

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

スカラー保存則の保存型差分近似の数値粘性と エントロピー条件適合性

Entropy consistency of difference approximation of scalar conservation laws

相曾 秀昭

Hideaki AISO

2017年3月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

スカラー保存則の保存型差分近似の数値粘性とエントロピー条件 適合性*

相曾 秀昭*¹

Entropy consistency of difference approximation of scalar conservation laws

by
Hideaki AISO*¹

ABSTRACT

We are concerned with difference approximation of scalar conservation laws. The convergence of approximate solution obtained by difference approximation is one of the main interests in the theory of difference approximation. We discuss the range of numerical viscosity coefficients that allows the convergence to the entropy solution in the case of 3-stencil difference scheme in conservation form. The main theorem is one of the most optimal results of this kind of discussion. The aim of report is to explain the main theorem and related things from the viewpoint of numerical computation.

Keywords: Scalar Conservation Law, Difference Approximation, Consistency, Numerical Viscosity, Entropy Condition,

概要

スカラー保存則の差分近似について論じる。差分近似の理論的考察の中で近似解の厳密解への収束は主要な部分を占めるものである。ここでは、近似解がスカラー保存則の物理的に妥当な厳密解に収束するための数値粘性係数の範囲を定める定理を最終的な目標とするが、保存則の差分近似に関する数学的議論に詳しくなくても定理の意義を理解できるように基本的な事項から解説を進める。

キーワード: スカラー保存則、差分近似、適合性、数値粘性、エントロピー条件

1 はじめに

本稿では空間1次元の非線形スカラー保存則の保存型差分近似がエントロピー条件を満たす一意解に収束するための条件について論じる。保存型差分近似の最小のステンシルの数は3であるが、ここではその3ステンシルの保存型差分近似つまり数値流束が2つのステンシルから定まるものを考える。

非線形スカラー保存則は、非粘性圧縮性流体の挙動を記述する圧縮性 Euler 方程式を含む非線形双曲型保存則と呼ばれる一群の偏微分方程式のうちで最も簡単な形のものと言ってよい。

非線形スカラー保存則の初期値問題では初期値が十分滑らかな関数であっても有限時間後には滑らかな解の存在が許容されない場合がある事はよく知られる。そこで解の存在のため連続でない関数も許容できる弱解の概念が導入されるが、その一方で弱解では一意性が失われる。そこで、物理的な解釈を通じて妥当とされる解を選択する基準、即ちエントロピー条件を導入し一意な解を定めることになる。この一意解はエントロピー解、物理的妥当解、許容解等と呼ばれる。

doi: 10.20637/JAXA-RR-16-013/0001

* 平成28年12月7日受付 (Received December 7, 2016)

¹ 航空技術部門 数値解析技術研究ユニット

(Numerical Simulation Research Unit/Aeronautical Tracking Technology Group)

弱解やエントロピー条件については圧縮性 Euler 方程式のように従属変数がベクトルとなる非線形双曲型保存則の系の場合も非線形スカラー保存則と類似の状況があるが、スカラーの場合とは異なり、弱解の存在やエントロピー条件を満たす解の一意性について一般には未解決である。

このような理由から、圧縮性 Euler 方程式の差分スキームの考察においても安定性や収束、そして衝撃波での数値解の挙動やエントロピー条件への適合など数値計算法の重要な性質について先ずスカラー保存則の差分スキームで解析や数値実験等を行い、何らかの結果を得たならばそれを拡張して圧縮性 Euler 方程式など双曲型非線形保存則の系の差分スキームを構成することは現在でも行われている。拡張では理論的証明が得られずに形式的な類推から行わざるを得ない場合も多いが、そのことは系の場合に未だ理論的に未解明の部分が多いことも意味している。

現在は厳密解の不連続を考慮したアルゴリズムにより、厳密解が滑らかな部分¹で数値解を高次精度化する技法が発展し、高精度化された差分スキームが種々提案されている。しかし、依然として不連続を含む解の数値計算では差分スキームは保存型とする事が殆どであり、その計算では隣接する有限体積間を行き来する流束の近似である数値流束を計算する必要がある。その際、有限体積境界近傍での状況を Riemann 問題に擬してその厳密解を近似する近似 Riemann 解を通じて数値流束を構成する手法は依然として用いられ、これは隣接する2つのステンシルから数値流束を構成することと共通している。本稿で扱う3ステンシルの保存型差分スキームは隣接する2つのステンシルから得られる数値流束を用いており、差分スキームの高次精度化の流れの中でも、数値流束やその背後にある近似 Riemann 解の考察の面から見れば理論的には依然として重要である。

歴史的には、Oleinik[10]によるLax-Friedrichsスキーム[8]を用いた非線形スカラー保存則の解の存在と一意性、Engquist-Osherスキーム[3]のエントロピー条件への適合、ある意味の安定性と少なくとも弱解への収束²を保証する枠組としてのHartenによるTVD概念[5, 6]の提案、といった現在の差分スキームでも基盤となる理論的考察は3ステンシルの保存型差分近似で行われている。

Hartenは3ステンシルの保存型差分近似がTVD(全変動減少、実際には全変動非増加)であるための条件を数値粘性の範囲を決める式で提示し、これはTVD条件として知られる。この概念は、衝撃波のような不連続において副次的振動と数値的鈍化の両方を抑制するための基本的な基準として差分スキームの発展に大きな役割を果たした。しかしながら、理論的な観点では全変動(TV=Total Variation)が有界(または安定)であることから弱解への収束(厳密には弱解のどれかに収束する近似解の部分列の存在)は保証されるものの、エントロピー条件を満たす弱解への収束、即ちエントロピー条件への適合は保証されない。全変動の枠組はエントロピー条件への適合の議論には使えず、代わりに[2]などでは差分の単調性に基づいた議論が行われた。つまり、[5, 6]等の結果が示された当時は、弱解への収束を論じるための「ものさし」とエントロピー条件への適合を論じる「ものさし」が数学的にはかなり異なるものであるために両方の議論を統合できないという状況であった。

そのため、TVDの性質は有するが単調性は満たさない差分スキーム(衝撃波捕獲においてよい結果を示すスキームの殆どがそうなる)でどのような場合にエントロピー条件を満たす弱解への収束が保証できるのかという問題が浮上した。TVD条件を満たす最小限の数値粘性ではスキームはエントロピー解への適合を失う事が容易に確かめられる一方で、数値的な実験など経験的には何らかの形で適度な数値粘性を付加すればエントロピー解への適合が得られるであろうと推測されていたが、これに理論的な裏づけを与えたのがAiso[1]の結果である。[1]は単調性を満たさない差分スキームでエントロピー条件への適合を議論する枠組を与えたとも言える。

しかし[1]について数値計算の観点からの邦文による解説は今まで十分ではなかった。そこで、本稿では空間1次元非線形保存則の差分スキームの関連事項の解説も含め、[1]の結果とその意味の説明を試みる。なお、定理等について、証明が数値計算にはあまり関係のない実関数論的な細かい議論による場合や非常にテクニカルな評価式を積み重ねるような場合には、証明については概略を記すのみとするか省略している。

¹ 別の言い方をすれば Taylor 展開による誤差評価が有効な部分

² 厳密には弱解に収束する収束部分列の存在

2 スカラー保存則の解

ここでは、次の1次元空間上の非線形スカラー保存則の初期値問題を扱う。

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \\ u(x, 0) = u_0(x), -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1)$$

未知関数 u は空間と時間の関数で $u = u(x, t)$, x は空間座標、 t は時刻 (時間座標) である。 f を流束関数 (flux function) と呼ぶ。非線形が一般的で線形が特殊であるとして線形の場合を含む考え方もあるが、ここでは f は非線形とし、更に C^1 -級 (1階微分 f' が連続) で厳密凸、即ち $f'' > 0$ を仮定する³。初期値 u_0 については有界かつ有界変動が通常の仮定の一つであるが、ここでは数値計算に向けての準備なので区分的に滑らかであることも仮定する。即ち、 u_0 が滑らかでない点の集合は集積しない点集合⁴ また、解 $u = u(x, t)$ についても有界かつ有界変動の範囲で考えることとするが、初期値の仮定から t を任意の時刻 T を固定した $u(x, T)$ を x の関数と見做した場合には区分的滑らかであるとしてよい。

空間1次元の非線形スカラー保存則の解の挙動・性質の主なものとして、特性曲線、滑らかな初期値での解の連続性の喪失、弱解、Rankine-Hugoniot の条件、衝撃波、膨張波、エントロピー条件とそれを満たす弱解について説明する。

特性曲線 (characteristic) は x, t -半平面 $\{(x, t) \mid -\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty\}$ 内で解 $u = u(x, t)$ が滑らかな領域で

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(x, t)) \quad (2)$$

を満たす曲線 $x = x(t)$ である。(図1参照) 特性曲線は無数にある。また実際には両側に無限に伸びるとは限らず、初期値問題 (1) では片端または両端を有する。

定理 1. 初期値問題 (1) の特性曲線は真っ直ぐである。

証明: $u_t + f(u)_x = 0$ で解 u が滑らかであれば

$$u_t + f'(u) \cdot u_x = 0 \quad (3)$$

なので、ある特性曲線 $x = x(t)$ 上での $u = u(x, t)$ の値 $u(x(t), t)$ の変化を調べるため t で微分すれば

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = u_x \cdot f'(u(x, t)) + u_t = 0 \quad (4)$$

となる。特性曲線上で u の値は不変で定義式 (2) も $\frac{dx}{dt} = (\text{定数})$ となる。即ち特性曲線は真っ直ぐ (各点で局所的には直線) であることが分かる。(定理1の証明終)

特性曲線の傾きである $f'(u)$ の値は特性速度 (characteristic speed) とも呼ばれる。解の値が u であるという情報が $f'(u)$ の速さで伝わるというようにも考えられるからである⁵。

u が帯状領域 $\{(x, t) \mid -\infty < x < \infty, 0 \leq t < M\}$ で滑らかであれば、 u の初期値が与えられている x 軸上全ての点 $(X, 0)$ から出る特性曲線

$$C_X : x = f'(u_0(X)) \cdot t + X, 0 \leq t < M$$

はどの2つも互いに交わることはない。逆にこのような無数の特性曲線がどの2本も互いに交わらずに帯状領域 $\{(x, t) \mid -\infty < x < \infty, 0 \leq t < M\}$ を覆い尽くすのであれば、特性曲線の集まり $\{C_X\}_{-\infty < X < \infty}$ を通じて解を与えることができ、領域内の任意の点 (x, t) での u の値 $u(x, t)$ は

$$u_0(x - f'(u(x, t)) \cdot t, 0) = u(x, t) \quad (5)$$

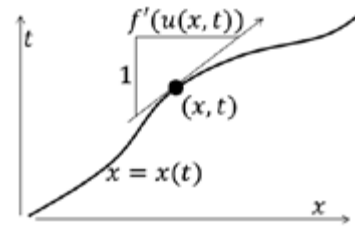


図 1: 特性曲線

³ $f(u) = u^2(u^2 - 1)$ のような厳密凸でないもの場合、線形退化した波である接触不連続 (圧縮性 Euler 方程式の接触不連続のようなものと考えてよい) が発生し、真性非線形な波ばかりではなくなるため議論が複雑になる。

⁴ 実数直線上の点集合 A が集積しないとは、 A が集積点を有しないことだが、別の言い方では任意の有限区間 $[a, b]$ 内の A の点の個数は有限、とも言える。

