j を含むテスト入力ベクトルは失敗ケースを発生させやすくなり、 $n_{Fj}$  の値は大きくなる。このとき  $n_j$  個中の失敗ケー

スの割合は、次式のように全体のそれよりも大きくなる。

$$n_{Fj}/n_j \gg N_F/N \quad (3.3)$$

一方で、もし要素  $j$  はシステムに対して殆ど何の影響も及ぼしていないとすれば、無作為に取り出した  $n_j$  個中の失敗ケースの割合は、全体のそれとそれほど違わなくなる。つまり、

$$n_{Fj}/n_j \approx N_F/N \quad (3.4)$$

以上の考え方を利用し、失敗ケースの割合  $n_{Fj}/n_j$  が、全体の値  $N_F/N$  よりも「大きい」といえるかどうかを、統計的に検定して判定する。もし大きいという判定ならば、要素  $j$  を失敗ケースに影響するパラメタとして検出する。

要素  $j$  が失敗ケースに寄与するときは  $n_{Fj}$  は大きくなるが、逆に小さくなる可能性もある。こ

れはパラメタ  $j$  が、失敗ケースを抑制する方向に働く場合である。このとき  $n_{Fj}$  は小さくなり、

$$n_{Fj}/n_j \ll N_F/N \quad (3.5)$$

となる。

以上の関係をまとめたものが、図 3.8 である。 $n_{Fj}$  の大きさによって、失敗ケースへの影響が異なることを表す。 $n_{Fj}$  の大きさの度合いを判定するため、 $n_{Fj}$  個の失敗ケースを含む  $n_j$  個の集合が、 $N$  個の全体集合からの無作為抽出であるといえるかどうかを検定する。

ここでは帰無仮説を「 $n_j$  個のサンプルは無作為に抽出された」とする。この仮説に基づき、「失敗数が  $n_{Fj}$  以上となる確率」を算出する。この確率が現実には起こりえないほど小さくなれば、 $n_j$  個が無作為に抽出されたとは考えにくく、帰無仮説を棄却する。このとき実際に得られた  $n_{Fj}$  個は、「偶然には起こりえないほど大きい」と

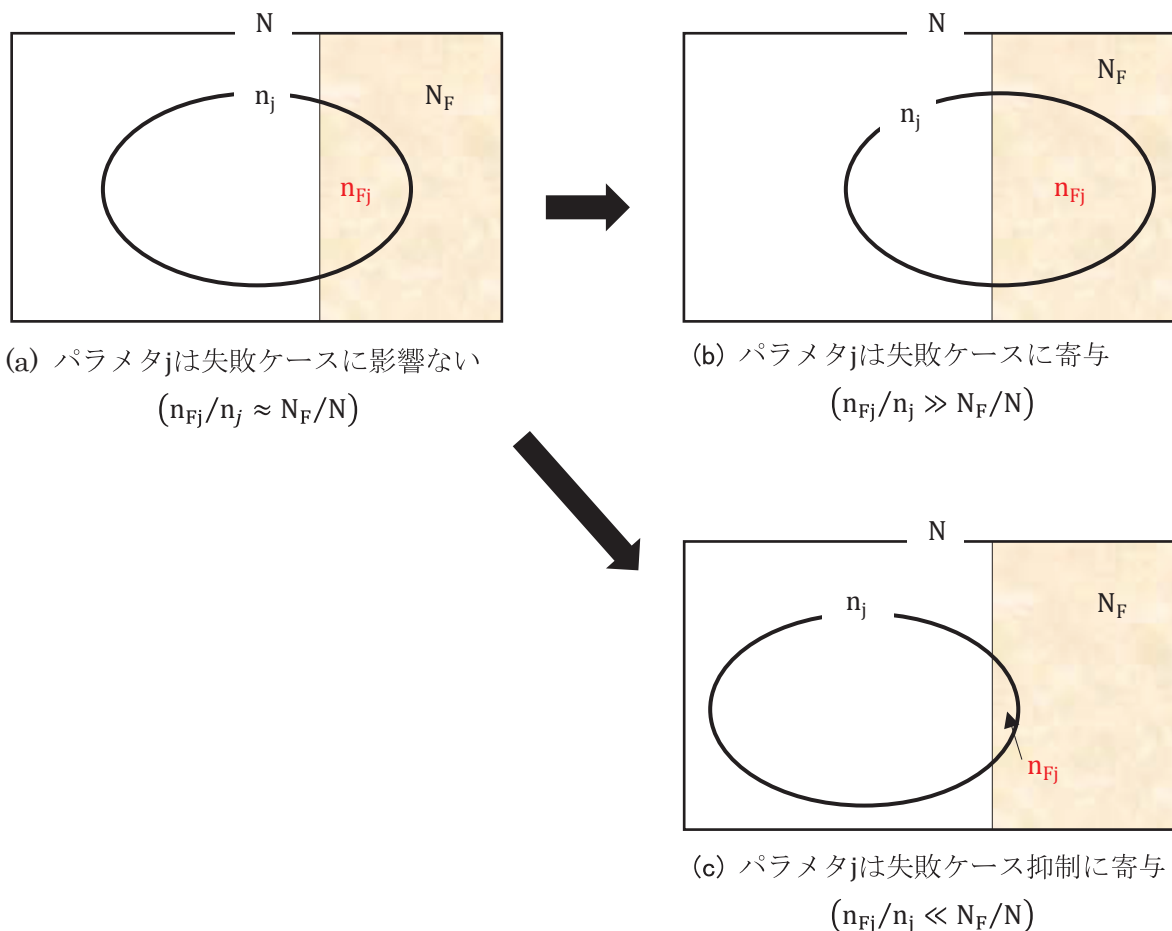


図 3.8  $n_{Fj}$  の変化と失敗ケースへの影響

いえ、要素  $j$  を失敗ケースに及ぼす影響が大きいパラメタとして検出する。

いま、 $N_F$  個の失敗ケースを含む  $N$  個の全体集合があるとす。その中から  $n_j$  個を無作為に取り出したときに、そこに含まれる失敗ケース数が  $x$  個である確率  $p_j(x)$  は、次式で表される。

$$p_j(x) = \left\{ \frac{N_F C_x \cdot (N - N_F) C_{(n_j - x)}}{N C_{n_j}} \right\} \quad (3.6)$$

これは超幾何分布<sup>16)-18)</sup> と呼ばれる分布である。

次に失敗ケースが  $n_{Fj}$  個以上となる累積確率を考える。このとき  $x$  の最大値は、 $N_F$  と  $n_j$  の大きさによって異なり、次式で表される。

$$x_{max} = \min\{N_F, n_j\} \quad (3.7)$$

上側累積確率  $P_j$  は、

$$P_j = \sum_{x=n_{Fj}}^{x_{max}} p_j(x) = \sum_{x=n_{Fj}}^{x_{max}} \frac{N_F C_x \cdot (N - N_F) C_{(n_j - x)}}{N C_{n_j}} \quad (3.8)$$

式 (3.8) で表される超幾何分布の累積確率は、統計ツールを含む既製のソフトウェアを用いれば容易に得られる。例えば、Microsoft 社の Excel, フリーの統計解析ソフト”R”, MathWorks 社の技術計算言語 MATLAB の “Statistics and Machine Learning Toolbox” などが利用できるが、これらの使用法は付録 A に示した。

仮説検定では  $P_j$  が偶然に発生したとは考えられないほど小さいときに、帰無仮説を棄却し、要素  $j$  を影響が大きなパラメタと判定する。ここで問題となるのは、判定基準となる棄却域の設定である。一般的には有意水準  $\alpha=0.05$  (5%) とされることが多いが、ここでは同じ検定を要素の数だけ、つまり  $M$  回繰り返すことになる。このため  $\alpha=1/M$  程度の確率は、 $M$  回の検定をするうち 1 回は偶然に発生しても不自然ではない。例えば不確定パラメタが 100 個存在すれば、100 回の検定を実行することになり、この中で偶然に  $P_j$  が  $1/100$  の確率となることは十分起こりうる。よって判定の目安として、これよりも一桁小さい値として次式を用いることとする。

$$\alpha = 1 / (10 \cdot M) \quad (3.9)$$

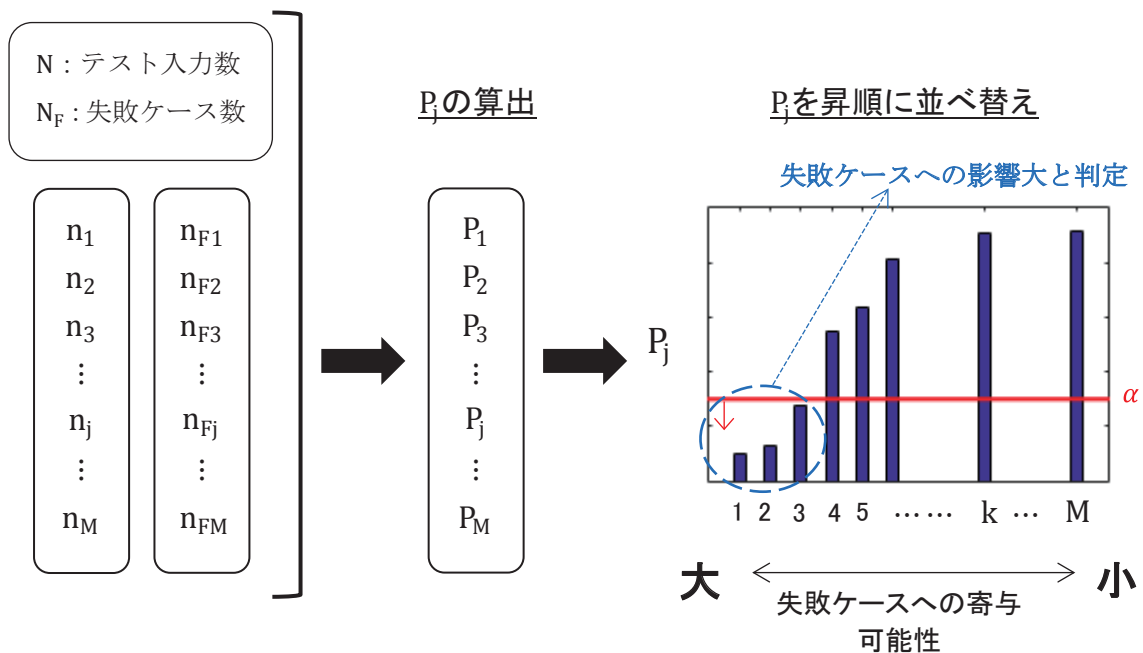


図 3.9 パラメタ検出の計算手順



実際の計算手順は、まず全ての要素  $j, (1, \dots, M)$  についてそれぞれ  $P_j$  を算出する。次に得られた  $M$  個の  $P_j$  を小さい順（昇順）に並べる。これは失敗ケースに影響する可能性が大きい順番である。このとき式 (3.9) の確率よりも小さい  $P_j$  に対応するパラメタは、失敗ケースに影響しているものと判定する。 $P_j$  の値が小さければ小さいほど、失敗ケースに影響する可能性が高いことを示す。以上の計算手順をまとめたものが、図 3.9 である。

また、最も小さい  $P_j$  でも  $\alpha$  よりも大きい場合には、意図する主要パラメタが検出できていない可能性がある。この原因としては、

- サンプル数  $N$  が少なく、精度の高い検定ができていない。
- 失敗ケース数  $N_F$  が少なく、失敗ケースの情報が十分に得られていないため検定精度が低い。

などが考えられる。この場合には先に述べたように、テスト入力の数  $N$  を増やしたり、 $R$  を大きくしたりする必要がある。以上が失敗ケースに寄与する不確定パラメタの検出方法である。

検出されたパラメタの影響の大きさは、当該パラメタを除いた MC 評価により確認できる。 $P_j$  値が小さいほど失敗ケースへの影響は大きい傾向があり、そのようなパラメタを除いた（ノ

ミナルに戻した）MC 評価では失敗ケース数が大きく減少することが期待できる。

### 3.1.4 失敗ケース抑制パラメタ

一方で、失敗ケースを抑制するパラメタが存在する可能性もある。このとき、図 3.8(c) に示すように  $n_{Fj}$  の値はかなり小さくなるはずである。この場合、 $n_j$  個を無作為に抽出したと考えると、その中に含まれる失敗ケースが  $n_{Fj}$  以下となる下側累積確率を求める。失敗ケースが  $x$  個となる確率は式 (3.6) で与えられるが、 $x$  の最小値は必ずしも 0 とは限らず、次式で表される。

$$x_{min} = \max\{0, n_j - (N - N_F)\} \quad (3.10)$$

これは、取り出す数  $n_j$  が全体の成功数  $(N - N_F)$  よりも大きい場合には必ず、 $x > 0$  となるためである。よって、下側累積確率  $Q_j$  は次式で与えられる。

$$Q_j = \sum_{x=x_{min}}^{n_{Fj}} p_j(x) = \sum_{x=x_{min}}^{n_{Fj}} \frac{N_F C_x \cdot (N - N_F) C_{(n_j - x)}}{N C_{n_j}} \quad (3.11)$$

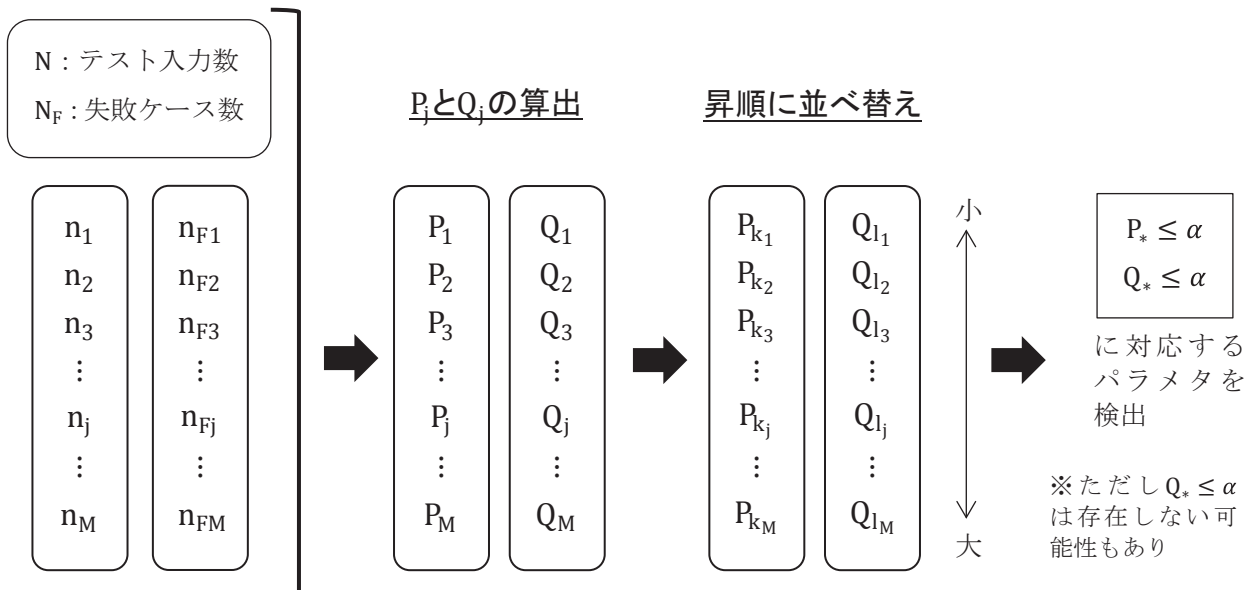


図 3.10  $P_j$  および  $Q_j$  の処理を含めた計算手順

$Q_j$ についても昇順に並べる。 $Q_j$ が小さい程、失敗ケースの抑制効果が大きい可能性が高いことを示す。こちらを目安として $Q_j \leq \alpha$ のとき、対象となるパラメタ  $j$  を失敗ケース抑制効果があるものと判定する。

ただし種々の不確定パラメタはオフノミナル状態を表すものであり、失敗ケース抑制効果を持つパラメタが必ずしも存在するとは限らない。 $Q_j$ の値が十分に小さいとき、つまり $n_{Fj}$ が極端に小さく無作為に抽出したとは考えられないようなパラメタが出現したときのみ、抑制効果があると考えべきである。 $Q_j$ の処理を図3.9に示す処理手順に加えたものが図3.10である。

### 3.2 数値例

本手法の理解の一助とするため、架空のMC試行ではあるが簡単な数値例を示す。ここでは図3.11に示す、不確定パラメタが{A, B, C, D, E}の5つのシステムを考える。各パラメタの入力値をそれぞれ{a, b, c, d, e}としたとき、システムを評価した結果、失敗ケースが出現したとする。このとき「失敗ケースに及ぼす影響が大きいのはA~Eのどのパラメタであるか検出せよ」という問題となる。

最初の手順は入力ベクトル [a, b, c, d, e] を用いて、テスト入力を生成することである。各要素

を $R=1/2$ の確率で採用して10個のテスト入力を生成した結果、図3.12に示すテスト入力生成されたとする。よって $N=10$ である。 $a\sim e$ の各要素は10個のテスト入力のなかに、それぞれ3~6個含まれていることが確認できる。この数が $n$ である。

次にこれらのテスト入力をMC評価したところ、図3.12の下段に示す結果が得られたとする。5回の失敗ケースが現れており、対応するテスト入力ベクトルを灰色の背景で示す。よって、MC試行の失敗数 $N_F=5$ である。この失敗ケースの中に含まれている $a\sim e$ の各要素の個数が $n_F$ であり、図3.12の右側に $n$ と共に示した。

以上より、検定に必要となる4種類の数値、 $N, N_F, n, n_F$ が確定したので、累積確率 $P_j$ および $Q_j$ が各パラメタについて、それぞれ計算できる。パラメタAについては、 $n=3, n_F=1$ であるので、式(3.8)より、

$$P_j = \sum_{x=1}^3 \frac{{}_5C_x \cdot {}_5C_{(3-x)}}{{}_{10}C_3} = 0.917 \quad (3.12)$$

また式(3.11)より、

$$Q_j = \sum_{x=0}^1 \frac{{}_5C_x \cdot {}_5C_{(3-x)}}{{}_{10}C_3} = 0.500 \quad (3.13)$$

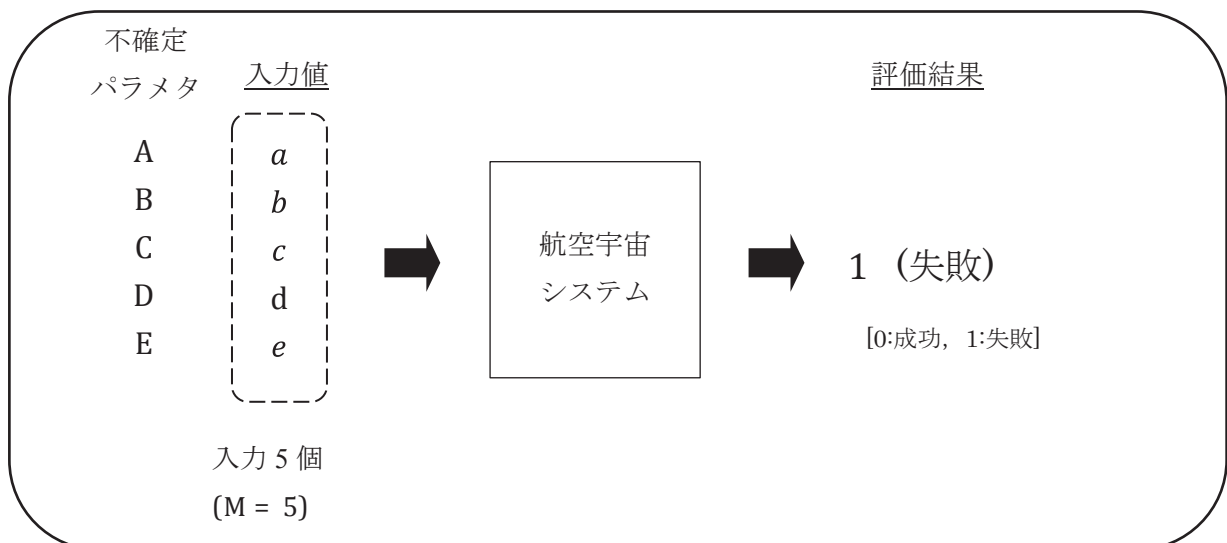


図3.11 5入力システムの例

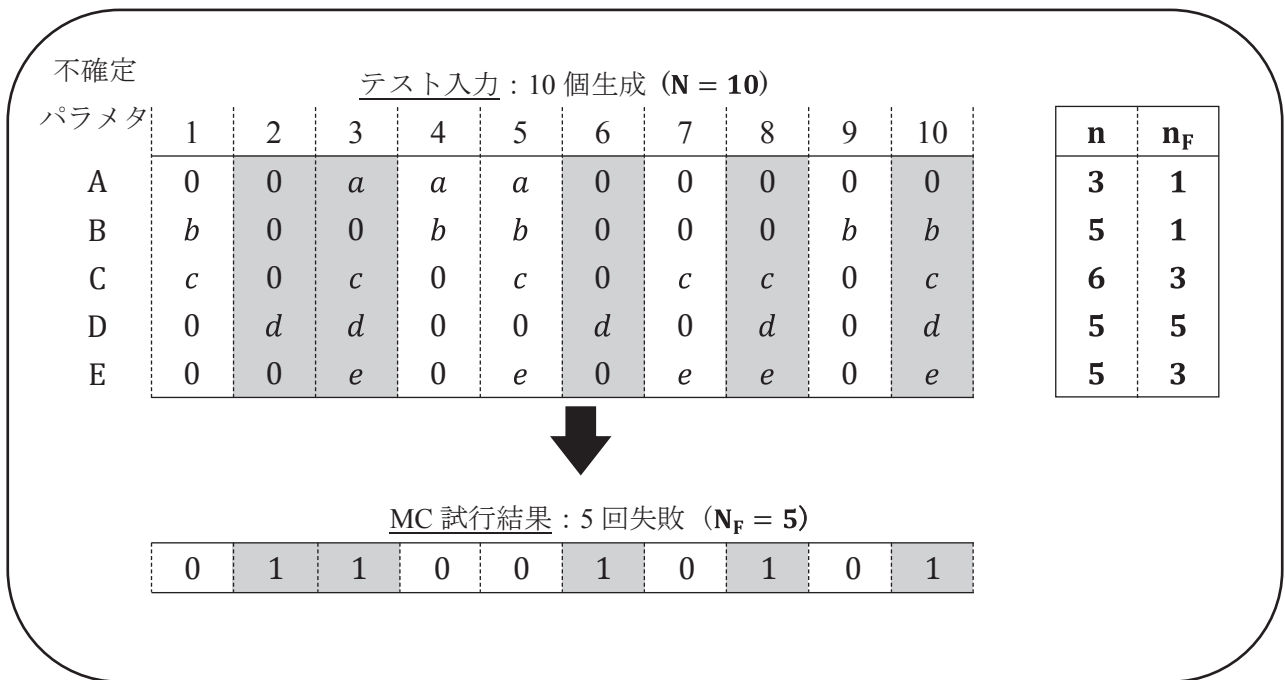


図 3.12 テスト入力と MC 試行結果

パラメタ B~E についても同様に  $P_j, Q_j$  を算出した結果を表 3.1 に示す.  $P_j$  および  $Q_j$  について, それぞれ昇順に並べ直した結果を図 3.13 に示す. 偶然には起こりえないと考えられるほど値が小さなパラメタを, “失敗ケースに影響している”, または “失敗を抑制する” パラメタと判定する. 判定の目安としては式(3.9)を利用し, 有意水準は次式となる.

$$\alpha = 1 / (10 \cdot 5) = 0.02 \quad (3.14)$$

図 3.13 に  $\alpha$  を赤線で示すが,  $\alpha$  よりも小さな  $P_j$  値をもつパラメタ D が, 失敗ケースに大きな影響を及ぼすと判定される. 一方で  $Q_j$  値は  $\alpha$  よりも小さなパラメタはなく, “失敗ケース” を抑

制するパラメタは検出されない結果となった.

