ISSN 1349-1113
JAXA-RR-14-010

宇宙航空研究開発機構研究開発報告
JAXA Research and Development Report

航空工学におけるレイノルズ平均乱流モデルの概観と時間スケールによる物理的意味の考察

吉澤　徴，松尾　裕一

2015年3月

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

This document is provided by JAXA.

ISSN 1349-1113
JAXA-RR-14-010

宇宙航空研究開発機構研究開発報告
JAXA Research and Development Report

航空工学におけるレイノルズ平均乱流モデルの概観と時間スケールによる物理的意味の考察

吉澤　徹，松尾　裕一

2015年3月

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

This document is provided by JAXA.

目　次

This document is provided by JAXA.

航空工学におけるレイノルズ平均乱流モデルの概観と時間スケールによる物理的意味の考察*

吉澤　徴*1，松尾　裕一*1

A Survey of Reynolds-Averaged Turbulence Models in Aeronautical Engineering and Their Physical Interpretation Based on Time Scales

Akira Yoshizawa*1, and Yuichi Matsuo*1

Abstract

Reynolds-averaged turbulence models are widely used in various engineering fields, with much originality in each field. Specifically, a big difference may be observed between the aeronautical field and the others represented by the mechanical one. The primary features of aeronautical Reynolds-averaged models are linked to the following three points: the coexistence of laminar and turbulent states, the complex ingredients such as density variation, and the high accuracy of computed results required for the design of airfoils etc.

In this article, detailed discussions are made about the physical meaning of the Baldwin-Lomax (zero-equation) model, the Spalart-Allmaras (one-equation or turbulent-viscosity transport-equation) model, and the Menter (two-equation) model. The present article aims at understanding their essence from a physical viewpoint based on time scales.

Key Word: Reynolds-average, turbulence model, aeronautical engineering, time scale

概　要

レイノルズ平均乱流モデルは工学諸分野において広く利用されているが，分野間での独自性も強い．とくに，航空工学分野と機械工学をはじめとする他分野との差異は，顕著である．航空工学分野の特徴として，層流と乱流両状態の共存，圧縮性などの複雑因子の存在，翼性能を上げるために要求される計算精度の高さなどがあり，その結果，モデルが他分野に比べて著しく複雑になっている．

本論では，乱流中に含まれる特性時間の視点で，航空工学分野の代表的モデルである，Baldwin-Lomax の 0 方程式モデル，Spalart-Allmaras の 1 方程式（乱流粘性率輸送方程式）モデル，Menter の 2 方程式モデルを考察する．本論では，各モデルの本質を時間スケールに焦点を当てた物理的観点から理解することを目指す．

---

*　平成 26 年 12 月 19 日受付(Received 9 December, 2014)
*1　航空本部 数値解析技術研究グループ
(Numerical Simulation Research Group, Institute of Aeronautical Technology)

This document is provided by JAXA.

時間スケールに関する術語

$\tau_E = \dfrac{K}{\varepsilon}$ ［式（4.6)］: エネルギーカスケード時間スケール

$\tau_S = \dfrac{1}{|\overline{s}|}$ $\left(|\overline{s}| = \sqrt{\overline{s}_{ij}\,\overline{s}_{ij}}\right)$ ［式（4.7)］: 平均歪み時間スケール

$\tau_V = \dfrac{1}{|\overline{\omega}|}$ $\left(|\overline{\omega}| = \sqrt{\overline{\omega}_{ij}\,\overline{\omega}_{ij}}\right)$ ［式（4.7)］: 平均渦度時間スケール

$\tau_\nu = \dfrac{d^2}{\nu}$ ［式（6.33)］: 粘性拡散時間スケール

$\tau_{\hat{\nu}} = \dfrac{d^2}{\hat{\nu}}$ ［式（6.33)］: 乱流拡散時間スケール

$\tau_{\varpi} = \dfrac{1}{\varpi}$ ［式（7.21)］: Wilcox の時間スケール

$\tau_K = \dfrac{d}{\sqrt{K}}$ ［式（7.32)］: 乱流移流時間スケール

1. はじめに

レイノルズ平均乱流モデル（以下，レイノルズ平均モデル）は，航空工学をはじめ機械工学，建築･河川工学, 気象学など, 幅広い理工学分野で利用されている．近年の計算機能力の著しい向上により，ラージ・エディ・シミュレーション［Large Eddy Simulation (LES)］, 直接数値計算［Direct Numerical Simulation (DNS)］が活用される機会も増加している．しかし，レイノルズ数が大きく，かつ複雑形状の流れを取り扱う必要性の高い分野，特に航空工学分野では，計算コストの視点から依然としてレイノルズ平均モデルが，必要不可欠な設計開発や工学解析の手段となっている．

上記諸分野のレイノルズ平均モデルは，一括りにはできない多様性をもっている．これは，各分野において，流れのいかなる性質に主たる関心があるか，さらに主要な対象となる流れがいかなる状態にあるか，と密接に関係している．この状況は，航空工学分野と機械工学分野を比較すると明瞭になる．前者の最も代表的な流れは，翼まわりの流れに見られるように，翼以外に固体壁を持たない，いわゆる外部流（圧縮流）である．これに対して，機械工学分野では，機器内の流れを主たる対象とすることが多く，固体壁に囲まれた内部流（非圧縮流）がしばしば重要となる．両者の違いは，十分高いレイノルズ数であっても，前者では乱れのない流れ(層流)が領域内に存在することである．その結果，隣接した乱流および層流状態を取り扱うことが，航空工学でのレイノルズ平均モデルの前提となり，全領域が乱流状態にあることが珍しくない機械工学分野とは状況を異にしている．(ただし，航空工学においてもジェットエンジン内流れのような内部流が存在する．ジェットエンジン内部流では，層流・乱流の混在, 衝撃波の発生や境界層との干渉など航空分野(圧縮流）特有の特徴がある．本論では，主に翼まわりの流れに代表される外部流を考察の対象とするものの，基礎的な考察に留まるがゆえに，その結果はジェットエンジン等内部流にも適用され得ることに注意する.）

本論においては，機械工学分野との対比を念頭に置きながら，航空工学分野における代表的なレイノルズ平均モデル，すなわち Baldwin-Lomax の 0 方程式モデル[1), Spalart-Allmaras の 1 方程式モデル[2), Menter の 2 方程式モデル[3)を概観する．これらのモデルは，機械工学分野のモデルと比べると，かなり複雑な数学的因子を含んでいる．これは，計算コストの視点から解くべき方程式の数を最小限に留めながら，翼などの設計に必要な予測精度を確保するためと言える．その結果，モデル利用者は，モデル細部の物理的意味を明確に理解することが必ずしも容易ではなく，モデルがブラックボックス化する傾向を否定できない.

上記モデルを理解ないし解釈する方法は一意的ではなく，本論では「乱流中の種々の時間スケール」の観点で議論を進める．本論で概観する 3 モデルは，それらの原型的なモデルであり，提案された以降のさまざまな修正ないし補足に関しては，文献 4 を参照されたい．モデル表現に関しては，該当する原論文と異なる記法を採用している．これは，異なるモデルを俯瞰するという目的とも関連している．また，3 モデルの適用例についての概説は，文献 5 で与えられている．

2. 密度変動を伴う流れの基礎方程式

密度 ρ , 速度 $\mathbf{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)^t$, 内部エネルギー e を密度変動流れにおける基本量とすると，それらの輸送方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathrm{u}) = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left[s_{ij}\right]_{trl} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho e + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) \tag{2.3}$$

となる．式（2.2）において，p は圧力，μ は分子粘性率，s_{ij} は速度歪みであり

This document is provided by JAXA.

$$s_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.4}$$

で定義される．式（2.4）のトレイス零部分は

$$[s_{ij}]_{trl} \equiv s_{ij} - \frac{1}{3}s_{\ell\ell}\delta_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\delta_{ij} \tag{2.5}$$

で与えられる．式（2.3）において，θ は温度，κ は熱伝導率である．

式（2.1）‐（2.3）は，完全気体に対する熱力学的関係式

$$p = (\gamma - 1)\rho e,\ \ e = C_v\theta \tag{2.6}$$

を導入することによって，閉じた方程式系になる．ここで，C_v は定積比熱，γ は比熱比である．

密度変動流れの研究，とくに数値解析においては，e の代わりに単位質量当たりの全エネルギー

$$\mathrm{E} = e + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 \tag{2.7}$$

が採用されることが多い．このとき，式（2.3）に代わって

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho E + \nabla\cdot\left(\rho\left(E + \frac{p}{\rho}\right)\mathbf{u}\right) = \nabla\cdot(\kappa\nabla\theta) + \frac{\partial}{\partial x_j}\mu[s_{ij}]_{trl}u_i \tag{2.8}$$

となる．式（2.8）が用いられる主たる理由は，方程式を保存形（発散形）で書き，数値計算精度を高めることにある．

本論の主題であるレイノルズ平均モデリングでは，式（2.7）のように $\mathbf{u}$ と e が混合することは，必ずしも好ましくない．密度一定の流れにおいては，e ないし θ 自体のレイノルズ平均方程式が必要になる．このため，モデリングの当初からこの極限に対処できる変数の選択が必要である．

3.　慣例的レイノルズ平均モデリングと質量荷重レイノルズ平均モデリング

慣例的（conventional）レイノルズ平均モデリングにおいては，平均操作を上付きバーで表わし，量 f を

$$f = \overline{f} + f' \tag{3.1}$$

のように，平均とそのまわりの揺らぎに分解する．これに対して，密度変化を伴う流れにおいては，単位体積当たりの運動量に準拠した平均，すなわち質量荷重レイノルズ平均と揺らぎ

$$\hat{f} = \langle f\rangle_M = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}},\qquad f'' = f - \hat{f} \tag{3.2}$$

を導入する．運動量を用いて平均を定義することの必然性は，異なる質量の粒子からなる多粒子系を考えるとき，その平均速度は全運動量を全質量で除して求められることから容易に理解できる．

慣例的レイノルズ平均を式 (2.1) ‐ (2.3) に適用し，質量荷重平均量に書き換えると

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\rho}\hat{\mathbf{u}}) = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho}\hat{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\rho}\hat{u}_i\hat{u}_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\rho}\hat{R}_{ij} = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\mu[s_{ij}]_{trl}} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho}\hat{e} + \nabla\cdot(\overline{\rho}\hat{e}\hat{\mathbf{u}}) + \nabla\cdot\hat{\mathbf{H}}_e = -\overline{p\nabla\cdot\mathbf{u}} + \nabla\cdot\left(\overline{\kappa\nabla\theta}\right) \tag{3.5}$$

を得る．上式で，レイノルズ応力 $\hat{R}_{ij}$ と乱流内部エネルギーフラックス $\hat{\mathbf{H}}_e$ は，それぞれ

$$\hat{R}_{ij} = \langle u_i''u_j''\rangle_M \tag{3.6}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_e = \langle e''\mathbf{u}''\rangle_M \tag{3.7}$$

で定義される．

式（3.4）中の $\overline{p}$ は，式（2.6）より

$$\overline{p} = (\gamma - 1)\overline{\rho}\hat{e} \tag{3.8}$$

と，内部エネルギーの質量加重平均値で書くことができる．

式（3.6）と（3.7）に代表されるように，質量加重平均は，密度変動流れの平均方程式を著しく簡素化する．たとえば，慣用的レイノルズ平均値を用いると，式（3.6）の右辺は

$$\overline{\rho}\overline{u_i'u_j'} + \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\rho'u_i'}\,\overline{u_j'} + \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\rho'u_j'}\,\overline{u_i'} + \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\rho'u_i'u_j'} \tag{3.9}$$

と極めて複雑な表式となる．この簡素化の裏面として，分子粘性項［式（3.4）の右辺第 2 項］，膨張･圧縮に関わる仕事率［式（3.5）の右辺第 1 項］，分子温度拡散項［式（3.5）の右辺第 2 項］に見られるように，質量荷重平均量だけでは表現できない項が残る．密度変動流れのモデリングにおける数学的複雑さの一端を，この状況に見ることができる．

密度変動流れのレイノルズ平均モデルは，密度一定流れのモデルの拡張形として提案されることが多い．実際，本論で議論される 3 モデルは，密度変化を，ほとんど考慮することなく構成されており，その後，慣

This document is provided by JAXA.

例的レイノルズ平均量を質量荷重平均量に読み替えて，式（3.3）-（3.5）などに適用されている．

上記の理由により，密度一定流れの方程式を明示することは，以下の議論において有用である．密度一定の場合，式（3.3）-（3.7）は

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} = 0 \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u}_i\overline{u}_j + \frac{\partial}{\partial x_j}R_{ij} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\nabla^2\overline{u} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \overline{e}}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{e}\,\overline{\mathbf{u}}) + \nabla\cdot\mathbf{H}_e = \lambda_e \nabla\cdot(\nabla\,\overline{e}) \tag{3.12}$$

および

$$R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \tag{3.13}$$

$$\mathbf{H}_e = \overline{e'\mathbf{u}'} \tag{3.14}$$

$$\lambda_e = \frac{\kappa}{\rho C_v} \tag{3.15}$$

となる．

ここで, 圧力に関わる問題点に触れておこう. 式(2.2)中の圧力 p は，式（2.6）より決定され，式（2.3）の内部エネルギー方程式に直結している. これに対して，密度一定流れの p は，速度のソレノイダル条件 $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ を用いて，式（2.2）を微分することによって得られる圧力ポアソン方程式

$$\nabla^2 p = -\rho\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.16}$$

を解くことにより決定され，式（2.3）の内部エネルギー方程式から切り離される. その結果, 式(2.1)-(2.3)の密度変動流方程式から構成されたレイノルズ平均モデルを，密度一定流れに適用できる保証はない．とくに，レイノルズ応力や乱流内部エネルギーフラックスの輸送方程式では，圧力・歪み相関項や圧力・内部エネルギー勾配相関項を通して圧力揺らぎが陽に現われ，上記の差異は重要となる．しかし，これまでの質量荷重レイノルズ平均モデリングの研究においては，この問題点は十分認識されていない[6].