⁵ 解の値を u を微小に変動させた場合にその変動が伝わる速さが特性速度である、という解釈もある。

なる方程式を満たす値である。初期関数 $u_0(x)$ が x の非減少関数であるとき、そしてそのときに限って、初期値問題 (2) は偏微分方程式の通常解 (弱解と対比し強解という) を有する。そのときに限られる理由は、下の議論が与えている。

初期値が滑らかであっても解が連続性を失うことは、上の特性曲線の議論をもう少し進めれば背理法から容易に分かる。つまり、初期関数が非減少関数でなければ、2つの実数 X_1, X_2 を

$$X_1 < X_2, u_0(X_1) > u_0(X_2) \tag{6}$$

となるようにとれる。 $t > 0$ 全域で滑らかな解 $u = u(x, t)$ の存在を仮定する。このとき、2つの特性曲線

$$C_{X_1} : x = f'(u_0(X_1)) \cdot t + X_1, C_{X_2} : x = f'(u_0(X_2)) \cdot t + X_2$$

は $t > 0$ で交わる⁶。(図2)しかし、 C_{X_1} 上の任意の点で u の値は一定で $u = u_0(X_1)$ であり、 C_{X_2} 上では $u = u_0(X_2)$ である。つまり、その交点では同一点において u が2つの異なる値をとることになり矛盾が生じる。よって $t > 0$ 全域で滑らかな解は存在しない。上の議論をまとめれば

定理 2. 初期値問題 (2) の初期値 $u_0(x)$ が滑らかでかつ x について非減少であれば、(2) は $-\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty$ で滑らかな解を有する。それ以外の滑らかな初期値の場合は、無限大までの全時刻における滑らかな解は存在し得ない。

弱解は解が滑らかさや連続性を失った場合にも、何らかの意味で解を考えられるように定義される。大雑把な言い方をすれば、「積分形で表される保存則元来の定義に立ち戻って」ということなのだが、保存則を考える有限体積の境界が解の不連続に一致⁷する場合 (図3) などその言い方では自明と言えなくなるので、次の原理に従って関数が「= 0」となることを捉え直し、その式を部分積分公式の形式的適用で変形したものである。変形で得た式は、 u に不連続があっても積分さえできれば解釈可能なものになっている。

原理 1. ある領域 D で滑らかな任意の関数 ϕ について、

$$\int_D \phi \cdot f = 0 \tag{7}$$

が成り立てば、 $f = 0$ と考える。

また、 D が無限領域の場合、 $f = 0$ と判明する前は (7) の左辺積分の存在が保証できないので、数学的議論の技術的なものとして ϕ を「ある有限領域があってその中でのみ0でない値をとる (つまりその領域の外ではどこでも0となる)⁸」ものに限定しても問題ないのでそのようにすることも多い。ただし、この有限領域は ϕ に依存してとればよい (つまり、有限でありさえすれば ϕ の台に応じていくら大きなものをとってもよい)⁹ものであることに注意する。

初期値問題 (1) の弱解の定義は次のようになる。

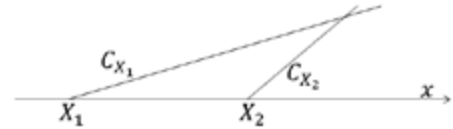


図 2: 特性曲線の交差

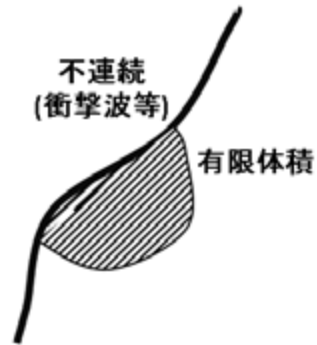


図 3: 有限体積の境界が不連続に一致するような場合

⁶ 実際、交点の t 座標は $\frac{X_2 - X_1}{f'(u_0(X_1)) - f'(u_0(X_2))}$ である。 $f'' > 0$ から f' は増加関数で $f'(u_0(X_1)) - f'(u_0(X_2)) > 0$

となることにも注意する。

⁷ もう少し厳密な言い方をすると、「試験体積の境界と解が連続でない場所との共通部分が或る曲線分になる」ということになる。また、Rankin-Hugoniot の条件を考慮すれば、保存原理を考える有限体積の境界が衝撃波などの不連続と重なっていても問題がないことが分かる。))

⁸ 数学的には「 ϕ はコンパクトな台を持つ」という。台とはある関数についてその値が0でない点の集合かその閉包 (その集合を含む最小の閉集合)

⁹ そのようにしないと、 D が無限領域の場合に全域で「= 0」の条件を与えることができなくなる。

定義 3. ある定数 M (この M は ϕ に依存してよい) があり、 $|x|, t > M$ では $\phi(x, t) = 0$ となるような滑らかな関数 ϕ の任意のものについて、

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{\phi_t u + \phi_x f(u)\} dx dt + \int_0^\infty \phi(x, 0) u_0(x) dx = 0 \tag{8}$$

が成立するような $u = u(x, t)$ を問題 (1) の弱解という。また、各 ϕ を試験関数 (test function) という。一方、通常の滑らかな解 (微分方程式内の微分項をそのままに解釈して成立している解) を強解という。

つまり、原理 1 と部分積分公式の形式的適用によって、形式的にはあるが、微分できない関数 u から微分できる関数 ϕ に微分を移すことで解釈可能な式を作り、あらためてその解釈可能な式を満たすものを弱解と呼ぶことにした訳である。また弱解の条件式 (8) は左辺第 2 項の積分により初期値への適合も包含していることに注意する。

また、不連続を許容するので、全ての (x, t) , $-\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty$ で $u(x, t)$ の値が与えられる必要はない。実際、式 (8) の左辺が意味を有すれば弱解か否か判定できるので、式 (8) 左辺の 2 つの積分が意味を持つようなものであればよい訳である。例えば、初期値について不連続を許容して

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ -1, x > 0 \end{cases} \tag{9}$$

とする場合に $u_0(0)$ は与えなくてもよい。どのような値にしても支障がない。そして、 $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ であれば、この初期値の場合に

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, x < 0, t \geq 0 \\ -1, x > 0, t \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

が下で述べる Rankine-Hugoniot 条件にも適合する弱解となるが、 $u(0, t), t > 0$ の値を特に与える必要はない。これらの事柄は原理 1 に基づくとも言え、その原理に基づいて 2 つの関数 u, v が等しい (つまり $u - v = 0$) といっても、全ての点で u, v が等しい必要はなく、原理 1 の積分に影響を与えなければ、いくつかの点で u と v が異なったり、どちらか片方または両方の値が与えられていなくても問題はない。

また弱解の定義は積分形の保存則を包含する。

定理 4. 初期値問題 (1) の弱解は $x_1 < x_2, 0 < t_1 < t_2$ として、

$$\int_{x_1}^{x_2} \{u(x, t_2) - u(x, t_1)\} dx + \int_{t_1}^{t_2} \{f(x_2, t) - f(x_1, t)\} dt = 0 \tag{11}$$

を満たす。

証明： 議論の簡略化のためこのとき x, t -平面での長方形 $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ の周上では有限個の点を除いて $u = u(x, t)$ が滑らかであるとしておく¹⁰。 x の滑らかな関数 $g(x; x_1, x_2, h), x_1 < x_2, h > 0$ で

- 1) $x_1 \leq x \leq x_2$ ならば $g(x; x_1, x_2, h) = 1$
- 2) $x \leq x_1 - h$ または $x \geq x_2 + h$ ならば $g(x; x_1, x_2, h) = 0$
- 3) $x_1 - h \leq x \leq x_1$ では単調増加
- 4) $x_2 \leq x \leq x_2 + h$ では単調減少

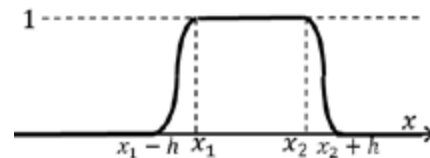


図 4: 関数 g

¹⁰ この条件をつけなくても最終的には問題は生じない。ただ、(11) が最初に導出される際は $u(x, t_1), f(x_1, t)$ がそれぞれの左極限 $\lim_{t \uparrow t_1} u(x, t), \lim_{x \uparrow x_1} f(x, t)$ に、 $u(x, t_2), f(x_2, t)$ がそれぞれの右極限 $\lim_{t \downarrow t_2} u(x, t), \lim_{x \downarrow x_2} f(x, t)$ に置き換わったものとなる。

となるもの (図 4) が存在するので、その中から一つを選び固定し、適当な定数 C を (必要であれば十分小さく) とり、

$$\phi_j(x, t) = g\left(x; x_1, x_2, \frac{C}{j}\right) \cdot g\left(t; t_1, t_2, \frac{C}{j}\right) \quad (12)$$

のような試験関数の列 $\{\phi_j\}_{j \text{ は整数}}$ を定める。次に弱解の条件式 (8) で $\phi = \phi_j$ として $j \rightarrow \infty$ の極限を考えれば

$$\int_{x_1}^{x_2} \{u(x, t_1) - u(x, t_2)\} dx + \int_{t_1}^{t_2} \{f(x_1, t) - f(x_2, t)\} dt = 0$$

即ち、(11) を得る。(定理 4 の証明終)

次に、弱解を解として許容した場合の解の不連続について考察する。Rankine-Hugoniot の条件 (下の定理) が重要である。

定理 5. 半平面 $-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$ 内の曲線

$$S : x = x_S(t), T_0 \leq t \leq T_1 \quad (13)$$

と $h > 0$ があり、領域

$$D = \{(x, t) | x_S(t) - c < x < x_S(t) + c, T_0 < t < T_1\}$$

において解 $u = u(x, t)$ は S 上の各点で不連続で、それ以外では滑らかであるとする。そこで

$$u_L(t) = \lim_{x \uparrow x_0} u(x, t), u_R(t) = \lim_{x \downarrow x_0} u(x, t) \quad (14)$$

のように $u_L(t), u_R(t)$ を定めると、関係式

$$(x_S)'(t)(u_L(t) - u_R(t)) = f(u_L(t)) - f(u_R(t)) \quad (15)$$

が成り立つ。式 (15) を Rankine-Hugoniot の条件¹¹ と呼ぶ。物理的には $(x_S)'(t)$ は不連続点の移動速度 s を表している。

証明：任意の $T \in (T_0, T_1)$ 及び a, b (ただし $x_S(T) - c < a < x_S(T) < b < x_S(T) + c$ を満たす) をとれば、 T の適当な近傍 $(T - \epsilon, T + \epsilon)$ があって $(a, b) \times (T - \epsilon, T + \epsilon) \subset D$ としてよい。そこで $t \in (T - \epsilon, T + \epsilon)$ として

$$\int_a^b u(x, t) dx$$

について考える。 $\int_a^b u(x, t) dx$ を t で微分すれば保存の原理から

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(u(a, t)) - f(u(b, t)) \quad (17)$$

を得る。一方で、

$$\int_a^b u(x, t) dx = \int_a^{x_S(t)} u_-(x, t) dx + \int_{x_S(t)}^b u_+(x, t) dx,$$

ただし、 $u_-(x, t) = \lim_{\xi \uparrow x} u(\xi, t), u_+(x, t) = \lim_{\xi \downarrow x} u(\xi, t)$