以上が検出例であるが, ここで実際の解析において留意すべき点を以下に列挙する.

1.  $P_j, Q_j$  の算出

この例では式 (3.12)(3.13) に示すように直接算出可能であった. しかし実際にテスト

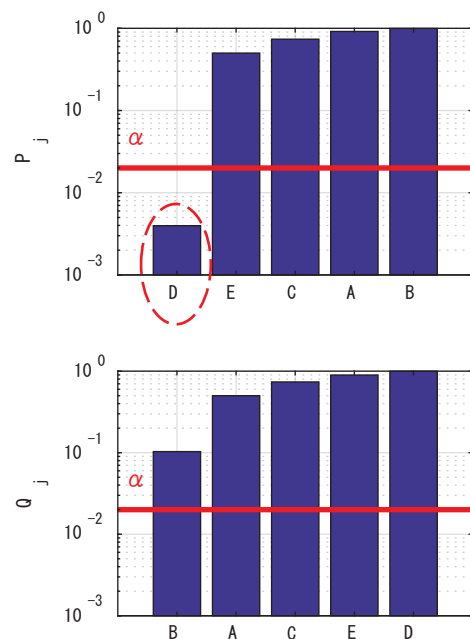


図 3.13 累積確率の判定

表 3.1 各パラメタの累積確率

パラメタ	$P_j$	$Q_j$
A	0.917	0.500
B	0.996	0.103
C	0.738	0.738
D	0.004	1.000
E	0.500	0.897



入力を 10 個しか生成しないケースは殆どなく、通常  $N$  は数百～数千のオーダーとなる。このとき二項係数  ${}_N C_x$  は巨大な数となってオーバーフローし、直接計算できない。このため統計ソフトなどの利用が必要となる。

## 2. 影響パラメタの判定

統計的検定で判定しているため、有意水準として設定した  $\alpha$  よりも小さいものであれば、“どのパラメタも同様に失敗ケースに影響している”というわけではない。より重要なのは  $P_j$  (または  $Q_j$ ) の値であり、これが小さければ小さいほど、失敗ケースに大きく影響していると考えるのが妥当である。 $\alpha$  は目安であり、絶対的な判定ラインではない。逆に  $\alpha$  よりも少し大きな  $P_j$  値をもつパラメタについても、失敗ケースに影響している可能性は排除されない。

## 3. テスト入力の生成

不確定パラメタベクトルの各要素を  $R$  の確率でランダムに採用した結果、図 3.12 に示すように  $n$  は  $N \times R = 5$  付近の値を取るものの、パラメタ毎に異なる値となっている。ここで  $n$  を固定した状態でテスト入力を生成してもよいが、必ずしもその必要はない。超幾何分布として確率を算出するため、 $n$  の違いも考慮された累積確率が算出されるためである。

### 3.3 複数の失敗ケース

MC 評価において失敗ケースは、複数個現れることが多い。図 3.4 のテスト入力生成法の説明では、1 つの不確定パラメタ・ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  からテスト入力を生成している。このようにしてテスト入力を生成した場合、複数の失敗ケースが存在すると、これまでに述べたパラメタ検出法を失敗ケースの回数分だけ繰り返すことになる。

たしかにある特定の失敗ケースに対する要因を確実に知りたいときには、1 つの  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  を利用して図 3.4 のようにテスト入力を生成するのが合理的である。ところが失敗ケースが多数得られ

たときには、個々の失敗ケースに対する失敗要因を全て知るよりも、それら多数の失敗ケースに対して最も頻繁に影響するパラメタを知りたいことも多い。このときに個別の失敗ケースを対象として、先に述べたパラメタ検出手順を多数回繰り返すことは、時間を要し作業効率が極めて悪い。

この場合は対象とする失敗ケースをまとめて、テスト入力生成に利用するのが効率的である。この処理方法を示したものが、図 3.14 である。いま失敗ケースを引き起こす不確定パラメタベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^*$  が  $L$  個あるとき、図 3.14 に示すように、この  $L$  個を順番に入れ替えながらテスト入力を生成する。このようにして  $N$  個のテスト入力を生成すれば、解析対象とする  $L$  個の  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^*$  がそれぞれほぼ同数、テスト入力に利用されることになる。

それぞれの  $L$  個の失敗ケースの要因となるパラメタの組は、ある特定の一組だけではない可能性がある。よって、このようにテスト入力を生成すれば、 $L$  個全体として最も多くの失敗ケースを発生させる要因であるパラメタを含む  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^*$  が、最も多くテスト入力の生成に利用されることになる。このため、 $L$  個全体として最も多く失敗ケースに影響しているパラメタが検出されやすくなる。

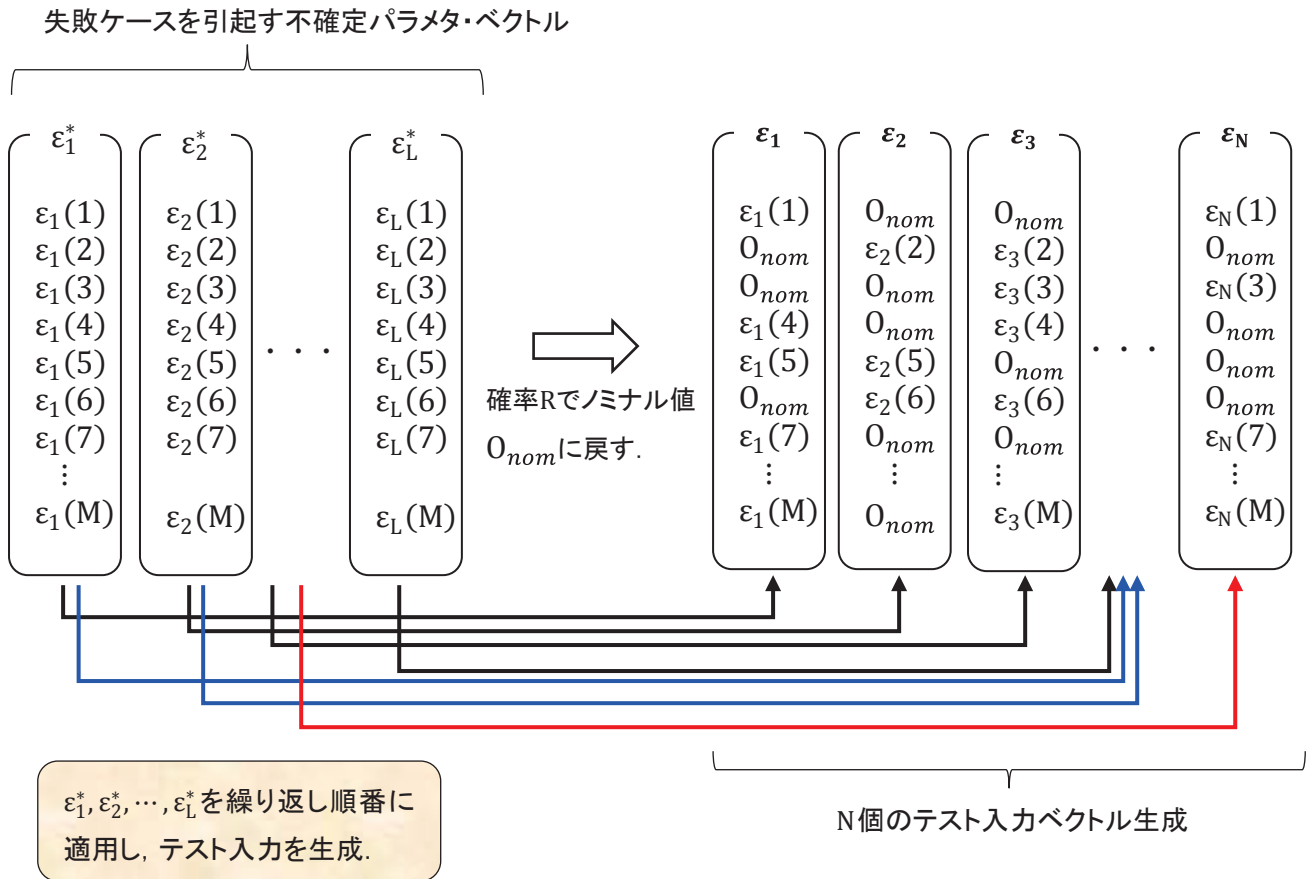


図 3.14 多数の失敗ケースをまとめたテスト入力生成

### 3.4 検出能力

本パラメタ検出法では、設定条件やMC 試行結果によって検出能力は異なる。具体的にはテスト入力による試行回数  $N$ 、テスト入力生成時の各要素のサンプリング確率  $R$ 、およびMC 試行の結果得られる失敗割合  $N_F/N$  である。統計を利用していることから試行回数  $N$  については大きいほど検出能力が高いといえるが、 $R$  および  $N_F/N$  の影響も含めて考察する。

システムへの影響があると判定されるためには、 $P_j$  は帰無仮説を棄却できる程度に小さくなければならない。まず始めにこの判定基準を確認する。判定の目安を式 (3.9) の  $\alpha$  とすれば、これはパラメタ数  $M$  に依存し、表 3.2 に示す値となる。

#### 3.4.1 試行回数 $N$ の影響

まず  $N$  の影響を確認する。 $R=0.5$ ,  $N_F/N=0.2$  と固定した場合に、 $N$  の違いによる  $P_j$  の変化を図 3.15 に示す。このとき  $n_j=R \cdot N=0.5N$  で

ある。横軸は  $n_j$  個のサンプル中に含まれる失敗数  $x$  をその最大値である  $N_F (=x_{max})$  で除し、失敗ケースを含む割合  $x/N_F$  とした。 $x/N_F=R(=0.5)$  のとき母集団とサンプルの失敗割合が等しいことを意味し、このとき当該パラメタは失敗ケースに殆ど影響していないといえる。この値を横軸の左端としている。 $x/N_F$  が大きくなるほど  $P_j$  は小さくなり、グラフは右下がりとなる。またサンプル数  $N$  が大きくなるほど、 $x/N_F$  に対して  $P_j$  は急激に減少することがわかる。つまり当該パラメタが失敗ケースに影響しているとすれば、 $N$  が大きくなる

表 3.2 有意水準  $\alpha$

パラメタ数 $M$	有意水準 $\alpha$
5	$2.0 \times 10^{-2}$
10	$1.0 \times 10^{-2}$
50	$2.0 \times 10^{-3}$
100	$1.0 \times 10^{-3}$
500	$5.0 \times 10^{-4}$
1000	$1.0 \times 10^{-4}$

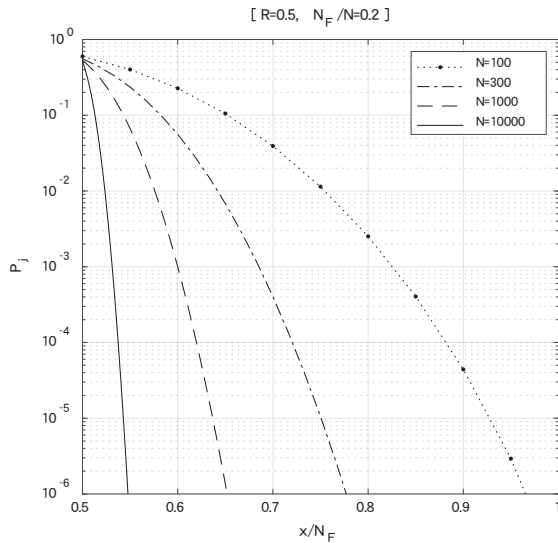


図 3.15 試行回数  $N$  と  $P_j$  の変化

ほど判定ライン  $\alpha$  を下回り、検出されやすくなることを表す。

いま不確定パラメタ入力がある場合には、表 3.2 より  $P_j \leq 1.0 \times 10^{-4}$  となれば影響があるとして検出されることになる。このとき図 3.15 より、 $N=10000$  では  $x/N_F > 0.55$  程度で判定条件を満たすが、 $N=100$  では  $x/N_F > 0.88$  程度にならなければ影響パラメタと判定されることがわかる。一方で  $N$  を大きくすれば、その分だけ MC 試行の回数が必要となり、多くの計算時間を必要とする。よって作業効率との兼ね合いを勘案しながら、可能な範囲で大きな  $N$  を選定することが望ましい。

### 3.4.2 R および $N_F/N$ の影響

$R$  はサンプル数の母集団に対する割合を表し、通常は 0.5 である。しかし MC 試行で失敗数  $N_F$  が極端に少ない場合には、パラメタ検出が困難となるが、 $R$  を大きくすれば  $N_F$  を増やすことができる。よって次に、 $R$  や  $N_F/N$  が変化した場合の影響を考える。

$R$  と  $N_F/N$  を変化した場合の、 $P_j$  の変動を図 3.16 に示す。 $R$  は上段から下段にかけて 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 と変化させた結果であり、 $N_F/N$  については左列から右列にかけて 0.1, 0.2, 0.5 と変化させた結果を表す。最上段の第 2 列のグラフは、図 3.15 と同じものである。

### [R の影響]

$R$  の影響について考えるため、第 2 列の 4 つのグラフを比較する。 $R$  を 0.5 から大きくしていくと、判定ラインを満たす  $x/N_F$  の値が大きくなっていくことがわかる。例えば  $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$  であるとき、 $N=10000$  を表す実線に着目すると、 $R=0.5$  のときは  $x/N_F$  は 0.55 以上程度で判定基準を満たすが、 $R=0.8$  では  $x/N_F$  は 0.8 を少し超えたところでようやく判定基準を満たす。この理由は以下のように説明できる。

母集団の失敗割合  $N_F/N$  とサンプルの失敗割合  $x/n$  が同程度だとすると、特にサンプル中の失敗数が多いということにはならないので、当該パラメタの影響は大きくないという判断になる。このとき、

$$\frac{N_F}{N} \approx \frac{x}{n}$$

変形すると、

$$(R =) \frac{n}{N} \approx \frac{x}{N_F} \quad (3.15)$$

つまり  $x/N_F = R$  のとき、サンプルに含まれる失敗数の割合は母集団と同程度であり、当該パラメタの影響が大きくなっても、この程度の  $x/N_F$  の値は普通に発生する。当然のことながら  $x/N_F$  は  $R$  よりも大きくなければ、影響パラメタとして検出されない。このため、 $R$  を大きくすればそれに伴って検出するために必要となる  $x/N_F$  の値も大きくなる。

また  $R$  を大きくしていくと、特に  $N$  が十分でないとき、サンプル中の失敗数が最大 ( $x/N_F=1$ ) となっても  $P_j$  は十分に小さくならず影響パラメタを検出できなくなる可能性があることがわかる。例えば母集団  $N=100$  ときに  $R=0.8$  とした場合には (最下段、第 2 列のグラフ)、 $P_j$  の最小値は  $10^{-2}$  をやや下回る程度までしか低下しない。 $N_F/N$  一定、 $N$  一定であれば、 $R$  の増加と共に  $P_j$  の  $x/N_F$  に対する減少率はやや大きくなっていくものの、一方で  $P_j$  の最小値は大きくなってしまふ。このため、特に  $N$  があまり大きくないときには検定が可能か、留意しておく必要がある。

ただし実際には  $R$  を大きくすれば、 $N_F/N$  も大きくなる。このため  $R$  を大きくすると、必ずしも検定が不利になるというわけではない。上記は  $N_F/N$  を固定した状態で、 $R$  変化の影響を調査したものである。

[ $N_F/N$  の影響]

次に  $N_F/N$  が  $P_j$  に及ぼす影響について考える。

こちらでも図 3.15 の状態を基点として、 $P_j$  に及ぼす影響を確認するため、図 3.16 の最上段の 3 つのグラフに着目する。 $N_F/N$  が 0.5 に近づくほど、 $P_j$  の  $x/N_F$  に対する減少率も大きくなっていくことがわかる。

ここで問題となるのは  $N_F/N$  が小さい場合、つまり MC 試行の結果、失敗ケース数  $N_F$  が十分に得られない場合である。このとき同じ

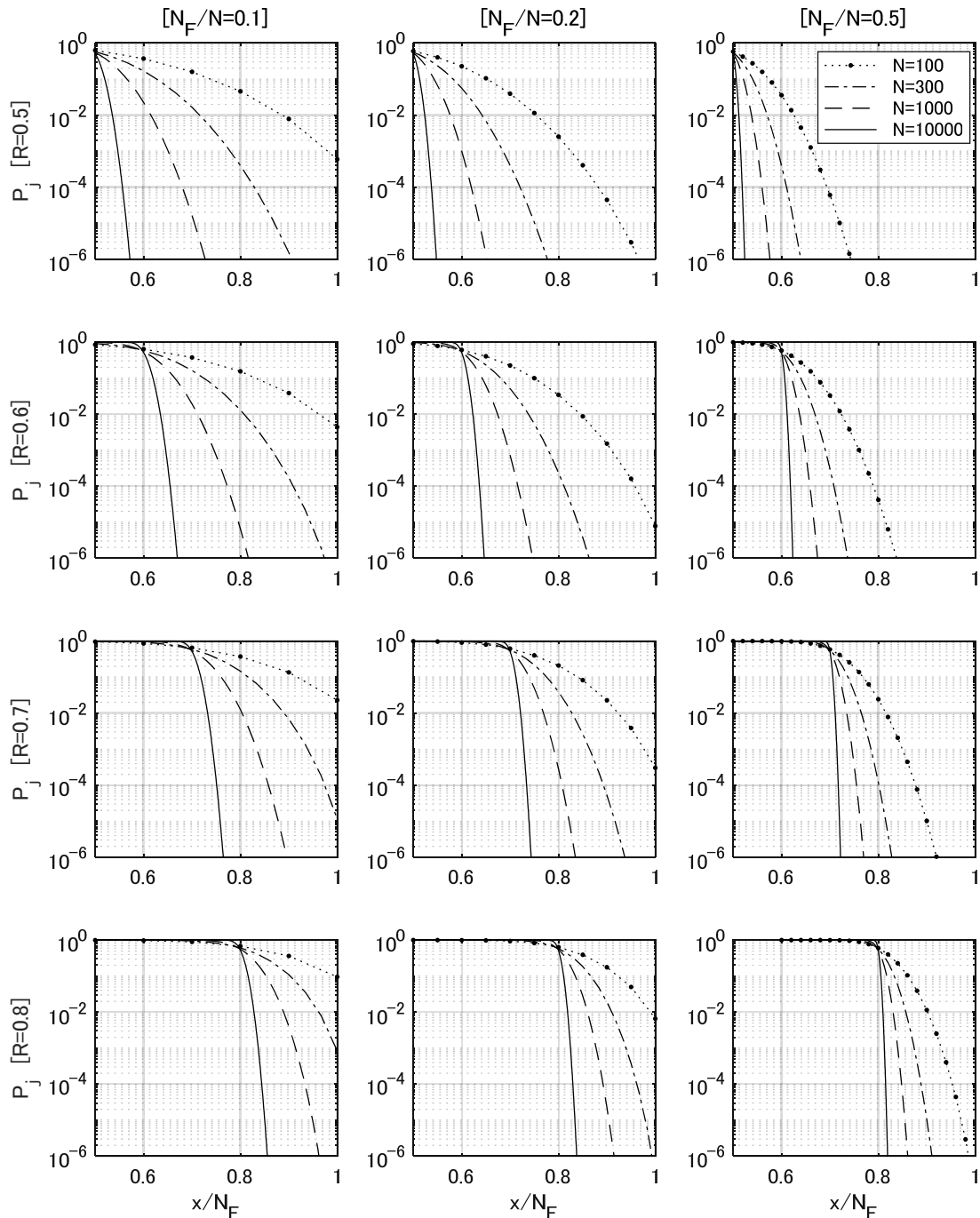


図 3.16  $R$  および  $N_F/N$  が、 $P_j$  に及ぼす影響

$\alpha/N_F$  に対して  $P_j$  の値は大きくなり、より大きな  $\alpha/N_F$  の値をとらなければ影響パラメタと判定されなくなる。例えば図 3.16 の最上段、第 1 列の  $N_F/N=0.1$  のケースでは、 $N=100$  の場合に  $P_j$  は最小でも  $10^{-3}$  程度までしか小さくならず、有意水準  $\alpha$  がこれよりも小さいときには目的とするパラメタは検出できなくなる。

#### [R の調整による効果]

以上より  $N_F/N$  が小さかったり、 $R$  を 0.5 より大きめに設定したりしたときに、母集団  $N$  の数が不十分な場合には影響パラメタが検出不能となる可能性があることがわかった。次に人為的に調整可能な  $R$  を変化させた場合の効果について考察する。

図 3.16 の最上段、第 1 列の  $R=0.5$ 、 $N_F/N=0.1$  のケースを例として確認する。 $N=100$  のグラフは  $P_j$  が最小でも  $10^{-3}$  程度までしか小さくならないことを示しており、検出能力が不十分となる可能性が高い。

このとき  $R$  を大きくして 0.6 とすれば、 $N_F/N$  の値は少し大きくなるのが期待できる。仮に  $N_F/N=0.2$  となったとすれば上から 2 段目、第 2 列のグラフとなり、 $P_j$  を  $10^{-5}$  以下まで低下させることができる。この場合、 $R=0.6$  とすることで検出能力をある程度確保できたことになる。ところが  $R=0.7$  まで増加させて  $N_F/N=0.2$  が実現したとすると、グラフは 3 段目、第 2 列となり、 $P_j$  の最小値はそれほど低下しない。

以上のように  $N_F/N$  が小さいときに、 $R$  を増加させれば検出能力が向上する可能性はある。ただし  $R$  を増やしても  $N_F/N$  の値があまり変化しなければ、その効果は小さい。可能な範囲で  $N$  を増加させると共に、 $R$  も多少増加させてみることが効果的である場合が多い。

#### [まとめ]

以上、図 3.16 には  $R=0.5\sim 0.8$ 、 $N_F/N=0.1\sim 0.5$  の範囲で変動させた結果を示すが、この範囲で考える限りでは  $N=1000$  としておけば、いずれのケースでも  $P_j$  最小値は  $10^{-6}$  以下となっており、大抵の場合検出能力としては実用上問題ないと考えられる。 $N_F/N$  がある程度大きい場合には、より小さな  $N$  を選定することも可能である。一方で  $N_F$  が極端に小さく  $N_F/N \ll 0.1$  となりパラメタが検出できない場合には、 $N$  や  $R$  を増加させるなどの対応が必要となる。

#### 3.4.3 失敗抑制効果

最後に失敗抑制効果のあるパラメタ検出に使用する  $Q_j$  について考える。図 3.16 の  $P_j$  の変化に対応する、 $Q_j$  の変化の様子を図 3.17 に示す。 $Q_j$  はパラメタ  $j$  が失敗ケースを抑制する働きをするかどうかの指標であり、 $n$  個のサンプル中に失敗ケース  $\alpha$  が極端に少ないときに有意となる。このため横軸は  $\alpha/N=0.1\sim 0.8$  とした。有意性の判定の目安は  $P_j$  と同様で、 $Q_j$  が  $\alpha$  以下となるかどうかである。この結果を  $P_j$  の図 3.16 と対比して確認すると、 $P_j$  が判定可能となる条件のときには  $Q_j$  も十分に判定可能となっていることが確認できる。