4. レイノルズ平均モデリングにおける基本概念

4.1. 乱流中の特性時間スケール

§3 で述べたように，密度変動乱流のレイノルズ平均モデルは，一定密度乱流におけるモデルの拡張，類推などから構成される場合が少なくない．このため，後者でのレイノルズ平均モデリングの基本概念に言及することは，以後の議論で不可欠である．

本論で言及する航空工学分野のレイノルズ平均モデルは，レイノルズ応力などの 2 次統計量の輸送方程式を直接扱わない「陽的代数モデル」に分類される．一定密度流れの平均量方程式（3.11）中の R_{ij} を

$$R_{ij} = \frac{1}{3}R_{\ell\ell}\delta_{ij} + B_{ij}$$

$$B_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{3}R_{\ell\ell}\delta_{ij} = R_{ij} - \frac{2}{3}K\delta_{ij}$$

$$K = \left\langle \frac{1}{2}\mathbf{u}'^2 \right\rangle \tag{4.1}$$

と書く．トレイス零部分 B_{ij} を

$$B_{ij} = L_{ij} + N_{ij} \tag{4.2}$$

と分解し，第 1 項の L_{ij} に対して，乱流粘性率 ν_T と平均速度歪み $\overline{s}_{ij}$ を用いて

$$L_{ij} = -\nu_T \overline{s}_{ij}, \quad \overline{s}_{ij} = \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \tag{4.3}$$

と乱流粘性表現を行う．第 2 項の N_{ij} は，同表現からのずれを与える様々な効果から成る．

乱流粘性率 ν_T の代表例として，乱流運動エネルギー K と散逸率 ε を用いた

$$\nu_T \propto \frac{K^2}{\varepsilon} \tag{4.4}$$

がある．この表現を単なる次元解析ではなく，乱流の時間スケールの視点で見るために

$$\nu_T \propto K \times \tau \tag{4.5}$$

と書き直す．このとき，τ は

$$\tau = \tau_E \equiv \frac{K}{\varepsilon} \tag{4.6}$$

となり, 量 K の運動エネルギーが, 単位時間当たり ε の割合で，粘性作用によって失われる際に要する時間を意味する．揺らぎを波数分解して考えると，K は一般に低波数領域に，ε は逆に高波数領域にその起源をもつ．これより，τ_E はエネルギーカスケード（energy cascade）によって，運動エネルギーが熱として失われる機構を特徴づける時間スケールと言える．

乱流中の時間スケールと言うと，τ_E を特定しがちであるが，これは揺らぎ部分に密接した量である．これに加えて，乱流の平均量部分と関連する平均歪み及び渦度時間スケール

This document is provided by JAXA.

$$\tau_S = \frac{1}{|\bar{s}|}, \quad \tau_V = \frac{1}{|\bar{\omega}|}$$

$$|\bar{s}| = \sqrt{\bar{s}_{ij}\bar{s}_{ij}} = \sqrt{\bar{s}_{ij}^2}$$

$$|\bar{\omega}| = \sqrt{\bar{\omega}_{ij}\bar{\omega}_{ij}}, \quad \bar{\omega}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \qquad (4.7)$$

を挙げることができる．ここで，$\bar{\omega}_{ij}$と平均渦度 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)^t$は，交代記号 $\varepsilon_{ij\ell}$ を用いて

$$\bar{\omega}_{ij} = \varepsilon_{ij\ell}\bar{\omega}_\ell, \quad \bar{\omega}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij\ell}\bar{\omega}_{j\ell} \qquad (4.8)$$

の関係にある．

テンソル量 s_{ij} と ω_{ij} は，歪みと回転という幾何学的な描像で通常捉えられるが，レイノルズ平均モデリングでは，歪みと回転に伴う時間の逆次元量という視点が重要となる．式（4.5）の乱流粘性率中の特性時間 τ を，式（4.6）の τ_E に限定せず，広く

$$\tau = \frac{\tau_E}{\Gamma(\tau_E, \tau_S, \tau_V, \tau_X)} \qquad (4.9)$$

と書く．上式で，Γ は τ_E などから構成される無次元汎関数であり，その中の τ_X は，式（4.6），（4.7）と異なる未知の時間スケールである．例えば，渦度の実質（ラグランジュ）微分に関わる

$$\tau_{MV} \equiv \frac{1}{\sqrt{|D\bar{\boldsymbol{\omega}}/Dt|}}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla \qquad (4.10)$$

も，平均流の一つの性質を表わす時間スケールである．また，式（4.10）は，流れの旋回特性を表現するときに有効となる時間スケールであることが示されている．

特性時間 τ として τ_E を用いる代表的モデルとして，標準 K-εモデルがあるが，各種流れへの適用能力を向上させるために，式（4.9）の形式が工夫されている．その多くは

$$\begin{aligned}\Gamma &= 1 + C_S\left(\frac{\tau_E}{\tau_S}\right)^2 + C_V\left(\frac{\tau_E}{\tau_V}\right)^2 + C_{SS}\left(\frac{\tau_E}{\tau_S}\right)^4 \\ &\quad + C_{VV}\left(\frac{\tau_E}{\tau_V}\right)^4 + C_{SV}\left(\frac{\tau_E}{\tau_S}\right)^2\left(\frac{\tau_E}{\tau_V}\right)^2 \\ &= 1 + C_S\left(\frac{K}{\varepsilon}|\bar{s}|\right)^2 + C_V\left(\frac{K}{\varepsilon}|\bar{\omega}|\right)^2 + C_{SS}\left(\frac{K}{\varepsilon}|\bar{s}|\right)^4 \\ &\quad + C_{VV}\left(\frac{K}{\varepsilon}|\bar{\omega}|\right)^4 + C_{SV}\left(\frac{K}{\varepsilon}|\bar{s}|\right)^2\left(\frac{K}{\varepsilon}|\bar{\omega}|\right)^2 \end{aligned} \qquad (4.11)$$

の形式にまとめることができる．ここで，奇数次項が含まれないのは関数形を解析的にすることに因る．式（4.11）を構成するときの方法論的差異が，定数 C_S などの差異となる [6]．

4.2. 乱流中の特性長さスケール

§4.1 では，時間スケールを用いて，乱流粘性率を式（4.5）のように表現した．もし時間スケールの代わりに，乱流を特徴づける長さスケールを用いて，これを ℓ としたらどうであろうか．時間スケールは，ℓ と K を用いて

$$\tau = \frac{\ell}{\sqrt{K}} \qquad (4.12)$$

となり，式（4.5）は

$$\nu_T \propto \sqrt{K}\ell \qquad (4.13)$$

と表わすことができる．

§4.1 では，時間スケールとしてさまざまな選択があると述べたが，長さスケールに関しても同様である．本論では，主に§4.1 の時間スケールを基本概念として採用し，航空工学分野の代表的モデルを考察する．筆者らがこの考えに立つ理由として，以下の 2 点がある：

a) 乱流を統計理論の視点から研究するとき，乱流粘性率は

$$\nu_T \propto \int^t G(s,t)\,Q(t,s)ds \qquad (4.14)$$

のように表わされる [7]．ここで，Q は速度の 2 時刻相関量，G は流れに加えられた変動の継続過程を記述する応答（グリーン）関数である（空間依存性は明記されていない）．式（4.14）を

$$\nu_T \propto Q(t,t)\int^t G(s,t)\,ds \qquad (4.15)$$

と近似して

$$Q(t,t) \to K, \qquad \int^t G(s,t)\,ds \to \tau \qquad (4.16)$$

と置き換えると，式（4.5）を得る．

b) さまざまな時間スケールは，式(4.6)，(4.7)，(4.10)のように，乱流量あるいは平均流から比較的容易に構成できる．これに対して，長さスケールは，固体壁からの距離などを乱流粘性率に直接組み入れるときはたいへん有用な概念であるが，時間スケールと異なり，異方性，すなわち方向依存性があり，その定義は一義的ではない．

4.3. 乱流量方程式

式（4.6）の時間スケールを評価するには，乱流量に対する方程式が必要となるが，もっとも基本的な方程式は，R_{ij} に対するものであり

This document is provided by JAXA.

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij} \tag{4.17}$$

と書かれる．上式で，右辺各項は，生成項，再配分（圧力・歪み相関）項，消散（散逸）項，拡散項であり，それぞれ

$$P_{ij} = -R_{jk}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - R_{ik}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \tag{4.18}$$

$$\Pi_{ij} = \left\langle \frac{p'}{\rho} s'_{ij} \right\rangle \ , \qquad s'_{ij} = \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \tag{4.19}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_\ell}\frac{\partial u'_j}{\partial x_\ell} \right\rangle \tag{4.20}$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(-\left(\langle u'_i u'_j u'_\ell \rangle + \left\langle \frac{p'}{\rho} u'_j \right\rangle \delta_{i\ell} + \left\langle \frac{p'}{\rho} u'_i \right\rangle \delta_{j\ell} \right) \right) + \nu\nabla^2 R_{ij} \tag{4.21}$$

で定義される．

式（4.17）から， K と R_{ij} のトレイス零部分の方程式は，それぞれ

$$\frac{DK}{Dt} = P - \varepsilon + D \tag{4.22}$$

$$\frac{DB_{ij}}{Dt} = \left[P_{ij}\right]_{trl} + \Pi_{ij} - \left[\varepsilon_{ij}\right]_{trl} + \left[D_{ij}\right]_{trl} \tag{4.23}$$

となる．式（4.22）の右辺各項は

$$P = -R_{ij}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \tag{4.24}$$

$$\varepsilon = \nu \left\langle \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \tag{4.25}$$

$$D = \nabla \cdot \left(- \left\langle \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}'^2 + \frac{p'}{\rho} \right) \mathbf{u}' \right\rangle \right) + \nu\nabla^2 K \tag{4.26}$$

となる．

式（4.18）と（4.24）が生成項と呼ばれるのは，平均流の空間依存性が乱れやその非等方性を生む主要因であることによる．式（4.19）が運動エネルギーの 3 方向成分間の再配分項という意味を有しているのは，以下の 2 点による：

a) 一定密度流れにおいては，$\Pi_{\ell\ell} = 0$ より，式（4.19）は 3 方向の揺らぎ強度の総和Kに対する方程式（4.22）には寄与せず，3 成分間の配分と密接している．密度が変化する場合は，膨張と圧縮による仕事 $\overline{p'\nabla\cdot\mathbf{u}'}$ の効果が残り，一定密度流れでの解釈は厳密には成立しない．

b) 圧力揺らぎ p' は，圧力本来の特性から，等方的（乱雑な）性質を有している．これに対して，歪み s'_{ij} は流体の局所的非等方性を表わしている．これら異なる性質をもつ 2 量に相関があるということは，後者から生じる非等方性が，前者によって緩和されることを意味する．

式（4.22）と（4.23）は，以下で議論されるモデルの理解において，重要な要素となる．

5. Baldwin-Lomax モデル

Baldwin-Lomax（B-L）モデル [1]は，§4.2 の特性長さスケールに準拠したモデルであり，はじめにモデル表現を与え，その後細部を考察する．

5.1. 0 方程式モデル表現

本モデルは，流れ領域を 2 つに分割する 2 層モデルであり，内層を添字 I ，外層を添字 O で表記し，それぞれの領域での乱流粘性率を

$$\nu_T = \begin{cases} \nu_{TI} & (\nu_{TI} < \nu_{TO}) \\ \nu_{TO} & (\nu_{TI} > \nu_{TO}) \end{cases} \tag{5.1}$$

と記す. 内層での乱流粘性率 ν_{TI} は, 内層の特性長さ ℓ_I と平均渦度テンソルの大きさ$|\overline{\omega}|$ を用いて

$$\nu_{TI} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_I^2 |\overline{\omega}| \tag{5.2}$$

と表わす．上式で， ℓ_Iは，壁面からの距離 d，摩擦速度 u_τ，壁面での動粘性率 ν_W（温度変動により領域中で動粘性率が変化することを考慮している）を用いて

$$\ell_I = \kappa y \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A_{VD}} \right) \right),\ \ y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu_W} \tag{5.3}$$

で与えられる．カルマン定数 κ と Van Driest 定数 A_{VD} は

$$\kappa = 0.41,\ \ A_{VD} = 26 \tag{5.4}$$

である．

外層では，まず

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\ell_I}{\kappa}|\overline{\omega}| = \frac{1}{\sqrt{2}} y \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A_{VD}} \right) \right) |\overline{\omega}| \cong \frac{1}{\sqrt{2}} y |\overline{\omega}| = y|\overline{\boldsymbol{\omega}}| \tag{5.5}$$

を用いて， F_{max} と y_{max} を

$$F_{max} = \max_y(F)\ ,\ \ F(y_{max}) = F_{max} \tag{5.6}$$

This document is provided by JAXA.