なので、

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^{x_S(t)} \frac{\partial}{\partial t} u_-(x, t) dx + (x_S)'(t) \cdot u_-(x_S(t), t) + \int_{x_S(t)}^b \frac{\partial}{\partial t} u_+(x, t) dx - (x_S)'(t) \cdot u_+(x_S(t), t). \quad (18)$$

¹¹ 通常、Rankine-Hugoniot の条件はある時刻にある位置で衝撃波のような不連続があり、その不連続が移動する速度を s 、不連続での u の左右からの極限值をそれぞれ u_L, u_R と仮定して

$$s(u_R - u_L) = f(u_R) - f(u_L) \quad (16)$$

のように記される。(衝撃波等不連続上の点での考察という状況が分かりきっていけば、 t や x を明示しなくとも問題がない。)

となり、右辺の積分項については、

$$\begin{aligned} \int_a^{x_S(t)} \frac{\partial}{\partial t} u_-(x, t) dx &= \lim_{h \downarrow 0} \int_a^{x_S(t)-h} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \int_a^{x_S(t)-h} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) \right\} dx \\ &= f(u(a, t)) - \lim_{h \downarrow 0} f(u(x_S(t) - h, t)) \\ &= f(u(a, t)) - f(u_L(t)), \end{aligned} \tag{19}$$

同様に

$$\int_{x_S(t)}^b \frac{\partial}{\partial t} u_+(x, t) dx = f(u_R(t)) - f(u(b, t)), \tag{20}$$

となる。 $u_-(x_S(t), t) = u_L(t)$, $u_+(x_S(t), t) = u_R(t)$ は明らかなので、

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(u(a, t)) - f(u_L(t)) + f(u_R(t)) - f(u(b, t)) + (x_S)'(t)(u_L(t) - u_R(t)) \tag{21}$$

を得る。

(17)(21) から、

$$f(u(a, t)) - f(u_L(t)) + f(u_R(t)) - f(u(b, t)) + (x_S)'(t)(u_L(t) - u_R(t)) = f(u(a, t)) - f(u(b, t))$$

なる等式を得るが、両辺で $a \uparrow x_S(t)$, $b \downarrow x_S(t)$ の極限をとれば、

$$(x_S)'(t)(u_L(t) - u_R(t)) = f(u_L(t)) - f(u_R(t)) \tag{22}$$

を得る。(定理5の証明終)

特性曲線と弱解から導かれる Rankine-Hugoniot の条件から、初期値問題 (1) の解の構成法として次のようなものが考えられる

(P1) 時間発展で時刻を $t = 0$ から進めていくと同時に直線 $t = 0$ の各点から初期値を利用して t の正方向に特性曲線を伸ばす。

(P2) 時刻 t においてどれか2本の特性曲線が出会ったならば Rankine-Hugoniot の条件を満たすように不連続を作り、それらの特性曲線をその不連続から先には伸ばさない。

実は不連続ができる場合には (P2) の手順を無限回繰り返すことになるので上の記述は厳密さを欠くが、初期値が滑らかでさえあればこの手順で解を構成可能である。

しかし、弱解の条件はかなり緩いものであり、次のようなものも弱解になってしまう。

例 1. 初期値問題 (1) で $f(u) = \frac{1}{2}u$ とし初期関数 u_0 を

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases} \tag{23}$$

とする。このとき、上の手順 (P1)(P2) に従うと

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < 0, t > 0 \\ -1, & x > 0, t > 0 \end{cases} \tag{24}$$

が解となるが、任意の $c > 1$ について

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \frac{x}{t} < \frac{1-c}{2} \\ -c, & \frac{1-c}{2} < \frac{x}{t} < 0 \\ c, & 0 < \frac{x}{t} < \frac{c-1}{2} \\ -1, & \frac{c-1}{2} < \frac{x}{t} \end{cases} \tag{25}$$

も弱解である。(弱解は無数にあることになる。)

例 1 では (P1)(P2) の手順に従えば (24) が唯一の弱解として与えられて (25) のような解は排除されるので、(P1)(P2) の手順を厳密に記述しそれを条件とすればよいとも思える。しかし、次の例では (P1)(P2) の手順では 1 つだけの弱解を定めることができない。

例 2. 初期値問題 (1) で $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ とし、初期関数 u_0 を

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (26)$$

とすると、初期値を利用して x - 軸上の各点から時刻の進行する方向に特性曲線を引いても

$$\left\{ (x, t) \mid -1 < \frac{x}{t} < 1, t > 0 \right\}$$

の領域を通る特性曲線は無い。つまり (P1)(P2) の手順では解は定まらない。しかし、次の (27) から (31) は全て初期値問題 (1) の弱解である。

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & \frac{x}{t} \leq -1 \\ \frac{x}{t}, & -1 < \frac{x}{t} < 1 \\ 1, & 1 \leq \frac{x}{t}. \end{cases} \quad (27)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (28)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & \frac{x}{t} \leq \frac{-1+c}{2} \\ c, & \frac{-1+c}{2} < \frac{x}{t} < \frac{c+1}{2} \\ 1, & \frac{c+1}{2} \leq \frac{x}{t}, \end{cases} \quad (29)$$

c は $-1 < c < 1$ である任意の実数。

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & \frac{x}{t} \leq \frac{-1+c}{2} \\ c, & \frac{-1+c}{2} < \frac{x}{t} < c \\ \frac{x}{t}, & c < \frac{x}{t} < \frac{c+1}{2} \\ 1, & \frac{c+1}{2} \leq \frac{x}{t}, \end{cases} \quad (30)$$

c は $-1 < c < 1$ である任意の実数。

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & \frac{x}{t} \leq \frac{-1+c_1}{2} \\ c_i, & \frac{c_{i-1}+c_i}{2} < \frac{x}{t} < \frac{c_i+c_{i+1}}{2} \\ 1, & \frac{c_{m-1}+1}{2} \leq \frac{x}{t}, \end{cases} \quad (31)$$

m は 2 以上の整数, $c_0 = -1, c_m = 1,$
 c_1, \dots, c_{m-1} は $-1 < c_1 < \dots < c_{m-1} < 1$ である任意の実数。

もちろん、(27) から (31) が弱解の全てではなく他にも無数の弱解が存在する。

この例が示すのは、弱解は緩すぎるからといって (P1)(P2) のような条件をつければ解を定められない場合が出るということである。つまり (P1)(P2) の手順は解の存在の条件としては、まだ「きつ過ぎる」ことになる。解の存在を保証しつつ複数の異なる解の存在は除外するという適度な条件 (の一つ) がエントロピー条件であり、これから説明するが、その前に中心のある膨張波 (centered rarefaction wave, 有心膨張波ともいう) について定義しておく。

定義 6. 初期値問題 (1) の弱解 $u = u(x, t)$ が (x_0, t_0) において次の形になっているとする。

(1) x の関数は $u(x, t_0)$ は $x = x_0$ の適当な近傍上では $x = x_0$ を除いたところでは滑らか、かつ $x = x_0$ での左右極限 $u_L = \lim_{x \uparrow x_0} u(x, t_0), u_R = \lim_{x \downarrow x_0} u(x, t_0)$ について

$$u_L < u_R \tag{32}$$

である。

(2) 適当な $M > t_0$ をとり¹²、領域 $D = \left\{ (x, t) \left| f'(u_L) < \frac{x - x_0}{t - t_0} < f'(u_R), t_0 < t < M \right. \right\}$ 上で

$$f'(u_L) < v < f'(u_R) \text{ なる任意の } v \text{ について、} \frac{x - x_0}{t - t_0} = f'(v) \text{ なる点 } (x, t) \text{ では } u(x, t) = v \tag{33}$$

このとき、領域 D 上の解を (x_0, t_0) を中心とする膨張波という。

上の例 2 では解 (27) は $(0, 0)$ を中心とする膨張波を含んでいる。

エントロピー条件の定義に先立って、エントロピー対と呼ばれる 2 つの関数の対を定義する。

定義 7. 2 つの実数関数 U, F の対 (U, F) がエントロピー対であるとは、 U, F が次の条件を満たすことを言う。

(E1) U が凸関数である。即ち、任意の $a < b, 0 < \theta < 1$ について

$$U((1 - \theta)a + \theta b) \leq (1 - \theta)U(a) + \theta U(b)$$

(E2) 次の関係が成立する。

$$F'(u) = f'(u) \cdot U'(u). \tag{34}$$

初期値問題 (1) で解 $u = u(x, t)$ の値の範囲に何らかの事前評価が与えられているような場合、凸関数 U の定義域は全実数でなくてもその範囲を含んでいればよい。 U をエントロピー関数、 F をエントロピー流束と呼ぶ。

このスカラー保存則の場合は任意の凸関数 U に対して F を定めることが可能であるので、エントロピー対は無数に存在することが分かる。(保存則の系にもエントロピー対の定義は拡張されるが、エントロピー対の存在が自明とはいえなくなる。)

定義 8. 初期値問題 (1) の弱解 $u = u(x, t)$ がエントロピー条件を満たすとは、

$$U(u)_t + F(u)_x \leq 0 \tag{35}$$

が任意のエントロピー対 (U, F) について成立することである。不等式 (35) をエントロピー不等式と呼ぶ。なお、不等式 (35) は弱解に関するものなので弱解の定義式 (8) と同様に試験関数を用いて解するが不等式ゆえ試験関数に符号の制限が加わる。即ち、不等式 (35) は定義 3 内の条件に加え非負でありかつ x 軸上では 0 であるような任意の試験関数 ϕ について、

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{\phi_t U(u) + \phi_x F(u)\} dx dt \geq 0 \tag{36}$$

が成立することである。

エントロピー条件の重要性は次の定理からも理解される。

定理 9. 初期値問題 (1) の弱解でエントロピー条件を満たすものが存在しかつ一意である。

¹² $M = \infty$ とできる場合もある。実際、解 (27) ではそのようになる。

証明は実関数の性質を用い数値計算からかなり離れる部分もあるので省略する。[7, 10] 等で証明が与えられている。[10] では、異なる形のエントロピー条件を用いているがここで定めるエントロピー条件と同値である。[10] では Lax-Friedrichs 差分近似で解を構成しており、Lax-Friedrichs 差分による近似解がエントロピー条件を満たす弱解に収束することへの証明にもなっている。

エントロピー条件を満たす弱解はエントロピー解、物理的妥当解、許容解等と呼ばれる。

なお、 u が滑らかであるところに限定すればエントロピー対の定義から、

$$U_t + F_x = U'(u)u_t + F'(u)u_x = U'(u)u_t + f'(u)U'(u)u_x = U'(u) \{u_t + f'(u)u_x\} = 0$$

であるので、エントロピー不等式 (35) の不等号は不連続の状況を制約することになる。Rankin-Hugoniot の条件に対応する形で次が成立する。

定理 10. 定理 5(Rankine-Hugoniot の条件) を考察したのと同じ状況の不連続において、エントロピー条件は

$$s(U(u_R) - U(u_L)) \geq F(u_R) - F(u_L) \quad (37)$$

と同値である。

証明では次の補題を利用する。

補題 11. 初期値問題 (1) のエントロピー条件を満たす弱解で $x_1 < x_2, 0 < t_1 < t_2$ を x, t -平面での長方形 $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ の周上では有限個の点を除いて $u = u(x, t)$ が滑らかであるようにとる。このとき、

$$\int_{x_1}^{x_2} \{U(u(x, t_2)) - U(u(x, t_1))\} dx + \int_{t_1}^{t_2} \{F(u(x_2, t)) - F(u(x_1, t))\} dt \leq 0 \quad (38)$$