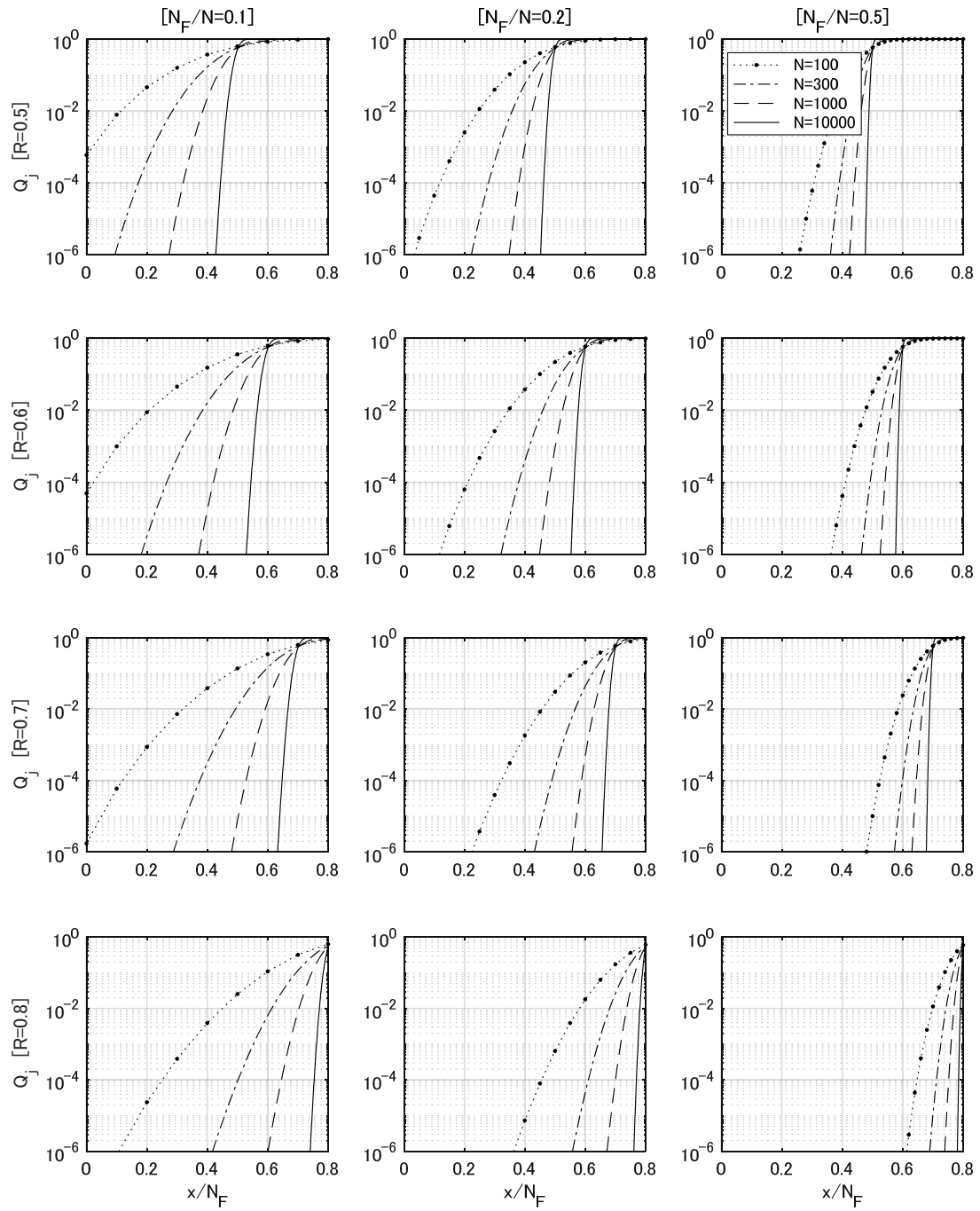


図 3.17 R および  $N_F/N$  が,  $Q_j$  に及ぼす影響

#### 4 正規分布近似による検出法

ここでは算出するのに統計ソフトが必要な式 (3.8) の  $P_j$  および式 (3.11) の  $Q_j$  の代わりに、正規分布近似を利用した以下の式 (4.1)(4.2) をそれぞれ用いることで、主要パラメタを検出する方法を示す<sup>19)</sup>。

$$z_{j\text{-min}} = \frac{\left(n_{Fj} - \frac{1}{2}\right) - \mu_{HGj}}{\sigma_{HGj}} \quad (4.1)$$

$$z_{j\text{-max}} = \frac{\left(n_{Fj} + \frac{1}{2}\right) - \mu_{HGj}}{\sigma_{HGj}} \quad (4.2)$$

ここで  $\mu_{HGj}$ ,  $\sigma_{HGj}^2$  は、それぞれ超幾何分布の平均、分散を表し、次式より算出される<sup>16),20)</sup>。

$$\mu_{HGj} = \frac{n_j \cdot N_F}{N} \quad (4.3)$$

$$\sigma_{HGj}^2 = \frac{n_j \cdot N_F \cdot (N - n_j) \cdot (N - N_F)}{N^2(N - 1)} \quad (4.4)$$

これらの導出は、付録 B に示す。

$z_{j\text{-min}}$ ,  $z_{j\text{-max}}$  がそれぞれ  $P_j$ ,  $Q_j$  に対応するパラメタである。式 (4.1) および式 (4.2) であれば、統計ソフトは必要なく、直接計算可能である。

近似計算が必要とされるのは、例えばユーザのプログラムが C や FORTRAN 等のプログラム言語で記述され、その中で繰返し  $P_j$ ,  $Q_j$  の計算を必要とする場合などである。不確定パラメタが M 個あるとき、それと同数回だけ  $P_j$  と  $Q_j$  の計算が必要となる。統計ライブラリなどが利用できなければ、M 回の確率計算の式を直接記述して実行する必要がある。このような場合に、容易に計算できる近似法があれば実用上の利便性は高い。

以下では、正規分布近似を利用した累積確率を考慮することで、主要パラメタを検出する方法を記す。次に簡単な数値例を示し、最後に近似誤差について考察する。

#### 4.1 正規分布近似法

正規分布近似によるパラメタ検出方法を記す。以下では、まず超幾何分布と正規分布の対応関係について述べ、正規分布近似法により式 (4.1) を導出する。次に、失敗ケース抑制パラメタを検出するための式 (4.2) を求め、最後にまとめる。

##### 4.1.1 超幾何分布と正規分布の対応

超幾何分布  $p_j(\boldsymbol{x})$  は離散分布であるので、上側累積確率  $P_j$  は、 $\boldsymbol{x} \geq n_{Fj}$  の範囲で  $p_j(\boldsymbol{x})$  の和として次式のように表された。

$$P_j = \sum_{x=n_{Fj}}^{x_{max}} p_j(x) \quad (4.5)$$

$p_j(\boldsymbol{x})$  は図 4.1 の青線で示される離散分布であり、青線の高さが確率を表す。よって式 (4.5) で表される上側累積確率は、 $\boldsymbol{x} \geq n_{Fj}$  における青線の高さの和として表される。

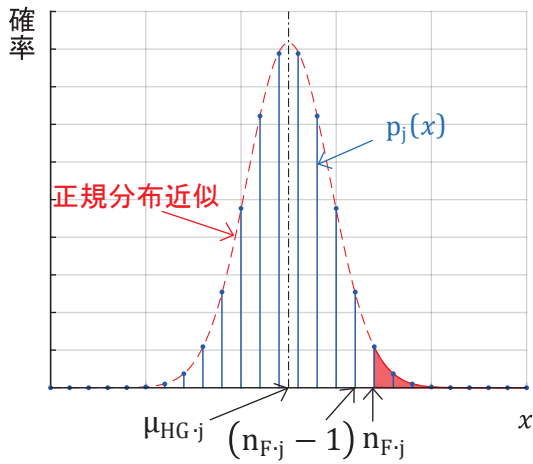
これに対して赤線が  $N(\mu_{HGj}, \sigma_{HGj}^2)$  の正規分布を表し、これは連続分布である。赤線は確率そのものではなく確率密度関数であるため、右裾の面積が式 (4.5) に対応する確率を表す。よって上側累積確率  $P_j$  に相当する量は、図 4.1(a) の赤色で塗りつぶした  $\boldsymbol{x} \geq n_{Fj}$  の領域の面積で表される。

ここでより詳細に、ある値  $\boldsymbol{x} = n$  における確率の対応を考える。超幾何分布における確率は  $p_j(n)$  であるが、この確率に対応する正規分布の面積を算出する際の  $\boldsymbol{x}$  の範囲は近似的に、

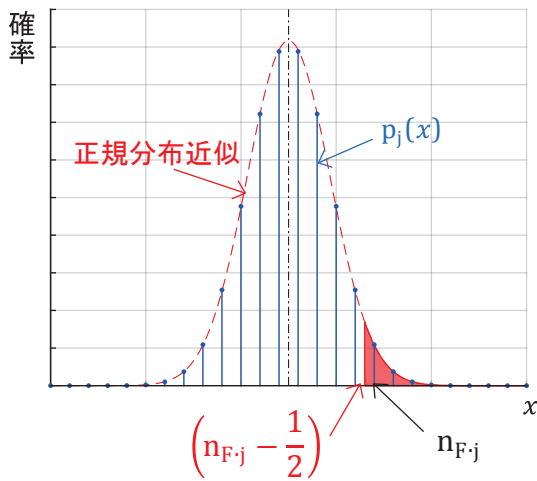
$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \leq x \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (4.6)$$

となる。従って式 (4.5) で表される  $\boldsymbol{x} \geq n_{Fj}$  の上側累積確率に対応する正規分布の面積は、図 4.1(b) に示す赤で塗りつぶした領域とするのが、より精度の良い近似となる。このとき面積、つまり累積確率を算出するための  $\boldsymbol{x}$  の範囲は次のように修正される。

$$x \geq \left(n_{Fj} - \frac{1}{2}\right) \quad (4.7)$$



(a)  $P_j = \sum_{x=n_{F,j}}^{x_{max}} p_j(x)$  に対応するエリア



(b) 連続分布を考慮した修正エリア

図 4.1 超幾何分布と正規分布の対応

よって正規分布近似による上側累積確率は、 $N(\mu_{HG,j}, \sigma_{HG,j}^2)$  の正規分布において、式 (4.7) に示す  $x$  の範囲における面積として求られる。

4.1.2 正規分布近似による導出

標準正規分布を利用するため、次の変換により  $z_j(x)$  を求める。

$$z_j(x) = (x_j - \mu_{HG,j}) / \sigma_{HG,j} \tag{4.8}$$

この  $p_j(x)$  の確率密度関数は、近似的に  $N(0, 1)$  の標準正規分布に従う。このとき上側累積確率を求めるための積分範囲は、式 (4.7) を考慮し、

$$\frac{(n_{F,j} - \frac{1}{2}) - \mu_{HG,j}}{\sigma_{HG,j}} \leq z_j < \infty \tag{4.9}$$

標準正規分布  $N(0, 1)$  の確率密度関数を  $\phi(z)$  とすれば、正規分布近似による上側累積確率  $P_{N,j}$  は、次式により求められる。

$$P_{N,j} = \int_{z_{j,min}}^{\infty} \phi(z) \cdot dz \tag{4.10}$$

ここで式 (4.9) と式 (4.3)(4.4) より、

$$\begin{aligned} z_{j,min} &= \frac{(n_{F,j} - \frac{1}{2}) - \mu_{HG,j}}{\sigma_{HG,j}} \\ &= \frac{(n_{F,j} - \frac{1}{2}) - n_j \cdot N_F / N}{\sqrt{\{n_j \cdot N_F \cdot (N - n_j) \cdot (N - N_F)\} / \{N^2(N - 1)\}}} \end{aligned} \tag{4.11}$$

となり、式 (4.1) が得られる。  $z_{j,min}$  と  $P_{N,j}$  の関係を図 4.2 に示す。  $z_{j,min}$  は  $P_{N,j}$  と 1 対 1 に対応するので、  $P_{N,j}$  を小さい順に並べるとき、  $z_{j,min}$  は大きい順となる。よって  $P_{N,j}$  を直接算出しなくても、その順序は決定できる。つまり失敗ケースに影響を及ぼす可能性が高い順番は、  $z_{j,min}$  を求めることにより、直ちに判明する。

一方、影響が大きいと判定するための目安は上側累積確率の値  $\alpha$  (有意水準) として与え

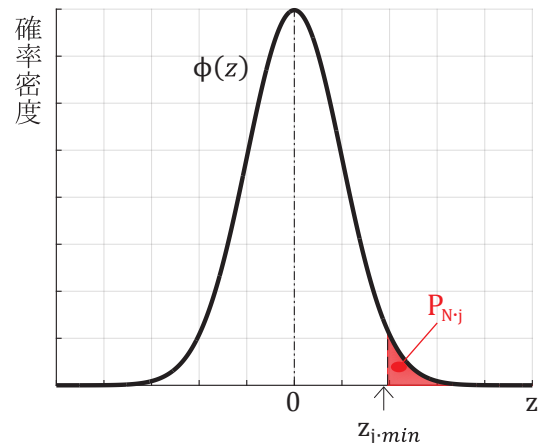


図 4.2 上側累積確率  $P_{N,j}$  と  $z_{j,min}$



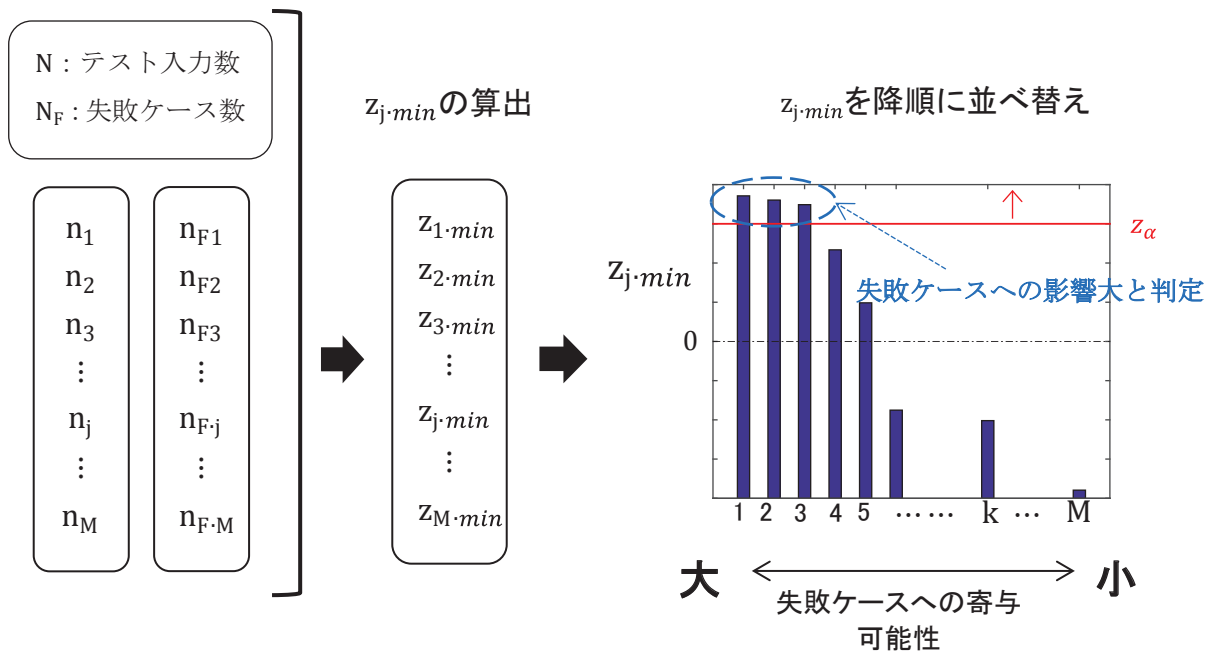


図 4.3 正規分布近似によるパラメタ検出手順

られる。標準正規分布において、この  $\alpha$  に対応する  $z$  の値  $z_\alpha$  を事前に統計表等により 1 度だけ求めておけば、直接  $P_{N_j}$  を算出することなく、 $z_{j \cdot \min}$  が  $z_\alpha$  以上であるかどうかで影響を及ぼすパラメタの判定ができる。

正規分布近似によるパラメタ検出手順をまとめると、図 4.3 のようになる。まずテスト入力を用いた MC 評価結果より、各  $M$  個のパラメタについてそれぞれ式 (4.11) から  $z_{j \cdot \min}$  を求める。次に得られた  $M$  個の  $z_{j \cdot \min}$  を大きい順に並べる。そこで  $z_\alpha$  以上となるパラメタを、失敗ケースへの影響が大きいものと判定する。

以上のように、正規分布近似を用いれば計算は式 (4.11) だけで済み、 $M$  個の入力パラメタ毎に累積確率  $P_{N_j}$  まで算出する必要はない。 $\alpha$  は上側累積確率として与えられるが、これに対応する  $z_\alpha$  の値は、統計表を利用しても良いし、また既存の各種ソフトウェアを用いることも出来る。代表的な統計ソフトウェアを用いた  $z_\alpha$  の算出方法を付録 A に記した。

#### 4.1.3 失敗ケース抑制パラメタ

失敗ケースを抑制する効果のあるパラメタが存在する場合に、その検出は超幾何分布による下側累積確率  $Q_j$  を利用した。

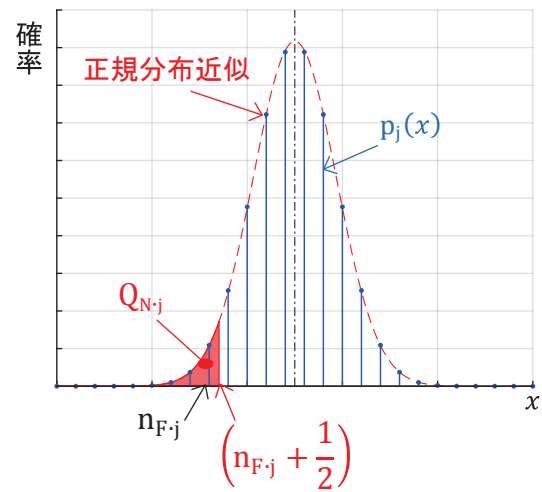


図 4.4 正規分布の対応エリア

$$Q_j = \sum_{x=x_{\min}}^{n_{F_j}} p_j(x) \quad (4.12)$$

これに対応する、正規分布近似における値  $Q_{N_j}$  の導出について考える。 $Q_j$  に対応する正規分布における確率は、図 4.4 の赤で塗りつぶしたエリアに相当する。つまり  $x = (n_{F_j} + 1/2)$  までの左裾の面積が近似値  $Q_{N_j}$  である。よって式 (4.8) で表される標準化した正規分布における積分範囲は、

$$-\infty \leq z_j \leq \frac{\left(n_{Fj} + \frac{1}{2}\right) - \mu_{HGj}}{\sigma_{HGj}} \quad (4.13)$$

となり、 $\phi(z)$  を用いると、

$$Q_{Nj} = \int_{-\infty}^{z_{j,max}} \phi(z) \cdot dz \quad (4.14)$$

ここで、

$$z_{j,max} = \frac{\left(n_{Fj} + \frac{1}{2}\right) - \mu_{HGj}}{\sigma_{HGj}} = \frac{\left(n_{Fj} + \frac{1}{2}\right) - n_j \cdot N_F / N}{\sqrt{\{n_j \cdot N_F \cdot (N - n_j) \cdot (N - N_F)\} / \{N^2(N - 1)\}}} \quad (4.15)$$

となり、式 (4.2) の  $z_{j,max}$  が得られる。  $z_{j,max}$  は積分範囲の上限であるが、この値が小さいほど  $Q_{Nj}$  も小さくなる。よって  $z_{j,max}$  については、小さい順に並べれば  $Q_{Nj}$  も小さい順となる。ここで  $Q_{Nj}$  が有意水準  $\alpha$  以下となり、失敗を抑制するパラメタとして検出されるとき、対応する  $z_{j,max}$  は負の値となる。よって  $z_{j,max}$  を小さい順に並べるとき先

頭は負の値となっており、絶対値は大きい順となることには注意が必要である。

$P_{Nj}$  の場合と同様に、 $z_{j,max}$  を算出すれば  $Q_{Nj}$  の大きさの順序は判明する。また判定の目安となる  $\alpha$  に対応する  $z$  の値は、正規分布が左右対称であることを考えれば、 $-z_\alpha$  となる。以上より、失敗抑制に効果のあるパラメタの検出手順は、まず全ての  $M$  個のパラメタについて式 (4.15) より  $z_{j,max}$  を算出する。次に  $z_{j,max}$  を小さい順に並べ、

$$z_{j,max} \leq -z_\alpha \quad (4.16)$$

となるパラメタ  $j$  を、抑制効果のあるものとして検出すればよい。

#### 4.1.4 近似法のまとめ

失敗ケースに影響を及ぼすパラメタと失敗ケース抑制に効果があるパラメタの双方を併せて検出する手順をまとめたものが図 4.5 である。検出手順は以下となる。

1. テスト入力を用いた MC 結果を得る。
2. MC 結果から式 (4.1)(4.2) を用い、それぞれ  $z_{j,min}$ ,  $z_{j,max}$  を算出する。

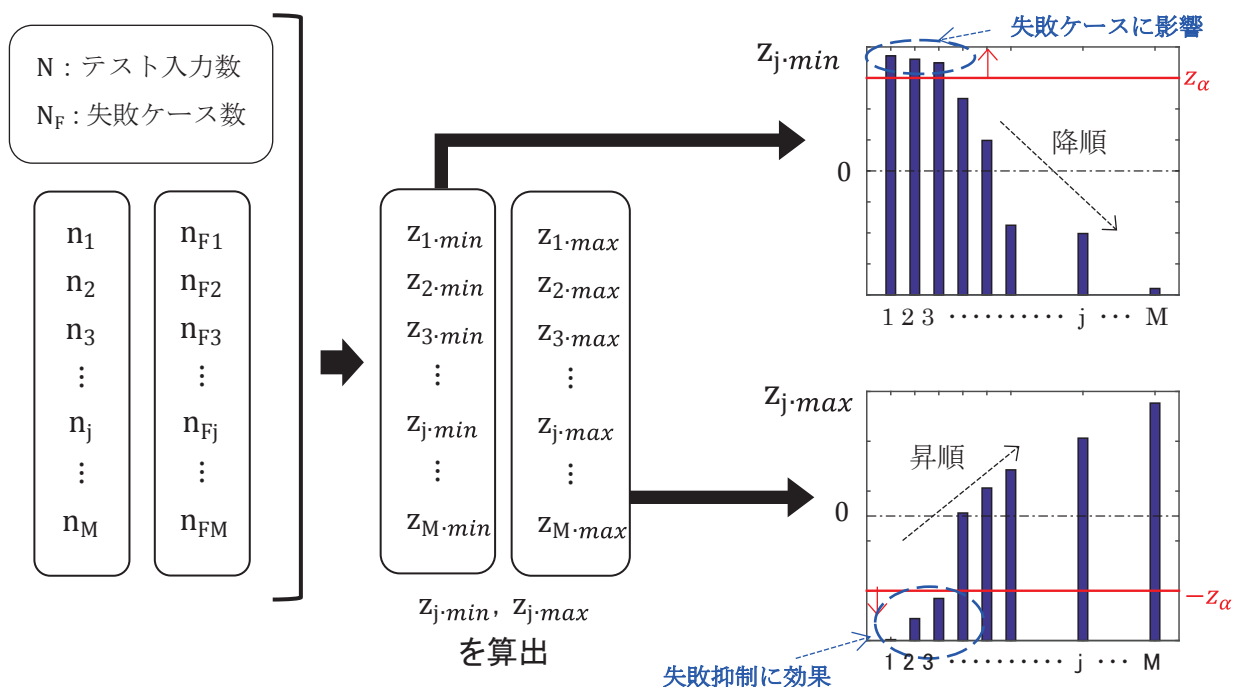


図 4.5 パラメタ検出手順

3.  $z_{j\cdot min}$  を大きい順,  $z_{j\cdot max}$  を小さい順に並べる.
4. 有意水準  $\alpha$  に対応する, 標準正規分布における確率変数  $z_\alpha$  を求める.
5.  $z_{j\cdot max} \geq z_\alpha$  となるパラメタを失敗ケースに影響するもの,  $z_{j\cdot min} \leq -z_\alpha$  となるパラメタを失敗抑制に効果があるもの, として検出する.

$$z_{A\cdot min} = \{(1 - 1/2) - 1.5\} / \sqrt{0.583} = -1.309 \quad (4.19)$$

$$z_{A\cdot max} = \{(1 + 1/2) - 1.5\} / \sqrt{0.583} = 0.0 \quad (4.20)$$

#### 4.2 数値例

第3章と同様に数値例を示し, 理解の一助とする. 引き続き3.2節の例を用いて, 正規分布近似によるパラメタ検出の数値例を示す. テスト入力を生成してMC試行を実行するところまでは同じ手順である. 図3.12に示されるMC試行結果の要約を図4.6に示す.