と定義し

$$F_{O1} = y_{max}F_{max}\min\left(1,\ C_{O1}\left(\frac{\overline{u}_{Diff}}{F_{max}}\right)^2\right) \tag{5.7}$$

$$F_{O2} = \left(1 + C_{O21}\left(C_{O22}\frac{y}{y_{max}}\right)^6\right)^{-1} \tag{5.8}$$

を導入する．ここに，$\overline{u}_{Diff} = \overline{u}_{max} - \overline{u}_{min}$である．

これらをもとに，外層の乱流粘性率として

$$\nu_{TO} = \alpha C_{O3}F_{O1}F_{O2} \tag{5.9}$$

を採用する．式（5.7）‐（5.9）中の定数は

$$\alpha = 0.0168,\quad C_{O1} = 0.25,\quad C_{O21} = 5.5,$$
$$C_{O22} = 0.3,\quad C_{O3} = 1.6 \tag{5.10}$$

とする．

5.2. モデル表現の物理的意味の考察

境界層流のような流れが壁面に沿う場合を考え，$y = 0$ を固体壁として，速度の (x, y, z) 成分を

$$\mathbf{U} = (\overline{u}, \overline{v}, 0) \tag{5.11}$$

と書く．特性時間として，式（4.7）の τ_V を用いると，ℓ_I と合わせると

$$K \propto \left(\frac{\ell_I}{\tau_V}\right)^2 = (\ell_I|\overline{\omega}|)^2 \tag{5.12}$$

とモデル化でき，式（4.13）より内層での乱流粘性率，すなわち式（5.2）を得る．

境界層流れや溝流れでは，粘性効果が重要となる粘性底層を除くと，内層の乱流粘性率と平均流の方程式は

$$\nu_{TI} = (\kappa y)^2\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right| \tag{5.13}$$

$$\overline{u'v'} = -u_\tau^2 \tag{5.14}$$

で近似される．上記 2 式より

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \tag{5.15}$$

すなわち，対数速度則

$$\overline{u}^+ \equiv \frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\log y^+ + A \quad (A = 5.0) \tag{5.16}$$

を得る．これに対応して

$$\nu_{TI} = \kappa u_\tau y \tag{5.17}$$

となる．

式（5.12）では，特性時間として τ_S ではなく，τ_V を用いているが，式（5.16）のもとでは

$$|\overline{\omega}| = |\overline{s}| = \frac{\sqrt{2}}{\kappa}\frac{u_\tau}{y} \tag{5.18}$$

となり，その区別は不要となる．

これまでの考察から，B-L モデルの内層表現に関しては，以下の 3 つの特徴がある：

a) 式（5.17）の表現では，乱流粘性率は固体壁からの距離に比例して単調に増加するため，乱れが弱くなる，あるいは消失する領域には適用できず，これを抑制する工夫（外層の導入など）が必要となる．

b) 壁面近傍では

$$\ell_I = O(y),\quad \overline{u} = O(y) \tag{5.19}$$

となるため

$$\nu_{TI} = O(y^4) \tag{5.20}$$

を得る．その結果，厳密な壁面漸近挙動

$$\overline{u'v'} = O(y^3),\quad \nu_{TI} = O(y^3) \tag{5.21}$$

からのずれが生じる．ここで，壁面近傍では$u' = O(y)$, $\nabla\cdot\mathbf{u}' = 0$ より，$v' = O(y^2)$ に注意する．

c) 固体表面から剥離する流れは

$$\overline{\omega}_{ii}^2 - \overline{s}_{ii}^2 \neq 0 \tag{5.22}$$

で特徴づけられる．他方，B-L モデルでは，$|\overline{s}|$と$|\overline{\omega}|$の区別が必ずしも明確ではない．剥離流れに関わる B-L モデルの問題点は，この事情とも関連すると考えられる．

次に，外層に関して考察する．外層の乱流粘性率 ν_{TO} のモデル化において，第 1 に留意すべき点は，式(5.17)における，ν_{TI} の単調増加を抑制することである．溝乱流などにおいては，壁面からの影響がもっとも小さい中心軸領域で乱流粘性率は飽和し，中心軸上で極小値をとり，ほぼ一定値となっている．壁面の影響が弱い外層を，溝乱流の中心軸付近と類似させ，外層の乱流粘性率にこのような特性を付与することを考える．

式（5.5）の F は，壁面からの距離 y を径とする流体塊が，平均流の渦度で回転するときの速度に相当する

This document is provided by JAXA.

（数係数の差異は無視する）. 内層の対数速度則（5.16）を用いると，速度の次元量である F は

$$F=\frac{u_\tau}{\kappa} \tag{5.23}$$

となり，内層から一定値に漸近する．

この F の性質を，ν_{TO}のモデル化に適用する．外層での渦運動の強さの基準値として，F の最大値を採用する［式（5.6)］．これとその位置 y_{max}を用いて，渦運動に起因する乱流粘性率を構成すると，$y_{max}F_{max}$ となる．これが式（5.7）の主要部であり，式（5.9）に組み込まれている．

次に，式（5.7）の min 部分を考える．速度差 $\overline{u}_{Diff}$ を生む距離を y_{Diff} とすると，同部分は

$$\min(1,Z),\qquad Z=C_{O1}\left(\frac{\overline{u}_{Diff}/y_{Diff}}{F_{max}/y_{Diff}}\right)^2 \tag{5.24}$$

と書き直される．ここで，$\overline{u}_{Diff}/y_{Diff}$ は最大速度差から見積もられる速度歪み関連量，F_{max}/y_{Diff} は渦運動の最大速度に準拠した渦度関連量と見ることができる．この結果

$$\frac{F_{max}}{y_{Diff}}\ll\frac{\overline{u}_{Diff}}{y_{Diff}}:\qquad \min(1,Z)=1 \tag{5.25}$$

$$\frac{F_{max}}{y_{Diff}}\gg\frac{\overline{u}_{Diff}}{y_{Diff}}:\qquad \min(1,Z)=Z \tag{5.26}$$

となる．式（5.25）の場合は，渦度の寄与が速度歪みよりも弱いため，渦運動にもとづく $y_{max}F_{max}$ を乱流粘性率の主要部として，ν_{TO} に取り入れる．逆に，式(5.26)のように $y_{max}F_{max}$ が強い場合は，これによる ν_{TO} の過大評価を抑えるため，速度歪みによる補正を行う．これらいずれの場合も，内層から単調に増加する乱流粘性率［式（5.17)］を外層で抑制することを目的としている．

式（5.7）では，式（5.26）を通して，速度歪み効果による補正を行っている．速度勾配は，速度歪みテンソルと渦度テンソルと

$$\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\left(\overline{s}_{ij}+\overline{\omega}_{ij}\right) \tag{5.27}$$

の関係にある．一定の速度勾配［式（5.27）の左辺］のもとでは，$\overline{s}_{ij}$ を取り入れることは，$\overline{\omega}_{ij}$ の効果を減少させることになる. このため, $\overline{\omega}_{ij}$にもとづく式(5.5)が過大評価になっている場合は, 式 (5.26) のように, $\overline{s}_{ij}$ の効果を取り込むことが考えられる．ただし，取り込み方法は一意ではないであろう．

壁面から遠い領域では層流状態になり，式（5.8）の F_{O2} は，乱流粘性率を消すための漸近関数である．同式の分母に現われる y/y_{max} に関連する指数 6 の選択は，モデルに含まれる他の定数と並んで，経験式と言えるであろう．

5.3. 数値計算との対応

図 1 は，B-L モデルによる平板境界層の数値計算結果から境界層プロファイルを示す．図 2 は，同じ図を壁座標 y^+で表示したものである．$Re_x=5\times10^6$ の位置における速度プロファイルU/U_∞, 乱流粘性率分布ν_T, 関数 F ［式（5.5)］及び関数 F_{O2} ［式（5.8)］のそれぞれの分布を示す．ここで，乱流粘性率は 500 で割った値，関数 F はu_τ/κ で無次元化した値を示している．計算条件等は，文献 4 に従った．(格子は137×97を利用.) 乱流粘性率ν_Tが, 外層で一定値を取っていること，関数 F が内層付近で一定値［式（5.23)］を取っていることや，関数 F が最大値 F_{max}を生じていること，関数 F_{O2}が外縁で 0 に漸近していること等がわかる．

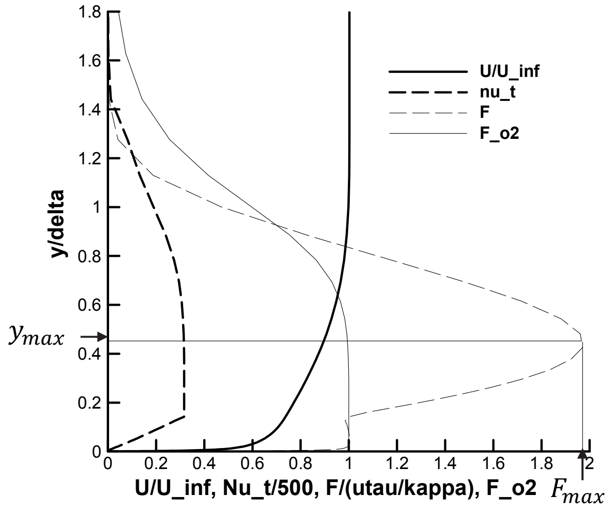

図 1　B-L モデルによる平板境界層のプロファイル（$Re_x=5\times10^6$）

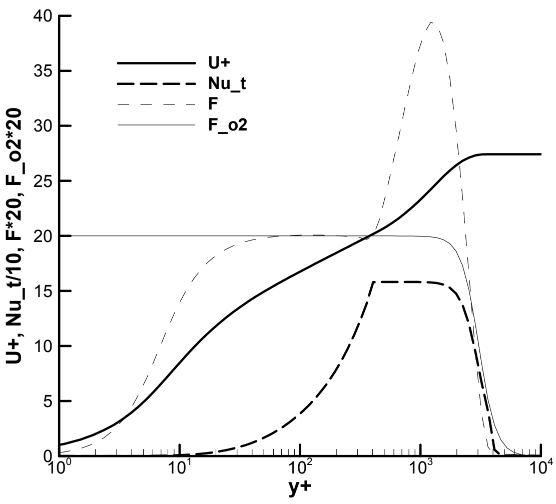

図 2　B-L モデルによる平板境界層プロファイルの壁座標表示（$Re_x=5\times10^6$）

This document is provided by JAXA.

5.4. 付言

B-L モデルは，いわゆる混合距離モデルであり，乱流運動エネルギー K に代表される乱流量を直接採用せず，同量は式（5.12）におけるように，壁面からの距離や平均流の渦度で代替されている．航空工学分野では，最近まで B-L モデルが多用されてきたが，機械工学分野ではこれまで利用されることが少なかったと言える．その理由は，流れの中での層流部分の有無であろう．

機械工学分野では，強弱は別として，全領域で乱れが存在する内部流が主たる対象となり，乱流量の適切な評価が不可欠となっている．これに対して，航空工学分野は，外部流が主対象であるため，乱れがたいへん弱く，その結果乱流粘性率が極めて小さい流れ領域が存在する．そのような領域で乱流粘性率の適切な挙動を確保するためには，式（5.9）は有効な表現となっている．その裏面として，壁面からの距離に準拠するモデルの適用範囲は，限られることになる．

6. Spalart-Allmaras モデル

Spalart-Allmaras（S-A）モデル [2]は，乱流粘性率の輸送方程式を直接扱う 1 方程式モデルである．S-A モデルは，提案されて以来，さまざまな変更が加えられているが，ここでは原型的モデルについて触れる．§5 と同様に，はじめにモデル表現を与え，その後細部を考察する．

6.1. 乱流粘性率の輸送方程式表現

6.1.1. 基本表現

乱流粘性率 ν_T を

$$\nu_T = \hat{\nu} f_V \tag{6.1}$$

と書き， f_V を

$$f_V = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_V^3}, \quad \chi = \frac{\hat{\nu}}{\nu} \tag{6.2}$$

で定義する．分子粘性効果の弱い領域では， $\hat{\nu} \gg \nu$ より $f_V \cong 1$ となるため， $\hat{\nu}$ は ν_T の高レイノルズ数部分（分子粘性の影響を直接受けない部分）と言える．

高レイノルズ数部分 $\hat{\nu}$ は，以下の輸送方程式

$$\frac{D\hat{\nu}}{Dt} = C_P \hat{\nu} \hat{S} - C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 + \frac{1}{\sigma}\left(\nabla \cdot \left((\nu + \hat{\nu})\nabla\hat{\nu}\right) + C_D (\nabla\hat{\nu})^2\right) \tag{6.3}$$

で記述される．上式で， d は計算点から壁面までの距離であり， $\hat{S}$ と f_ε は

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\overline{\omega}| + \frac{\nu}{(\kappa d)^2} f_P \tag{6.4}$$

$$f_\varepsilon = g\left(\frac{1 + C_{\varepsilon 2}^6}{g^6 + C_{\varepsilon 2}^6}\right)^{1/6} \tag{6.5}$$

で与えられる．式（6.4）と（6.5）で，f_P と g は

$$f_P = 1 - \frac{\chi}{1 + f_V \chi} = \frac{\chi^3 - C_V^3 \chi + C_V^3}{\chi^4 + \chi^3 + C_V^3} \tag{6.6}$$

$$g = r + C_{\varepsilon 3}(r^6 - r), \qquad r = \frac{\hat{\nu}}{\hat{S}(\kappa d)^2} \tag{6.7}$$