この補題の証明は定理 4 と同様 (一部、等号を不等号に変えて議論する部分があるが) なので省略する。この補題を用いれば定理 10 の証明も定理 5 と同様に行える。ただし、補題 11 のときと同様、一部で等号を不等号に変える必要がある。(定理 10 証明終)

定理 10 の系として次を記す。

系 12. 定理 5 で論じた不連続について、

- (1) $u_L > u_R$ である場合 (このとき $f'(u_L) > s > f'(u_R)$ は $f'' > 0$ から容易に導かれる) はエントロピー条件を満たす。
- (2) $u_L < u_R$ である場合 (このとき $f'(u_L) < s < f'(u_R)$ は $f'' > 0$ から容易に導かれる) はエントロピー条件を満たさない。

u_L, u_R, s などの記法について脚注 11 も参照のこと。

証明: Rankine-Hugoniot 条件は f のグラフ上の 2 点 $(u_L, f(u_L)), (u_R, f(u_R))$ を結ぶ線分の傾きが s であることを表し、 f は厳密凸なのでこの線分は f のグラフより上にある。(一致する両端を除く) このことから u_L と u_R の間に

$$\sigma < \alpha \text{ ならば } f'(\sigma) < s, \sigma > \alpha \text{ ならば } f'(\sigma) > s$$

となる α をとれる。(図 5) すると、

$$\begin{aligned} & s(U(u_R) - U(u_L)) - F(u_R) + F(u_L) \\ &= s \int_{u_L}^{u_R} U'(\sigma) d\sigma - \int_{u_L}^{u_R} F'(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{u_L}^{u_R} (s - f'(\sigma)) U'(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{u_L}^{\alpha} (s - f'(\sigma)) U'(\sigma) d\sigma + \int_{\alpha}^{u_R} (s - f'(\sigma)) U'(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

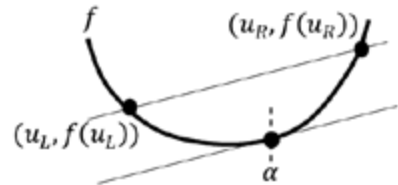


図 5: α の説明

$u_L < u_R$ の場合を考える。 $u_L \leq \sigma \leq \alpha$ では $s - f'(\sigma) \geq 0, U'(\sigma) < U'(\alpha)$ より

$$\int_{u_L}^{\alpha} (s - f'(\sigma))U'(\sigma)d\sigma \leq \int_{u_L}^{\alpha} (s - f'(\sigma))U'(\alpha)d\sigma$$

$\alpha \leq \sigma \leq u_R$ では $s - f'(\sigma) \leq 0, U'(\sigma) > U'(\alpha)$ より

$$\int_{\alpha}^{u_R} (s - f'(\sigma))U'(\sigma)d\sigma \leq \int_{\alpha}^{u_R} (s - f'(\sigma))U'(\alpha)d\sigma$$

となるから、

$$\begin{aligned} & s(U(u_R) - U(u_L)) - F(u_R) + F(u_L) \\ & \leq \int_{u_L}^{u_R} (s - f'(\sigma))U'(\alpha)d\sigma \\ & = U'(\alpha) \int_{u_L}^{u_R} (s - f'(\sigma))d\sigma \\ & = U'(\alpha) \cdot \{s(u_R - u_L) - (f'(u_R) - f(u_L))\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

を得る。 $u_L > u_R$ の場合も同様の手順で示される。(系 12の証明終)

弱解では定理 5で論じたように不連続において Rankine-Hugoniot の条件が要求されるが、上の補題よりエントロピー条件では更に $u_L > u_R$ が要求される。別の言い方では、エントロピー条件は不連続の両側の特性曲線が時間進行と共に不連続に近づき不連続に達したところで消滅する事を要求している。また、一方で不連続の両側の特性曲線が時間進行と共に離れていくような場合にはその時刻以降の不連続の存在を許容しない¹³。「不連続のその時刻以降の存在を許容しない」という条件が規定する解が定義 6の「中心のある膨張波」である。

本稿で考える区分的に滑らかな解の範囲では、エントロピー条件を満たす弱解について、厳密さを少々欠くが、既に掲げた (P1)(P2) の手順に次を加えたものとしても支障はない。

(P3) (P1)(P2) の手順で特性曲線が引けなかった部分については、その部分が生じる最初の時刻(ここで扱う初期値問題 (1) では $t = 0$ の初期値の段階のみ)¹⁴にもどり、そこから中心のある膨張波を想定して特性曲線を引いていく。

もちろん、(P3) で引いた特性曲線がある時間経過の後に他の特性曲線と交わる(結果的にはその特性曲線が終わり衝撃波を生成する)ことは有り得る。この (P1)(P2)(P3) の考え方は、区分的に滑らかな解に限定するならば圧縮性 Euler 方程式のような保存則の系においてもほぼ有効である。

今一度、例 1及び 2で確認すれば、エントロピー条件を満たす弱解は (24) 及び (27) であり、他の弱解は不連続の部分で確認すれば(定理 10の不等式 (37) を用いればよい) エントロピー条件を満たしていないことが容易に理解できる。

なお、エントロピー条件は任意のエントロピー対でのエントロピー不等式の成立を要請しているが、初期値問題 (1) の場合にはエントロピー関数 U が厳密凸であるエントロピー対の一つでエントロピー不等式が成立すればエントロピー条件が満たされることが分かっている。定理の形で述べれば次のようになる。

定理 13. 初期値問題 (1) の弱解 u が、エントロピー関数 U が厳密凸であるエントロピー対 (U, F) の一についてエントロピー不等式 (35) を満たすならば、 u はエントロピー条件を満たす。

証明：Rankine-Hugoniot の条件 (16) を満たしている u_L, u_R, s について、定理の仮定を満たすエントロピー対 (U, F) で定理 10の不等式 (37)

$$s(U(u_R) - U(u_L)) \geq F(u_R) - F(u_L)$$

¹³ 不連続の両側の値 u_L, u_R の大小関係は保存則の系の場合に拡張できないが、特性曲線の不連続周辺での挙動を通じた解積は系の場合でも有効である。

¹⁴ 圧縮性 Euler 方程式のような保存則の系やスカラー保存則でも凸でない流束関数を考える場合には $t > 0$ でこの (P3) に該当するような不連続が出現する場合がある。

が成立てば $u_L > u_R$ となることを示す。不連続ゆえ $u_L \neq u_R$ としてよく、関数 g として、グラフにした場合 f と 2 点 $(u_L, f(u_L)), (u_R, f(u_R))$ で交わる 1 次関数を考える。Rakine-Hugoniot 条件から 2 点を通る直線の傾きが s なので g は具体的には $g(\sigma) = s \cdot (\sigma - u_L) + f(u_L)$ である。すると

$$\begin{aligned}
& s(U(u_R) - U(u_L)) - F(u_R) - F(u_L) \\
&= s \int_{u_L}^{u_R} U'(\sigma) d\sigma - \int_{u_L}^{u_R} F'(\sigma) d\sigma \\
&= \int_{u_L}^{u_R} g'(\sigma) U'(\sigma) d\sigma - \int_{u_L}^{u_R} f'(\sigma) U'(\sigma) d\sigma \\
&= \int_{u_L}^{u_R} (g'(\sigma) - f'(\sigma)) U'(\sigma) d\sigma \\
&= \{(g(\sigma) - f(\sigma)) U'(\sigma)\} \Big|_{\sigma=u_L}^{\sigma=u_R} - \int_{u_L}^{u_R} (g(\sigma) - f(\sigma)) U''(\sigma) d\sigma \\
&= - \int_{u_L}^{u_R} (g(\sigma) - f(\sigma)) U''(\sigma) d\sigma
\end{aligned}$$

f は厳密凸なので、 σ が u_L と u_R の間にあれば、 $g(\sigma) > f(\sigma)$ である。また $U'' > 0$ 。即ち、不等式 (37) は $u_L > u_R$ を意味する。(定理 13 の証明終)

3 スカラー保存則の解の Riemann 問題

初期値問題 (1) の有限体積法による差分近似では空間を有限体積に細分し、隣接有限体積で行き来する流束の近似が必要である。その考察の際に 2 つの有限体積が隣接する境界付近の状況を模擬するものとして Riemann 問題を考えることができる。

Riemann 問題とは (空間 1 次元の場合) ある点を境にその左と右がそれぞれ定数関数である初期値を有する初期値問題であり、ここでは境を $x = 0$ とする。

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_-, x < 0 \\ u_+, x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (39)$$

(1) と同じく流束関数は C^1 -級で厳密凸とする。

前節の (P1)(P2)(P3) の手順を適用すれば厳密解は次のようになる。

- $u_L > u_R$ の場合

Riemann 解は衝撃波となる。

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-, \frac{x}{t} < \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \\ u_+, \frac{x}{t} > \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}. \end{cases} \quad (40)$$

- $u_L < u_R$ の場合

Riemann 解は原点を中心とする膨張波となる。

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-, \frac{x}{t} \leq f'(u_-) \\ g\left(\frac{x}{t}\right), f'(u_-) < \frac{x}{t} < f'(u_+) \\ u_+, \frac{x}{t} \leq f'(u_+), \end{cases} \quad (41)$$

ただし、 g は f' の逆関数である。(条件より f' は単調増加であるから逆関数が存在する)

なお、解 (40)、(41) のどちらにおいても $u(x, t)$ の値は x/t に依存する。このような解は相似解と呼ばれる。Riemann 問題が $x = 0$ の左右の初期値 u_L, u_R で与えられ解が相似解であることから、その解を

$$u(x, t) = u(x/t; u_L, u_R) \quad (42)$$

のように記すこともある。また、Riemann 解の近似解 (近似 Riemann 解とも呼ばれる) も通常は相似解の形で構成される。

4 非線形スカラー保存則の差分近似

初期値問題 (1) の有限体積法の差分近似について次のように与える。まず、空間 (ここでは実数直線 $(-\infty, \infty)$) を分割する有限体積については各区間の大きさは一律に Δx とする

$$I_i = \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right) \quad (43)$$

とする。ただし、 $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta x$ である。時間方向の離散化については、時間刻みも一律に Δt として $t^n = n\Delta t$ とする。

u_i^n は時刻 $t = t^n$ における各有限体積 I_i 内の u の状態を代表する何らかの近似と考えるが、ここでは有限体積法の通例に従い I_i における u の平均値

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx$$

の近似と考える。

差分近似での時間発展は、まず初期値のデータ $\{u_i^0\}$ を与え、 $\{u_i^n\}$ から $\{u_i^{n+1}\}$ を得る離散時間発展を繰り返す。初期値のデータは (1) の初期関数 $u_0(x)$ を各有限体積毎に平均して得る。

$$u_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x) dx. \quad (44)$$

離散時間発展の手順が差分近似のスキームであり、本稿では陽的な保存型差分スキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \left\{ \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right\} \quad (45)$$

で各数値流束 $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ は次のようにも書けるとする。

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \{ f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n) \} - \frac{1}{2} a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n). \quad (46)$$

この $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ を数値粘性係数と呼ぶ。すると差分近似を

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2} \{ f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n) \} + \frac{\lambda}{2} \left\{ a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - a_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \right\} \quad (47)$$