不確定 パラメタ		
	<b>n</b>	<b>n<sub>F</sub></b>
A	<b>3</b>	<b>1</b>
B	<b>5</b>	<b>1</b>
C	<b>6</b>	<b>3</b>
D	<b>5</b>	<b>5</b>
E	<b>5</b>	<b>3</b>
[全体]		
MC 試行数 : <b>N = 10</b>		
失敗数 : <b>N<sub>F</sub> = 5</b>		

図 4.6 MC 試行結果 ( 図 3.12 ) の要約

このときパラメタ A について, 母集団の平均  $\mu_{HG-A}$  と分散  $\sigma_{HG-A}^2$  は, 式 (4.3)(4.4) から次のように得られる.

$$\mu_{HG-A} = (3 \cdot 5) / 10 = 1.5 \quad (4.17)$$

$$\sigma_{HG-A}^2 = \frac{3 \cdot 5 \cdot (10 - 3) \cdot (10 - 5)}{10^2(10 - 1)} = 0.583 \quad (4.18)$$

次にパラメタ A について, 式 (4.1)(4.2) より  $z_{A\cdot min}$ ,  $z_{A\cdot max}$  を求めると,

以上の手順により, 全てのパラメタについて値を算出した結果を表 4.1 に示す.

表 4.1 正規分布近似による計算結果

	$\mu_{HG-j}$	$\sigma_{HG-j}^2$	$z_{j\cdot min}$	$z_{j\cdot max}$
A	1.50	0.583	-1.31	0.00
B	2.50	0.694	-2.40	-1.20
C	3.00	0.667	-0.612	0.612
D	2.50	0.694	2.40	3.60
E	2.50	0.694	0.00	1.20

一方判定の目安となる有意水準は, 式 (3.14) より  $\alpha = 0.02$  である. これに対応する  $z_\alpha$  は, 統計表またはソフトウェアを用いて求められ,

$$z_\alpha = 2.054 \quad (4.21)$$

となる. この  $z_\alpha$  の値は, 事前に 1 度だけ求めておけばよい値である. 以上より,  $z_{j\cdot min}$  を降順,  $z_{j\cdot max}$  を昇順に並べて影響パラメタを検出した結果を図 4.7 に示す.

この結果, 失敗ケースへの影響が大きなパラメタとして,  $z_{j\cdot min} > z_\alpha$  となるパラメタ D が検出されることがわかる. この検出結果は 3.2 節の数値例と一致しており, また  $z_{j\cdot min}$  の並び順も図 3.13 の  $P_j$  の結果と等しいことが確認できる.

一方で失敗抑制に効果のあるパラメタについては検出されておらず, また  $z_{j\cdot max}$  の並び順も含めて図 3.13 の  $Q_j$  と一致した結果となっている. 以上のことから正規分布近似を用いても, 3.2 節の正確な検定結果と同等の結果が得られていることが確認できる.

ただし近似である以上, 近似誤差は存在するため, その大きさについて次に考察する.

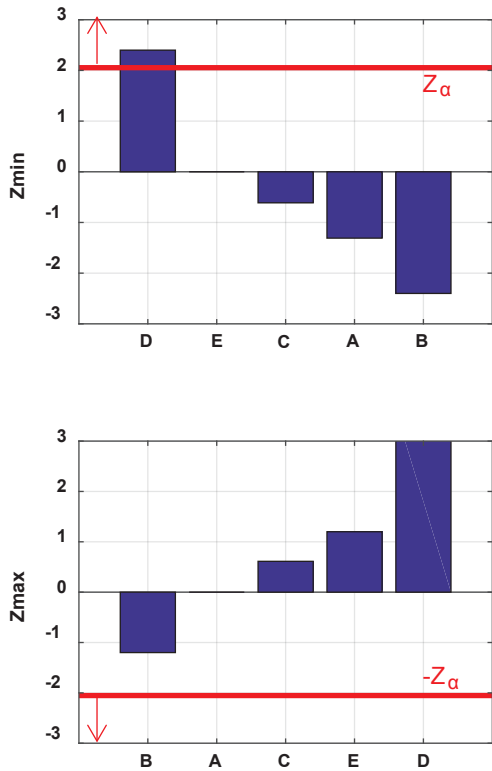


図 4.7 影響パラメタの検出

4.3 正規分布近似の精度

正確な検定と比較するために、 $z_{j,min}$  から正規分布近似の累積確率  $P_{N,j}$  に変換した量を算出して検討する。ここで誤差量  $\Delta P$  を、

$$\Delta P_j = P_{N,j} - P_j \tag{4.22}$$

とし、誤差の割合  $P_{ERR}$  (%) を、

$$P_{ERR,j} = (\Delta P_j / P_j) \times 100 = \{(P_{N,j} - P_j) / P_j\} \times 100 \tag{4.23}$$

と定義する。

以下、試行回数  $N$ 、サンプリング割合  $R$ 、失敗割合  $N_F/N$  が、近似誤差に及ぼす影響を順に考察する。

4.3.1 試行回数  $N$  の影響

いま  $R(=n_j/N)=0.5$ 、 $N_F/N=0.2$  とする。このときの近似誤差を横軸を  $z_{j,min}$  として表したのが図 4.8 である。図 (a) は近似値  $P_{N,j}$  と超幾何分布による正確な値 (以下、「真値」と呼ぶ)  $P_j$  を直接比較したものである。横軸を  $z_{j,min}$  としているため、 $P_{N,j}$  は標準正規分布の累積確率に基づき一意に決まる。これに対して真値  $P_j$  は、テスト入力数  $N$ 、つまり母集団の大きさに依存し、 $z_{j,min}$  に対して値が異なる。

この結果から  $P_{N,j}$  は  $P_j$  よりもやや大きくなり、 $N$  が大きくなるほど両者の差は小さくなることわかる。両者の差  $\Delta P_j$  を示したのが図 (b) である。 $z_{j,min} = 1 \sim 2$  において差が最も大きくなっている。ただしこの誤差量  $\Delta P_j$  の真値  $P_j$  に対する割合では、図 (c) に示すように  $z_{j,min}$  が大きくなると共に大きくなる。これは図 (a) に示されるように  $z_{j,min}$  が大きくなると共に、 $P_{N,j}$  および  $P_j$  は急激に小さくなるためである。

ここで重要なのは、近似がパラメタ検出に及ぼす影響である。検出の目安として設定した有意水準  $\alpha$  を図中に記入した例が図 4.9 である。 $P_{N,j}$  または  $P_j$  が  $\alpha$  以下であれば、対応するパラメタ  $j$  は失敗ケースに影響を及ぼすと判定される。 $\alpha$  以下となるためには、正規分布近似のほう  $z_{j,min}$  の値が大きくなる必要があることがわ

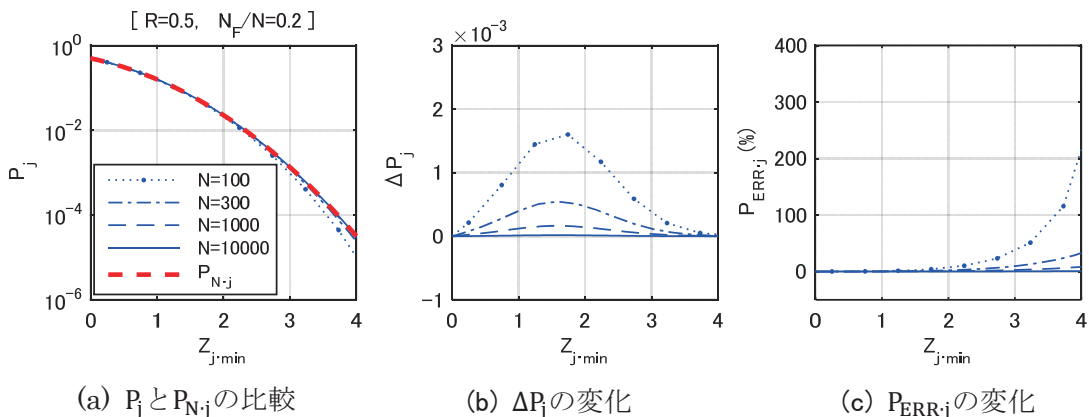


図 4.8  $P_j$  の近似誤差 ( $R=0.5, N_F/N=0.2$  の場合)

かる。つまり正規分布近似では、真値で求められる判定値  $z_{j,min}$  よりも少し大きくなると検出されないことになり、やや厳しめの判定となる。言い換えれば、正規分布近似で影響があると判定された場合、正確な検定でも影響があると判定される。

判定ラインとなる  $z_\alpha$  の範囲を知るため、 $\alpha$  と対応する  $z_\alpha$  の値を表 4.2 にいくつか示す。入力パラメタ数が 5 ~ 1000 までの範囲で、対応する  $z_\alpha$  値は 2 ~ 3.5 程度となる。このとき図 4.8(c) より、 $P_j$  に対する誤差の割合は、 $N=100$  のとき 100% 付近まで増加するが、 $N$  の増加と共に誤差  $\Delta P_j$  は小さくなる様子が見られる。

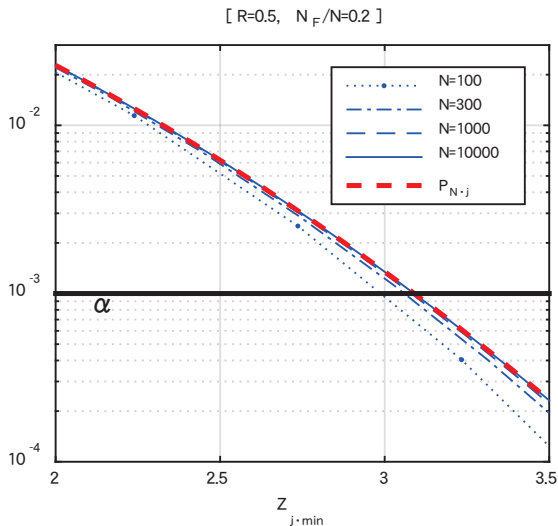


図 4.9 正規分布近似と有意水準  $\alpha$  の関係

表 4.2  $\alpha$  と標準正規分布の確率変数  $Z$

パラメタ数 M	有意水準 $\alpha$	$z_\alpha$
5	0.02	2.05
10	0.01	2.32
50	0.002	2.88
100	0.001	3.09
500	0.0005	3.29
1000	0.0001	3.54

### 4.3.2 R および $N_F/N$ の影響

次に R および  $N_F/N$  の変化によって、近似誤差がどのような影響を受けるか確認する。

#### [R の影響]

$N_F/N=0.2$  に固定し、 $R=0.5 \sim 0.8$  まで変化させたときの結果を図 4.10 に示す。R をある固定値としたとき、各行が図 4.8 に対応する結果を表す。左列は  $P_j$  を表すが、R が 0.5 から増加すると共に、近似値と真値の差は大きくなっていく様子が見られる。

ここで真値の  $N=100$  のケースでは、 $z_{j,min}$  の最大値が R の増加と共に小さくなっている。これは先に真値の検出能力について考察したように、R を大きくしていくと特に N が小さいケースでは  $P_j$  の最小値があまり小さくならず、主要パラメタを検出できなくなる可能性があることに対応している。 $P_j$  の最小値があまり小さくならないとき、 $z_{j,min}$  もあまり大きい値はとれない。このとき同様に、正規分布近似においても主要パラメタの検出は困難となる。

第 2 列の  $\Delta P_j$  の大きさを確認すると、 $R=0.5$  のときは正の値となり、 $P_{N-j}$  が  $P_j$  よりも大きくなっている。ところが R を大きくしていくと、 $z_{j,min}=1$  付近を境にそれ以下の領域で  $P_{N-j}$  のほうが小さくなる。ただしこの領域は影響パラメタの判定には殆ど無関係であるため、主要な部分では  $P_{N-j}$  が  $P_j$  よりも大きいと考えて差し支えない。

第 3 列の  $P_{ERR-j}$  の大きさを確認すると、R を増やしていくと、特に  $z_{j,min}$  が大きな領域で近似誤差が増大することがわかる。例えば  $R=0.8$  とすれば、 $N=1000$  であっても  $z_{j,min}=3.5$  付近では真値の 2 倍程度となることがわかる。つまり正規分布近似を用いる場合には、R を増やすほど近似誤差が増大し、かなり厳しめの判定になっていくことになる。

#### [ $N_F/N$ の影響]

最後に失敗割合  $N_F/N$  の影響を確認する。 $R=0.5$  に固定した状態で  $N_F/N$  を 0.05 ~ 0.5 まで変化させた場合の近似誤差の変化を図 4.11 に示す。この結果より、 $N_F/N=0.5$  のときが最も近似誤差が小さく、 $N_F/N$  が小さくなるにつれて誤差は大きくなっていくことがわかる。つまり相対的な失敗のサンプル数が少なくなるほど、近似誤差は拡大する。

また  $\Delta P_j$  の結果から、値はほぼ正規分布近似  $P_{N-j}$  のほうが大きいことがわかる。これは  $R$  を変化させた場合の図 4.10 の結果と同様であり、正規分布近似のほうが厳しめの判定となる。

誤差の相対的な大きさである  $P_{ERR-j}$  については、 $N_F/N$  が 0.05 まで低下すると  $N=300$  程度以

下のとき急激に悪化することがわかる。一方で母集団が  $N=1000$  以上であれば悪化の程度はかなり抑えられている。

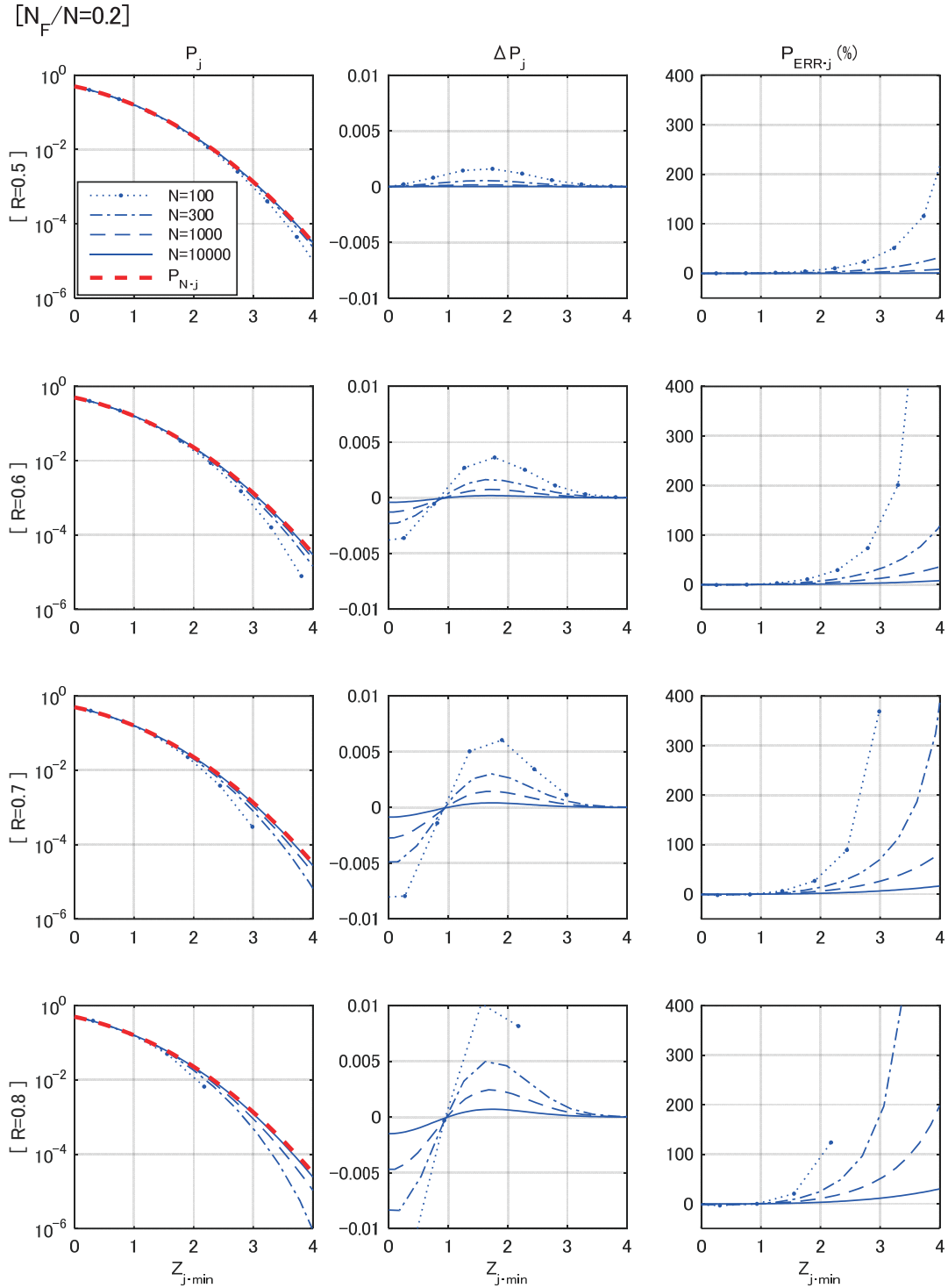


図 4.10 R を変化させた場合の  $P_{N-j}$  の近似誤差



[まとめ]

R および  $N_F/N$  の変化が近似誤差に及ぼす影響をまとめる. R は解析者が任意に設定できるパラメタであり,  $N_F/N$  が小さいときに検出能力の不足を補うため 0.5 から増加させることで, ある程度は検出力の改善が期待できる. その一方

で近似誤差は増大する. また R が大きく  $N_F/N$  が小さくなるときに, 近似誤差は悪化する. このため R を大きくしても  $N_F/N$  の改善があまり見られない場合には, N を増やすことを検討する必要がある.

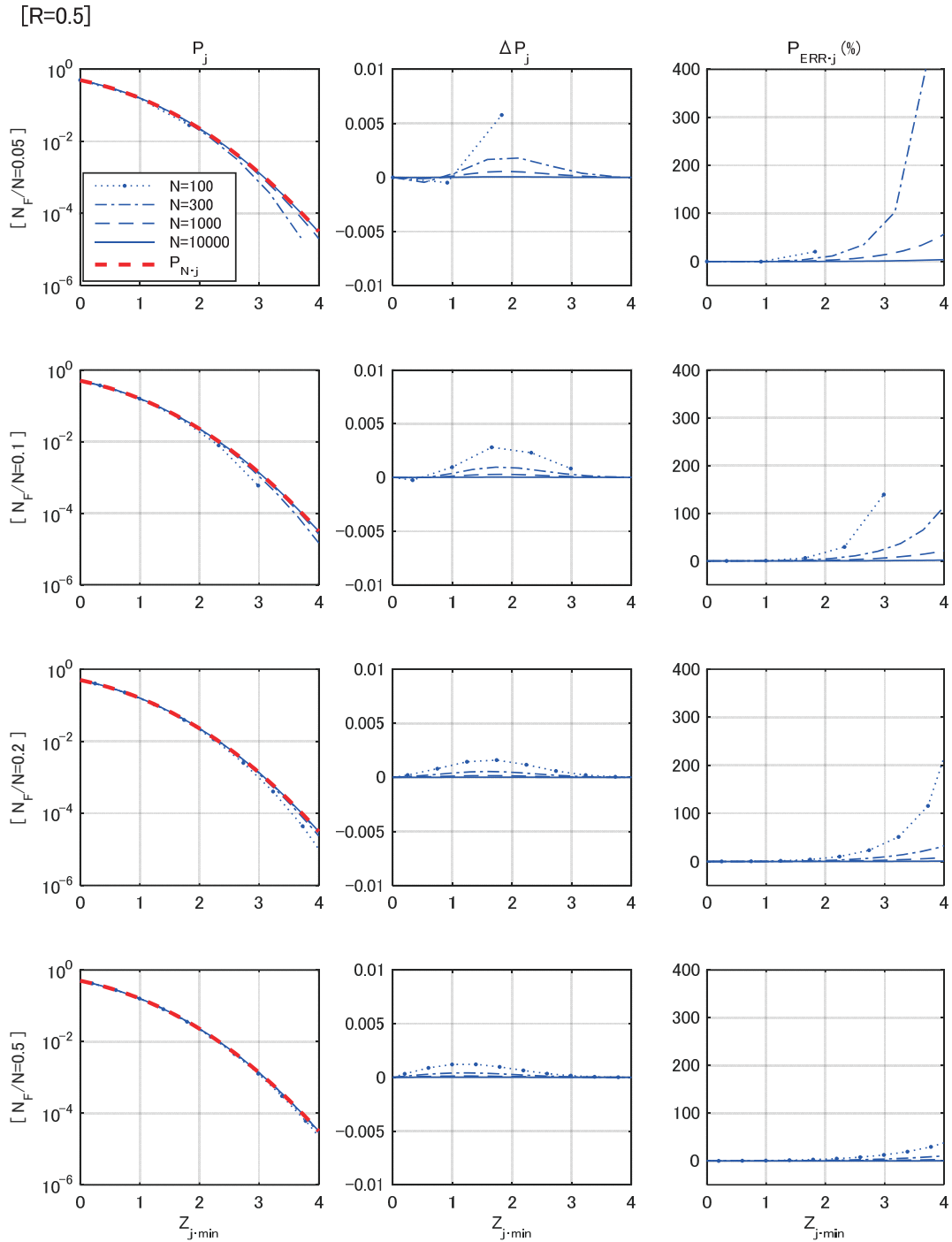


図 4.11 失敗割合 ( $N_F/N$ ) を変化させた場合の  $P_{N,j}$  の近似誤差

4.3.3 失敗抑制効果

最後に失敗抑制効果に関する、 $Q_{N-j}$ の近似誤差についても確認しておく。 $P_{N-j}$ における図4.10、図4.11に対応する図を、それぞれ図4.12、図4.13に示す。 $Q_{N-j}$ は分布の左裾の面積を表すため、横軸 $z_{j-max}$ の範囲を $-4 \sim 0$ としている。 $N$ が大きいかほど近似誤差が小さくなるのは、 $P_{N-j}$ と同様である。以下では、 $R$ および $N_F/N$ を変化させ

た場合の、近似誤差への影響を確認する。

[Rの影響]

図4.12の第1～4行に、 $N_F/N=0.2$ に固定した状態で $R=0.5 \sim 0.8$ に変化させた場合の近似誤差を示す。対応する $P_{N-j}$ の図4.10と比較すると、近似誤差は全体的にかなり小さく抑えられている。判定の目安となる $z_\alpha$ の値は $-2 \sim -3.5$ 程度である