で定義される．

モデル定数は

$$\sigma = \frac{2}{3},\ C_V = 7.1,\ \kappa = 0.41,\ C_P = 0.13,\ C_D = 0.62,$$
$$C_{\varepsilon 1} = \frac{C_P}{\kappa^2} + \frac{1 + C_D}{\sigma},\ C_{\varepsilon 2} = 2,\ C_{\varepsilon 3} = 0.3 \tag{6.8}$$

とする．

6.1.2. 曲率および回転効果の補正

主流が曲面に沿うような場合，流れ方法の変化が大きくなり，この影響は曲率（curvature）効果と呼ばれている．S-A モデルは，乱流粘性率を輸送方程式から決定するため，実質微分 D/Dt を通して，陽的代数モデルより同効果に敏感と予想される．しかし，曲率効果への感度を高めるため，以下の補正が加えられている．この際，回転系で現われるコリオリ（Coriolis）力効果も同時に組み込まれる．

曲率および回転効果の補正は，式（6.3）の右辺第 1 項の生成項に対してなされ

$$C_P \to C_P F_{CR} \tag{6.9}$$

と変更する．補正関数 F_{CR} は

$$F_{CR} = (1 + C_{CR1})\frac{C_{CR0}\hat{r}_1}{1 + \hat{r}_1}\left(1 - C_{CR3}\tan^{-1}(C_{CR2}\hat{r}_2)\right) - C_{CR1} \tag{6.10}$$

で与えられ， $\hat{r}_1$ と $\hat{r}_2$ は

$$\hat{r}_1 = \frac{|\overline{s}|}{|\overline{\omega}|} \tag{6.11}$$

$$\hat{r}_2 = \frac{1}{4}\frac{\overline{\omega_{i\ell}}\,\overline{s}_{\ell j}}{D^4}\left(\frac{D\overline{s}_{ij}}{Dt} + \varepsilon_{imn}\Omega_{F_m}\overline{s}_{jn} + \varepsilon_{jmn}\Omega_{F_m}\overline{s}_{in}\right)$$

This document is provided by JAXA.

$$D = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{s}_{ij}^2 + \overline{\widehat{\omega}}_{ij}^2} \qquad (6.12)$$

で定義される．上式で，$\boldsymbol{\Omega}_F$ は系の回転角速度，同系の渦度テンソル ω_{ij} は

$$\omega_{ij} \to \widehat{\omega}_{ij} = \omega_{ij} + 2\varepsilon_{imj}\Omega_{F_m} \qquad (6.13)$$

と変換される．定数は

$$C_{CR0} = 2,\ C_{CR1} = 1.0,\ C_{CR2} = 12,\ C_{CR3} = 1 \qquad (6.14)$$

とする．式（6.13）は，回転系では渦度ベクトルが

$$\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}_F \qquad (6.15)$$

と変換されることに対応している．

6.1.3. 非線形性

レイノルズ応力の乱流粘性表現の下では，乱流粘性率自体の精度を向上させても適切に記述できない流れが存在する．そのような流れの特徴は，主流に垂直な断面内に発生する速度成分が重要となることである．典型的な流れとして，矩形管断面内の 2 次流を上げることができる．このとき，2 次流の大きさは主流の数パーセントであるが，その存在は主流の速度分布に大きく影響する．翼まわりの流れにおいては，翼と胴体部分の付け根近傍に発生する流れがこれに該当する [8]．

S-A モデルにおいては，レイノルズ応力の乱流粘性表現からのずれ N_{ij} を

$$N_{ij} = C_{S\omega}\frac{\nu_T}{\sqrt{\overline{s}_{ij}^2 + \overline{\omega}_{ij}^2}}\left(\overline{s}_{i\ell}\overline{\omega}_{\ell j} + \overline{s}_{j\ell}\overline{\omega}_{\ell i}\right) \qquad (6.16)$$

とし，定数として

$$C_{S\omega} = 0.6 \qquad (6.17)$$

を採用する．

6.2. レイノルズ応力方程式と乱流粘性表現の輸送方程式

乱流粘性率は，直接測定できる量ではなく，その意味では通常の物理量とは言えない．このような量に対する輸送方程式の導出方法としては，以下の 2 通りが考えられる：

a) 式（4.4）のような代数モデル表現をもとに，その構成要素である K などの輸送方程式を用いて，乱流粘性率方程式を求める．
b) 式（4.17）ないしレイノルズ応力のトレイス零部分の方程式（4.23）から乱流粘性率表現，すなわち式（4.3）の L_{ij} の方程式を構成し，これから乱流粘性率方程式を導出する．

後者の方法は，乱流粘性率に対する代数的な表現に直接依存しないため，輸送方程式を導出するという目的に合っていると考えられる．本論では，文献 9 にもとづくこの定式化を採用し，S-A モデルの議論の出発点とする．

6.2.1. レイノルズ応力方程式のモデル化

レイノルズ応力方程式（4.17）においては, 式（4.19）の Π_{ij}（再配分項）, 式（4.20）の ε_{ij}（消散項）, 式（4.21）の D_{ij}（拡散項）のモデル化が必要となる．消散項 ε_{ij} の対角成分は，乱流強度の粘性散逸と関係するが，非対角成分は非等方性の消散ないし崩壊という性質が強いため，Π_{ij} と合わせて

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} - \left[\varepsilon_{ij}\right]_{trl} = &-C_{\Pi1}\frac{1}{\tau}B_{ij} + C_{\Pi2}K\overline{s}_{ij}\\ &+C_{\Pi3}\left[B_{i\ell}\overline{s}_{\ell j} + B_{j\ell}\overline{s}_{\ell i}\right]_D\\ &+C_{\Pi4}\left(B_{i\ell}\overline{\omega}_{\ell j} + B_{j\ell}\overline{\omega}_{\ell i}\right) \qquad (6.18)\end{aligned}$$

とモデル化する（$C_{\Pi1}$ などは, モデル定数）. 式（6.18）において，特性時間 τ として，式（4.6）すなわち K/ε を採用すると，もっとも標準的モデルを得る．議論を一般化するため, 本論ではこの選択を行わない. 実際, 陽的代数モデリングを考察する際，τ の選択にさまざまな余地を残すことが重要となる．

残る拡散項 D_{ij} のモデル化に関しては，もっとも簡潔なモデル

$$\left[D_{ij}\right]_{trl} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\nu_D\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_\ell}\right) + \nu\nabla^2 B_{ij} \qquad (6.19)$$

を採用する．ここで，ν_D は拡散係数であり，後にこれを特定する．

式（6.18）と（6.19）を B_{ij} に対する式（4.23）に代入し，さらに B_{ij} の分解（4.2）を用いると

$$\begin{aligned}\frac{DL_{ij}}{Dt} + \frac{DN_{ij}}{Dt} = &-\left(\frac{2}{3} - C_{\Pi2}\right)K\overline{s}_{ij}\\ &-C_{\Pi1}\frac{1}{\tau}L_{ij} + \nabla\cdot\left((\nu + \nu_D)\nabla L_{ij}\right)\frac{\nu_T}{\sigma_\nu}\\ &-C_{\Pi1}\frac{1}{\tau}N_{ij} + \nabla\cdot\left((\nu + \nu_D)\nabla N_{ij}\right)\\ &-\left(\frac{1}{2} - C_{\Pi3}\right)\left[L_{i\ell}\overline{s}_{\ell j} + L_{j\ell}\overline{s}_{\ell i}\right]_{trl}\\ &-\left(\frac{1}{2} - C_{\Pi4}\right)\left(L_{i\ell}\overline{\omega}_{\ell j} + L_{j\ell}\overline{\omega}_{\ell i}\right)\end{aligned}$$

This document is provided by JAXA.

$$
-\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 3}\right)\left[N_{i\ell}\bar{s}_{\ell j}+N_{j\ell}\bar{s}_{\ell i}\right]_{trl}
$$
$$
-\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 4}\right)\left(N_{i\ell}\bar{\omega}_{\ell j}+N_{j\ell}\bar{\omega}_{\ell i}\right) \tag{6.20}
$$

を得る．

6.2.2. 乱流粘性率輸送方程式の導出

式（6.20）を，L_{ij} とN_{ij} のそれぞれに対する方程式に分解する．L_{ij} は，レイノルズ応力の乱流粘性表現部分であり，平均速度歪み $\bar{s}_{ij}$ と直結するため，式（6.20）において

$$
\frac{DL_{ij}}{Dt}=-\left(\frac{2}{3}-C_{\Pi 2}\right)K\bar{s}_{ij}-C_{\Pi 1}\frac{1}{\tau}L_{ij}+\nabla\cdot\left((\nu+\nu_D)\nabla L_{ij}\right) \tag{6.21}
$$

とする．

式（4.3）の第 1 式（乱流粘性表現）を式（6.21）に代入し，拡散項中の ν_D を

$$
\nu_D=\frac{\nu_T}{\sigma_\nu} \tag{6.22}
$$

とモデル化する（σ_ν はモデル定数）．その後，$\bar{s}_{ij}$ との内積を取ると，乱流粘性率方程式

$$
\frac{D\nu_T}{Dt}=P_\nu-\varepsilon_\nu+D_\nu+A_\nu \tag{6.23}
$$

を得る．上式で，右辺各項は

$$
P_\nu=C_{\nu P}K \tag{6.24}
$$

$$
\varepsilon_\nu=C_{\nu\varepsilon}\frac{1}{\tau}\nu_T \tag{6.25}
$$

$$
D_\nu=\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\nu}\right)\frac{\partial\nu_T}{\partial x_\ell}\right)+\frac{1}{4\sigma_\nu}\frac{\partial\nu_T^2}{\partial x_\ell}\frac{1}{|\bar{s}|^2}\frac{\partial|\bar{s}|^2}{\partial x_\ell}
$$
$$
+\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\nu}\right)\left(\frac{\partial\nu_T}{\partial x_\ell}\frac{1}{|\bar{s}|^2}\frac{\partial|\bar{s}|^2}{\partial x_\ell}+\nu_T\frac{1}{|\bar{s}|^2}\bar{s}_{ij}\nabla^2\bar{s}_{ij}\right) \tag{6.26}
$$

$$
A_\nu=-\frac{1}{2|\bar{s}|^2}\frac{D|\bar{s}|^2}{Dt}\nu_T \tag{6.27}
$$

で定義される．定数部分は

$$
C_{\nu P}=\frac{2}{3}-C_{\Pi 2}\left(=\frac{4}{15}\right),\qquad C_{\nu\varepsilon}=C_{\Pi 1} \tag{6.28}
$$

となる．

式（6.24）-（6.26）の各項は，乱流運動エネルギー方程式（4.22）にならって，乱流粘性率の生成項，消散項，拡散効果を含む項（拡散的な項）と呼ぶことができるであろう．式（6.24）の生成項は，ν_T の発生が乱れの強度を特徴づける乱流運動エネルギー K と密接していることを示している．ν_Tの代数表現（4.5）は，式（6.23）の右辺第 1 項と 2 項から導出できる．この事実から，乱流粘性率方程式を用いるときは，K 方程式をさらに導入するか，あるいはK を的確にモデル化する必要がある．

式（6.27）は，流れ方向の非一様性と関わり，いわゆる曲率ないし流線効果を意味している．流れが物体に衝突する際などこの効果が重要となると予想される．

6.2.3. 乱流粘性表現からのずれ：非線形効果など

航空工学分野のレイノルズ平均モデルにおいては，乱流粘性表現が主たるモデルとなっているが，この表現では本質的に記述できない流れがある．その一例は，§6.1.3 において触れた矩形管断面に現われる 2 次流である．この流れと類似した航空関連現象として，翼と胴体部の付け根部分に現われる流れがある．

上記の流れに対処するためには，レイノルズ応力の乱流粘性表現からのずれを導入する必要がある．式（6.20）から式（6.21）を導出した枠組みでは，N_{ij} の方程式は

$$
\frac{DN_{ij}}{Dt}=-C_{\Pi 1}\frac{1}{\tau}N_{ij}+\nabla\cdot\left((\nu+\nu_D)\nabla N_{ij}\right)
$$
$$
-\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 3}\right)\left[L_{i\ell}\bar{s}_{\ell j}+L_{j\ell}\bar{s}_{\ell i}\right]_{trl}
$$
$$
-\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 4}\right)\left(L_{i\ell}\bar{\omega}_{\ell j}+L_{j\ell}\bar{\omega}_{\ell i}\right)
$$
$$
-\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 3}\right)\left[N_{i\ell}\bar{s}_{\ell j}+N_{j\ell}\bar{s}_{\ell i}\right]_{trl}
$$
$$
-\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 4}\right)\left(N_{i\ell}\bar{\omega}_{\ell j}+N_{j\ell}\bar{\omega}_{\ell i}\right) \tag{6.29}
$$

となる．

式（6.29）をそのまま用いると，計算コストは本来の式（4.23）を用いるのと本質的に同じになるため，簡単化が不可欠となる．乱流粘性率を決める方程式（6.21）の導出では，移流および拡散効果に重きが置かれた．そこで，N_{ij} の考察では，そのとき無視された項に注目し，L_{ij} に対する式（4.5）を用いて式（6.29）

$$
N_{ij}=\frac{2}{C_{\Pi 1}}\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 3}\right)\tau\nu_T\left[\bar{s}_{i\ell}\bar{s}_{\ell j}\right]_{trl}
$$
$$
+\frac{1}{C_{\Pi 1}}\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 4}\right)\tau\nu_T\left(\bar{s}_{i\ell}\bar{\omega}_{\ell j}+\bar{s}_{j\ell}\bar{\omega}_{\ell i}\right)
$$
$$
-\frac{1}{C_{\Pi 1}}\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 3}\right)\tau\left[N_{i\ell}\bar{s}_{\ell j}+N_{j\ell}\bar{s}_{\ell i}\right]_{trl}
$$
$$
-\frac{1}{C_{\Pi 1}}\left(\frac{1}{2}-C_{\Pi 4}\right)\tau\left(N_{i\ell}\bar{\omega}_{\ell j}+N_{j\ell}\bar{\omega}_{\ell i}\right)
$$