のようにも書けるが、この形を粘性型と呼ぶ。

問題 (1) が特性曲線に由来する有限影響領域の性質を有するので、それに対応し、 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ は CFL 条件と呼ばれる制限を受ける。ここでは、

$$\lambda \cdot \sup |f'| \leq 1 \quad (48)$$

としておく。 $\sup |f'|$ は特性速度の絶対値 $|f'|$ の上限を意味する。

また、数値流束 $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ の決定を Riemann 問題の近似解と関連付けることもある。 $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ は時刻 $t = t^n$ で有限体積 I_i と I_{i+1} の境界 $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ を通過する流束の近似であるが、境界 $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ 付近での様子を Riemann 問題 (39) で $u_L = u_i^n, u_R = u_{i+1}^n$ としたもの

$$(RP)_{i+\frac{1}{2}}^n \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_i^n, & x < 0 \\ u_{i+1}^n, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

を考え、その厳密解または近似解から数値流束を導く考え方である。有限体積の境界の位置は $x = 0$ に相当するため (RP) $_{i+\frac{1}{2}}^n$ の厳密解または近似解

$$u(x, t) = u(x/t; u_i^n, u_{i+1}^n)$$

で $x = 0$ 即ち $x/t = 0$ としたものが有限体積境界での u の近似になり数値流束はそれを流束関数 f に代入したもので与えられる。

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u(0; u_i^n, u_{i+1}^n)). \quad (49)$$

保存型 (45)、粘性型 (47) の様に一般的に差分近似を記述したが、数値粘性係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ を決定すれば特定の差分スキームを与えることができる。いくつかの例を挙げる。

1) Lax-Friedrichs のスキーム

Lax[8] により提案され非線形スカラー保存則のスキームの数値計算を可能にした最初の差分近似といわれる。Oleĭnik[10] はこれを用いて非形スカラー保存則の解の存在・一意性を論じた。通常

$$u_{i+1}^n = \frac{u_{i-1}^n + u_{i+1}^n}{2} - \frac{\lambda}{2} \{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)\} \quad (50)$$

と記されるが、保存型 (45) で記述すれば数値流束は

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = f^{LF}(u_i^n, u_{i+1}^n) = \frac{1}{2} \{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)\} - \frac{1}{2\lambda} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

となり、粘性型 (47) で記述すれば数値粘性は定数で u_i^n, u_{i+1}^n に依存しない。

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^{LF} \equiv \frac{1}{\lambda} \quad (51)$$

少々特殊なスキームで、 $\{u_i^n\}_{n,i}$ の偶奇が一致 と $\{u_i^n\}_{n,i}$ の偶奇が相違 は全く依存し合わず、無関係に時間発展が進む。

2) Godunov のスキーム

Godunov[4] により提案されたが、Riemann 問題の厳密解を利用している。各時刻 $t = t^n$ 、各有限体積境界 $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ で Riemann 問題 (RP) $_{i+\frac{1}{2}}^n$ を考え、その厳密解

$$u = u_{\text{exact}}(x/t; u_i^n, u_{i+1}^n)$$

により数値流束が

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_{\text{exact}}(0; u_i^n, u_{i+1}^n)) \quad (52)$$

で与えられることとなる。問題 (1) の場合には

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \min_{u_i^n \leq s \leq u_{i+1}^n} f(s), & u_i^n \leq u_{i+1}^n \\ \max_{u_{i+1}^n \leq s \leq u_i^n} f(s), & u_{i+1}^n < u_i^n \end{cases} \quad (53)$$

となり、数値粘性係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^G(u_i^n, u_{i+1}^n)$ は

$$a^G(u_i^n, u_{i+1}^n) = \begin{cases} \max_{(s-u_i^n)(s-u_{i+1}^n) \leq 0} \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n) - 2f(s)}{u_{i+1}^n - u_i^n}, & u_i^n \neq u_{i+1}^n \\ |f'(u_i^n)|, & u_i^n = u_{i+1}^n \end{cases} \quad (54)$$

のようになる。

3) Murmann-Roe のスキーム

いわゆる上流差分スキームの中でもっとも単純なもので Murmann[9] により提唱され、Roe[12, 11] により Roe 平均を用いて系の場合に拡張されたものである。 $a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n)$ は

$$a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) = \left| \int_0^1 f'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta) d\theta \right| \quad (55)$$

で定められるが、

$$a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) = \begin{cases} \left| \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} \right|, & u_L \neq u_R \\ f'(u_L), & u_L = u_R \end{cases} \quad (56)$$

とも書け、こちらの方が意味は分かりやすいかもしれない。

4) Engquist-Osher のスキーム

Engquist-Osher のスキーム [3] では数値流束を

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = \bar{f}^{EO}(u_i^n, u_{i+1}^n) = \frac{1}{2} \{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)\} - \frac{1}{2} \int_{u_i^n}^{u_{i+1}^n} |f(s)| ds \quad (57)$$

で与えているが、数値粘性係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^{EO}(u_i^n, u_{i+1}^n)$ は

$$a^{EO}(u_i^n, u_{i+1}^n) = \int_0^1 \left| f'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta) \right| d\theta \quad (58)$$

のようになる。

5) Harten のスキーム

Harten[5, 6] は差分近似の安定性の条件として TVD 条件を提唱したが、その条件を満たすスキームをいくつか提案している。数値粘性係数を標準化¹⁵した差分商 $\lambda \cdot \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n}$ (より厳密に記せば $u_i^n = u_{i+1}^n$ の場合も包含できる $\lambda \int_0^1 f'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta) d\theta$ となる) の関数で定めるもので、

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\lambda} Q \left(\lambda \int_0^1 f'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta) d\theta \right) \quad (59)$$

の形だが、 $Q = Q(s), s \in [-1, 1]$ の具体形としては

$$Q(s) = \max(|s|, \epsilon), \quad (60)$$

$$Q(s) = \begin{cases} |s|, & \epsilon \leq |s| \leq 1 \\ \frac{s^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2}, & |s| < \epsilon, \end{cases} \quad (61)$$

のようなものがある。ただし、2つの例どちらも、 ϵ は 1 以下の正数である。

また、 $Q(s) = |s|$ とすれば Murmann-Roe のスキームに一致し、 $Q(s) = 1$ とすれば Lax-Friedrichs のスキームに一致する。これらは差分近似が TVD 条件を満たすような Q の下限と上限になっている。

上記の Harten を除く 4 つの差分近似の間には数値粘性係数の大小関係があり、次が成立する。

$$0 \leq a^{MR} \leq a^G \leq a^{EO} \leq a^{LF} = \frac{1}{\lambda} \quad (62)$$

数値粘性係数の大小に関しては、実際に数値計算を実行した場合、数値粘性係数が大きくなるほど数値解が鈍化する (衝撃波周辺で顕著に観察される) ことはよく知られている。

また、 a^G, a^{MR}, a^{EO} の関係は

$$\begin{aligned} a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) &= a^G(u_i^n, u_{i+1}^n), u_i^n \geq u_{i+1}^n \\ a^{EO}(u_i^n, u_{i+1}^n) &= a^G(u_i^n, u_{i+1}^n), u_i^n \leq u_{i+1}^n \end{aligned} \quad (63)$$

であり、有限体積境界での Riemann 問題が衝撃波解になるときは Murmann-Roe のスキームが Godunov のスキームと一致し、有限体積境界での Riemann 問題が衝撃波解になるときは Engquist-Osher のスキームが Godunov のスキームと一致していることにも注意する。

¹⁵ λ を乗じることで値の範囲が $[-1, 1]$ に入ることになる。

5 差分近似の収束の議論の基本

厳密解に対し、差分近似などの近似解を考察する場合、理論的な目標の主なものとして近似解が厳密解に収束することの証明がある。収束とは近似を無限に詳細に行えば近似解は厳密解にいくらかでも近づくという意味で、実用の際の目安にもなる。ただし、実用のためには「どの程度詳細にすればどの程度まで近づく」という定量的な情報がより有用であるが、このような定量的な評価は未だに容易ではなく、ここでは定性的な議論とする。

前節で与えた差分近似について収束を評価するためには、まず厳密解

$$u = u(x, t), -\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty$$

と比較するための近似解

$$u = u_{\Delta}(x, t), -\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty$$

を構成する必要がある。ここでは、 $\{u_i^n\}_{i,n \text{ は整数}, n \geq 0}$ が与えられれば

$$u_{\Delta}(x, t) = u_i^n, x_{i-\frac{1}{2}} < x < x_{i+\frac{1}{2}}, t^n \leq t < t^{n+1} \Delta t \quad (64)$$

により近似解 $u = u_{\Delta}(x, t)$ を与える。収束を論じる際には Δt と Δx の比 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ を固定し、 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ とした場合の u_{Δ} の収束を考察する。 $u_{\Delta} \rightarrow u$ の意味には、大別して次の2つがある。

1) 点別収束

各点 (x, t) で $u_{\Delta}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ を示す。この場合は各点毎 (x, t) で $u_{\Delta}(x, t)$ 収束を考えるが、それは実数値 $u_{\Delta}(x, t)$ の収束でしかない訳で、関数としての収束を特別に考える必要はない。また、点別収束には一様性のような考え方はない。

2) 関数のノルムを定めての (つまり、関数空間を定義しての) 収束

一般に「 $u_{\Delta} \rightarrow u$ 」とは「 u_{Δ} と u の距離が0に限りなく近づく」ことを意味する。実数の収束では「差の絶対値が0に限りなく近づく」と理解されるが、これは、2つの実数間の距離を差の絶対値として自然に定義できるからである。

関数の収束の議論では、「関数同士の距離」を決める必要がある。関数 u と v の距離は $u-v$ のノルム (大きさ) で定められるが、種々のノルムが場面に応じて使い分けられる。¹⁶保存則の差分近似の解析でよく用いられるノルムは、領域 Ω 上で定まる関数 u について

$$\|u\| = \int_{\Omega} |u|$$

とする、 L^1 -ノルムと呼ばれるノルムである。しかし、 Ω が $\{(x, t) | -\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty\}$ のような無限に広がる領域である場合にはその領域全体での積分

$$\|u_{\Delta} - u\| = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u_{\Delta}(x, t) - u(x, t)| dx dt$$

を用いると不都合が生じやすい¹⁷

そこで、 Ω に含まれる任意有界閉領域で差の絶対値の積分を考え、どの有界閉領域でもその積分の極限が0となる¹⁸のであれば $u_{\Delta} \rightarrow u$ とする、という考え方がよく使われる。ここまで来ると、

Ω 全体では $u_{\Delta} - u$ のノルムは定義されないが、 Ω 内の任意有界閉領域に制限すれば $u_{\Delta} - u$ のノルムが定まり、かつ $\rightarrow 0$ なので、 Ω においても $u_{\Delta} \rightarrow u$ と考えることにしよう。

という話になり、関数の間のノルムが定まらなくても収束は考えることができるという状況になっている。

¹⁶ それらのノルムの中には、本質的には同じ (ノルムとして同値) なものもあるが、本質的に異なるものもあり、あるノルムで考えると収束していても、他のノルムではそうでないということも生じる。