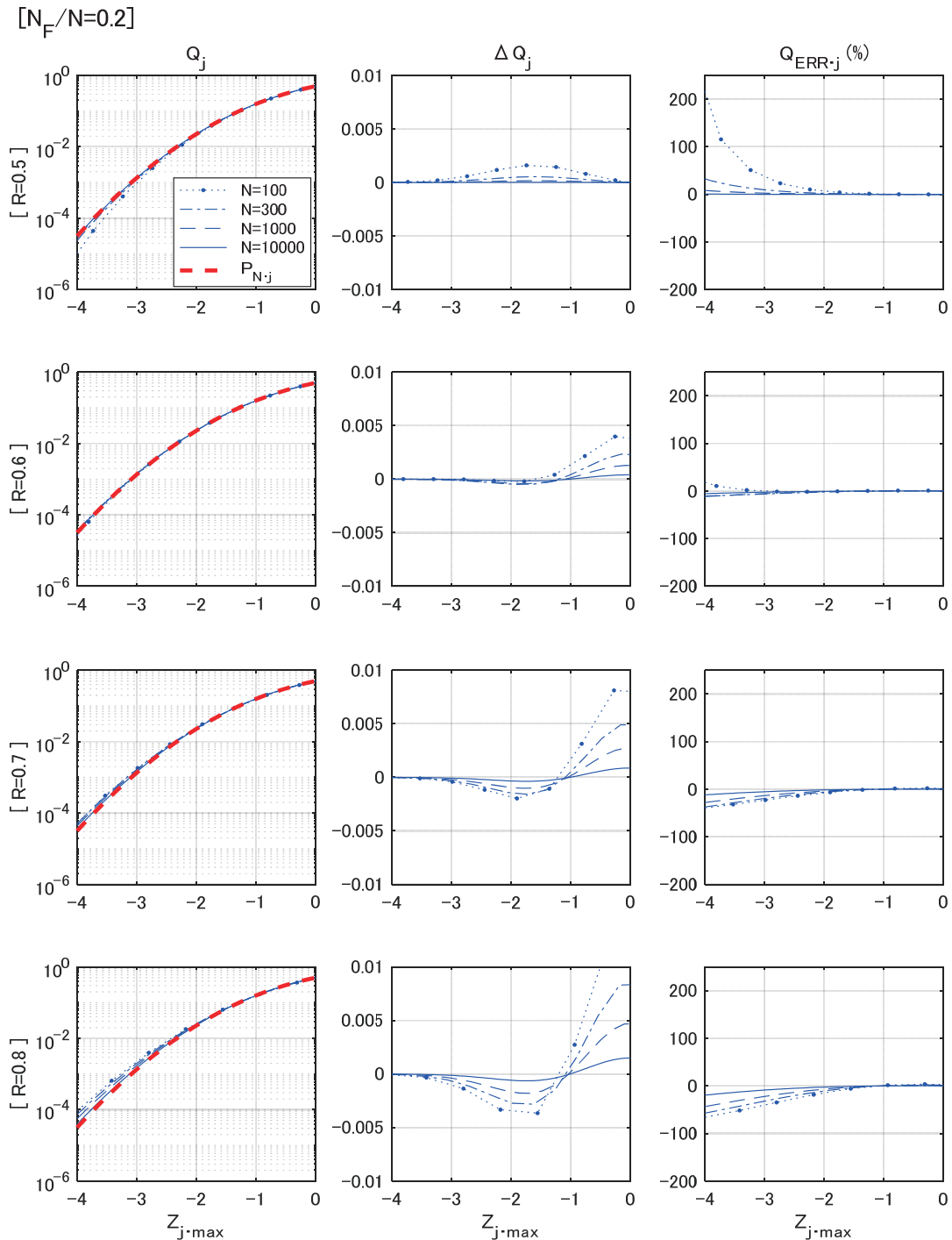


図 4.12 R を変化させた場合の、 $Q_{N-j}$ の近似誤差



が、この範囲において  $Q_{N,j}$  は、 $R=0.5$  では真値よりも大きくなっており、 $P_{N,j}$  と同様の傾向である。一方で、 $R=0.7, 0.8$  では逆に真値よりも小さくなっており、真値のほうが厳しい判定となることがわかる。ただしいずれのケースにおいても近似誤差は小さく、 $P_{N,j}$  による影響パラメタの検出に問題ないレベルであれば、 $Q_{N,j}$  による失敗ケース抑制パラメタの検出も問題ない程度といえる。

[ $N_F/N$  の影響]

$R=0.5$  に固定した状態で、 $N_F/N=0.05 \sim 0.5$  に変化させたときの近似誤差を図 4.13 に示す。対応する  $P_{N,j}$  の図 4.11 と比較すると、全体的には似た傾向である。ただし近似誤差は  $Q_{N,j}$  のほうがやや小さくなっていることが確認できる。

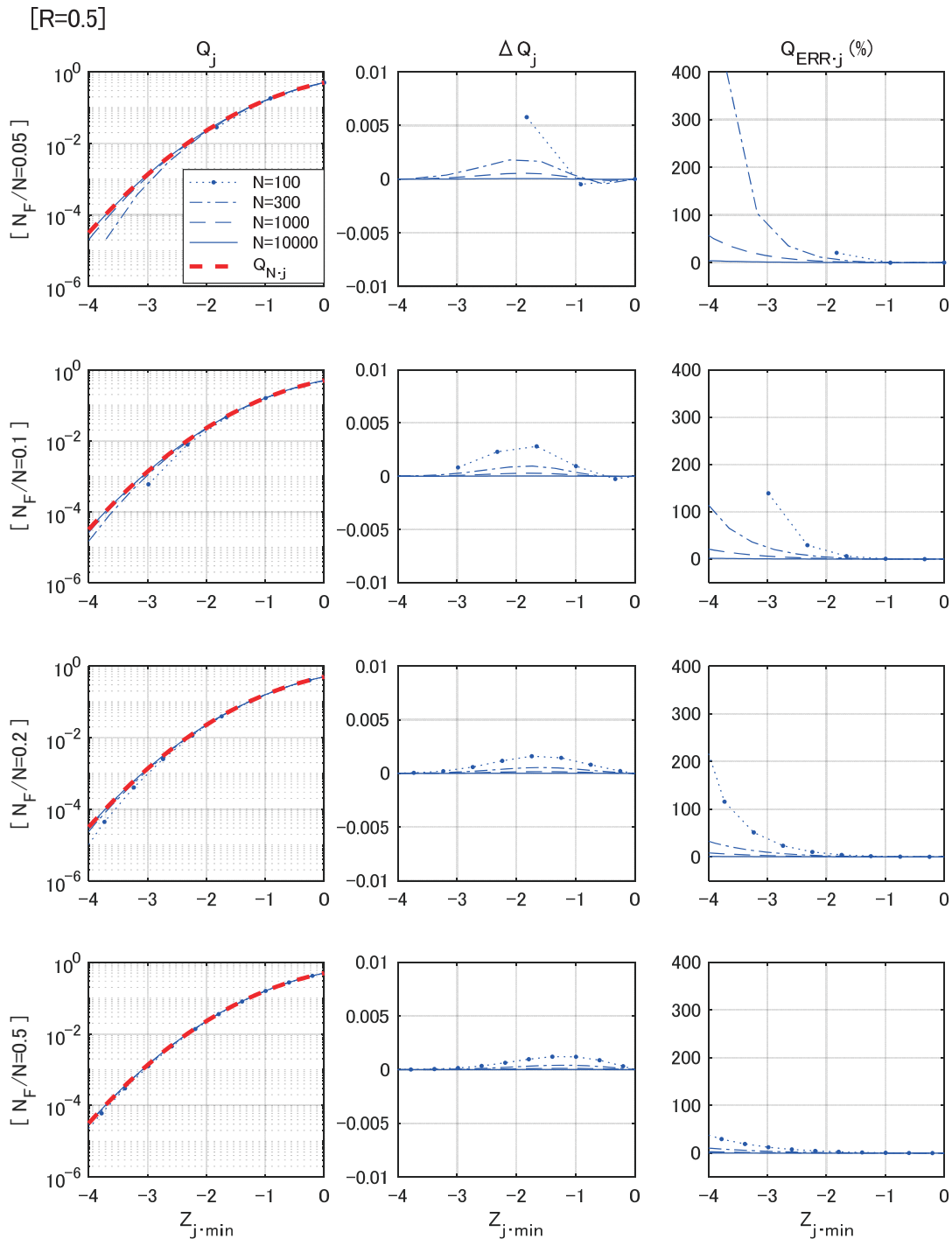


図 4.13 失敗割合 ( $N_F / N$ ) を変化した場合の、 $Q_{N,j}$  の近似誤差

## 5 適用例

実際の開発における MC 評価の例として小型自動着陸実験 (ALFLEX)<sup>21)-23)</sup> を取り上げ、本稿で述べた主要パラメタの検出法を適用する。ALFLEX は 1996 年にオーストラリア・ウーメラ飛行場にて実施された。これは将来の宇宙往還機のための自動着陸技術を確立することを目的とした実験であった。飛行前に MC 評価を実施し、設計の確認を行っている<sup>22)</sup>。以下では初めに ALFLEX の実験概要について述べ、次にこのシステムで設定した不確定パラメタと評価基準を示す。この条件で実施した MC 評価に対し、主要パラメタの検出法を適用する。評価基準を満たさなかったケースを対象として、その主因となる不確定パラメタを検出した例を示す。

### 5.1 小型自動着陸実験 (ALFLEX)

小型自動着陸実験の概要を図 5.1 に示す。まずヘリコプタにより懸吊装置を介して一本のワイヤで吊された状態で、実験機は飛行する。この状態を懸吊飛行と呼ぶ。次に、懸吊飛行状態で滑走路手前 2682m、高度 1500m において実験機は分離される。実験機の分離後、誘導制御ロジックに従って舵面が操舵され、滑走路に自

動着陸する。図 5.2(a) は懸吊装置から一本のワイヤで吊されて飛行する実験機、図 5.2(b) はフリーフライト中の実験機である。自動着陸実験は合計 13 回実施され、全て自動着陸に成功している。図 5.3 に ALFLEX 実験機の 3 面図と主要諸元を示す。飛行シミュレーションでは、実験機の分離から接地までの飛行を模擬し、飛行中の安定性と接地状態量を評価基準として設定した。

また飛行前の設計評価において考慮した不確定パラメタを表 5.1 に示す。これらの値は文献 3) に掲載されているものである。各パラメタの変動範囲を  $3\sigma$  相当値として示している。基本的には 0 を中心とした正規分布を仮定しており、表中の「 $3\sigma$  相当値」はその正規分布の  $3\sigma$  値を表す。一様分布を仮定したパラメタについては、分布の欄に「一様」と記した。一様分布の下限値と上限値は  $\pm 3\sigma$  相当値としたが、0 を中心として対称な範囲でないものについては [下限値, 上限値] のように記した。定常風の範囲は [0, 1] とあるが、「0」は無風、「1」は設定風速最大を表す。定常風の風速は、無風から設定最大風速までの間で一様分布とした。また連続突風については、常に設定範囲の最大であるとして

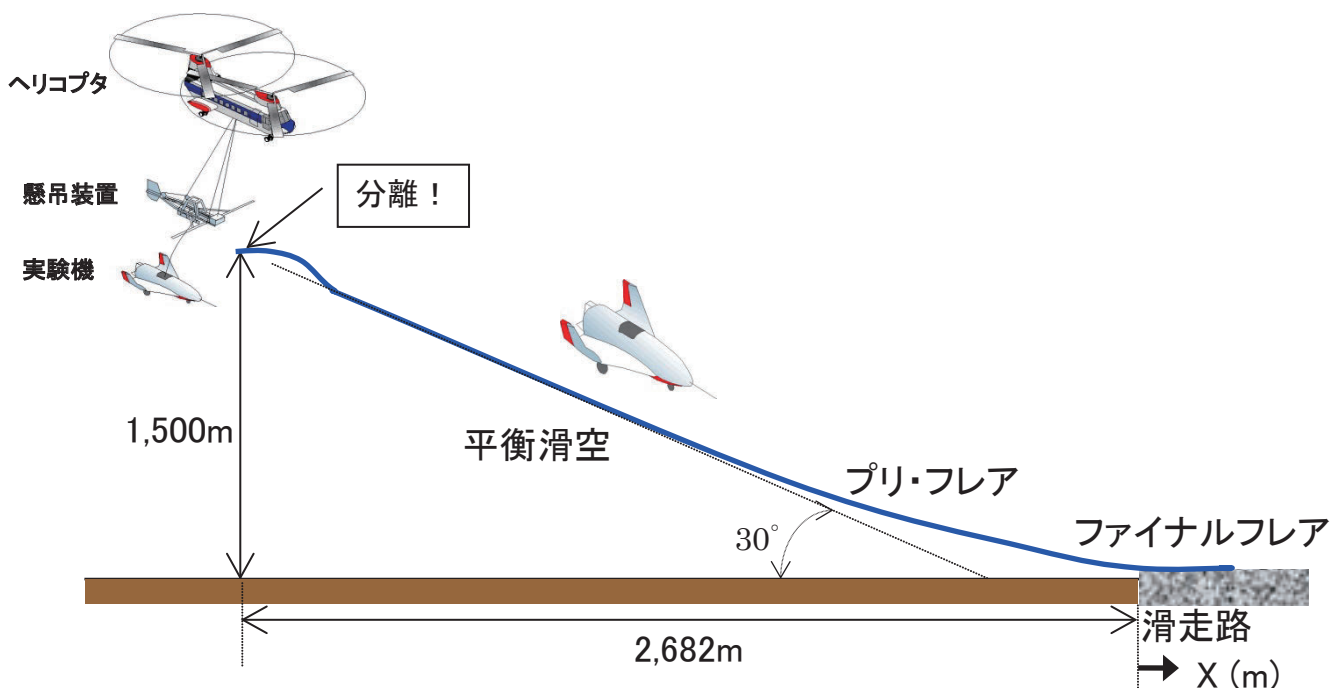


図 5.1 小型自動着陸実験 (ALFLEX)



(a) 懸吊飛行



(b) フリーフライト

図 5.2 ALFLEX 実験機

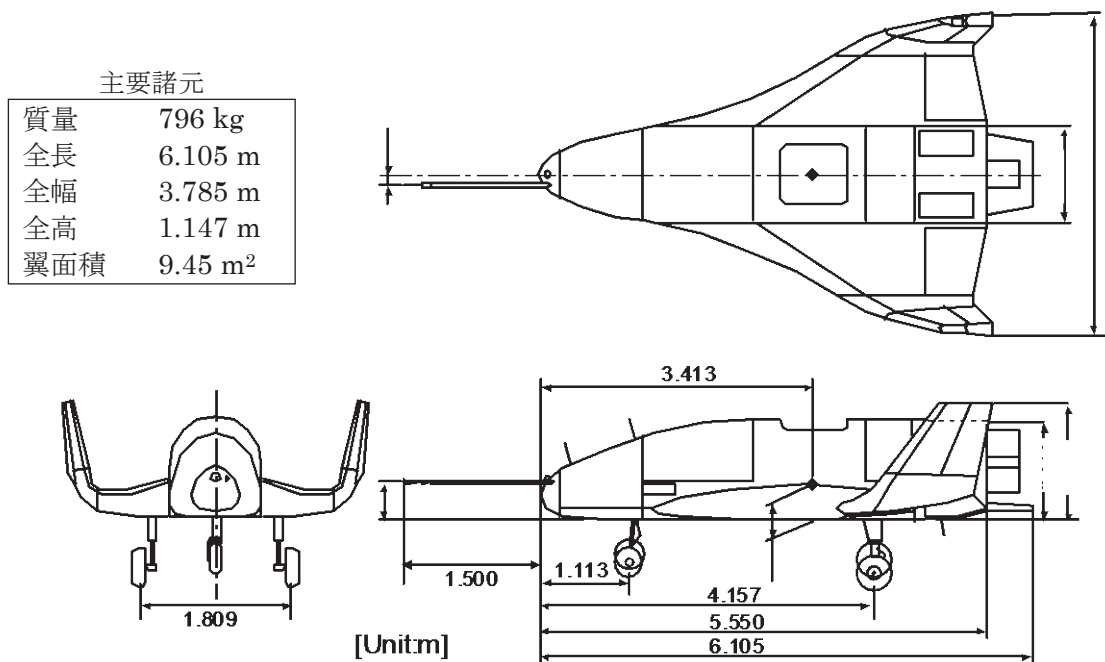


図 5.3 ALFLEX 実験機の 3 面図と主要諸元

評価した。定常風及び連続突風については、文献 21) の風モデルを用いている。

表 5.1(a) ~ (c) の不確定パラメタについては、各回のシミュレーション開始時にそれぞれ 1 つの値をランダムに発生させ、実験機分離から接地までの 1 回のシミュレーション飛行中は、値を固定した。

これに対して表 5.1(d) に示すパラメタは飛行

中に時系列的に変動するランダム誤差であるため、各シミュレーション開始時にそれぞれ乱数の種となる数値を与え、1 回の飛行シミュレーション中には設定した分布に従って、サンプリング周期毎に乱数を発生させている。

表 5.1(a) 不確定パラメタ：機体モデル誤差

No.	変数名	3 $\sigma$ 相当値 (単位)	分布
[空力モデル]			
[1]	空力係数 $C_L$	0.0216	} (相関 0.8)
[2]	$C_D$	0.0069	
[3]	$C_Y$	0.0056	
[4]	$C_l$	0.0042	
[5]	$C_n$	0.0009	
[6]	静的空力微係数 $C_{Y\beta}$	0.00194 (1/deg)	
[7]	$C_{l\beta}$	0.0006 (1/deg)	
[8]	$C_{n\beta}$	0.004 (1/deg)	
[9]	動的空力微係数 $C_{m\dot{q}}$	100 (%)	
[10]	$C_{l\dot{p}}$	100 (%)	
[11]	$C_{n\dot{r}}$	150 (%)	
[12]	$C_{l\dot{r}}$	150 (%)	
[13]	$C_{n\dot{p}}$	150 (%)	
[14]	舵効き $C_{L\delta e}$	0.003141 (1/deg)	
[15]	$C_{Y\delta a}$	0.00183 (1/deg)	
[16]	$C_{l\delta a}$	0.00039 (1/deg)	
[17]	$C_{n\delta a}$	0.00024 (1/deg)	
[18]	$C_{Y\delta r}$	0.000183 (1/deg)	
[19]	$C_{l\delta r}$	0.00029 (1/deg)	
[20]	$C_{n\delta r}$	0.00042 (1/deg)	
[21]	$C_{L\delta sb}$	20 (%)	
[22]	$C_{D\delta sb}$	20 (%)	
[23]	$C_{m\delta sb}$	20 (%)	
[24]	地面効果 $C_{G.E.}$	100 (%)	
[慣性特性]			
[25]	質量 $m$	24 (kg)	
[26]	慣性特性 $I_{XX}$	100 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )	
[27]	$I_{YY}$	200 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )	
[28]	$I_{ZZ}$	200 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )	
[29]	$I_{XZ}$	50 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )	
[アクチュエータ特性]			
[30]	エレボン 固有振動数	23 (%)	
[31]	減衰係数	14 (%)	
[32]	レートリミット	[-20, 0] (%)	一樣
[33]	ラダー 固有振動数	23 (%)	
[34]	減衰係数	14 (%)	
[35]	レートリミット	[-20,0] (%)	一樣
[36]	スピードブレーキ 固有振動数	23 (%)	
[37]	減衰係数	14 (%)	
[38]	レートリミット	[-20, 0] (%)	一樣

表 5.1(b) 不確定パラメタ：環境条件の変動

No.	変数名	3 $\sigma$ 相当値 (単位)	分布
[環境条件]			
[1]	海面上温度	10 (°C)	一様
[2]	海面上気圧	20 (hPa)	一様
[3]	重力加速度	0.015 (m/s <sup>2</sup> )	
[4]	風モデル 定常風 強さ	[0, 1] (m/s)	一様
[5]	定常風 風向	[0, 360] (deg)	一様
[分離状態]			
[6]	角速度 $\bar{P}$	0.0728 (rad/s)	
[7]	$\bar{Q}$	0.0445 (rad/s)	
[8]	$\bar{R}$	0.1896 (rad/s)	
[9]	姿勢角 $\Phi$	0.1852 (rad)	
[10]	$\Theta$	0.020 (rad)	
[11]	$\Psi$	0.2019 (rad)	
[12]	速度 U	3.78 (m/s)	
[13]	V	2.51 (m/s)	
[14]	W	2.89 (m/s)	
[15]	位置 X	100 (m)	一様
[16]	Y	100 (m)	一様
[17]	Z	50 (m)	一様

表 5.1(c) 不確定パラメタ：センサ出力誤差

No.	変数名		3 $\sigma$ 相当値 (単位)		分布
[IMU]					
[1]	加速度	$A_X$ バイアス	150	( $\mu\text{G}$ )	
[2]		$A_Y$ バイアス	150	( $\mu\text{G}$ )	
[3]		$A_Z$ バイアス	150	( $\mu\text{G}$ )	
[4]		$A_X$ スケールファクタ	241	(ppm)	
[5]		$A_Y$ スケールファクタ	241	(ppm)	
[6]		$A_Z$ スケールファクタ	241	(ppm)	
[7]	角速度	$\bar{P}$ バイアス	0.075	(deg/hr)	
[8]		$\bar{Q}$ バイアス	0.075	(deg/hr)	
[9]		$\bar{R}$ バイアス	0.075	(deg/hr)	
[10]		$\bar{P}$ スケールファクタ	40	(ppm)	
[11]		$\bar{Q}$ スケールファクタ	40	(ppm)	
[12]		$\bar{R}$ スケールファクタ	40	(ppm)	
[13]	姿勢角	$\Phi$ バイアス誤差	0.153	(deg)	
[14]		$\Theta$ バイアス誤差	0.153	(deg)	
[15]		$\Psi$ バイアス誤差	0.723	(deg)	
[16]		むだ時間	[-12.5, 0]	(msec)	一様
[MLS]					
[17]	方位	方位バイアス	2.22	(mrad)	
[18]		方位スケールファクタ	5.99E-5	(mrad/m)	
[19]	仰角	仰角バイアス	2.24	(mrad)	
[20]		仰角スケールファクタ	6.04E-5	(mrad/m)	
[21]		むだ時間	[-46.5, 0]	(msec)	一様
[電波高度計]					
[22]		バイアス誤差	0.6	(m)	
[23]		スケールファクタ誤差	0.031	(%)	
[ADS]					
[24]	等価対気速度 ( $V_{EAS}$ )	バイアス	2	(m/s)	
[25]	横滑り角 ( $\beta$ )	バイアス	0.9	(deg)	
[26]		スケールファクタ	5	(%)	
[27]		リミッタ	[-30, 0]	(%)	
[分離時航法]					
[28]	GPS 航法	$X_{NAV}$	25	(m)	
[29]		$Y_{NAV}$	25	(m)	
[30]		$Z_{NAV}$	25	(m)	
[31]		$\dot{X}_{NAV}$	0.5	(m/s)	
[32]		$\dot{Y}_{NAV}$	0.5	(m/s)	
[33]		$\dot{Z}_{NAV}$	0.5	(m/s)	



表 5.1(d) 不確定パラメタ：ランダム誤差

No.	変数名		3 $\sigma$ 相当値 (単位)	
[IMU]				
[1]	加速度	Ax	0.4	(G)
[2]		Ay	0.4	(G)
[3]		Az	0.4	(G)
[4]	角速度	$\bar{P}$	0.66	(deg/s)
[5]		$\bar{Q}$	0.66	(deg/s)
[6]		$\bar{R}$	0.66	(deg/s)
[MLS]				
[7]	方位角	AZ	2.16	(mrad)
[8]		AZ 距離依存分	5.83E-05	(mrad/m)
[9]	仰角	EL	2.5	(mrad)
[10]		EL 距離依存分	6.76	(mrad/m)
[電波高度計]				
[11]	H		0.4	(m)
[連続突風]				
[12]	$W_{gust}$		(最大 <sup>29)</sup> )	(m/s)

表 5.2 ALFLEX 評価基準

	接地時パラメタ	許容範囲	単位
縦運動	X位置	$0 \leq X \leq 1000$	(m)
	沈下率	$\dot{Z} \leq 3.0$	(m/s)
	対地速度	$V_{grad} \leq 62.0$	(m/s)
	ピッチ角	$\theta \leq 23.0$	(deg)
横運動	Y位置	$ Y  \leq 18.0$	(m)
	ロール角	$ \Phi  \leq 10.0$	(deg)
	対地横滑り角	$ \beta_{grad}  \leq 8.0$	(deg)