This document is provided by JAXA.

$$-\frac{1}{C_{\Pi 1}}\tau\frac{DN_{ij}}{Dt}$$
$$+\frac{1}{C_{\Pi 1}}\tau\nabla\cdot\left(\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\nu}\right)\nabla N_{ij}\right) \qquad (6.30)$$

と変形する．

式(6.30)の右辺第 1 および 2 項は，よく知られた $\overline{s}_{ij}$ と $\overline{\omega}_{ij}$に関する 2 次の非線形項であり，これらを用いて第 3 と 4 項の N_{ij} を近似すると，3 次の非線形項を得ることができる．

6.3. モデル表現の物理的意味の考察

§6.2 の議論をもとに，§6.1 のモデル方程式（6.3）を考察する．式（6.2）における χ は，基準速度 U_R と基準長 L_R を用いると

$$\chi=\frac{Re}{Re_T},\qquad Re=\frac{U_R L_R}{\nu},\qquad Re_T=\frac{U_R L_R}{\nu_T} \qquad (6.31)$$

と書け，レイノルズ数と乱流レイノルズ数の比となる．高レイノルズ数乱流においては，壁面近傍を除くと，一般に $\chi\gg 1$となる．§6.2 の議論おいては，ν の効果は直接取り入れられていないため，$\hat{\nu}$ と§6.2 の ν_T に対して

$$\nu_T \Leftrightarrow \hat{\nu} \qquad (6.32)$$

の対応関係を付けることができる．

以下の議論では，時間スケールが重要な概念となり，その主たるものは

$$\tau_V,\qquad \tau_\nu=\frac{d^2}{\nu},\qquad \tau_{\hat{\nu}}=\frac{d^2}{\hat{\nu}} \qquad (6.33)$$

である．ここで，τ_V は式（4.7）の渦度時間スケールであり，後 2 者は距離 d だけ分子粘性ないし乱流粘性拡散するのに要する時間である．

6.3.1. 生成項

式 (6.3) の右辺第 1 項すなわち生成項は，式 (6.24) に対応する．前者において

$\chi\gg 1$:

$$f_V\to 1,\qquad f_P\to 0$$

$$\hat{S}\to\sqrt{\frac{1}{2}\overline{\omega}_{ij}^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\tau_V} \qquad (6.34)$$

$\chi\ll 1$:

$$f_V=\frac{1}{C_V^3}\left(\frac{\hat{\nu}}{\nu}\right)^3,\qquad f_P\to 1$$

$$\hat{S}\to\frac{1}{\tau_{V\nu}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\tau_V}+\frac{1}{\kappa^2}\frac{1}{\tau_\nu} \qquad (6.35)$$

を得る．

式（6.34）すなわち分子粘性効果が弱い領域では，式（6.24）は

$$C_{\nu P}K\to\frac{C_P}{\sqrt{2}}\frac{\hat{\nu}}{\tau_V} \qquad (6.36)$$

とモデル化されたことになる．S-A モデルでは，$\hat{\nu}$ が唯一の乱流量であるため，他の物理量として，渦度に注目して τ_V を採用している．次元解析的には，τ_S などの時間次元量も可能である．B-L モデルでも言及した混合距離の視点で，$|\overline{S}|$ の代わりに $|\overline{\omega}|$ を採用すると

$$\hat{\nu}\propto\ell^2|\overline{\omega}|=\frac{\ell^2}{\tau_V},\qquad K\propto(\ell|\overline{\omega}|)^2=\left(\frac{\ell}{\tau_V}\right)^2 \qquad (6.37)$$

となり，これより

$$K\propto\frac{\hat{\nu}}{\tau_V} \qquad (6.38)$$

を得る．式（6.38）は，式（6.37）のもとでの生成項であり，混合距離近似に類似した K の評価と言える．なお，対数速度則（5.16）が成立する領域では，τ_V と τ_S は同等となる．

これに対して，式（6.35）の条件下では，調和平均法を用いて τ_V と τ_ν の 2 つの時間スケールのうち，短い時間スケールを抜き出すことになる．乱流中の時間変動を記述する際に短い時間スケールを優先するのは，ゆっくりした変動（長い時間スケールをもつ現象）は，短い時間スケールで計測できることによる．壁面近傍では，粘性効果が一般に重要であるが，平均速度勾配も大きくなるため，τ_ν と τ_V のいずれが優越するかは，流れの状況に依存する．

6.3.2. 消散項

式 (6.3) の右辺第 2 項の消散項を考える．式 (6.25) とは

$$C_{\Pi 1}\frac{1}{\tau}\nu_T\ \Leftrightarrow\ C_{\varepsilon 1}f_\varepsilon\left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2=C_{\varepsilon 1}\frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}/f_\varepsilon} \qquad (6.39)$$

の関係にある．§6.2 の段階では，特性時間 τ は特定されていなかったが，S-A モデルでは，乱流拡散時間 $\tau_{\hat{\nu}}$ に直結した$\tau_{\hat{\nu}}/f_\varepsilon$ が，消散に関わる時間スケールとなっている．

式（6.5）の f_ε の挙動を考える．まず，式（6.7）の r を

$$r=\frac{1}{\kappa^2}\frac{1/\hat{S}}{\tau_{\hat{\nu}}} \qquad (6.40)$$

This document is provided by JAXA.

と書く．式（6.34）より

$$\chi \gg 1:\ r \to \frac{\sqrt{2}}{\kappa^2}\frac{\tau_V}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{6.41}$$

を得る．これより，$\chi \gg 1$ の領域では，2 つの状況

$\chi \gg 1$，$\tau_V \gg \tau_{\hat{\nu}}$：

$$r \gg 1, \qquad g \to O(r^6), \qquad f_\varepsilon \to 1$$

$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to C_{\varepsilon 1}\frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{6.42}$$

$\chi \gg 1$，$\tau_V \ll \tau_{\hat{\nu}}$:

$$r \to 0, \qquad g \to 0, \qquad f_\varepsilon \to 0$$

$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to 0 \tag{6.43}$$

に分類される．

式（6.42）に該当する領域では，乱流拡散時間 $\tau_{\hat{\nu}}$ の重要性から，$\hat{\nu}$ の消散は $\tau_{\hat{\nu}}$ で支配されることは合理的である．他方，式（6.43）の場合は，分子粘性も乱流粘性も重要でないことから，該当する流れは層流と見なされ，$\hat{\nu}$ の消散項が消えることになる．

式（6.41）と逆の状況では，式（6.35）より

$$\chi \ll 1:\ r \to \frac{1}{\kappa^2}\frac{\tau_{V\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{6.44}$$

となる．ここで，$\tau_{V\nu}$ は式（6.35）の最終関係式より

$$\tau_V \gg \tau_\nu:\ \tau_{V\nu} \to \tau_1, \qquad r \to \frac{1}{\kappa^2}\frac{\tau_\nu}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{6.45}$$

$$\tau_V \ll \tau_\nu:\ \tau_{V\nu} \to \tau_V, \qquad r \to \frac{1}{\kappa^2}\frac{\tau_V}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{6.46}$$

と分類される．

式（6.44）-（6.46）を合わせると，$\chi \ll 1$領域では，4 つの状況

$\chi \ll 1$，$\tau_V \gg \tau_\nu \gg \tau_{\hat{\nu}}$：

$$r \gg 1, \qquad g \to O(r^6), \qquad f_\varepsilon \to 1$$

$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to C_{\varepsilon 1}\frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{6.47}$$

$\chi \ll 1$，$\tau_\nu \gg \tau_V \gg \tau_{\hat{\nu}}$：

$$r \gg 1, \qquad g \to O(r^6), \qquad f_\varepsilon \to 1$$

$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to C_{\varepsilon 1}\frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{6.48}$$

$\chi \ll 1$，$\tau_V \gg \tau_\nu$，$\tau_{\hat{\nu}} \gg \tau_\nu$:

$$r \to 0, \qquad g \to 0, \qquad f_\varepsilon \to 0$$

$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to 0 \tag{6.49}$$

$\chi \ll 1$，$\tau_\nu \gg \tau_V$，$\tau_{\hat{\nu}} \gg \tau_V$:

$$r \to 0, \qquad g \to 0, \qquad f_\varepsilon \to 0$$

$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to 0 \tag{6.50}$$

となる．

式（6.47）では，乱流拡散時間 $\tau_{\hat{\nu}}$ がもっとも重要となり，$\hat{\nu}$ の消散もこれで支配される．式（6.48）の場合も同様に，$\hat{\nu}$ の消散は $\tau_{\hat{\nu}}$ で決まる．これに対して，式（6.49）では，粘性拡散時間 τ_ν がもっとも重要となる．このような領域は固体壁近傍と考えられ，$\hat{\nu}$ の消散は式（6.3）の第 2 項ではなく，第 3 項の第 1 部分と関係することになる．式（6.50）では，乱流拡散も分子粘性拡散も重要でないことから，層流状態が該当し，$\hat{\nu}$ の消散がないことは合理的である．

以上の考察から，消散項のモデルは，定性的には物理的矛盾はないと言える．

6.3.3. 拡散項

式（6.3）の右辺第 3 項の拡散項は，式（6.26）に対応する．前者の第 1 部分が後者の第 1 部分に相当し，両者とも純粋の拡散項と言える．式（6.26）で拡散項以外の項が発生しているのは，式（6.21）中の L_{ij} に関する拡散項（右辺第 3 項）を，ν_T を用いて表わしたためであり，当然と言える．

式（6.3）の右辺第 3 項の第 2 部分は，拡散項という描像からかなりかけ離れた構造をしている．本来，拡散効果は正負いずれの値も取ることができる．実際，式（6.26）の第 1 項以外もこの性質をもっている．これに対して，上記第 2 部分は非負であり，式（6.26）中には対応する項はなく，レイノルズ応力方程式の視点では説明できない．

非負の量という意味では，同部分は，第 1 項の生成項と同等であり

$$C_P \hat{\nu}\hat{S} + \frac{C_D}{\sigma}(\nabla\hat{\nu})^2 \tag{6.51}$$

とまとめるのが適当であろう．式（6.51）中の 2 項の差異は，$\hat{\nu}$ を生成する機構の差と考えられる．前者は平均速度歪みに，後者は発生した $\hat{\nu}$ の空間的非一様性と関連する．翼まわりの流れを念頭に置くならば，前者は $\hat{\nu}$ の発生の始まる，前縁近傍の速度勾配の大きい領域で，後者は発生した $\hat{\nu}$ の空間分布に直結し，後縁

This document is provided by JAXA.

に近い領域で重要と考えられる．いずれにしろ，式（6.51）の第 2 部分を拡散項と位置づけることは，数学的な観点では疑義が残る．

6.3.4. 曲率および回転効果

角速度 $\mathbf{\Omega}_F$ の回転系においては，平均速度方程式（3.11）は

$$\frac{D\overline{u}_i}{Dt} + 2\varepsilon_{imn}\Omega_{F_m}\overline{u}_n + \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\nabla^2\overline{u}_i \quad (6.52)$$

と変換される．上記方程式から平均歪みテンソル $\overline{s}_{ij}$ に関する方程式を求めると，左辺の第 1，2 項から

$$\frac{D\overline{s}_{ij}}{Dt} + \varepsilon_{imn}\Omega_{F_m}\overline{s}_{jn} + \varepsilon_{jmn}\Omega_{F_m}\overline{s}_{in} + \frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_m} + \frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_m} \quad (6.53)$$

を得る．曲率および回転効果を同時に扱う方法として，第 1 項の実質（ラグランジュ）微分に関する部分と，第 2 および第 3 の $\mathbf{\Omega}_F$ に依存する部分を残して

$$\frac{D\overline{s}_{ij}}{Dt} + \varepsilon_{imn}\Omega_{F_m}\overline{s}_{jn} + \varepsilon_{jmn}\Omega_{F_m}\overline{s}_{in} \quad (6.54)$$

を考慮する．

平均渦度および回転効果を導入するとき，式（6.54）と式（6.13）の平均部分 $\overline{\widehat{\omega}_{ij}}$ との内積を取ると消失するため

$$\overline{\widehat{\omega}_{i\ell}}\overline{s}_{\ell j}\left(\frac{D\overline{s}_{ij}}{Dt} + \varepsilon_{imn}\Omega_{F_m}\overline{s}_{jn} + \varepsilon_{jmn}\Omega_{F_m}\overline{s}_{in}\right) \quad (6.55)$$