¹⁷ $u_h(x, t) = h$ のような定数関数列の $h \rightarrow 0$ での収束を考えると分かり易い。 $v(x, t) = 0$ なる定数関数に収束するのが当然のように思えるが、領域全体での $|u_h(x, t) - v(x, t)|$ の積分は $h = 0$ でない限り発散し定まらない。

¹⁸ 積分の極限を考える段階では積分領域である有界閉領域は固定されていることに注意。

u_Δ の収束については差分近似が単調であれば、Crandall-Majda[2] により、エントロピー条件を満たす弱解に収束することが示されている。差分近似が単調であるとは次のように定義される。(一般のステンシルで定義)

定義 14. 差分近似

$$u_{i+1}^n = H(u_{i-k}^n, u_{i-k+1}^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{i+k-1}^n, u_{i+k}^n) \quad (65)$$

が単調であるとは、次の条件 (66) が満たされることである。

$$\frac{\partial u_{i+1}^n}{\partial u_j^n} \geq 0, j = i-k, i-k+1, \dots, i, \dots, i+k-1, i+k. \quad (66)$$

前節で挙げた差分近似の例では Lax-Friedrichs と Engquist-Osher の 2 つのスキームがこの単調性の条件を満たす。なお、3 ステンシルの保存型差分では Engquist-Osher のスキームが単調性を満たすものの中で最小の数値粘性係数となっている。つまり、それより数値粘性が小さい差分近似は単調でなくなってしまう。

現実に利用される差分近似 (もしくはその元になっている差分近似) で収束を論じるためには他の方法を用いる必要がある。これは次節以降に論じる。

6 全変動の評価と弱解への収束

定義 15. 差分近似 (45) または (47) において、空間方向の全変動が時間進行と共に増加しない性質、即ち

$$\sum_{-\infty < i < \infty} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{-\infty < i < \infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (67)$$

を全変動減少 (TVD) という。

定理 16. 各数値粘性係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ が

$$\int_0^1 |f'(u - n_i + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta)| d\theta \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{\lambda} \quad (68)$$

即ち、

$$a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq a^{LF}$$

を満たせば、差分近似 (47) は TVD である。

これは Harten[5, 6] で証明されている。

差分近似 (47) が TVD であれば、問題 (1) の初期値の関数 u_0 が有界かつ有界変動であるから (47) により得られる各時刻の数値解 $\{u_i^n\}_{-\infty < i < \infty}$ は有界かつ有界変動で

$$\inf_{-\infty < x < \infty} u_0(x) \leq u_i^n \leq \sup_{-\infty < x < \infty} u_0(x), -\infty < i < \infty, 0 \leq n < \infty \quad (69)$$

を満たし、かつ、 V を $u_0(x), -\infty < x < \infty$ の全変動として

$$\sum_{-\infty < i < \infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq V, 0 \leq n < \infty \quad (70)$$

が成立する。また、このことから、 $\{u_i^n\}_{-\infty < i < \infty}$ から $\{u_i^{n+1}\}_{-\infty < i < \infty}$ の変化分についても評価が可能である。すると、Helly の選出定理 (証明は省略)

定理 17. 閉区間 $[a, b]$ 上で一様有界かつ一様有界変動である関数列からは、ある有界変動関数に各点収束する部分列を取ることができる。

という実関数論の結果があり、次が成立する。(これについても証明は省略する)

定理 18. 問題 (1) の差分近似 (47) が条件 (68) を満たすとする。このとき、 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ (但し $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ を固定) とすれば、近似解 u_Δ は収束部分列を有する。

ここでは収束極限が一意である保証はされていないことに注意する。しかし、収束した先に何らかの意味があるかということになれば、それが弱解であることが期待される。しかし、差分近似の式 (47) が $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ としたときに形式的に問題 (1) の保存則になるという説明では不十分である。一般に方程式 A が方程式 B に何らかの意味で収束しても、A の解がそれに対応した意味で B の解に収束することは保証されない。

本節の最後に、 u_Δ の部分列が収束した先の関数 u_{limit} が問題 (1) の弱解となることを確かめる。

弱解になるか否かを確かめるためには、 u_Δ を弱解の定義式 (8) に代入したものの左辺が $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ の際に $\rightarrow 0$ となるかを調べることになる。実際、 u_Δ を弱解の定義式 (8) の左辺に代入したもの

$$A = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{\phi_t u_\Delta + \phi_x f(u_\Delta)\} dx dt + \int_0^\infty \phi(x, 0) u_\Delta(x, 0) dx$$

において、積分を各有限体積毎に行い、

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\substack{-\infty < i < \infty \\ 0 \leq n < \infty}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \{\phi_t u_i^n + \phi_x f(u_i^n)\} dx dt + \sum_{-\infty < i < \infty} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, 0) u_i^0 dx \\ &= \sum_{\substack{-\infty < i < \infty \\ 0 \leq n < \infty}} \left[u_i^n \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \{\phi(x, t^{n+1}) - \phi(x, t^n)\} dx + f(u_i^n) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \{\phi(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - \phi(x_{i-\frac{1}{2}}, t)\} dt \right] \\ &\quad + \sum_{-\infty < i < \infty} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, 0) u_i^0 dx \end{aligned}$$

を得る。次に部分積分の差分版である “summation by parts”¹⁹ による変形で

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\substack{-\infty < i < \infty \\ 0 \leq n < \infty}} \left[(u_i^n - u_{i+1}^n) \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx + \{f(u_i^n) - f(u_{i+1}^n)\} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt \right] \\ &= \sum_{\substack{-\infty < i < \infty \\ 0 \leq n < \infty}} \left[\frac{\lambda}{2} \left\{ (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) - a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) + a_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \right\} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx \right. \\ &\quad \left. + \{f(u_i^n) - f(u_{i+1}^n)\} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt \right] \\ &= \sum_{\substack{-\infty < i < \infty \\ 0 \leq n < \infty}} \left[\frac{\lambda}{2} \left\{ (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)) + (f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) + a_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \right\} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx \right. \\ &\quad \left. + \{f(u_i^n) - f(u_{i+1}^n)\} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt \right] \\ &= \sum_{\substack{-\infty < i < \infty \\ 0 \leq n < \infty}} \left[\frac{\lambda}{2} (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)) \left\{ \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{3}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{2} a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) \left\{ \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{3}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx \right\} \right. \\ &\quad \left. + \{f(u_i^n) - f(u_{i+1}^n)\} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt \right] \\ &= \sum_{\substack{-\infty < i < \infty \\ 0 \leq n < \infty}} \left[\frac{\lambda}{2} a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) \left\{ \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{3}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx \right\} \right. \end{aligned}$$

¹⁹ 直訳では部分積分となる。

$$\begin{aligned}
 & + \{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)\} \left\{ \frac{\lambda}{2} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{3}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx + \frac{\lambda}{2} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, t^{n+1}) dx - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt \right\} \\
 & \text{となる。試験関数 } \phi \text{ の条件から} \\
 & \phi(x, t) = 0, |x|, t > M \tag{71}
 \end{aligned}$$

となるような M がとれるので、総和をとる範囲を

$$-\infty < i < \infty, 0 \leq n < \infty$$

から

$$|i| \leq [M/(\Delta x)] + 1, 0 \leq n \leq [M/(\Delta t)] + 1$$

に変えても総和自体は変化しない。(但し、 $[\alpha]$ は Gauss の記号で α を超えない最大整数を表す。) そこで十分大きな定数 $C(\phi$ にのみ依存、 $\Delta x, \Delta t$ には依存しない)、 $c = \sup_i |f'(u_i^0)|$ 、及び初期値 $u_0(x)$ の全変動を V とすれば

$$\begin{aligned}
 A & < \sum_{\substack{|i| \leq [M/(\Delta x)] + 1 \\ 0 \leq n \leq [M/(\Delta t)] + 1}} \left\{ \frac{1}{2} |u_{i+1}^n - u_i^n| \cdot C(\Delta x)^2 + c |u_{i+1}^n - u_i^n| \cdot C(\Delta x)^2 \right\} \\
 & = (c+1)C(\Delta x)^2 \sum_{\substack{|i| \leq [M/(\Delta x)] + 1 \\ 0 \leq n \leq [M/(\Delta t)] + 1}} |u_{i+1}^n - u_i^n| \\
 & = (c+1)CV(\Delta x)^2 \left(\frac{M}{\Delta x} + 2 \right) \tag{72}
 \end{aligned}$$

これより $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ の極限では弱解の条件式が成立することが示される。

定理 19. 問題 (1) の差分近似 (47) が条件 (68) を満たすとす。このとき、 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ (但し $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ を固定) とすれば、近似解 u_Δ は収束部分列を有し、各収束部分列の極限は問題 (1) の弱解である。

7 修正流束関数と数値エントロピー不等式

流束関数 f と u_i^n, u_{i+1}^n が与えられたときに、個々の差分近似のスキームは数値流束 $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ を与える。スキームにより $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ は異なるが、その相異を個々のスキームの導出法の違いではなく数理的に扱い易い何らかの要素の違いとすることができれば比較・解析が容易になると期待される。

そこで、種々のスキームを統一的に表す方法として修正流束関数を導入する。

まず対象とする差分スキームだが、近似解の収束の議論のために導入する以上、弱解への収束が期待できないものは除外してよい。そこで TVD 条件 (68) を満たすものに限定する。すると数値粘性係数の範囲は TVD 条件の通り

$$a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq a^{LF}$$

であり、数値流束 $\bar{f}_{u+\frac{1}{2}}^n$ は Lax-Friedrichs のスキームによる流束

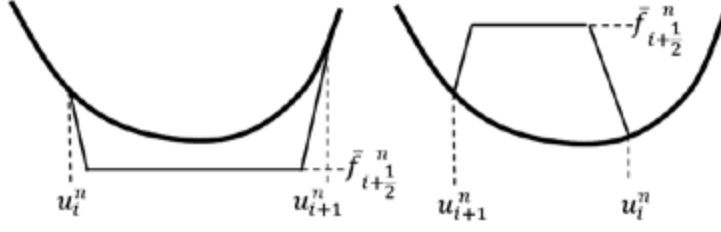
$$\bar{f}^{LF}(u_i^n, u_{i+1}^n) = \frac{1}{2} \{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)\} - \frac{1}{\lambda} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

と Murmann-Roe の差分スキームによる流束

$$\bar{f}^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) = \begin{cases} \min \{f(u_i^n), f(u_{i+1}^n)\}, & u_i^n < u_{i+1}^n \\ \max \{f(u_i^n), f(u_{i+1}^n)\}, & u_i^n > u_{i+1}^n \end{cases}$$

を両端とする区間の中に入る。

このような数値流束が与えられたとき、修正流束関数 $g(s; u_i^n, u_i^n, \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n)$ を次のように定める。(図 6)

図 6: 修正流速関数 $g_{i+1/2}^n$

- $u_i^n < u_{i+1}^n$ のとき

$$g\left(s; u_i^n, u_{i+1}^n, \bar{f}_{i+1/2}^n\right) = \begin{cases} f(s), & s \leq u_i^n \\ \max\left\{-\frac{1}{\lambda}(s - u_i^n) + f(u_i^n), \bar{f}_{i+1/2}^n, \frac{1}{\lambda}(s - u_{i+1}^n) + f(u_{i+1}^n)\right\}, & u_i^n < s < u_{i+1}^n \\ f(s), & s \geq u_{i+1}^n \end{cases} \quad (73)$$