## 5.2 MC 評価

MC 評価結果を示す。初めに ALFLEX での評価基準を、次に MC 評価結果を示す。ALFLEX における被評価パラメタは接地時状態量として定義される。それらの接地時状態量と許容範囲を表 5.2 に示す。この条件は接地まで飛行が可能であることを前提としているが、これとは別に飛行中に不安定運動が発生して接地にまでに至らないことも評価基準に含む。全ての評価基準を満たす場合に“成功”，1項目でも基準を満たさなければ“失敗”とカウントして、ミッション達成確率を算出した。

一般に実験可能となるような確率は、90 数 % 以上の大きな値となる。ここで 1 からミッション達成確率を差し引くと失敗確率となる。失敗確率で表せば有効数字の桁数が小さくなり数値的取扱いが便利であること、及び本稿の主題であるパラメタ検出では失敗ケースに着目する必要があることから、以下では失敗ケースとその確率を評価の対象として記述する。

1000 回の MC 評価を実行した結果、接地基準を満足できなかったケース数（失敗数）を表 5.3 に示す。1000 回の全ケースで接地まで到達しており、飛行中に不安定となるケースはなかった。接地状態では、沈下率の基準を満たさなかったケースが最も多く 13 ケース、対地速度基準を超えたケースが 3 ケース、接地時の X 位置が滑走路手前となったケースが 1 ケース発生した。いずれも縦運動に関するパラメタである。これらの単純合計は 17 であるが、複数の評価基準を満たさないケースが存在するため、全失敗数は 16 ケースであった。つまりこの例のサンプルの失敗確率は、 $16/1000=1.6\%$  である。

1000 回の接地状態のばらつきを示したのが図 5.4 である。接地位置 X, Y と接地速度  $V_{gd}$ ,  $\dot{Z}$  の 1000 回のばらつきを表す。赤線で評価基準を示しており、表 5.3 に示す結果と対応していることが確認できる。この結果を対象として、本稿で述べたパラメタ検出法を適用し、失敗ケースに大きな影響を及ぼす不確定パラメタの検出を試みる。

表 5.3 1000 回の MC 評価結果

評価量	失敗数
安定性	0
X 位置	1
沈下率	13
対地速度	3
ピッチ角	0
Y 位置	0
ロール角	0
対地横滑り角	0
全失敗数	16

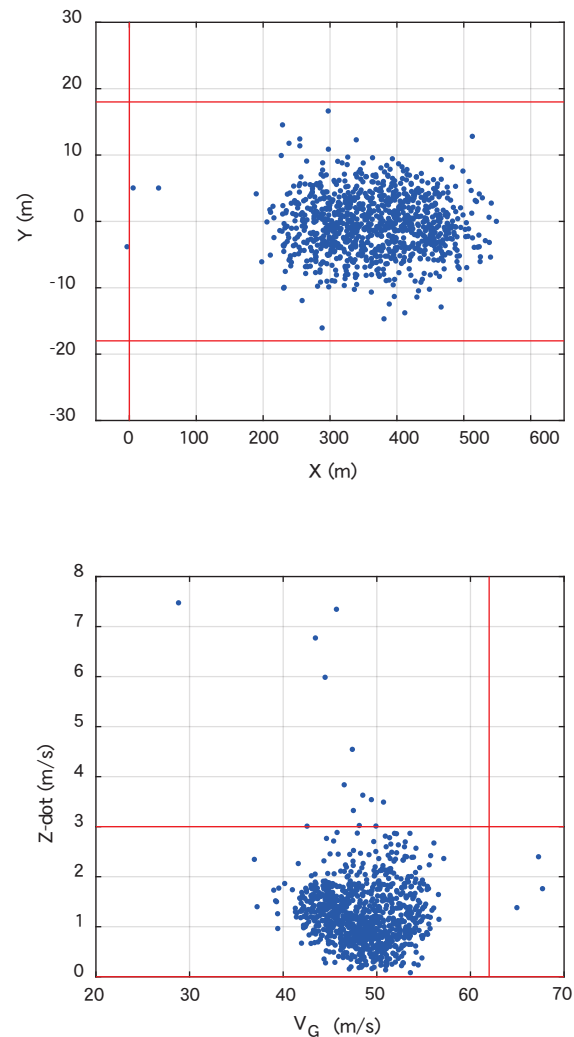


図 5.4 MC 結果：接地状態のばらつき

表 5.4 全 13 ケースのパラメタ検出結果

N = 1000		N <sub>F</sub> = 77			正規分布近似 (参考)	
No.	不確定パラメタ	P <sub>j</sub>	n <sub>j</sub>	n <sub>F,j</sub>	Z <sub>j-min</sub>	P <sub>N,j</sub>
1	Ax ランダム誤差	1.15 × 10 <sup>-20</sup>	493	74	8.43	1.76 × 10 <sup>-17</sup>
2	Az ランダム誤差	4.63 × 10 <sup>-13</sup>	507	68	6.75	7.43 × 10 <sup>-12</sup>
3	CY <sub>δr</sub> 空力誤差	2.92 × 10 <sup>-3</sup>	506	51	2.74	3.11 × 10 <sup>-3</sup>
4	θ バイアス誤差	4.89 × 10 <sup>-3</sup>	489	49	2.57	5.05 × 10 <sup>-3</sup>
5	MLS むだ時間	6.94 × 10 <sup>-3</sup>	509	50	2.44	7.26 × 10 <sup>-3</sup>

(有意水準  $\alpha = 9.26 \times 10^{-4}$ )

### 5.3 主要パラメタの検出

表 5.3 に示す MC 結果において、評価基準を超過した回数が最も多いのが接地時沈下率であり、1000 回の試行のうち 13 回で超過している。よってこのケースを取り上げ、基準超過に強い影響を及ぼしている不確定パラメタの検出を試みる。接地時沈下率基準を超過したケースを、以下では「失敗ケース」と表記する。

失敗ケースは 13 ケースあるため、まず始めに全失敗ケースに対して最も影響の大きなパラメタを検出した例を示す。13 回の失敗ケースの中には、検出されたパラメタが影響していないケースも現れた。このため、次にその特定の失敗ケースを取り上げ、当該ケースを対象とした影響パラメタの検出例を示す。

#### 5.3.1 全失敗ケース対象

対象となる 13 ケースに用いた不確定パラメタベクトルを利用して、テスト入力を生成した。1000 個のテスト入力を生成して MC 評価を実行した結果、77 回の失敗ケースが得られた。このときのパラメタ検出結果を表 5.4 に示す。

P<sub>j</sub> 値の小さな順に 5 つの不確定パラメタを示したが、ここで式 (3.9) より算出される有意水準  $\alpha$  よりもはるかに小さな P<sub>j</sub> 値となった加速度センサ出力ランダム誤差 “Ax” 及び “Az” が、影響の大きな不確定パラメタとして検出された。一方 3~5 番目には、“CY<sub>δr</sub> 空力誤差”、センサ出力である “θ バイアス誤差”、“MLS むだ時間” が検出されているが、これらの P<sub>j</sub> 値は  $\alpha$  よりも大きい値であることに加え、1~2 番目のパラメ

タの P<sub>j</sub> 値よりも格段に大きな値である。このため、3 番目以下のパラメタについては失敗ケースに大きく寄与するとは判定し難い。テスト入力生成時に用いる乱数を変更すれば、3~5 番目には別のパラメタが出現する可能性もある。

テスト入力生成時に各不確定パラメタは R=0.5 の割合でサンプリングしたため、n<sub>j</sub> ≈ 500 となっていることが確認できる。失敗ケースに大きく影響する Ax と Az の 2 つのパラメタは、全 77 回の超過ケースのうちそれぞれ 74 回、68 回 (=n<sub>F,j</sub>) に関わっている。このときの P<sub>j</sub> 値はそれぞれ 1.15 × 10<sup>-20</sup>、4.63 × 10<sup>-13</sup> となっており、帰無仮説「どの不確定パラメタも沈下率基準の超過に無関係である」のもとでは現実的に起こりえないほどの微小な確率となっていることがわかる。また設定した有意水準以下であることはもちろん、他の不確定パラメタの P<sub>j</sub> 値と比べても圧倒的に小さな値である。このことから検出された 2 つのランダム誤差は共に、沈下率基準超過に大きく影響していることは確実といえる。

また表 5.4 では参考値として正規分布近似を用いた場合の P<sub>N,j</sub> 値を示した。値自体は P<sub>j</sub> とはやや異なるものの、P<sub>N,j</sub> 値の順序および検出されるパラメタと他のパラメタとの P<sub>N,j</sub> 値の各段の違いは P<sub>j</sub> 値と同様であり、正規分布近似によっても同じパラメタが検出できていることが確認できる。

次に、検出された 2 つのランダム誤差が、沈下率基準にどの程度影響を及ぼしているか確認した。確認方法は、検出された 2 つのパラメ

タの一方または双方をノミナル値に戻し、それ以外の条件は表 5.3 の結果を得たときと全く同じ入力として MC 評価を実行して結果を比較した。MC 評価結果を表 5.5 に示す。ランダム誤差の“Ax”または“Az”をノミナルに戻すことは、これらのセンサ誤差は無いことを意味するため、表中には“削除”と表記した。

この結果を元の MC 評価結果である表 5.3 と比較すると、「Ax だけ削除」、「Az だけ削除」、「双方削除」によって、13 回発生していた沈下率基準の超過はそれぞれ 2 回、7 回、1 回に減少している。つまり Ax 誤差は  $13-2=11$  回のケースについて、失敗ケースを発生させるのに不可欠な要因であるといえる。同様に Az 誤差は  $13-7=6$  回のケースについて不可欠な要因といえる。この 2 つの誤差の影響を考えた場合、Ax 誤差のほうがより大きな影響を及ぼしているという結果である。このことは、表 5.4 の  $P_j$  値において、Ax 誤差のほうが Az 誤差のそれよりもかなり小さな値となっており、検出結果とも整合する。

さらに“Ax”、“Az”誤差を同時に削除した場合、失敗ケースは 1 ケースにまで減少している。つまり 13 ケース中 12 ケースまでは Ax または Az 誤差が影響していたことを示す。一方で Ax と Az 誤差を同時に削除してもなお、1 ケースだけは失敗のままである。この 1 ケースはシミュレーションの ID 番号 969 であったため、以下このケースを ID.969 と表記する。ID.969 ケースについては“Ax”と“Az”のランダム誤差以外のパラメタが影響しているため、次にこの失敗ケースに影響するパラメタの検出を試みる。

表 5.5 検出パラメタの影響確認結果

評価量	Ax 削除	Az 削除	双方 削除
安定性	0	0	0
X 位置	0	0	0
沈下率	2	7	1
対地速度	0	0	0
ピッチ角	0	0	0
Y 位置	0	0	0
ロール角	0	0	0
対地横滑り角	0	0	0
全失敗数	2	7	1

### 5.3.2 特定ケース対象

テスト入力生成において ID.969 ケースの入力とした不確定パラメタ・ベクトルのみを用いた。このようにして、パラメタ検出を実行した結果が表 5.6 である。

MC 試行回数を 1000 として、このうち失敗ケースが 66 回現れた。ここで影響が大きいパラメタとして検出されたのは、分離時の“速度 U”、“X 位置”、“Z 位置”と定常風強さの 4 つのパラメタであり、いずれも全 66 回の失敗ケースに関与している。この結果  $P_j$  値も他のパラメタと比べ桁違いの小ささとなっており、ゆえにこの 4 パラメタはいずれも失敗ケースに強く影響していると考えられる。

これら 4 つのパラメタはどのようなものか確認しておく。ID.969 ケースにて加えられた 4 つの不確定パラメタの大きさを表 5.7 に示す。表

表 5.6 不確定パラメタの検出結果 (ID.969)

N = 1000		$N_F = 66$			正規分布近似 (参考)	
No.	不確定パラメタ	$P_j$	$n_j$	$n_{F,j}$	$Z_{j,min}$	$P_{N,j}$
1	分離速度 U	$3.60 \times 10^{-23}$	475	66	8.71	$1.58 \times 10^{-18}$
2	分離 X 位置	$6.34 \times 10^{-21}$	511	66	8.09	$2.94 \times 10^{-16}$
3	分離 Z 位置	$9.58 \times 10^{-21}$	514	66	8.04	$4.40 \times 10^{-16}$
4	定常風強さ	$1.41 \times 10^{-19}$	534	66	7.72	$5.76 \times 10^{-15}$
5	CY <sub>δa</sub> 誤差	$1.48 \times 10^{-3}$	499	45	2.94	$1.62 \times 10^{-3}$

(有意水準  $\alpha = 9.26 \times 10^{-4}$ )

表 5.7 検出された各パラメタの大きさ

No	不確定パラメタ	標準化量 (乱数)	物理量 (変動範囲)	説明
1	分離速度U	2.08 (正規)	2.62 (m/s) (3σ: ±3.78)	ノミナルよりも速い.
2	分離X位置	2.17 (一様)	72.5 (m) (±100)	ノミナルよりも前方.
3	分離Z位置	-2.00 (一様)	-33.4 (m) (±50)	ノミナルよりも上方.
4	定常風強さ	0.866 (一様)	高度に依存 ([0, 1])	風向: 左前方 4.6(deg).

中の「標準化量」は、入力として設定した分布に対する相対的な大きさを示すものである。正規乱数は標準偏差σに対する倍率、一様乱数は[-3, +3] (3σ相当値) を変動の上下限とした場合の相対的な値を示す。これは正規乱数、一様乱数ともに±3σ相当値を現実的な上下限と考えた表現である。ただし風速については[0,1]を上下限としてある。この「標準化量」により、設定した変動範囲の中でどの程度の値となっているか確認できる。3つの分離状態の不確定パラメタはいずれも絶対値で2以上となっており、ノミナル状態0からの変動はそれなりに大きい。また風速についても、設定した最大風速の8~9割の値であり、かなり向風が強い状態を表す。実際の物理量は表に示すとおりである。以上より、4つのパラメタはいずれも設定範囲の中で大きめの値となっていることが確認できる。

次にこれらのパラメタが失敗ケースに影響することを、シミュレーションにより確認する。まずID.969ケースの飛行の様子を確認するため、飛行履歴を確認した。次に各パラメタの個

別の影響を確認するため、ID.969に加えた全パラメタから1つずつ削除して(ノミナルに戻して)、飛行状態の変化を確認した。

これらの飛行履歴を図5.5に示す。横軸、縦軸はそれぞれX位置、高度(-Z)であるが、赤線で表したID.969ケースでは分離直後に大きく降下し、その後基準軌道に沿った飛行ができていない。これに対して各パラメタを1つずつノミナル状態に戻した他のケースでは、初期状態は異なるものの、いずれもノミナル飛行と同様に基準軌道に沿った飛行が実現できていることがわかる。

これで飛行の軌道は確認できたが、問題は表5.2に示す接地時の評価基準を満たす飛行となっているかどうかである。ここで表5.6にて検出されたパラメタからも明らかなように、縦運動の変動が問題であり、実際にシミュレーション結果を確認しても横運動に関する評価量には全く問題はなかった。よって縦運動に関する接地状態を示したのが図5.6である。図中の赤で示す一点鎖線は、表5.2に示す評価基準の制限

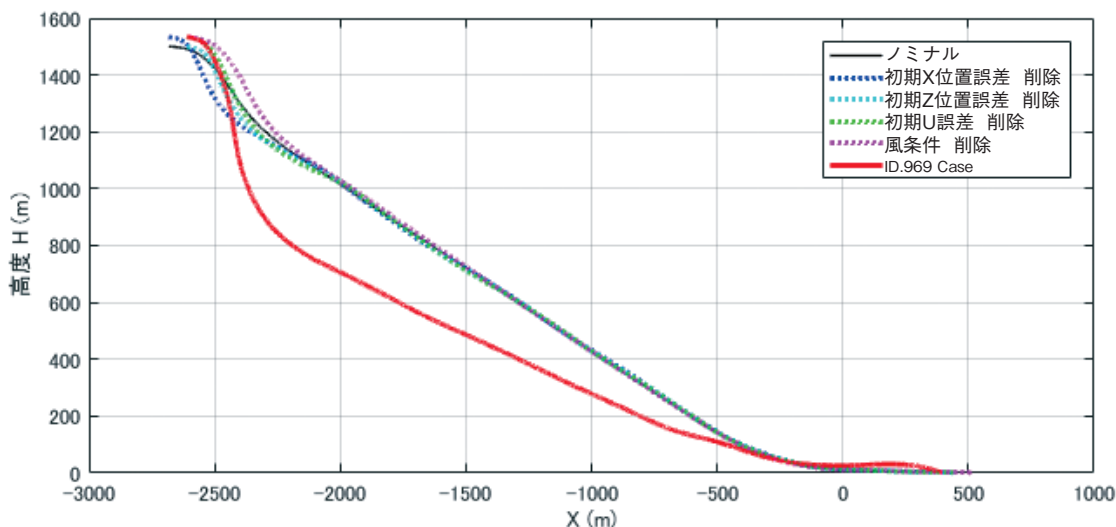


図 5.5 ID.969 と比較ケースの飛行履歴



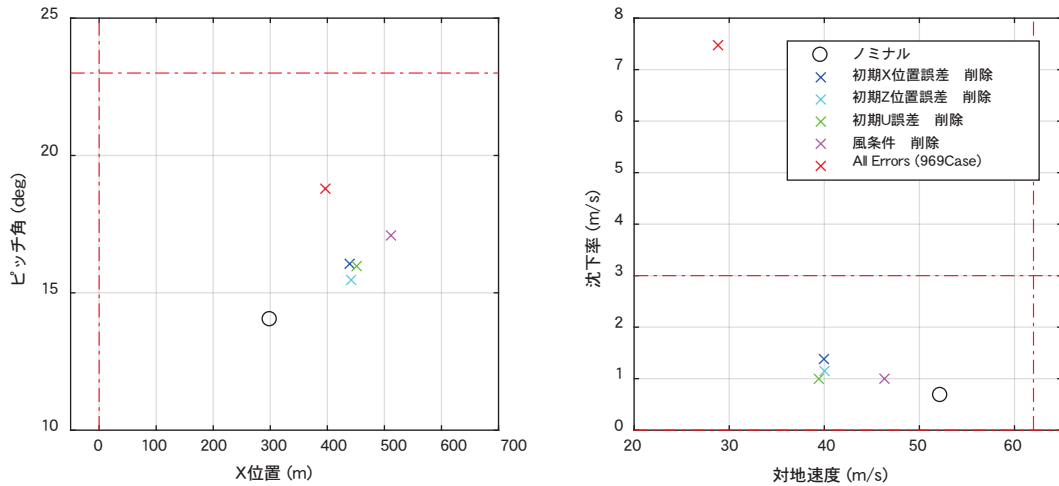


図 5.6 ID.969 と比較ケースの接地状態

値を表す。この結果、ID.969 ケースだけが接地時の沈下率基準を大きく超過しており、それ以外のケースでは全て基準を満たしていることがわかる。

以上の検討結果から、検出された 4 パラメタのいずれか一つだけノミナルに戻しても失敗ケースは解消され、問題のない飛行が可能となることがわかる。別の表現をすれば、検出された 4 つの主要パラメタのうちいずれか 3 つが存在しても飛行基準を超過することはなく、4 つ揃ってはじめて基準軌道に沿った飛行が困難となり、失敗ケースが発生することがわかった。つまり表 5.6 にて影響が大きいと判定された 4 パラメタは全て失敗ケース発生に不可欠な要因であり、この 4 パラメタが組み合わさることによって失敗ケースが発生していることが確認できた。

なお、失敗抑制効果のあるパラメタについても  $Q$  を算出して調査したが、今回の例では失敗ケースを抑制する効果があるパラメタは検出されなかった。

#### 5.4 組み合わせの影響について

本パラメタ検出法は、原理的には複数のパラメタの組合せの影響を直接分析しているものではない。失敗ケースのサンプルと対応する母集団の相違に着目し、失敗ケースに対する影響の有無を、「個別のパラメタ」についてそれぞれ分析しているだけである。表 5.6 の結果も直接的には、検出された個々のパラメタの影響を表

す。しかし、パラメタの組み合わせによって失敗ケースが発生する場合には、組み合わせの中のいずれか 1 つのパラメタが欠けても失敗ケースは発生しないことになる。このため失敗ケースを引き起こすのに必ず必要なパラメタであれば、本パラメタ検出法で全て検出される。例えば図 2.4(a) に示したように不確定パラメタ A と B があり、これらが組み合わさって失敗ケースが発生するとき、どちらのパラメタが欠けても失敗ケースは発生しない。このとき、失敗ケースの発生には A も B も不可欠となるため、本検出法によって個別の影響を分析した結果、A も B も影響があるものとして検出される。実際に表 5.6 では失敗ケースに不可欠な 4 パラメタが検出されており、これらの組み合わせの影響が推測できる。

一方で、組み合わせの影響で失敗ケースは発生するものの、組み合わせに含まれる全てのパラメタが検出されないケースも考えられる。例えば図 2.4(b)(c) に示したように、パラメタ A の影響は大きく、それ以外のパラメタの影響はそれほどでもないが、A 単独で失敗ケースを引き起こすほどではない場合である。例としては、「A と B」、「A と C」、「A と D・E」の組み合わせのいずれでも失敗ケースとなるとき、パラメタ A は失敗ケース発生に不可欠であるが、その他のパラメタは必ずしも不可欠ではない。この場合、パラメタ A は必ず検出されるが、それ以外の B,C,D,E などのパラメタは検出されないこともありうる。



表 5.4 の例で示したように 13 の失敗ケースを同時に分析する場合には、これらのケース全体で最も影響の大きなパラメタから順に小さな  $P_j$  値が得られ、検出されることになる。失敗を引き起こす組み合わせは 13 の失敗ケースそれぞれで異なっている可能性があり、このとき最も多くのケースに影響するパラメタ、或いは強い影響を及ぼすパラメタから順に検出される。このようなときは、検出結果から組み合わせを推測するのは容易ではない。

影響を及ぼす組み合わせを推測しやすいのは表 5.6 の例で示したように、特定の 1 ケースについて、パラメタ検出を実行する場合である。複数の失敗ケースが現れた場合に、全体として最も影響の大きなパラメタを知りたいという目的の場合には、全ケースをまとめて分析したほうが効率がよい。一方で、失敗ケースを発生させるパラメタの組み合わせを推測することが目的であれば、テスト入力生成に 1 つの失敗ケースだけを用いるのが効果的である。

## 6 まとめ

MC 評価は数値的に標本調査を行うことであり、多数の不確定パラメタを考慮した場合の膨大な多変量パラメタ空間をランダムに調査し、母集団特性を推定する手法である。標本調査によって多数の不確定パラメタの影響を効率的に調査できる実用的手法であるため、国内外の様々なプロジェクトや飛行実験に利用されてきている。MC 評価の強力な利点の一つが非線形システムを直接取り扱えることであり、評価手法として優れた性質を有する。ところが一方で、失敗ケースが発生した場合にどの不確定パラメタが主要因であるかを分析することは必ずしも容易ではない。その理由は多数のパラメタがランダムな大きさの値として同時に入力されるためである。

本稿ではこの課題に対し、影響パラメタ検出の一つの手法を示した。本手法のポイントは、

1. 失敗ケースを与える不確定パラメタ・ベクトル要素のランダムサンプリングによるテスト入力の生成。

2. テスト入力を用いた MC 試行。
3. MC 試行結果の統計的検定による主要パラメタの検出。

また本手法の特徴としては、

- 失敗ケースのサンプルが 1 つだけでも、主要パラメタが検出可能。
  - ランダム誤差のような、統計的性質は常に同じであっても時間履歴が異なるような不確定パラメタに対しても有効。
  - 複数の失敗ケースを同時に分析することにより、一度の分析で全体として最も影響のあるパラメタの検出が可能。
  - 原理的には個々の不確定パラメタの影響を分析しているものであるが、ある特定の (1 つの) 失敗ケースを分析することによる、影響のある組み合わせの推測可能性。
- などである。

本稿ではパラメタ検出法の原理及び分析方法についてその詳細を述べた。本手法では超幾何分布に基づく統計的検定を利用するが、超幾何分布を取り扱える専用のソフトウェアがなくても比較的容易な計算で検出結果を得ることができる正規分布近似による方法についても示した。最後に ALFLEX 飛行実験の MC 評価を取り上げ、本パラメタ検出法の適用例を示した。ここではランダム誤差も検出可能であることを示し、また複数の不確定パラメタの組合せの影響分析についても例示した。

本手法により MC 評価の実用性と利便性がさらに高まり、今後の研究開発、飛行実験、プロジェクトなどに活用され貢献できれば幸甚である。

## [参考文献]

- 1) Ray, L.R. and Stengel, R. F., "A Monte Carlo Approach to the Analysis of Control System Robustness," *Automatica*, Vol. 29, No. 1, 1993, pp. 229-236.
- 2) Ray, L. R. and Stengel, R. F., "Application of Stochastic Robustness to Aircraft Control Systems," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 14, No. 6, 1991, pp.1251-1259.