のように，$\overline{s}_{ij}$ を挿入する工夫を施した表式が，式(6.12)である．

式（6.10）の補正関数 F_{CR} を支配するパラメータの一つである式（6.11）の $\hat{r}_1$ は，歪みと回転両効果の強弱に応じて

$|\overline{s}| \gg |\overline{\widehat{\omega}}|$:

$$\hat{r}_1 \gg 1, \quad \hat{r}_2 \ll 1$$

$$F_{CR} \to C_{R0} + (C_{R0} - 1)C_{R1} \quad (6.56)$$

$|\overline{s}| \ll |\overline{\widehat{\omega}}|$:

$$\hat{r}_1 \ll 1, \quad \hat{r}_2 \to 0$$

$$F_{CR} \to -C_{R1} \quad (6.57)$$

となる．

式(5.14)では，$C_{R0} = 2$ が採用されている．式(6.56)において，回転運動が弱いとき，補正効果が消失するという視点では，$C_{R0} = 1$ が適当ではないであろうか．系の回転効果が強い場合，流れは一般的に 2 次元化し，乱流が抑制される．式（6.57）のもとでは，生成項が消散項に変わることから，この効果を取り入れたものと解釈される．

§6.2 のレイノルズ応力方程式の視点では，曲率効果は，式（6.27）より $D\overline{s}_{ij}/Dt$ を通して乱流粘性率方程式に現われるが，式（6.54）中の回転効果は現われない．同効果は，式（6.13）の変換を通して，式（6.30）の N_{ij} に現われる．

6.3.5. 非線形効果

レイノルズ平均モデリングでは，式（6.16）は 2 次の非線形項と呼ばれる．§6.2 の視点では，2 次の非線形項は，式（6.30）の右辺第 1，2 項で与えられる．S-A モデルでは，第 2 項が考慮されている．これは，翼と胴体部分の付け根などに発生する 2 次流などを念頭において，渦運動と直結する平均渦度に重点をおいた選択と解釈できる．

式（6.30）では，特性時間スケール τ は特定されていないが，式（6.16）では

$$\tau \propto \frac{1}{\sqrt{\overline{s}_{ij}^2 + \overline{\omega}_{ij}^2}} \quad (6.58)$$

となっている．式（6.30）の τ は，乱流粘性率方程式（6.23）の第 2 項，すなわち式（6.25）にも現れる．これに対して，S-A モデル中の代表的な時間スケールは，式（6.4）から $1/\hat{S}$ で与えられ，主要部の第 1 項は $\overline{s}_{ij}$ には依存していない．これは，$\widehat{\omega}_{ij}$ に準拠する，式（6.3）がまず整備され，後に補正という目的で非線形項が追加されたことによると思われる．

6.4. 数値計算との対応

図 3 は，S-A モデルによる平板境界層の数値計算結果のプロファイルを示す．$Re_x = 5 \times 10^6$ の位置における速度プロファイルU/U_∞，乱流粘性率分布 ν_T，関数 χ 及び関数 F_V［式（6.2）］をそれぞれ示す．関数 χ と乱流粘性率 ν_Tについては，ほとんど差は見られない．関数 F_Vは，境界層外部で 0、境界層内で 1 という分布になっている．ただし，壁面では再び 0 に漸近している。図 4 は，同じ図を壁座標 y^+で表示したものである．

図 5 は，境界層内における各項，すなわち対流（Advection），生産（Production），消滅（Destruction），拡散（Diffusion）の収支（バジェット）を示したものである．ただし，Diffusion_1 は拡散項全体から $C_D(\nabla\hat{\nu})^2/\sigma$を引いたものの分布であり，縦軸は$C_P\tau_{wall}$を基準に数値化している．この図は，文献 2 の Figure 6 に相当する．文献 2 のとおり，壁面で生成 1 と拡散 3 に対して消散が-4 でバランスしているのが見て取れる．$C_D(\nabla\hat{\nu})^2/\sigma$の値は，壁面付近で生産項と同じ程度の数値を取っており，かなり大きな値となっている．

This document is provided by JAXA.

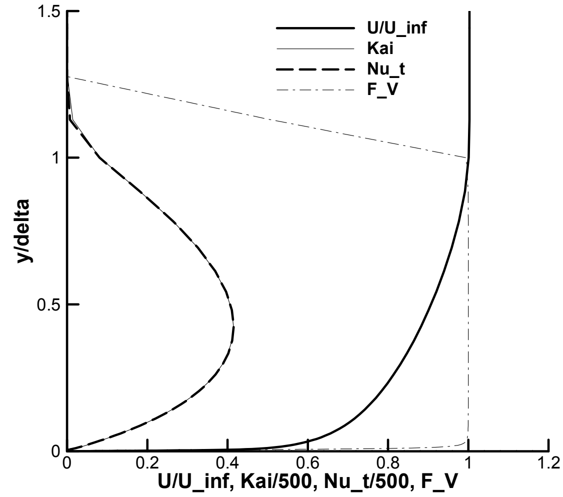

図 3　S-A モデルによる平板境界層のプロファイル（$Re_x = 5 \times 10^6$）

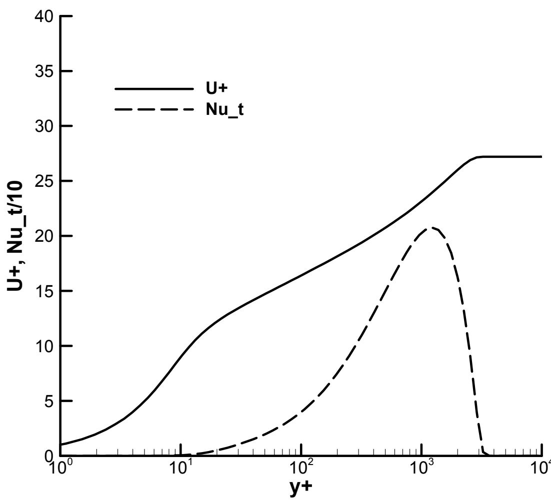

図 4　S-A モデルによる平板境界層のプロファイルの壁座標表示（$Re_x = 5 \times 10^6$）

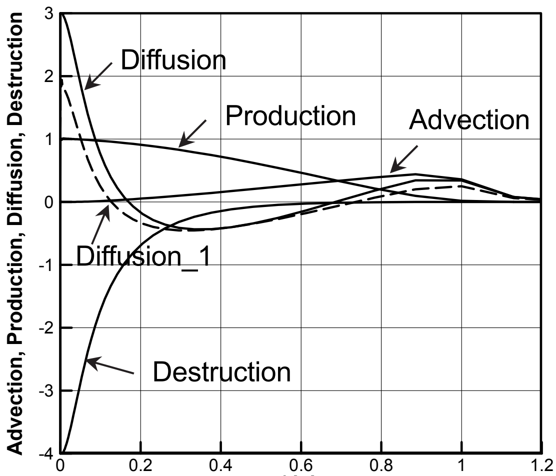

図 5　境界層内における各項の収支（$Re_x = 5 \times 10^6$）

6.5.　付言

S-A モデルは，§6.2 のレイノルズ応力方程式モデリングから，その主たる骨格を解釈することができるが，両者が整合する部分とそうでない部分は混在する．その主たる理由として，S-A モデルでは，計算コストの軽減と関連して，乱流粘性率が唯一の乱流量として採用されていることがあげられる．通常のレイノルズ平均モデリングでは，少なくとも 2 つの乱流量が必要となる．これに対して，S-A モデルでは，壁面と計算点間の距離 d が重要な有次元量として導入されている．この方法は，壁面周囲を扱うには適しているが，これを乱流量の代替として用いると，モデルの普遍性の点で問題が生じることは否定できないであろう．

式（6.8）の定数中で $C_{\varepsilon 1}$ に関わる第 6 式は，対数速度則から得られる式（5.17）を，分子粘性の重要でない領域で用いることによって得られる．式(6.5)-(6.7)は，壁面近傍の粘性効果の強い領域から離れた領域への漸近挙動と密接している．これらの表現を§6.2 の視点で説明することはむずかしく，さまざまな流れへの適用を通して得られた経験式と考えるのが適当であろう．§6.3.4 で述べられた定数 C_{R0} に関しては，本論では十分な解釈がなされていない．

7.　Menter SST モデル

Menter モデル[3]は, SST（Shear Stress Transport）モデルとも呼ばれ, B-L モデル, S-A モデルと異なり，機械工学分野で多用される K-ε モデルと同様に，2 つの乱流量を導入する 2 方程式モデルである．両者の差は，散逸率 ε の重要度に関する視点の差と考えられる．

7.1.　2 方程式モデル表現

基本的な乱流量として

$$K,\ \varpi \tag{7.1}$$

を用いる．ここで，ϖ は時間の逆次元量であり，乱流を扱う際の時間スケールの重要性の認識と軌を一にしている．

表現（7.1）をもとに，乱流粘性率 ν_T は

$$\nu_T = a_\nu \frac{K}{\max(a_\nu \varpi,\ F_\nu |\overline{\omega}|)} \tag{7.2}$$

と表わされ，F_ν は計算点と壁面までの距離 d を用いて

$$F_\nu = \tanh A_\nu^2,\ \ A_\nu = \max\left(c_{\nu 1} \frac{\sqrt{K}}{\varpi d},\ c_{\nu 2} \frac{\nu / d^2}{\varpi} \right) \tag{7.3}$$

と定義され，$|\overline{\omega}|$ は式（4.7）で与えられる．定数は

This document is provided by JAXA.

$$a_\nu = 0.31,\quad c_{\nu 1} = \frac{2}{0.09},\quad c_{\nu 2} = 500 \tag{7.4}$$

である．

2 つの乱流量は

$$\frac{DK}{Dt} = P - \beta_K \varpi K + \nabla\cdot\left((\nu + \hat{\sigma}_K \nu_T)\nabla K\right) \tag{7.5}$$

$$\frac{D\varpi}{Dt} = \gamma_\varpi \frac{P}{\nu_T} - \beta_\varpi \varpi^2 + \nabla\cdot\left((\nu + \sigma_\varpi \nu_T)\nabla\varpi\right) + 2(1 - F_\varpi)\frac{\sigma_\varpi}{\varpi}\nabla K\cdot\nabla\varpi \tag{7.6}$$

で決定される．ただし， $P = ½\nu_T \bar{s}_{ij}^2$ である．

モデル定数に関しては, Baldwin-Lomax モデルと同様に，領域は内層と外層に分けられ，それぞれに対応する 2 通りの定数系が設定される(内層に対しては I, 外層に対しては O の添字を付す)．内層の定数系を

$$\phi_I = (\beta_{KI},\ \sigma_{KI},\ \beta_{\varpi I},\ \sigma_{\varpi I}) \tag{7.7}$$

とし

$$\begin{gathered}\beta_{KI} = 0.09,\quad \sigma_{KI} = 0.85,\quad \beta_{\varpi I} = 0.075\\ \sigma_{\varpi I} = 0.5,\quad \gamma_{\varpi I} = \frac{\beta_{\varpi I}}{\beta_{KI}} - \frac{\sigma_{\varpi I}\kappa^2}{\sqrt{\beta_{KI}}}\end{gathered} \tag{7.8}$$

と選ぶ．ここで，κ は式 (5.4) のカルマン定数であり，式（7.8）の最終式は，式（6.8）の第 6 関係式に対応する．

外層では

$$\phi_O = (\beta_{KO},\ \sigma_{KO},\ \beta_{\varpi O},\ \sigma_{\varpi O}) \tag{7.9}$$

に対して

$$\begin{gathered}\beta_{KO} = 0.09,\quad \sigma_{KO} = 1.0,\quad \beta_{\varpi O} = 0.083\\ \sigma_{\varpi O} = 0.86,\quad \gamma_{\varpi O} = \frac{\beta_{\varpi O}}{\beta_{KO}} - \frac{\sigma_{\varpi O}\kappa^2}{\sqrt{\beta_{KO}}}\end{gathered} \tag{7.10}$$

とする．

内層と外層の接続は

$$\phi = F_\phi \phi_I + (1 - F_\phi)\phi_O \tag{7.11}$$

によって行い，混合比 F_ϕ は

$$F_\phi = \tanh A_\phi^4$$

$$A_\phi = \min\left(\max\left(c_{\phi 1}\frac{\sqrt{K}}{\varpi d},\ c_{\phi 2}\frac{\nu/d^2}{\varpi}\right),\ \frac{K/d^2}{\varpi^2 \Lambda}\right)$$

$$\Lambda = \max\left(\frac{1}{2\varpi^3}\nabla K\cdot\nabla\varpi,\ \ \frac{10^{-20}}{4\sigma_{\varpi O}}\right) \tag{7.12}$$

で定義され，モデル定数は

$$c_{\phi 1} = \frac{1}{0.09},\qquad c_{\phi 1} = 500 \tag{7.13}$$

とする．また，式（7.6）の右辺最終項中の F_ϖ を F_ϕ と同定し

$$F_\varpi = F_\phi \tag{7.14}$$

とする．

7.2. 標準 K-ε モデル

Menter モデルは 2 方程式モデルであるため，まず 2 方程式モデリングにおいて原型的な標準 K-ε モデルを与え，§7.3 で両モデルの比較を通して考察を行う．

標準 K-ε モデルでは， ν_T は

$$\nu_T = c_\nu f_\nu \frac{K^2}{\varepsilon} = c_\nu f_\nu K \tau_E \tag{7.15}$$

で与えられる．モデル定数 c_ν は

$$c_\nu = 0.09 \tag{7.16}$$

と選ばれことが多い．壁面での粘性効果を表わす補正関数 f_ν に関しては，さまざまな提案があり（ここではその詳細は省略する）．τ_E は，式（4.6）によって定義ざれる，エネルギーカスケードと関連する時間スケールである．

2 つの乱流量は

$$\frac{DK}{Dt} = P - \varepsilon + \nabla\cdot\left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_K}\right)\nabla K\right) \tag{7.17}$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{K}P - c_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{K} + \nabla\cdot\left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\nabla\varepsilon\right) \tag{7.18}$$

で決定される．式（7.18）の f_ε は， f_ν と同様に壁面での補正関数であり（詳細は省略する），モデル定数は

$$\sigma_K = 1.0,\quad c_{\varepsilon 1} = 1.4,\quad c_{\varepsilon 2} = 1.9,\quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \tag{7.19}$$

とする．モデルが対数速度則と整合するための条件は

$$c_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sqrt{c_\nu}\sigma_\varepsilon} \tag{7.20}$$

This document is provided by JAXA.