- $u_i^n > u_{i+1}^n$ のとき

$$g\left(s; u_i^n, u_{i+1}^n, \bar{f}_{i+1/2}^n\right) = \begin{cases} f(s), & s \leq u_{i+1}^n \\ \min\left\{\frac{1}{\lambda}(s - u_{i+1}^n) + f(u_{i+1}^n), \bar{f}_{i+1/2}^n, -\frac{1}{\lambda}(s - u_i^n) + f(u_i^n)\right\}, & u_{i+1}^n < s < u_i^n \\ f(s), & s \geq u_i^n \end{cases} \quad (74)$$

簡便のため、 $g(s; u_i^n, u_{i+1}^n, \bar{f}_{i+1/2}^n)$ を $g_{i+1/2}^n(s)$ とも記す。

このように与えられた修正流速関数は、差分近似のエントロピー条件への適合の考察で用いられるが、次の性質が重要である。

補題 20. 数値流速 $\bar{f}_{i+1/2}^n$ から定められた修正流速関数 $g_{i+1/2}^n = g(u; u_i^n, u_{i+1}^n, \bar{f}_{i+1/2}^n)$ について次が成立する。

$$\bar{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left\{ g_{i+1/2}^n(u_i^n) + g_{i+1/2}^n(u_{i+1}^n) \right\} - \frac{1}{2} \int_{u_i^n}^{u_{i+1}^n} \left| (g_{i+1/2}^n)'(s) \right| ds \quad (75)$$

証明： $u_i^n < u_{i+1}^n$ のとき、

$$\int_{u_i^n}^{u_{i+1}^n} \left| (g_{i+1/2}^n)'(s) \right| ds = \left\{ f(u_i^n) - \bar{f}_{i+1/2}^n \right\} + \left\{ \bar{f}_{i+1/2}^n - f(u_{i+1}^n) \right\} = f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n) - 2\bar{f}_{i+1/2}^n$$

となるので結論は明らか。(図 6 参照) $u_i^n < u_{i+1}^n$ のときも同様。(補題 20 の証明終)

補題 20 により、TVD 条件 (68) を満たす数値流速は修正流速関数を用いれば Engquist-Osher の数値流速として表すことができるようになる。

$$f_{i+1/2}^n = \left(\overline{g_{i+1/2}^n} \right)^{EO} (u_i^n, u_{i+1}^n) \quad (76)$$

のように書いてもよい。Engquist-Osher の数値流速の性質の一つとして、それにより得られる数値解 $\{u_i^n\}_{-\infty < i < \infty, 0 \leq n < \infty}$ についてエントロピー不等式 (35) の離散版ともいえる数値エントロピー不等式

$$U(u_{i+1}^n) - U(u_i^n) + \frac{\lambda}{2} \left\{ F(u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n) \right\} - \frac{\lambda}{2} \left\{ A_{i+1/2}^n(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-1/2}^n(u_i^n - u_{i-1}^n) \right\} \leq 0, \quad (77)$$

$-\infty < i < \infty, 0 \leq n < \infty,$

ただし、 $A_{i+1/2}^n$ は i, n に依存せず一様有界。

を容易に構成できることにある。

修正流束関数にその構成法を適用することで、より広い範囲の差分近似のスキームについて数値エントロピー不等式を構成できる。

定理 21. 差分近似 (47) の各数値粘性係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ が

$$a^G(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq a^{LF} \quad (78)$$

を満たせば、(47) により得られる数値解 $\{u_i^n\}_{\substack{-\infty < i < \infty \\ 0 \leq n < \infty}}$ は任意のエントロピー対 (U, F) について数値エントロピー不等式 (77) を構成できる。

証明の前にいくつかの補題を用意する。次の補題はほぼ明らかなので証明は省略する。

補題 22. 定理 21 の仮定のもとで、修正流束関数 $g_{i+\frac{1}{2}}^n$ について次が成立する。

1) s が u_i^n と u_{i+1}^n の間にないときは $g_{i+\frac{1}{2}}^n(s) = f(s)$.

2) s が u_i^n と u_{i+1}^n の間にあるとき、

$$u_i^n < s < u_{i+1}^n \text{ ならば } g_{i+\frac{1}{2}}^n(s) < f(s). \quad u_{i+1}^n < s < u_i^n \text{ ならば } g_{i+\frac{1}{2}}^n(s) > f(s).$$

3) $\{u_i^n\}_{i,n}$ を含む適当な有界区間では $(g_{i+\frac{1}{2}}^n)' < \frac{1}{\lambda}$

定理の証明では、次のエントロピー対の族 $\{(U(*; c), F(*; c))\}_{-\infty < c < \infty}$ を用いる。

$$\begin{cases} U(s; c) = \max(0, s - c) \\ F(s; c) = \begin{cases} 0, & s \leq c \\ f(s) - f(c), & s > c \end{cases} \end{cases} \quad (79)$$

関数 $\chi^+(s)$, $-\infty < s < \infty$ を

$$\chi^+(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0 \\ 1, & s > 0 \end{cases}$$

で定めれば、

$$\begin{cases} U(s; c) = \chi^+(s - c) \cdot (s - c) = \int_c^s \chi^+(s - c) ds \\ F(s; c) = \chi^+(s - c) \cdot \{f(s) - f(c)\} = \int_c^s \chi^+ \{f(s) - f(c)\} ds \end{cases} \quad (80)$$

と書けることにも注意する。

補題 23. エントロピー対 $(U(*; c), F(*; c))$ について、定理 78 の仮定 (78) を満たす差分近似の数値解が満たすように数値エントロピー不等式 (77) を構成できる。

証明：修正流束関数 $g_{i+\frac{1}{2}}^n$ を用いて、 $A_{i+\frac{1}{2}}^n$ を

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n = \int_0^1 \chi^+((u_{i+1}^n - u_i^n)\theta + u_i^n - c) \left| \left((g_{i+\frac{1}{2}}^n)'((u_{i+1}^n - u_i^n)\theta + u_i^n) \right) \right| d\theta \quad (81)$$

と定める。

$$\begin{aligned} A_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) &= \int_{u_i^n}^{u_{i+1}^n} \chi^+(s - c) |(g'(s))| ds = \int_c^{u_{i+1}^n} \chi^+(s - c) |(g'(s))| ds - \int_c^{u_i^n} \chi^+(s - c) |(g'(s))| ds \\ &= \chi^+(u_{i+1}^n - c) \int_c^{u_{i+1}^n} |(g'(s))| ds - \chi^+(u_i^n - c) \int_c^{u_i^n} |(g'(s))| ds \end{aligned}$$

なので、

$$U(u_i^n; c) - \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n; c) - F(u_{i-1}^n; c)\} + \frac{\lambda}{2} \{A_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \chi^+(u_i^n - c) \int_c^{u_i^n} ds + \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i-1}^n - c) \int_c^{u_{i-1}^n} f'(s) ds - \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i+1}^n - c) \int_c^{u_{i+1}^n} f'(s) ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i-1}^n - c) \int_c^{u_{i-1}^n} \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| ds - \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_i^n - c) \int_c^{u_i^n} \left\{ \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| + \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i+1}^n - c) \int_c^{u_{i+1}^n} \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| ds \\
&= \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i-1}^n - c) \int_c^{u_{i-1}^n} \left\{ \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| + \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \chi^+(u_i^n - c) \int_c^{u_i^n} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i+1}^n - c) \int_c^{u_{i+1}^n} \left\{ \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i-1}^n - c) \int_c^{u_{i-1}^n} \left\{ f'(s) - \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds - \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i+1}^n - c) \int_c^{u_{i+1}^n} \left\{ f'(s) - \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&= \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i-1}^n - c) \int_c^{u_{i-1}^n} \left\{ \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| + \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \chi^+(u_i^n - c) \int_c^{u_i^n} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i+1}^n - c) \int_c^{u_{i+1}^n} \left\{ \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i-1}^n - c) \left\{ g_{i-\frac{1}{2}}^n(c) - f(c) \right\} - \frac{\lambda}{2} \chi^+(u_{i+1}^n - c) \left\{ g_{i+\frac{1}{2}}^n(c) - f(c) \right\}. \tag{82}
\end{aligned}$$

また、 $U(u_i^{n+1}; c)$ については、

$$U(u_i^{n+1}; c) = \chi^+(u_i^{n+1} - c) \cdot (u_i^{n+1} - c)$$

であり、 $u_i^{n+1} - c$ を次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
&u_i^{n+1} - c \\
&= (u_i^n - c) - \lambda \left\{ \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right\} \\
&= u_i^n - c - \frac{\lambda}{2} \left\{ g_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n) - g_{i-\frac{1}{2}}^n(u_{i-1}^n) \right\} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \int_{u_i^n}^{u_{i+1}^n} \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| ds - \int_{u_{i-1}^n}^{u_i^n} \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| ds \right\} \\
&= u_i^n - c + \frac{\lambda}{2} \left\{ g_{i-\frac{1}{2}}^n(u_{i-1}^n) - g_{i-\frac{1}{2}}^n(c) \right\} - \frac{\lambda}{2} \left\{ g_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n) - g_{i+\frac{1}{2}}^n(c) \right\} + \frac{\lambda}{2} \left\{ g_{i-\frac{1}{2}}^n(c) - g_{i+\frac{1}{2}}^n(c) \right\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \int_c^{u_{i-1}^n} \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| ds - \frac{\lambda}{2} \int_c^{u_i^n} \left\{ \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| + \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds + \frac{\lambda}{2} \int_c^{u_{i+1}^n} \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| ds \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_c^{u_{i-1}^n} \left\{ \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| + \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \int_c^{u_i^n} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \int_c^{u_{i+1}^n} \left\{ \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \left\{ g_{i-\frac{1}{2}}^n(c) - f(c) \right\} - \frac{\lambda}{2} \left\{ g_{i+\frac{1}{2}}^n(c) - f(c) \right\}. \tag{83}
\end{aligned}$$

(82) と (83) から

$$\begin{aligned}
 & U(u^{n+1}; c) - U(u_i^n; c) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n; c) - F(u_{i-1}^n; c)\} - \frac{\lambda}{2} \{A_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(u_i^n - u_{i-1}^n)\} \\
 &= \frac{\lambda}{2} \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_{i-1}^n - c)\} \int_c^{u_{i-1}^n} \left\{ \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| + (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right\} ds \\
 &+ \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_i^n - c)\} \int_c^{u_i^n} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
 &+ \frac{\lambda}{2} \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_{i+1}^n - c)\} \int_c^{u_{i+1}^n} \left\{ \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right\} ds \\
 &+ \frac{\lambda}{2} \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_{i-1}^n - c)\} \{g_{i-\frac{1}{2}}^n(c) - f(c)\} \\
 &- \frac{\lambda}{2} \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_{i+1}^n - c)\} \{g_{i+\frac{1}{2}}^n(c) - f(c)\}
 \end{aligned} \tag{84}$$

補題 22 も援用しながら、(84) の右辺各項の符号を調べる。最初の 3 項の符号はどれもが

$$\{(1 \text{ または } 0) - \chi^+(\alpha - c)\} \int_c^\alpha (s \text{ の非負関数}) ds$$

の形であるから、

- $\alpha < c$ では (正または 0) \times (負または 0) なので負または 0、
- $\alpha = c$ では 0、
- $\alpha > c$ では (負または 0) \times (正または 0) なので負または 0、