- 3) 元田敏和, 「モンテカルロ法によるシステムの統計的評価」, JAXA-RR-07-005.
- 4) NAL/NASDA HOPE 研究共同チーム ALFLEX サブグループ, 「小型自動着陸実験 (ALFLEX)」, 航空宇宙技術研究所報告 TR-1369, 1998.
- 5) 二宮哲次郎, 鈴木広一, 塚本太郎, 「高速飛行実証機フェーズ II の誘導制御系評価」, JAXA-RR-04-002.
- 6) Hamada, Y., Ninomiya, T., Katayama, Y., Shinomiya, Y., Matsumoto K., Yamamoto, M., Sawai, S., Ueno, S., and Hayashi, K., "Feasibility Study for Precise Lunar Landing using SELENE-B Lander Configuration," JAXA-RR-05-013E.
- 7) 元田敏和, 塚本太郎, 南吉紀, 濱田吉郎, 「リフティングボディ飛行実験 (LIFLEX) 誘導制御系 — システム評価と飛行制御パラメータ最適化 —」, JAXA-RR-10-007.
- 8) Mase, R. A., Antreasian, P. G., Bell, J. L., Martine-Mur., T. J., and Smith Jr., J. C., "Mars Odyssey Navigation Experience," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 42, No. 3, 2005, pp.386-393.
- 9) Hove, B. V., and Karatekin, Ö., "Atmospheric Reconstruction with Stagnation Pressure Flight Data from Mars Science Laboratory," *Journal of Spacecraft and Rockets*, published online 7 April 2017.
- 10) Zanetti, R., Holt, G., Gay, R., and D' Souza, C., "Absolute Navigation Performance of the Orion Exploration Flight Test 1," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, published online 3 March, 2017.
- 11) Marrison, C. I. and Stengel, R. F., "Robust Control System Design Using Random Search and Genetic Algorithms," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 6, 1997, pp. 835-839.
- 12) Miyazawa Y. and Motoda T., "Stochastic Parameter Tuning Applied to Space Vehicle Flight Control Design," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No.3, 2001, pp.597-604.
- 13) Motoda, T., Stengel, R. F. and Miyazawa, Y., "Robust Control System Design Using Simulated Annealing," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 2, 2002, pp. 267-274.
- 14) 元田敏和, 「モンテカルロ評価における危険不確定パラメータの検出法」, 日本航空宇宙学会論文集, 第 55 巻, 第 638 号, 2007 年 3 月.
- 15) Motoda, T. and Miyazawa Y., "Identification of Influential Uncertainties in Monte Carlo Analysis," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 39, No. 4, 2002, pp. 615-623.
- 16) 杉山高一, 藤越康祝, 「統計データ解析入門」, みみずく舎, 2009, pp.51-52.
- 17) P.G. ホーエル, 浅井晃・村上正康共訳, 「入門数理統計学」, 培風館, 初版第 32 刷, 2014, pp.67-70.
- 18) 東京大学教養学部統計学教室編, 「統計学入門」, 東京大学出版会, 1997, pp.109-111.
- 19) Motoda, T., "Simplified Approach to Identifying Influential Uncertainties in Monte Carlo Analysis," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 41, No. 6, 2004, pp. 1071-1075.
- 20) Conover, W. J., *Practical Nonparametric Statistics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. 30-31, 188-191.
- 21) NAL/NASDA ALFLEX グループ, 「小型自動着陸実験機の飛行シミュレーションモデル」, 航空宇宙技術研究所報告 TR-1252, 1994.
- 22) Motoda, T., Miyazawa, Y., Ishikawa, K. and Izumi, T., "Automatic Landing Flight Experiment Flight Simulation Analysis and Flight Testing," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 36, No. 4, 1999, pp. 554-560.
- 23) Miyazawa Y., Motoda T., Izumi, T. and Hata, T., "Longitudinal Landing Control Law for an Autonomous reentry vehicle," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 22, No. 6, 1999, pp. 791-800.
- 24) 西平重善, 「統計調査法」, 培風館, 1957, pp.100-107.

## 付録 A ソフトウェアの利用

超幾何分布の累積確率は、既製のソフトウェアを用いることで容易に算出できる。ここでは航空宇宙分野において世界的にも広く利用されているマサチューセツ社 MATLAB のオプション ”Statistics and Machine Learning Toolbox”，統計解析分野で広く利用されているフリーソフト ”R”，計算ばかりでなく事務用途としても一般に利用されているマイクロソフト社の EXCEL2016 を取り上げ、これらの機能を用いた累積確率の算出法を紹介する。併せて、正規分布近似によるパラメタ検出の際に必要な、標準正規分布の裾の面積に対応する確率変数値の求め方についても記す。A.1 節で超幾何分布の累積確率法を、A.2 節で正規分布の確率変数値の導出法について記述する。

### A.1 超幾何分布の累積確率

あらためて超幾何分布における数の関係を図 A.1 に示す。

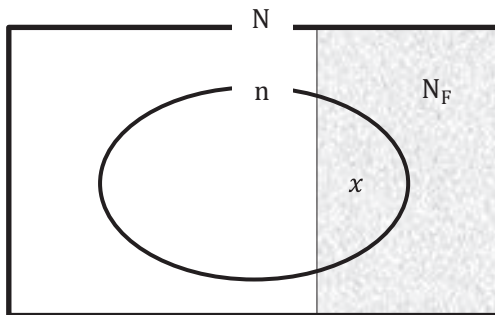


図 A.1 超幾何分布

$N_F$  個の失敗を含む  $N$  個の母集団から、 $n$  個を取り出したとき、失敗が  $x$  個含まれている確率  $p(x)$  は、

$$p(x) = \frac{N_F C_x \cdot (N - N_F) C_{(n-x)}}{N C_n} \quad (\text{A.1})$$

これは式 (3.6) に対応するものである。また実際に得られた  $x$  の値が  $n_F$  であるとき、累積確率  $P$  と  $Q$  は次式によって与えられた。

$$P = \sum_{x=n_F}^{x_{max}} p(x)$$

$$x_{max} = \min\{N_F, n\} \quad (\text{A.2})$$

$$Q = \sum_{x=x_{min}}^{n_F} p(x)$$

$$x_{min} = \max\{0, n - (N - N_F)\} \quad (\text{A.3})$$

ここで  $P$  は  $n_F \leq x \leq x_{max}$  の確率を表す上側累積確率、 $Q$  は  $x_{min} \leq x \leq n_F$  の確率を表す下側累積確率である。式 (A.2) は式 (3.8) に、式 (A.3) は式 (3.11) に対応する。

[MATLAB による算出]

超幾何分布の累積確率算出には、関数 ”hygecdf” を用いる。この関数は基本的に、下側累積確率を算出する関数となっているため、 $Q$  は以下の入力で得られる。

$$Q \leftarrow \text{hygecdf}(n_F, N, N_F, n) \quad (\text{A.4})$$

式 (A.2) に示されるように、 $P$  は失敗ケースの上側累積確率を表す。このため関数 ”hygecdf” の引数の最後に ’upper’ を加えれば上側累積確率が算出できるが、これは  $(1 - Q)$  の値を表し、次式に示すように  $P$  とはやや異なる値となる。

$$1 - Q = 1 - \sum_{x=x_{min}}^{n_F} p(x)$$

$$= \sum_{x=(n_F+1)}^{x_{max}} p(x)$$

$$= \sum_{x=n_F}^{x_{max}} p(x) - p(n_F)$$

$$= P - p(n_F) \quad (\text{A.5})$$

つまり式 (A. 4) の引数に 'upper' を加えただけでは、 $p(n_F)$  の分だけ小さく算出されてしまう。このため P を算出するためには、次式のように引数を調整すればよい。

$$P \leftarrow \text{hygecdf}((n_F - 1), N, N_F, n, \text{'upper'})$$

(A. 6)

別の方法として、成功確率の分布関数を考え、下側累積確率として P を算出することもできる。この場合は式 (A. 4) における引数を、以下のよう置き換えれば良い。

$$\begin{aligned} N_F &\rightarrow (N - N_F) \\ n_F &\rightarrow (n - n_F) \end{aligned}$$

(A. 7)

この置き換えを利用すれば、P は次式により下側累積確率として求められる。

$$P \leftarrow \text{hygecdf}((n - n_F), N, (N - N_F), n)$$

(A. 8)

#### [フリーソフト "R" による算出]

超幾何分布の累積確率を計算するための関数は "phyper()" である。この関数もデフォルトで、下側累積確率を算出するものとなっている。Q は以下の入力で得られる。

$$Q \leftarrow \text{phyper}(n_F, N_F, (N - N_F), n, \text{log} = \text{FALSE})$$

(A. 9)

この関数の引数は左から、「取出した中での失敗数」、「全体の失敗数」、「全体の成功数」、「取出し数」である。最後の "log=" は、得られる累積確率を自然対数として出力するかどうかの指定であり、"log=TRUE" とすれば  $\log(Q)$  の値が出力される。

MATLAB の関数と同様の考え方で、P については上側累積確率として、次式で求められる。

$$P \leftarrow \text{phyper}((n_F - 1), N_F, (N - N_F), n, \text{lower.tail} = \text{FALSE}, \text{log} = \text{FALSE})$$

(A. 10)

引数の "lower.tail=FALSE" が上側累積確率を計算するための指定である。また成功確率を考え、下側累積確率として求めるには、次式のように指定することもできる。

$$P \leftarrow \text{phyper}((n - n_F), (N - N_F), N_F, n, \text{log} = \text{FALSE})$$

(A. 11)

#### [EXCEL による算出]

EXCEL2016 において、Q は次式により算出できる。

$$Q \leftarrow \text{HYPGEOM.DIST}(n_F, n, N_F, N, \text{TRUE})$$

(A. 12)

ここで 5 番目の引数 "TRUE" は下側累積確率を計算することを表す。EXCEL では上側の累積確率を算出する機能はないため、成功数に着目し下側累積確率として P を求める。

$$\begin{aligned} n_S &= n - n_F \\ N_S &= N - N_F \end{aligned}$$

として、次式により P が算出できる。

$$P \leftarrow \text{HYPGEOM.DIST}(n_S, n, N_S, N, \text{TRUE})$$

(A. 13)

EXCEL では、引数内に  $(n - n_F)$  などの計算式を記述することができない。このため、あらかじめ  $n_S, N_S$  は数値として算出し、その後に引数として代入する必要がある。

## A.2 標準正規分布の確率変数値

正規分布近似によるパラメタ検出では、標準正規分布の上側累積確率である有意水準  $\alpha$  が与えられ、それに対応する確率変数値  $z_\alpha$  を求める必要がある。  $\alpha$  と  $z_\alpha$  の関係を図 A.2 に示す。

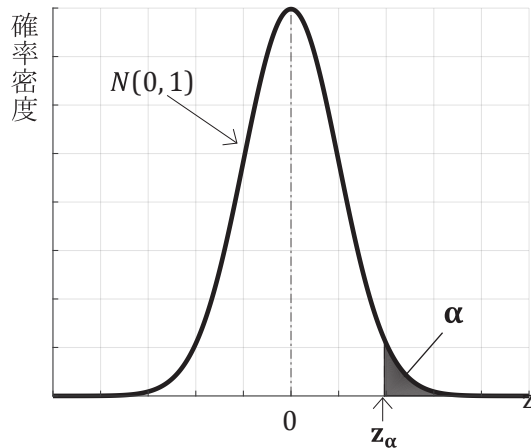


図 A.2 有意水準  $\alpha$  と  $z_\alpha$  の関係

統計表を用いることもできるが、ソフトウェアを利用する場合の方法を以下に示す。A.1 項と同様に、MATLAB, フリーソフト”R”, Excel を利用する場合について順に記す。

### [MATLAB による算出]

逆正規累積分布関数を表す”norminv”を用いて、

$$z_\alpha \leftarrow -\text{norminv}(\alpha, 0, 1) \quad (\text{A. 14})$$

となる。”norminv”は正規分布の左裾の面積に対応する確率変数を求めるため、図 A.2 に示すような右裾の場合は、マイナスの符号が必要となる。

### [フリーソフト”R”による算出]

”R”では”qnorm”を用いて、次式により  $z_\alpha$  が求められる。

$$z_\alpha \leftarrow \text{qnorm}(\alpha, 0, 1, \text{lower.tail} = \text{FALSE}) \quad (\text{A. 15a})$$

ここで”lower.tail=FALSE”は、分布の上側（右裾）の確率が  $\alpha$  となることを意味する。または、

$$z_\alpha \leftarrow -\text{qnorm}(\alpha, 0, 1) \quad (\text{A. 15b})$$

でも同じ結果となる。

### [EXCEL による算出]

関数”norminv”を用いて、次式より  $z_\alpha$  が求められる。

$$z_\alpha \leftarrow -\text{norminv}(\alpha, 0, 1) \quad (\text{A. 16})$$



## 付録 B 超幾何分布と二項分布

超幾何分布の平均と分散を求める。また超幾何分布は非復元抽出であるが、参考のため復元抽出である二項分布との関係について記す。

超幾何分布における数の関係を、改めて図 B.1 に示す。母集団の数  $N$ 、その中の失敗ケース数が  $N_F$ 。取り出す標本数が  $n$  で、その中に含まれる失敗ケース数が  $x$  である。

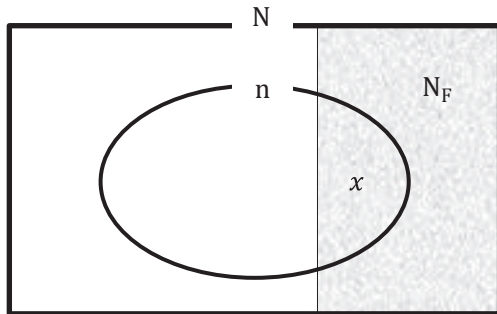


図 B.1 超幾何分布における数の関係

超幾何分布において  $x$  の発生確率は次式で与えられる。

$$p(x) = \frac{N_F C_x (N - N_F) C_{n-x}}{N C_n} \quad (\text{B.1})$$

$x$  の範囲は、

$$\max\{0, n - (N - N_F)\} \leq x \leq \min\{n, N_F\} \quad (\text{B.2})$$

つまり  $x$  の範囲は、取出すサンプル数  $n$  と母集団の数  $N$ 、全失敗数  $N_F$  との関係によって異なり、以下の 4 ケースが考えられる。

①  $n \leq N_F, n \leq (N - N_F)$  のとき、  

$$0 \leq x \leq n$$

②  $n > N_F, n \leq (N - N_F)$  のとき、  

$$0 \leq x \leq N_F$$

③  $n \leq N_F, n > (N - N_F)$  のとき、  

$$\{n - (N - N_F)\} \leq x \leq n$$

④  $n > N_F, n > (N - N_F)$  のとき、  

$$\{n - (N - N_F)\} \leq x \leq N_F$$

ここで、

$$x_{min} = \max\{0, n - (N - N_F)\}$$

$$x_{max} = \min\{n, N_F\}$$

とすれば、 $x$  の全範囲にわたる分布関数の和は 1 であるので、

$$\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} p(x) = 1 \quad (\text{B.3})$$

次に  $x$  の平均と分散を導出する。①～④のいずれのケースについても同様に導出できるため、以下の平均と分散の導出では、①のケースを取り上げ、求める。



B.1 超幾何分布

ここでは超幾何分布の平均と分散を導出する。

B.1.1 平均

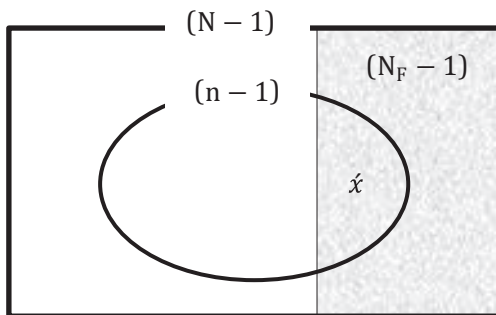
確率変数  $X$  の平均値 (期待値) を求める。超幾何分布の平均を  $\mu_{HG}$  とすると、

$$\begin{aligned} \mu_{HG} &= E[X] = \sum_{x=0}^n \{x \cdot p(X=x)\} \\ &= \sum_{x=0}^n \left\{ x \cdot \frac{N_F C_x \cdot (N-N_F) C_{(n-x)}}{N C_n} \right\} \\ &= \sum_{x=1}^n \left\{ x \cdot \frac{N_F C_x \cdot (N-N_F) C_{(n-x)}}{N C_n} \right\} \end{aligned} \quad (B.4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} N_F C_x &= \frac{N_F!}{(N_F-x)! \cdot x!} \\ &= \frac{N_F}{x} \cdot \frac{(N_F-1)!}{(N_F-x)! \cdot (x-1)!} \\ N C_n &= \frac{N!}{(N-n)! \cdot n!} \\ &= \frac{N}{n} \cdot \frac{(N-1)!}{(N-n)! \cdot (n-1)!} \end{aligned} \quad (B.5)$$

これらを式 (B.4) に代入すると、



分布関数

$$p(x) = \frac{(N_F-1) C_x \cdot (N-N_F) C_{(n-1)-x}}{(N-1) C_{(n-1)}}$$

図 B.2 母集団  $(N-1)$  の超幾何分布

$$\begin{aligned} \mu_{HG} &= \frac{N_F \cdot n}{N} \sum_{x=1}^n \left\{ \frac{(N_F-1)!}{(N_F-x)! \cdot (x-1)!} \right. \\ &\quad \cdot \frac{(N-n)! \cdot (n-1)!}{(N-1)!} \\ &\quad \left. \cdot (N-N_F) C_{(n-x)} \right\} \end{aligned} \quad (B.6)$$

ここで、 $\hat{x} = x-1$  とおけば、 $1 \leq x \leq n$  のとき

$$0 \leq \hat{x} \leq (n-1) \quad (B.7)$$

このとき式 (B.6) は、

$$\begin{aligned} \mu_{HG} &= \frac{N_F \cdot n}{N} \sum_{\hat{x}=0}^{n-1} \left[ \frac{(N_F-1)!}{\{(N_F-1)-\hat{x}\}! \cdot \hat{x}!} \right. \\ &\quad \cdot \frac{(N-n)! \cdot (n-1)!}{(N-1)!} \\ &\quad \left. \cdot (N-N_F) C_{(n-1)-\hat{x}} \right] \end{aligned}$$

右边を、組合せ記号を用いて整理すると、

$$\mu_{HG} = \frac{N_F \cdot n}{N} \cdot \sum_{\hat{x}=0}^{n-1} \frac{(N_F-1) C_{\hat{x}} \cdot (N-N_F) C_{(n-1)-\hat{x}}}{(N-1) C_{(n-1)}} \quad (B.8)$$

ここで、母集団  $(N-1)$ 、失敗数  $(N_F-1)$ 、取出し数  $(n-1)$  の超幾何分布と分布関数は、図 B.2 のようになる。

式 (B.8) の右边は分布関数の全範囲の和を含み、これは 1 となる。つまり、

$$\sum_{\hat{x}=0}^{(n-1)} \frac{(N_F-1) C_{\hat{x}} \cdot (N-N_F) C_{(n-1)-\hat{x}}}{(N-1) C_{(n-1)}} = 1 \quad (B.9)$$

よって式 (B.8)(B.9) より、超幾何分布の平均が得られる。

$$\mu_{HG} = \frac{N_F \cdot n}{N} \quad (B.10)$$

## B.1.2 分散

超幾何分布の分散を  $\sigma_{HG}^2$  とすれば,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{HG}^2 &= E[(X - \mu)^2] \\
 &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
 &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\
 &= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
 &= E[X^2] - \mu^2 \\
 &= E[X^2] - E[X]^2 \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

ここで次のように変形する.

$$\sigma_{HG}^2 = E[X^2] - E[X] + E[X] - E[X]^2 \tag{B.12}$$

右辺の第一項, 第二項を取り上げ, 以下のよう  
に変形する.

$$\begin{aligned}
 E[X^2] - E[X] &= \sum_{x=0}^n \{x^2 \cdot p(x)\} - \sum_{x=0}^n \{x \cdot p(x)\} \\
 &= \sum_{x=0}^n \{x(x-1) \cdot p(x)\} \\
 &= \sum_{x=0}^n \left\{ x(x-1) \cdot \frac{{}_N C_x \cdot (N-N_F) C_{(n-x)}}{{}_N C_n} \right\} \\
 &= \sum_{x=2}^n \left\{ x(x-1) \cdot \frac{{}_N C_x \cdot (N-N_F) C_{(n-x)}}{{}_N C_n} \right\} \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

ここで  ${}_N C_x$  は,

$$\begin{aligned}
 &\frac{{}_N C_x}{(N_F - x)! \cdot x!} \\
 &= \frac{{}_N C_x (N_F - 1)}{x(x-1)} \cdot \frac{(N_F - 2)!}{(N_F - x)! \cdot (x-2)!}
 \end{aligned}$$

また  ${}_N C_n$  は,

$$\begin{aligned}
 &\frac{N!}{(N-n)! \cdot n!} \\
 &= \frac{N(N-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-n)! \cdot (n-2)!}
 \end{aligned}$$

と変形できる. これらを式 (B.13) に代入すると,

$$\begin{aligned}
 E[X^2] - E[X] &= \frac{{}_N C_x (N_F - 1) \cdot n(n-1)}{{}_N C_n} \\
 &\quad \cdot \sum_{x=2}^n \left\{ \frac{(N_F - 2)!}{(N_F - x)! \cdot (x-2)!} \cdot \frac{(N-n)! \cdot (n-2)!}{(N-2)!} \cdot (N-N_F) C_{(n-x)} \right\} \\
 &= \frac{{}_N C_x (N_F - 1) \cdot n(n-1)}{{}_N C_n} \\
 &\quad \cdot \sum_{x=2}^n \left\{ \frac{{}_{(N_F-2)} C_{(x-2)} \cdot (N-N_F) C_{(n-x)}}{{}_{(N-2)} C_{(n-2)}} \right\} \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

ここで,  $\hat{x} = x - 2$  とおけば,  $2 \leq x \leq n$  のとき,

$$0 \leq \hat{x} \leq (n-2) \tag{B.15}$$

このとき式 (B.14) は,

$$\begin{aligned}
 E[X^2] - E[X] &= \frac{{}_N C_x (N_F - 1) \cdot n(n-1)}{{}_N C_n} \\
 &\quad \cdot \sum_{\hat{x}=0}^{n-2} \left\{ \frac{{}_{(N_F-2)} C_{\hat{x}} \cdot (N-N_F) C_{\{(n-2)-\hat{x}\}}}{(N-2) C_{(n-2)}} \right\} \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

ここで, 母集団  $(N-2)$ , 失敗ケース数  $(N_F-2)$ , 抽出し数  $(n-2)$  の超幾何分布と分布関数は, 図 B.3 のようになる. 式 (B.16) の右辺は, 分布関数の全範囲の和を含んでいるため,