となり，式（7.8）と（7.10）の最終関係式に対応するものである．

7.3. モデル表現の物理的意味の考察

7.3.1. 時間の逆次元量の導入の意義

まず最初に議論すべきは，なぜϖという時間の逆次元量を導入するかである．同量から定義される

$$\tau_{\varpi} = \frac{1}{\varpi} \tag{7.21}$$

は，Wilcox の時間スケール[10]と呼ぶことができる．筆者らは，時間と関連する量に重要性をおいているが，その主たる動機は数値計算上の利点と考えられている．時間の逆次元量の視点では，τ_{ϖ}は標準K-εモデルの時間スケールτ_Eと

$$\tau_{\varpi} \Leftrightarrow \tau_E \tag{7.22}$$

の対応関係にある．これはあくまでも対応関係であり，$\tau_{\varpi} = \tau_E$と見なすべきではないと筆者らは考える．

航空工学関連の高レイノルズ数流れの数値計算においては，粘性効果がとくに重要となる壁面近傍を精密に扱うことは困難である．εは，壁面近傍でとくに重要であるため，標準K-εモデルによる計算結果は，その扱いに敏感となる．これに対して，Menter モデルでは，式（7.22）の対応関係の視点より，ϖは壁面近傍で極めて大きな値をとるため，εを採用する際の敏感さが緩和され，数値的安定性が向上する．

筆者らは別視点からϖ導入の物理的意義を考える：

a) 標準K-εモデルと異り，時間スケールを代数表現ではなく，輸送量として直接扱っている．このため，時間スケールに対する移流効果などを，陽に取り込むことができる．

b) 標準K-εモデルは，εという，高レイノルズ数流れでは極めて小さい変動スケール成分で決定される物理量を採用している．これに対して，レイノルズ応力やKは，大きな変動スケール成分からなっている．これらを同時に採用すると，両極端の変動スケール成分を直接結びつけるという，物理的には極めて困難な作業を行うことになる．これを裏付ける事実として，式（7.18）はεの厳密な方程式のモデル化から構成されたものではなく，観測結果を説明するという視点で提案されている．レイノルズ平均モデルとサブグリッドスケールモデルを壁面近傍とそれ以外の領域でそれぞれ適用するハイブリッドモデルにおいても，両者の接続の際に同様の困難に直面する．

このような状況下において，機械工学分野でεが重視されるのは，観測や DNS からその詳細な情報が得られることが少なくないためと言える．とくに，最近の計算機環境の向上は，この傾向を一層強くしている．これに対して，航空工学分野の流れは，レイノルズ数がさらに大きく，DNS の情報も乏しい．加えて，翼などの設計の視点では，ε自体への関心は薄い．

航空工学分野の視点を，筆者らの視点で解釈すれば，Kに次いで重要な乱流量は時間スケールであるため，τ_{ϖ}を採用したと言える．乱流中にはさまざまな時間スケールが存在するが，レイノルズ応力やKに直結する大きな空間スケールの変動に固有の時間スケールを選ぶとする．この時間スケールをτ_{ϖ}と同定すれば，εを採用する際の概念的な困難を回避することができる．当然，K方程式中のεを，Kとϖを用いて近似することが必要となるが，この近似はK方程式中の 1 項に留まり，ε方程式全体をモデル化するより容易と言える．ただし，この方法の難点は，ϖはいわゆる測定可能な物理量ではないため，モデルの妥当性を検証するための量とはならないことである．

7.3.2. 乱流量方程式の考察

乱流量方程式（7.5）と（7.6）を考える．前者の右辺第 2 項では，式（7.17）のεを時間スケールτ_{ϖ}を用いて

$$\varepsilon \propto \frac{K}{\tau_{\varpi}} = \varpi K \tag{7.23}$$

とモデル化したことになり，その意味は明確である．

式（7.6）のϖ方程式のモデル化において，ϖが時間の逆次元量というだけでは手掛かりが少ない．実際，同方程式は，式（7.22）の対応関係を念頭に構成されたものと思われる．式（7.17）と（7.18）を用いて

$$\frac{D\varpi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\frac{\varepsilon}{K} = \frac{1}{K}\frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\varepsilon}{K^2}\frac{DK}{Dt} \tag{7.24}$$

を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{D\varpi}{Dt} &= (C_{\varepsilon 1} - 1)\frac{\varpi}{K}P - (C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon} - 1)\varpi^2 \\ &+ \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \nabla \varpi \right) + 2\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{1}{K} \nabla \varpi \cdot \nabla K \end{aligned} \tag{7.25}$$

を得る．式（7.25）は，式（7.6）とまったく同形になり，右辺最終項に式（7.22）の対応関係が現われている．

式（7.25）の導出は，標準K-εモデルに忠実であるため，§7.3.1 で議論した「乱れの大きなスケールと小さなスケールを直結させない」というモデリング方針からは少々物足りないと筆者らは考える．標準K-εモデルが普遍性の高いモデルであれば，この導出法も十分説得力があるが，必ずしもそうでないことが確認されている現状では，同モデルにあまりに忠実な導出法はどうであろうか．

This document is provided by JAXA.

前述のように，標準K-εモデルからの導出に起因する顕著な特徴は，式(7.25)の最終項に現われている．この項は，本来拡散項であったものを他の量で書き換えたために現われている．拡散項に起源を持つ項という意味では，S-Aモデル（6.3）の右辺最終項中の第2部分と同様である（§6.3.3の議論を参照）．その結果，この項が各種の流れにおいて普遍的に有効であるか否かは，必ずしも明らかではない．

7.3.3. 乱流粘性率と混合比の考察

Menterモデルと標準K-εモデルのもっとも大きな差異は，前者では領域を内層と外層に分け，異なるモデル定数系を導入していることである．機械工学分野で活用されてきた標準K-εモデルでは，領域の主要部分がほぼ乱流状態にあることを前提としており，モデル定数も溝乱流のような，固体壁が重要な役割をもつ流れに対して最適化されている．他方，航空工学分野の流れでは，翼背後など，固体壁から離れた領域も重要な解析対象となっている．このような状況に対処するには，それぞれの流れの特徴を捉え得る，異なる定数系が必要となるため，式（7.8）と（7.10）の2定数系が採用されている．

このとき問題となるのは，これらをいかに接続するかであるが，混合比F_ϕがその鍵となっている．F_ϕの具体的表現（7.12）はたいへん複雑であり，さまざまな流れへの適用を通して構成された経験式と言えるであろう．ただし，その大枠は時間スケールの視点で理解することができる．

乱流粘性率に対する式（7.2）の分母は，式（4.7）のτ_Vを用いると

$$\max(a_\nu\varpi,\ F_\nu|\overline{\omega}|) = \max\left(a_\nu\frac{1}{\tau_\varpi},\ F_\nu\frac{1}{\tau_V}\right) \tag{7.26}$$

を得る．これより，F_νを除くと，τ_ϖとτ_Vの両者で短い時間スケールを採用することになる．短い時間スケールを抜き出す方法としては，式（6.35）の最終式に見られる調和平均法もある．

乱流中では，平均流の時間スケールは，乱流量のそれよりも一般に長い．このような場合は

$$\tau_V \gg \tau_\varpi \tag{7.27}$$

となり

$$\nu_T = K\tau_\varpi \tag{7.28}$$

を得る．対応関係(7.22)より，式(7.27)は式(7.15)の高レイノルズ数部分に対応している．次に

$$\tau_V \ll \tau_\varpi \tag{7.29}$$

すなわち，τ_Vの重要性が高い状況を考える．直角座標系(x,y,z)における乱流粘性表現では，x方向の乱流強度成分は

$$R_{xx} = \frac{2}{3}K - 2\nu_T\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x} \tag{7.30}$$

と書ける．主流$\overline{u}_x$がx方向に急加速すると，式(7.30)はR_{xx}が減少することを表わし，加速流では乱れは弱まるという観測と符合する．しかし，式（7.28）のもとでは，式（7.30）の第2項中の$\partial\overline{u}_x/\partial x$のため，$R_{xx}$の正値は保証されない．急加速という状況では，$\tau_V$が$\tau_\varpi$より短くなり得るので

$$\nu_T = \frac{\sqrt{2}}{F_\nu}K\tau_V \tag{7.31}$$

を得る．τ_Vは平均速度勾配に反比例することから，式（7.30）と（7.31）の下では，上記の困難を回避できる可能性が生まれる．

このように，式（7.26）の補正関数F_νに関わる部分は，平均流の空間変化が大きい場合，すなわち式(7.29)を前提とする．その中のA_ν［式（7.3)］は

$$A_\nu = \max\left(c_{\nu1}\frac{\tau_\varpi}{\tau_K},\ c_{\nu2}\frac{\tau_\varpi}{\tau_\nu}\right),\quad \tau_K = \frac{d}{\sqrt{K}} \tag{7.32}$$

と書き直せる．すなわち，τ_ϖと，距離d間の乱れによる移流時間τ_K，あるいは粘性拡散時間τ_νの比を考慮している．後2者の比

$$\frac{\tau_K}{\tau_\nu} = \left(\frac{\sqrt{K}d}{\nu}\right)^{-1} \tag{7.33}$$

は，壁面からの距離dと乱れ強度の大きさにもとづくレイノルズ数の逆数である．これより

$$d \to \infty \ \Rightarrow\ \tau_K \ll \tau_\nu,\quad A_\nu = c_{\nu1}\frac{\tau_\varpi}{\tau_K} \tag{7.34}$$

$$d \to 0 \ \Rightarrow\ \tau_K \gg \tau_\nu,\quad A_\nu = c_{\nu2}\frac{\tau_\varpi}{\tau_\nu} \tag{7.35}$$

となる．

式（7.3）に見るように，f_νとA_νに関して

$$A_\nu \to 0 \ \Rightarrow\ F_\nu \to 0 \tag{7.36}$$

の関係がある．この場合は，式(7.29)の条件下でも，ν_Tは式（7.28）で与えられることになる．式（7.34）と（7.35）から，式（7.36）は

This document is provided by JAXA.

$$d \to \infty \ \Rightarrow \tau_\nu \gg \tau_K \gg \tau_\varpi (\gg \tau_V) \tag{7.37}$$

$$d \to 0 \ \Rightarrow \ \tau_K \gg \tau_\nu \gg \tau_\varpi (\gg \tau_V) \tag{7.38}$$

の状況で生じる．壁面からの遠近を問わず，τ_ϖ が τ_V や τ_K より短い，すなわち τ_ϖ が重要となる状況は，式（7.22）の対応関係に照らすと，エネルギー散逸 ε が大きいことを意味する．このような場合は，平均流の空間変化が急で τ_V が小さくとも，乱れが強いため，ν_T は式 (7.28) で与えられるとしている．この状態から，運動エネルギーが消散して，時間スケールに変化が生じ，式 (7.37) と (7.38) の条件から外れたときに，ν_T に対する τ_V による平均流の効果が重要となる．

最後に，式 (7.12) の混合比 F_ϕ を考察する．F_ϕ は，内層と外層の接続を担う重要な量であるが，かなり複雑な表式となっており，時間スケールによる統一的な説明は容易ではない． A_ϕ ［式（7.12)］は

$$A_\phi = \min\left(\max\left(c_{\phi 1}\frac{\tau_\varpi}{\tau_K},\ c_{\phi 2}\frac{\tau_\varpi}{\tau_\nu}\right), \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\tau_\varpi}{\tau_K}\right)^2\right) \tag{7.39}$$

と書き直される（Λ は無次元量である)．

壁面から遠い，すなわち d が大きい領域では粘性拡散効果が小さいので， τ_K は τ_ν より重要となり，式（7.39）は

$$A_\phi = \min\left(c_{\phi 1}\frac{\tau_\varpi}{\tau_K},\ \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\tau_\varpi}{\tau_K}\right)^2\right) \tag{7.40}$$

と書き直される． A_ϕ の両部分とも d の増加とともに減少し， F_ϕ も小さくなる．その結果，式（7.11）において，外層の定数系 ϕ_O を得る．これに対して， d の小さい壁面近傍では， A_ϕ のいずれの部分も大きくなり， F_ϕ は 1 に近づき，内層の定数系 ϕ_I を得る．ただし，式（7.40）の両部分の挙動は，式（7.12） Λ にも関連するため，本論の定性的議論の枠組みでは，条件式の物理的意味は明白ではない．

7.4. 数値計算との対応

図 6 は，SST モデルによる平板境界層の数値計算結果のプロファイルを示す．$Re_x = 5 \times 10^6$ の位置における速度分布 U/U_∞，乱流粘性率分布 ν_T，関数 F_ϕ ［式（7.12)］及び関数 F_ν ［式（7.3)］をそれぞれ示す．関数 F_ϕ 及び関数 F_ν ともに境界層の外縁で 1 から 0 に値が変化している．図 7 は，同じ図を壁座標 y^+ で表示したものである．