となり、常に負又は 0 である。第 4 項は

- c が u_{i-1}^n と u_i^n の間になければ $g_{i-\frac{1}{2}}^n(c) - f(c) = 0$ なので 0
- $u_{i-1}^n < c < u_i^n$ ならば、(正または 0) \times (負または 0) なので負または 0
- $u_i^n < c < u_{i+1}^n$ ならば、(負または 0) \times (正または 0) なので負または 0、

から、常に負又は 0 である。第 5 項も第 4 項と同様の方法で常に負または 0 であることが分かる。以上から

$$\begin{aligned}
 & U(u^{n+1}; c) - U(u_i^n; c) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n; c) - F(u_{i-1}^n; c)\} \\
 & - \frac{\lambda}{2} \{A_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(u_i^n - u_{i-1}^n)\} \leq 0
 \end{aligned} \tag{85}$$

が示される。(補題 23 の証明終)

定理 21 の証明：(U, F) を任意のエントロピー対とする。数値解 $\{u_i^n\}_{i,n}$ は有界なので、その適当な下界 m と上界 M をとる。また、補題 23 で定めた $A_{i+\frac{1}{2}}^n$ は c に依存するが、これを $A_{i+\frac{1}{2}}^n(c)$ と記す。

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n = \int_m^M A_{i+\frac{1}{2}}^n(c) dU'(c) + U'(m+0) a_{i+\frac{1}{2}}^n$$

と定める。ここで積分は Stieltjes 積分²⁰とする。また $\{a_{i+\frac{1}{2}}^n\}_{i,n}$ は考えている差分近似の数値粘性係数である。

$$\begin{aligned}
 \hat{U}(s) &= \int_m^M U(s; c) dU'(c) + U'(m+0)(s-m) + U(m) \\
 \hat{F}(s) &= \int_m^M F(s; c) dU'(c) + U'(m+0)\{f(s) - f(m)\} + F(m)
 \end{aligned}$$

²⁰ U の 2 階微分可能であれば、当然、 $A_{i+\frac{1}{2}}^n = \int_m^M A_{i+\frac{1}{2}}^n(c) U''(c) dc + U'(m) a_{i+\frac{1}{2}}^n$, $\hat{U}(s) = \int_m^M U(s; c) U''(c) dc + U'(m)(s-m) + U(m)$, $\hat{F}(s) = \int_m^M F(s; c) U''(c) dc + U'(m)\{f(s) - f(m)\} + F(m)$, となる。

とすると、 $m < s < M$ では $\hat{U}(s) = U(s)$, $\hat{F}(s) = F(s)$ であるから、積分計算により補題 23 で証明した不等式 (85) から (U, F) についての数値エントロピー不等式 (77) を示すことができる。(定理 21 の証明終)

最後に、次の定理を得る。

定理 24. 差分近似 (47) の各数値粘性係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ が定理 21 の仮定 (78) 即ち

$$a^G(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq a^{LF}$$

を満たせば、(47) から得られる近似解 u_Δ はエントロピー解に収束する。

証明：定理 19 より、 $\{u_\Delta\}$ は収束部分列を持ちそれらの収束の極限は全て弱解である。定理 19 の前の説明と同じ方法で、差分近似の数値解での数値エントロピー不等式の成立から弱解でのエントロピー不等式の成立を示すことができる。即ち、収束極限はエントロピー解となり、それは一意であるから、エントロピー解への収束が示される。(定理 24 証明終)

8 エントロピー解への収束が保証される差分近似

前節の TVD 条件 (68) は弱解への収束を一般的に保証する条件としてはこれ以上緩めることはできない。そこで、前節最後の定理 (24) の条件 $a^G(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq a^{LF}$ を TVD 条件 (68) の中でもう少し緩め、エントロピー解への収束が保証されるできるだけ広い範囲を得ようとする事は自然な問題意識である。Aiso[1] はこの問題への一つの解となっている。本節ではその結果 (主定理) と証明の概要を与える。

定理 25. 1 以下の任意正数 ϵ をとる。このとき、差分近似 (47) の各数値粘性係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ が

$$\max \left\{ a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n), \frac{\epsilon}{\lambda} \operatorname{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) \right\} \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq a^{LF} \quad (86)$$

を満たせば、差分近似 (47) により得られる近似解 u_Δ はエントロピー解に収束する。

証明概略：エントロピー関数 U が厳密凸であるエントロピー解 (U, F) を適切に構成し、差分近似 (47) から得られる数値解 $\{u_i^n\}_{i,n}$ がそのエントロピー対について数値エントロピー不等式を満たすことを示す。

そのために、補題 23 の証明で構成した $\{(U(*; c), F(*; c))\}_{-\infty < c < \infty}$ についてのエントロピー不等式 (85) の左辺、即ち

$$\begin{aligned} & U(u^{n+1}; c) - U(u_i^n; c) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n; c) - F(u_{i-1}^n; c)\} - \frac{\lambda}{2} \{A_{i+\frac{1}{2}}^n(c)(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(c)(u_i^n - u_{i-1}^n)\} \\ &= \frac{\lambda}{2} \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_{i-1}^n - c)\} \int_c^{u_{i-1}^n} \left\{ \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| + (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right\} ds \\ &+ \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_i^n - c)\} \int_c^{u_i^n} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i-\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - \frac{\lambda}{2} \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\ &+ \frac{\lambda}{2} \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_{i+1}^n - c)\} \int_c^{u_{i+1}^n} \left\{ \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right\} ds \\ &+ \frac{\lambda}{2} \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_{i-1}^n - c)\} \{g_{i-\frac{1}{2}}^n(c) - f(c)\} \\ &- \frac{\lambda}{2} \{\chi^+(u_i^{n+1} - c) - \chi^+(u_{i+1}^n - c)\} \{g_{i+\frac{1}{2}}^n(c) - f(c)\} \end{aligned}$$

をより詳細に検討する。 $(A_{i+\frac{1}{2}}^n(c))$ の記法については、定理 21 の証明中の説明参照)

本定理の仮定では、 $u_i^n < s < u_{i+1}^n$ のときに $g_{i+\frac{1}{2}}^n(s) \leq f(s)$ となることが保証できないため、 c の値によっては第 4 項、第 5 項が正になる事が起きる。しかし、定理の数値粘性係数に関する仮定の条件 (86) により、

$$U(u^{n+1}; c) - U(u_i^n; c) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n; c) - F(u_{i-1}^n; c)\} - \frac{\lambda}{2} \{A_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(u_i^n - u_{i-1}^n)\}$$

はある区間 $(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n, \beta_{i+\frac{1}{2}}^n)$ で必ず負となる。そして、数値解の集合 $\{u_i^n\}_{i,n}$ の下限、上限をそれぞれ m, M として、区間 $[m, M]$ 上で定義され i, n に依存しない正値連続関数 $P(s)$ で、

$$P(s) > 0, s \in [m, M]$$

かつ

$$\int_m^M \left[U(u_i^{n+1}; c) - U(u_i^n; c) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n; c) - F(u_{i-1}^n; c)\} - \frac{\lambda}{2} \{A_{i+\frac{1}{2}}^n(c)(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(c)(u_i^n - u_{i-1}^n)\} \right] P(c)dc \leq 0 \quad (87)$$

となるようなものを与えることが可能である。この関数 P を用いて、区間 $[m, M]$ 上で定義される関数 U, F を

$$U(s) = \int_m^M U(s; c)P(c)dc, F(s) = \int_m^M F(s; c)P(c)dc \quad (88)$$

によって定めれば、 $U''(s) = P(s), m < s < M$ より U は厳密凸関数であり、 (U, F) はエントロピー対になる。更に、各 i, n で

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n = \int_m^M A_{i+\frac{1}{2}}^n(c)P(c)dc \quad (89)$$

として $A_{i+\frac{1}{2}}^n$ を定めれば、このエントロピー対 (U, F) について数値エントロピー不等式 (77) が成立する。(定理 25 の証明概略終)

隣接有限体積間での流束関数の差分商 $\frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n}$ が 0 のとき数値粘性係数を 0 とするとエントロピー解では膨張波となって消滅すべき不連続を数値解が保持してしまう可能性があり²¹、その可能性を除去するため Harten は (60)、(61) のような数値粘性の付加を提案している。定理 25 の仮定もほぼ同様であるが、実はそのような数値粘性の付加は隣接有限体積の作る Riemann 問題が膨張波の解を形成する場合のみに行えばよく、その際の数値粘性の付加は 0 より大でありさえすればエントロピー解への収束が保証されることを示している。その意味で、定理 25 の仮定の条件 (86) はこれ以上緩めることのできないもので、その意味では定理 25 はこの問題設定では Best-Possible なものであると言える²²。

参考文献

- [1] H. Aiso. Admissibility of difference approximation for scalar conservation laws. *Hiroshima Math. J.*, Vol. 23, No. 1, pp. 15–61, 1993.
- [2] M. Crandall and A. Majda. Monotone difference approximations for scalar conservation laws. *Math. Comp.*, Vol. 34, pp. 1–21, 1980.
- [3] B. Engquist and S. Osher. Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations. *Math. Comp.*, Vol. 34, pp. 45–75, 1980.
- [4] S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics (in Russian). *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 47, pp. 251–306, 1959.
- [5] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, Vol. 49, pp. 357–393, 1983.
- [6] A. Harten. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 21, No. 1, pp. 1–23, 1984.

²¹ 流束関数の微分商が 0 であれば、特性速度が 0 でその点での情報の伝達速度が 0 であることを示しているが、差分商の場合は u_i^n と u_{i+1}^n の間の状況に依存する曖昧さが生じるために特性速度が 0 という特異性を適用するのは「行き過ぎ」である、といった解釈も可能。

²² ただし、 ϵ の値を非常に小さくとした場合、実際に数値計算が行われる有限の格子刻みで得られる数値解では、膨張波における膨張の最初の過程が厳密解に比べて遅くその形も不自然になることが知られており、そこには定性的な解析と定量的な解析の違いが現れているとも言える。また、この事実は殆どが 1 次精度 (Lax-Wendroff スキームが例外的に 2 次精度) である 3 ステンシルの保存型差分近似の一つの限界を示しているとも言え、何らかの高次精度化の必要性を示すものでもある。

- [7] S. N. Kružkov. First-order quasilinear equations with several space variables. *Math. USSR-Sb.*, Vol. 10, pp. 217–273, 1970.
- [8] P. D. Lax. Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 7, pp. 159–193, 1954.
- [9] E. M. Murmann. Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods. *AIAA J.*, Vol. 12, pp. 626–633, 1974.
- [10] O. Oleinik. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk.(N.S.)*, Vol. 12, pp. 3–73, 1957. English transl. in *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 26*, 95–172.
- [11] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, pp. 357–372, 1981.
- [12] P. L. Roe. The use of Riemann Problem in finite difference schemes. In *Lecture Notes in Physics*, **141**, Vol. 141, pp. 354–559. Springer-Verlag, NewYork, 1981.

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-16-013

JAXA Research and Development Report

スカラー保存則の保存型差分近似の数値粘性とエントロピー条件適合性

Entropy consistency of difference approximation of scalar conservation laws

発行 国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 (JAXA)

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1

URL: <http://www.jaxa.jp/>

発行日 平成29年3月31日

電子出版制作 松枝印刷株式会社

©2017 JAXA

※本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。

Unauthorized copying, replication and storage digital media of the contents of this publication, text and images are strictly prohibited. All Rights Reserved.