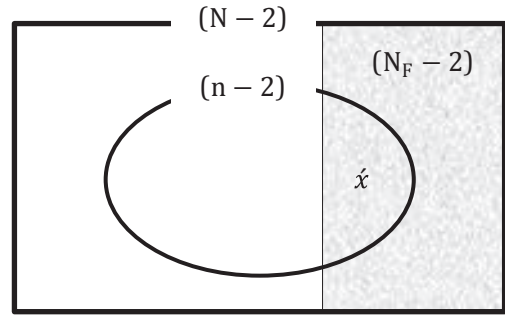
$$\sum_{\hat{x}=0}^{n-2} \left\{ \frac{{}_{(N_F-2)} C_{\hat{x}} \cdot (N-N_F) C_{\{(n-2)-\hat{x}\}}}{(N-2) C_{(n-2)}} \right\} = 1 \tag{B.17}$$

となり結局,

$$E[X^2] - E[X] = \frac{{}_N C_x (N_F - 1) \cdot n(n-1)}{{}_N C_n} \tag{B.18}$$

となる。よって式 (B. 18) を式 (B. 12) に代入すれば、次式のように超幾何分布の分散が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{HG}^2 &= \frac{N_F(N_F - 1) \cdot n(n - 1)}{N(N - 1)} + \frac{N_F \cdot n}{N} - \left(\frac{N_F \cdot n}{N}\right)^2 \\ &= \frac{nN_F(N - n)(N - N_F)}{N^2(N - 1)} \end{aligned} \quad (B. 19)$$



分布関数

$$p(x) = \frac{{N_F - 2 \choose x} \cdot {N - N_F \choose (n-2) - x}}{(N-2) \choose (n-2)}$$

図 B. 3 母集団 (N-2) の超幾何分布

### B. 2 二項分布との関係

次に MC 評価でも利用する、二項分布との関係を考察する<sup>17)</sup>。超幾何分布は N 個の母集団から重複を許さずに n 個を取り出す「非復元抽出」をしたときの、 $x$  の発生確率である。これに対して二項分布は、重複を許して n 個を取り出す「復元抽出」をしたときの  $x$  の発生確率であり、図 B. 4 に示すように失敗ケースを取り出す確率は常に  $N_F/N$  である。超幾何分布において、母

集団の失敗確率 ( $N_F/N$ ) を一定としたままで、 $N \rightarrow \infty$  としたものが二項分布と一致する。

いま母集団の失敗確率  $p_F = N_F/N$  が一定であるとする。図 B. 4 のように n 個取り出したときに、失敗数が  $x$  個含まれる確率  $p_B(x)$  は、次式の二項分布の分布関数で与えられる。

$$p_B(x) = {}_n C_x \cdot p_F^x \cdot (1 - p_F)^{(n-x)} \quad (B. 20)$$

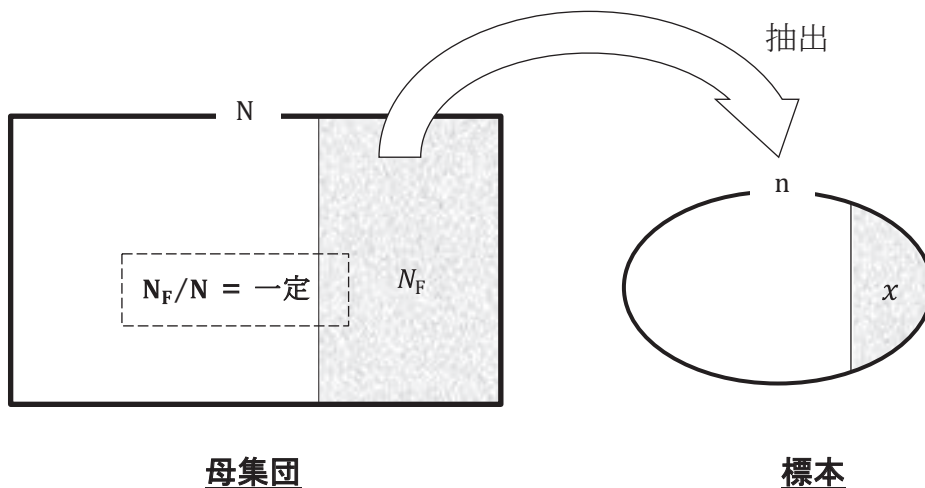


図 B. 4 復元抽出

一方、超幾何分布の式 (B. 1) は次のように変形できる.

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{{}_N C_x \cdot {}_{(N-N_F)} C_{(n-x)}}{{}_N C_n} \\
 &= \frac{N_F!}{(N_F - x)! \cdot x!} \cdot \frac{(N - N_F)!}{\{(N - N_F) - (n - x)\}! \cdot (n - x)!} \cdot \frac{(N - n)! \cdot n!}{N!} \\
 &= \frac{n!}{(n - x)! \cdot x!} \cdot \frac{N_F!}{(N_F - x)!} \cdot \frac{(N - N_F)!}{\{(N - N_F) - (n - x)\}!} \cdot \frac{(N - n)!}{N!} \\
 &= {}_n C_x \cdot \frac{N_F!}{(N_F - x)!} \cdot \frac{(N - N_F)!}{\{(N - N_F) - (n - x)\}!} \cdot \frac{(N - n)!}{N!}
 \end{aligned} \tag{B. 21}$$

ここで,

$$\frac{N_F!}{(N_F - x)!} = N_F \cdot (N_F - 1) \cdot \dots \cdot (N_F - x + 1)$$

$$\frac{(N - N_F)!}{\{(N - N_F) - (n - x)\}!} = (N - N_F) \cdot \{(N - N_F) - 1\} \cdot \dots \cdot \{(N - N_F) - (n - x) + 1\}$$

$$\frac{(N - n)!}{N!} = 1 / \{N \cdot (N - 1) \cdot \dots \cdot (N - n + 1)\}$$

これらを式 (B. 21) に代入すると,

$$p(x) = {}_n C_x \cdot \frac{\{N_F \cdot (N_F - 1) \cdot \dots \cdot (N_F - x + 1)\} \cdot \{(N - N_F) \cdot \{(N - N_F) - 1\} \cdot \dots \cdot \{(N - N_F) - (n - x) + 1\}\}}{N \cdot (N - 1) \cdot \dots \cdot (N - n + 1)}$$

分母・分子を  $N^n$  で割ると,

$$\begin{aligned}
 p(x) &= {}_n C_x \cdot \frac{\left\{ \frac{N_F}{N} \cdot \left( \frac{N_F}{N} - \frac{1}{N} \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{N_F}{N} - \frac{x-1}{N} \right) \right\} \cdot \left[ \left( 1 - \frac{N_F}{N} \right) \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{N_F}{N} \right) - \frac{1}{N} \right\} \cdot \dots \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{N_F}{N} \right) - \left( \frac{n-x}{N} \right) + \frac{1}{N} \right\} \right]}{\left\{ 1 \cdot \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \cdot \dots \cdot \left( 1 - \frac{n-1}{N} \right) \right\}} \\
 &= {}_n C_x \cdot \frac{\left\{ p_F \cdot \left( p_F - \frac{1}{N} \right) \cdot \dots \cdot \left( p_F - \frac{x-1}{N} \right) \right\} \cdot \left[ \left( 1 - p_F \right) \cdot \left\{ \left( 1 - p_F \right) - \frac{1}{N} \right\} \cdot \dots \cdot \left\{ \left( 1 - p_F \right) - \left( \frac{n-x}{N} \right) + \frac{1}{N} \right\} \right]}{\left\{ 1 \cdot \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \cdot \dots \cdot \left( 1 - \frac{n-1}{N} \right) \right\}}
 \end{aligned}$$

ここで  $p_F$  を一定値として,  $N \rightarrow \infty$  の極限をとると,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p(x) = {}_n C_x \cdot p_F^x \cdot (1 - p_F)^{(n-x)} \tag{B. 22}$$

よって, これは式 (B. 20) で表される二項分布の式  $p_B(x)$  と一致する.



0 となる。よって  $0 \leq x \leq n$  の範囲は、 $2 \leq x \leq n$  と等しくなるので、

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}^2 &= \sum_{x=2}^n \{x(x-1) \cdot p_B(x)\} \\
 &= \sum_{x=2}^n \left\{ x(x-1) \cdot \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!} \cdot p_F^x \right. \\
 &\quad \left. \cdot (1-p_F)^{(n-x)} \right\} \\
 &= \sum_{x=2}^n \left\{ \frac{n!}{(n-x)! \cdot (x-2)!} \cdot p_F^x \cdot (1-p_F)^{(n-x)} \right\} \\
 &= n(n-1) \cdot p_F^2 \sum_{x=2}^n \left\{ \frac{(n-2)!}{(n-x)! \cdot (x-2)!} \cdot p_F^{(x-2)} \right. \\
 &\quad \left. \cdot (1-p_F)^{(n-x)} \right\}
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

ここで、 $\acute{x} = x - 2$  とおく。  $2 \leq x \leq n$  のとき、 $0 \leq \acute{x} \leq (n-2)$  となるので、

$$\hat{\sigma}^2 = n(n-1) \cdot p_F^2 \sum_{\acute{x}=0}^{n-2} \left\{ \frac{(n-2)!}{(n-2-\acute{x})! \cdot \acute{x}!} \cdot p_F^{\acute{x}} \cdot (1-p_F)^{(n-2-\acute{x})} \right\}$$

右辺は  $(n-2)$  個取り出した中で失敗ケースが  $\acute{x}$  回である確率の、すべての可能な値についての和を含むので、

$$\hat{\sigma}^2 = n(n-1) \cdot p_F^2 \tag{B.30}$$

式 (B.28) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \sigma_B^2 &= n(n-1) \cdot p_F^2 + \mu_B - \mu_B^2 \\
 &= n(n-1) \cdot p_F^2 + n \cdot p_F - n^2 \cdot p_F^2 \\
 &= n \cdot p_F \cdot (1-p_F)
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

これが二項分布の分散である。ここで式 (B.19) で表される超幾何分布の分散と比較するため、 $p_F = N_F/N$  を代入すると、

$$\begin{aligned}
 \sigma_B^2 &= n \cdot (N_F/N) \cdot (1 - N_F/N) \\
 &= \frac{nN_F(N - N_F)}{N^2}
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

これは超幾何分布の分散である式 (B.19) の  $\sigma_{HG}^2$  とは異なっており、次の関係があることがわかる。

$$\sigma_{HG}^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot \sigma_B^2 \tag{B.33}$$

よって非復元抽出である超幾何分布の分散は、復元抽出である二項分布の分散とは  $(N-n)/(N-1)$  だけ異なることがわかる。

この  $(N-n)/(N-1)$  を、有限母集団修正項 (有限母集団補正項, 有限修正因子) という。有限母集団修正は、超幾何分布に限らず母集団が有限の場合に一般的に成り立つが、このことを次節で示す。



B.3 有限母集団修正

母集団が有限であるとき、ここから取り出す  $n$  個の標本の平均の期待値と分散<sup>24)</sup>を求め、母集団が無限であるときとの相違を確認する。

母集団が有限個  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  であるとする。このとき母平均  $\mu$ 、母分散  $\sigma^2$  は、

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{x_i - \mu\}^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \mu^2 \end{aligned} \tag{B.35}$$

ここから取り出す  $n$  個の標本の平均を  $\bar{X}_n$  とする。このとき  $\bar{X}_n$  の平均  $E[\bar{X}_n]$  と分散  $V[\bar{X}_n]$  を、それぞれ導出する。

[平均]

図 B.5 に示すように、 $n$  個の標本を抽出するとする。このとき、

$$\bar{X}_n = \frac{x_{i_1} + \dots + x_{i_k} + \dots + x_{i_n}}{n} \tag{B.36}$$

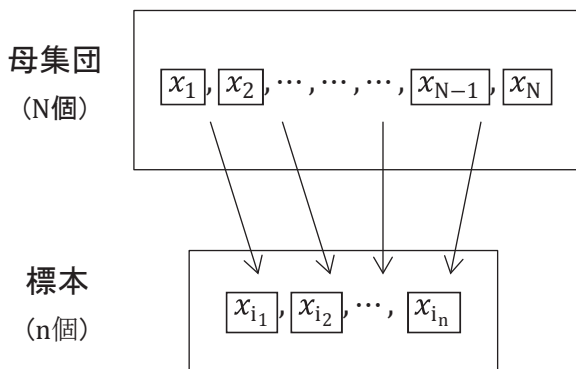


図 B.5 有限母集団からの標本

ここで、 $1 \leq i_k \leq N$ 、 $1 \leq k \leq n$  である。標本  $\{x_{i_k}; 1 \leq k \leq n\}$  を取り出す方法は、 ${}_N C_n$  通り存在する。つまり  $\bar{X}_n$  は  ${}_N C_n$  通り存在することになる。よって、

$$\begin{aligned} E[\bar{X}_n] &= \frac{1}{{}_N C_n} \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_n} \frac{(x_{i_1} + \dots + x_{i_n})}{n} \\ &= \frac{1}{{}_N C_n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i_1 < \dots < i_n} (x_{i_1} + \dots + x_{i_n}) \end{aligned} \tag{B.37}$$

右辺の総和記号は、存在しうる全ての  ${}_N C_n$  組の標本  $\{x_{i_k}; 1 \leq k \leq n\}$  の合計を表す。

いま図 B.6 のように母集団から  $j$  番目の要素  $x_j$  を 1 つだけ取り出すことを考える。このとき、母集団から残りの  $(n-1)$  個を取り出す必要がある。この取り出す方法の数は、 ${}_{(N-1)} C_{(n-1)}$  通りある。言い換えれば、「ある要素  $x_j$  を含む  $n$  個を取り出す方法が  ${}_{(N-1)} C_{(n-1)}$  通りある」ということである。これは全ての要素  $\{x_j; j=1, \dots, N\}$  についても同様であり、 $n$  個のあらゆる組み合わせの合計は各要素をそれぞれ  ${}_{(N-1)} C_{(n-1)}$  個含むことになる。よって、

$$\sum_{i_1 < \dots < i_n} (x_{i_1} + \dots + x_{i_n}) = {}_{(N-1)} C_{(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \tag{B.38}$$

が成り立つ。

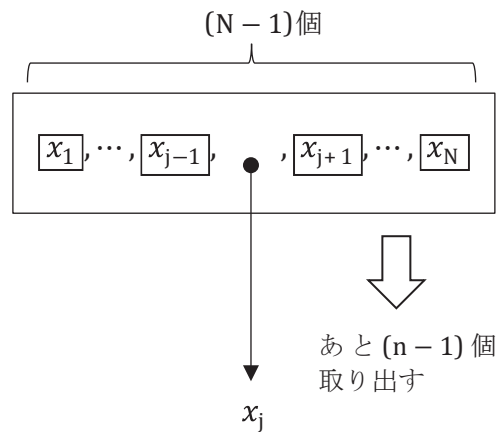


図 B.6  $j$  番目の要素取出し

よって式 (B.37) は、

$$E[\bar{X}_n] = \frac{1}{{}_N C_n} \cdot \frac{1}{n} \cdot {}_{(N-1)} C_{(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \tag{B.39}$$

ここで,

$$\begin{aligned} {}_{(N-1)}C_{(n-1)} &= \frac{(N-1)!}{(n-1)! \cdot (N-n)!} \\ &= \frac{n}{N} \cdot \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!} \\ &= \frac{n}{N} \cdot {}_NC_n \end{aligned}$$

これを式 (B.39) に代入すると,

$$\begin{aligned} E[\bar{X}_n] &= \frac{1}{{}_NC_n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{N} \cdot {}_NC_n \cdot \sum_{i=1}^N x_i \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \\ &= \mu \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

となり,  $n$  個の標本から得られる  $\bar{X}_n$  の平均は, 母集団の平均と一致する.

#### [分散]

次に  $\bar{X}_n$  の分散について考える.

$$\begin{aligned} V[\bar{X}_n] &= E[(\bar{X}_n - E[\bar{X}_n])^2] \\ &= E[(\bar{X}_n - \mu)^2] \\ &= E[\bar{X}_n^2] - \mu^2 \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

ここで左辺の  $E[\bar{X}_n^2]$  は, 次のように変形できる.

$$\begin{aligned} E[\bar{X}_n^2] &= \frac{1}{{}_NC_n} \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_n} \left( \frac{x_{i_1} + \dots + x_{i_n}}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{{}_NC_n} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i_1 < \dots < i_n} \left\{ (x_{i_1}^2 + \dots + x_{i_n}^2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k < l} (x_{i_k} x_{i_l}) \right\} \\ &= \frac{1}{{}_NC_n \cdot n^2} \left[ \sum_{i_1 < \dots < i_n} (x_{i_1}^2 + \dots + x_{i_n}^2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i_1 < \dots < i_n} \sum_{k < l} (x_{i_k} x_{i_l}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

右辺第一項については式 (B.38) の考え方と同様であり, 各要素の 2 乗は  ${}_{(N-1)}C_{(n-1)}$  回含まれるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i_1 < \dots < i_n} (x_{i_1}^2 + \dots + x_{i_n}^2) &= {}_{(N-1)}C_{(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \\ &= \frac{n}{N} \cdot {}_NC_n \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

次に式 (B.42) の右辺第二項にある 2 つの要素の積和について考える. 母集団から  $n$  個の標本を選ぶ方法が  ${}_NC_n$  通りで, それぞれ  ${}_nC_2$  個の積を含む. よって全体で 2 要素の積  $x_i x_j$  の数は,  $({}_NC_n \cdot {}_nC_2)$  となる. 異なる標本の中には, 同一の積  $x_i x_j$  を含むものも存在するため,  $({}_NC_n \cdot {}_nC_2)$  個の中には  $x_i x_j$  が重複して含まれている.

一方, 異なる 2 要素の組み合わせ数は, 母集団全体で  ${}_NC_2$  通りある. よって各種  $x_i x_j$  の重複回数は,  $({}_NC_n \cdot {}_nC_2) / {}_NC_2$  である. 以上より,

$$\begin{aligned} \sum_{i_1 < \dots < i_n} \sum_{k < l} (x_{i_k} x_{i_l}) &= \frac{{}_NC_n \cdot {}_nC_2}{{}_NC_2} \sum_{i < j} x_i x_j \\ &= \frac{{}_NC_n \cdot n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{i < j} x_i x_j \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

式 (B.43), (B.44) を式 (B.42) に代入すれば,

$$\begin{aligned} E[\bar{X}_n^2] &= \frac{1}{{}_NC_n \cdot n^2} \left\{ \frac{n}{N} \cdot {}_NC_n \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \cdot {}_NC_n \cdot n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{i < j} x_i x_j \right\} \\ &= \frac{1}{nN} \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 + \frac{2(n-1)}{nN(N-1)} \cdot \sum_{i < j} x_i x_j \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

次に、式 (B. 41) 右辺の第二項を変形する。

$$\begin{aligned}\mu^2 &= \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j \right) \quad (\text{B. 46})\end{aligned}$$

式 (B. 45), (B. 46) を式 (B. 41) に代入すると、

$$\begin{aligned}V[\bar{X}_n] &= \left( \frac{1}{nN} - \frac{1}{N^2} \right) \sum_{i=1}^N x_i^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{2(n-1)}{nN(N-1)} - \frac{2}{N^2} \right\} \sum_{i<j} x_i x_j \\ &= \frac{N-n}{nN^2} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{2(N-n)}{nN^2(N-1)} \sum_{i<j} x_i x_j \quad (\text{B. 47})\end{aligned}$$

右辺第一項の係数を、次のように変形する。

$$\begin{aligned}\frac{N-n}{nN^2} &= \frac{(N-n)(N-1)}{nN^2(N-1)} \\ &= \frac{N(N-n)}{nN^2(N-1)} - \frac{(N-n)}{nN^2(N-1)} \quad (\text{B. 48})\end{aligned}$$

式 (B. 48) を式 (B. 47) に代入すると、

$$\begin{aligned}V[\bar{X}_n] &= \left\{ \frac{N(N-n)}{nN^2(N-1)} - \frac{(N-n)}{nN^2(N-1)} \right\} \sum_{i=1}^N x_i^2 \\ &\quad - \frac{2(N-n)}{nN^2(N-1)} \sum_{i<j} x_i x_j \\ &= \frac{N-n}{n(N-1)} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{N^2} \sum_{i<j} x_i x_j \right\} \\ &= \frac{N-n}{n(N-1)} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j \right\} \right] \quad (\text{B. 49})\end{aligned}$$

ここで右辺 [ ] 内の第二項は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j \right\} &= \frac{1}{N^2} \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \\ &= \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \\ &= \mu^2 \quad (\text{B. 50})\end{aligned}$$

式 (B. 50) を式 (B. 49) に代入すれば、

$$V[\bar{X}_n] = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \mu^2 \right\} \quad (\text{B. 51})$$

式 (B. 35) より、

$$V[\bar{X}_n] = \frac{N-n}{N-1} \cdot \left( \frac{\sigma^2}{n} \right) \quad (\text{B. 52})$$

これで母集団が有限であるときの、 $\bar{X}_n$  の分散が得られた。

一方、母集団が無限であるときには、各試行  $\{x_i\}$  は独立であるので、

$$\begin{aligned}V[\bar{X}_n] &= V \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot V \left[ \sum_{i=1}^n x_i \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n V[x_i] \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \quad (\text{B. 53})\end{aligned}$$

となり、一般によく知られた標本平均の分散が得られる。

式 (B. 52) と式 (B. 53) を比較すると、母集団が有限であるときの分散は、母集団が無限のそ

れと比べて、 $(N-n)/(N-1)$  倍だけ異なることがわかる。この  $(N-n)/(N-1)$  を、有限母集団修正項という。

いま母集団  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  のどの要素も、"0" または "1" のいずれかの値をもつとし、この中で割合  $p$  だけ値 "1" をもち、その他の要素が "0" であるとする。この母集団から  $n$  個を無作為抽出し、その標本和を  $S_n$  とする。図 B.1 においては  $p=N_F/N$  であり、このとき  $S_n$  は、超幾何分布に従う。また  $x_i$  は "0" または "1" の値しか取らないため、次の関係がある。

$$\mu = p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (\text{B.54})$$

ここで  $S_n$  の平均と分散について、本項で導出した結果を適用してみる。まず  $S_n$  は次式で表される。

$$S_n = x_{i_1} + \dots + x_{i_n} = n \cdot \bar{X}_n \quad (\text{B.55})$$

平均を考えると、

$$\begin{aligned} E[S_n] &= E[n \cdot \bar{X}_n] \\ &= n \cdot E[\bar{X}_n] \\ &= n \cdot \mu \\ &= n \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ &= n \cdot p \\ &= \frac{N_F \cdot n}{N} \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

よって、これは式 (B.10) で求めた超幾何分布の平均と一致する。

次に分散について考える。式 (B.52) の結果を適用して、

$$\begin{aligned} V[S_n] &= V[n \cdot \bar{X}_n] = n^2 \cdot V[\bar{X}_n] \\ &= n^2 \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \left( \frac{\sigma^2}{n} \right) \\ &= \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \mu^2 \right) \\ &= \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot (p - p^2) \\ &= \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \left\{ \left( \frac{N_F}{N} \right) - \left( \frac{N_F}{N} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{n N_F (N-n)(N-N_F)}{N^2 (N-1)} \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

分散についても、超幾何分布の値である式 (B.19) と一致することが確認できる。

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-17-004  
JAXA Research and Development Report

モンテカルロ評価における影響パラメータ検出法  
Detection of Influential Input Parameters in Monte-Carlo Evaluation

---

発行 国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 (JAXA)  
〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1  
URL: <http://www.jaxa.jp/>  
発行日 平成29年10月31日  
電子出版制作 松枝印刷株式会社

※本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。  
Unauthorized copying, replication and storage digital media of the contents of this publication, text and images are strictly prohibited. All Rights Reserved.

---