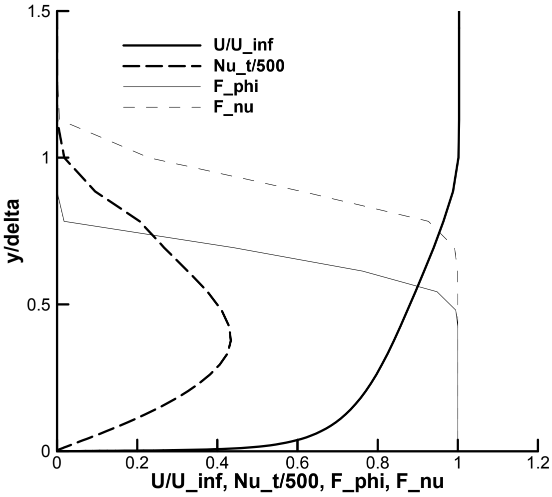

図 6　SST モデルによる平板境界層のプロファイル（$Re_x = 5 \times 10^6$）

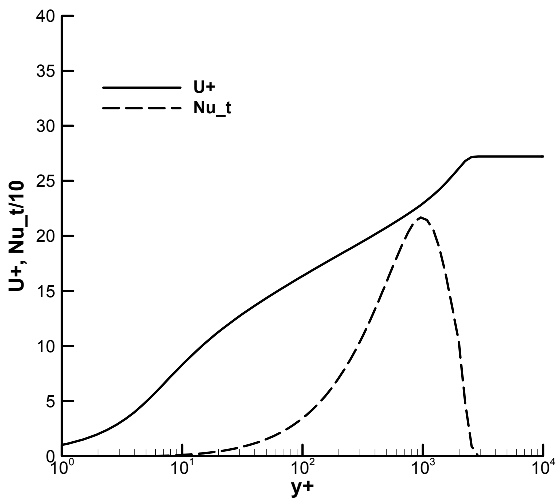

図 7　SST モデルによる平板境界層のプロファイルの壁座標表示（$Re_x = 5 \times 10^6$）

7.5. 付言

Menter モデルは，内部流を主たる対象とする標準 K-ε モデルの長所を残しながら，外部流への拡張を図ったモデルと言える．このため，散逸率 ε に代わり，時間の逆次元量 K-ε が採用されている．その一方で，ϖ の輸送方程式の構成においては，式（7.6）の右辺最終項に見るように，標準 K-ε モデルにかなり準拠した部分もある．

内層と外層への領域分割，これに伴う 2 つの定数系の導入は，B-L モデルと類似しており，外部流を扱う目的と整合している．しかし，後者のモデルに比べると，内層と外層の接続に関わる条件式が極めて複雑であり，この点の物理的意味を明確にすることが，モデルの改良の視点からは必要であろう．

This document is provided by JAXA.

8. 平板境界層の計算におけるモデル間の相互比較

ここでは，平板境界層の数値解析における B-L モデル，S-A モデル，SST モデル間の相互比較を試みる．

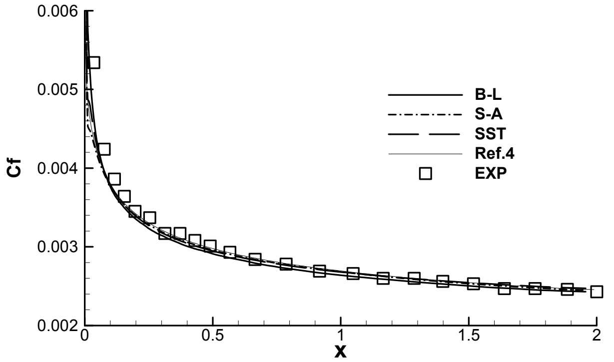

図 8 平板に沿った壁面摩擦係数の相互比較

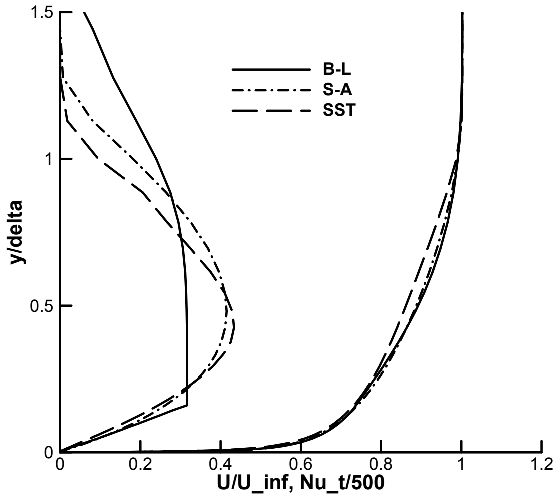

図 9 平板境界層のプロファイルの相互比較
($Re_x = 5 \times 10^6$)

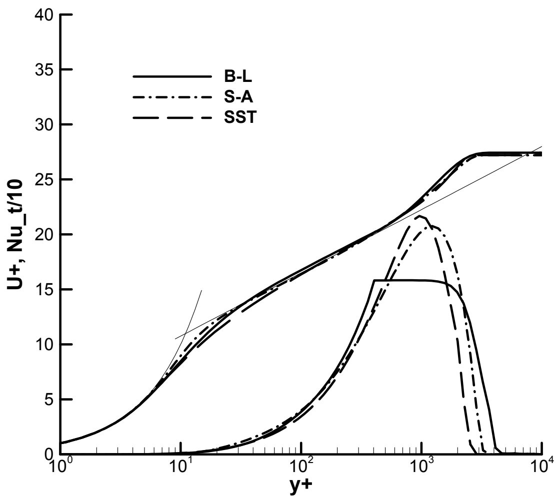

図 10 平板境界層のプロファイルの相互比較
壁座標表示（$Re_x = 5 \times 10^6$）

図 8 は，平板に沿った局所摩擦係数の分布を示す．文献 4 から取った計算参考値と Wieghardt[11]の実験値も同時にプロットした．どのモデルの結果も互いに良い一致を示し，参考値・実験値とも極めて良く一致している．図 9 は，$Re_x = 5 \times 10^6$ の位置における速度プロファイルU/U_∞，乱流粘性率分布 ν_Tをモデル間で比較したものである．内層の速度分布はほぼ完全に一致しているが，外縁の分布にわずかな相違が見られる．図 10 は, モデルによる相互比較を壁座標表示したものである. バッファー領域に軽微な差が見られるものの, 対数領域では対数速度分布 $u^+ = \frac{1}{\kappa}\log y^+ + A$（ただし，$\kappa = 0.41, \mathrm{A} = 5.0$, ［式（5.16）］）が良く再現されていのがわかる.（対数表示では, 図 9 の外縁の差は小さい.）

9. おわりに

本論では，航空工学分野において代表的モデルである B-L モデル, S-A モデル, Menter モデルについて, モデル表現の物理的意味を「乱流中の時間スケール」の視点で議論した．これらの議論では，密度変化の影響は考慮されておらず，密度一定の流れのモデルと本質的に同形式となっている．翼まわりの流れでは，衝撃波の発生など, 密度変動と直結する現象が多々ある. 密度変動を考慮せずに構成されたレイノルズ応力のモデルは，通常

$$R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \rightarrow R_{ij} = \left\langle u_i'' u_j'' \right\rangle_M \tag{8.1}$$

とおき換えられる．

このようなおき換えは，必ずしも自明ではない．例えば，S-A モデル（6.3）を密度変動流れに適用するときは， D を拡散関連部分として，同式を

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho}\hat{\nu} + \nabla\cdot(\overline{\rho}\hat{\nu}\hat{\mathbf{u}}) = C_P\overline{\rho}\hat{\nu}\hat{S} - C_{\varepsilon 1}\overline{\rho}f_\varepsilon\left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 + D \tag{8.2}$$

と拡張する． D を除く部分では，この拡張は直裁的であり，曖昧さはない．これに対して， D に対応する式（6.3）の右辺最終項の拡張は，自明ではなく

$$D = \frac{1}{\sigma}\nabla\cdot(\mu\nabla\hat{\nu}) + \frac{1}{\sigma}\nabla\cdot\left(\sqrt{\overline{\rho}}\hat{\nu}\nabla\left(\sqrt{\overline{\rho}}\hat{\nu}\right)\right) + \frac{C_D}{\sigma}\left(\nabla\left(\sqrt{\overline{\rho}}\hat{\nu}\right)\right)^2 \tag{8.3}$$

が提案されている [12]．式（8.3）は， $\sqrt{\rho}$ に関わる物理的にはやや不自然な因子を含んでいるが，密度変化のある際の対数速度則と矛盾しないことが保証されている．

密度変動流れにおけるレイノルズ平均モデリングにおいて, 十分研究されていない基本事項が少なくない. その代表例として，質量加重平均にもとづくレイノルズ応力や乱流運動エネルギー方程式である．後者は

This document is provided by JAXA.

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho}\left\langle\frac{1}{2}\mathbf{u}''^2\right\rangle_M+\nabla\cdot\left(\overline{\rho}\left\langle\frac{1}{2}\mathbf{u}''^2\right\rangle_M\hat{\mathbf{u}}\right)$$

$$=-\overline{\rho}\left\langle u_i''u_j''\right\rangle_M\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial x_j}-\overline{\mathbf{u}''}\cdot\nabla\overline{p}+\overline{p'\nabla\cdot\mathbf{u}''}$$

$$-\overline{\rho}\varepsilon+\nabla\cdot\left(-\overline{\rho}\left\langle\frac{1}{2}\mathbf{u}''^2\mathbf{u}''\right\rangle_M-\overline{p'\mathbf{u}''}\right)\qquad(8.4)$$

で与えられる.

式 (8.4) には密度一定流れにはない 2 つの特徴があり, これがモデリングの難しさの原因となっている [9]：

a) 同式には, 慣例的および質量加重平均操作が混在している.

b) 右辺第 2 項は, 密度変化の本質と関わる項である. 密度一定流れにおいて運動エネルギーの生成項となる第 1 項は, 主流が急加速される場合, 負値すなわち消散項となり得る. この場合, 第 2 項が生成項の役割を演じることが, 燃焼流れにおいて確認されている. 流れが主流方向に急加速されるという状況は, 航空流れにおいても衝撃波近傍では珍しくないが, 同項の考察はほとんどなされていない.

項目 b) に関連して, $\mathbf{u}''$ は

$$\overline{\mathbf{u}''}=\overline{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{u}}\qquad(8.5)$$

と表わすことができる. すなわち, 質量加重平均においても, 慣例的レイノルズ平均速度の情報が必要となり, 式 (8.4) あるいはその原型となるレイノルズ応力方程式は, 自己矛盾的な性質を含んでいる. この状況を打開するためには, これまでと異なる定式化が必要と筆者らは考える (文献 13 で, 新たな提案がなされている).

本論では, 航空工学分野の代表的モデル, とくにその原型的なモデル表現の物理的意味を考察した. これらのモデルは, 航空流れのさまざまな状況に適用され, 観測 (実験) 式と言える多くの情報が組み込まれている. このため, 通常の乱流モデリングの枠組みだけでは解釈できない表現が少なくない. しかし, 時間スケールの視点に立つことにより, その大枠は理解できるのではないかと筆者らは考える.

参考文献

1) Baldwin, B. and Lomax, H: Thin layer approximation and algebraic model for aerodynamic flows, AIAA Paper 78-257, 1978.
2) Spalart, P. R. and Allmaras, S. R.: A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, AIAA Paper 92-0439, 1992.
3) Menter, F. R.: Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA Journal*, Vol. 32, pp.1598-1605, 1994.
4) Turbulence Modeling Resource, NASA Langley Research Center, http://turbmodels.larc.nasa.gov
5) Kral, L. D.: Recent experience with different turbulence models applied to the calculation of flow over aircraft components, *Progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 34. pp. 481-541, 1998.
6) 吉澤　徴：乱流の巨視的構造と乱流モデリング, 第 3 章　乱流輸送とレイノルズ平均モデリング, ながれ (日本流体力学会誌), 第 30 巻, 241-261, 2011.
7) 吉澤　徴：乱流の巨視的構造と乱流モデリング, 第 4 章　レイノルズ平均モデリングと非一様乱流の統計理論, ながれ (日本流体力学会誌), 第 30 巻, 337-354, 2011.
8) Yamamoto. K. and Tanaka, K.: Effect of a nonlinear constitutive relation for turbulence modeling on predicting flow separation at wing-body Juncture of transonic commercial aircraft, AIAA Paper 2012-2895, 2012.
9) Yoshizawa, A., Abe, H., Matsuo, Y., Fujiwara, H., and Mizobuchi, Y.: A Reynolds-averaged turbulence modeling approach using three transport equations for the turbulent viscosity, kinetic energy, and dissipation rate, *Physics of Fluids*, Vol. 24, 075109, 2012.
10) Wilcox, D. C.: Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models, *AIAA Journal*, 26, pp. 1299-1310, 1988.
11) Wieghardt, K. and Tillmann, E.: On the turbulent friction layer for rising pressure, NACA TM 1314, 1951.
12) Catris, S. and Aupoix, B.: Density corrections for turbulnce models, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 4, pp. 1-11, 2000.
13) Yoshizawa, A., Matsuo, Y., and Mizobuchi, Y.: A construction of the Reynolds-averaged turbulence transport equations in a variable-density flow, based on the concept of mass-weighted fluctuations, *Physics of Fluids*, Vol. 25, 075105, 2013.

This document is provided by JAXA.

本印刷物は、グリーン購入法に基づく基本方針の判断基準を満たす紙を使用しています。

This document is provided by JAXA.