

位置依存型 Point-spread Function を用いた Richardson-Lucy 法の X 線衛星 Chandra 撮像画像への応用 ~超新星残骸カシオペア座 A の鮮明化~

酒井 優輔^{*1}, 山田 真也^{*1}, 佐藤 寿紀^{*2,1}, 早川 亮大^{*3,1}, 日暮 凌太^{*1}, 小湊 菜央^{*1}

Richardson-Lucy Deconvolution with a Position-Dependent Point-spread Function of Chandra X-ray Satellite Imaging: Enhancement of Sharpness in the Cassiopeia A Supernova Remnant

SAKAI Yusuke^{*1}, YAMADA Shinya^{*1}, SATO Toshiki^{*2,1}, HAYAKAWA Ryota^{*3,1}, HIGURASHI Ryota^{*1},
KOMINATO Nao^{*1}

ABSTRACT

Artificial satellite-based telescopes face several challenges during space observations, often resulting in the acquisition of limited information. It is imperative to maximize the use of available data and develop methods to obtain more accurate results. In X-ray telescope observations, images are degraded due to telescope aberrations, resulting in image spreading. This spreading is quantified by the point spread function (PSF). When studying the spatial distribution of celestial objects, correcting for the influence of the PSF is critical to determining the true distribution. In astronomy, Richardson-Lucy (RL) deconvolution [1, 2] is widely used for this purpose. Previous studies in X-ray astronomy using this method [e.g., 10, 11, 12] often use a single-shaped PSF for the observed images, limiting the correction to local regions where the PSF is assumed to be uniform.

However, when the region of interest extends over a large area where PSF variation cannot be neglected, a position-dependent RL method [e.g., 4, 18, 3] becomes necessary, using the PSF at each position. In this study, we have developed a program that applies the position-dependent RL method [3] to the entire field of view in the Chandra X-ray satellite observations. We have successfully processed and clarified images covering the entire region of the supernova remnant Cassiopeia A. This method has the potential to deepen our understanding of the universe through image enhancement in the field of space observations.

Keywords: Astronomy data analysis, Astronomy image processing, High angular resolution, X-ray astronomy

* 2023 年 11 月 30 日受付 (Received November 30, 2023)

^{*1} 立教大学理学部物理学科 (Department of Physics, Rikkyo University)

^{*2} 明治大学理工学部物理学科 (Department of Physics, School of Science and Technology, Meiji University)

^{*3} 量子場計測システム国際拠点、高エネルギー加速器研究機構

(International Center for Quantum-field Measurement Systems for Studies of the Universe and Particles (QUP), KEK)

概要

人工衛星上の望遠鏡による宇宙観測は様々な制約下で行われるため、観測で得られる情報はしばしば限定的である。そのような情報を最大限に活用し、より確かな情報を得るための手法の開発が重要である。X線望遠鏡を用いた観測では、望遠鏡の収差により像が広がって撮像されるため観測画像は劣化する。この像の広がり方は、点源拡散関数 (Point-spread Function; PSF) によって表現される。天体の空間的な分布が研究対象である場合、PSF の影響を正確に補正して真の分布を求める必要があり、その方法として天文学では Richardson-Lucy deconvolution 法 (RL 法) [1, 2] がよく使われる。その際、観測画像に対し単一形状の PSF を用いることが多く、この手法を用いた X 線天文分野での先行研究[e.g., 10, 11, 12]では、PSF が一様であると近似できる局所領域のみに RL 法を用いている。研究対象の領域が PSF の変化が無視できないような広範囲に及ぶ場合、各位置の PSF を用いた位置依存型 RL 法[e.g., 4, 18, 3]が必要となる。そこで、本研究では X 線衛星 Chandra の観測画像の視野全体に対して位置依存型 RL 法[3]を適用するプログラムを実装し、実際に超新星残骸カシオペア座 A の全領域の画像を処理し鮮明化することに成功した。本手法は、宇宙観測分野において画像の鮮明化を通じて宇宙の理解を深化させられる可能性を秘めている。

1. はじめに

宇宙環境における天体観測には、観測装置やその運用においてさまざまな制約があり、多くの場合取得情報に制限がかかる。X線天体観測では、X線望遠鏡の光学系の収差のため、光軸から離れるほど軸外での集光性能が低下し像が広がって撮像される。この特性は点源拡散関数 (Point-spread Function; PSF) により評価される。PSF の影響を正確に補正し観測対象天体の真の空間的な分布を推定するために、イメージデコンボリューション法が用いられる。

イメージデコンボリューション法は、古典的な方法から最近の機械学習を用いた手法まで幅広く研究されており、PSF が既知か否かに基づいて大別される。宇宙観測では、推定される画像に信頼性が求められるため、機械学習による手法を直接適用することが難しい場面が多く、古典的なアプローチが一般的に用いられる。X線衛星 Chandra の場合、地上と衛星軌道上で行われた豊富なキャリブレーションでモデル化された高精度な PSF が提供されているため、PSF を用いた古典的な Richardson-Lucy deconvolution 法 (RL 法) [1, 2] がよく使われる。RL 法は既知の PSF と観測画像から、ベイズ推定を反復的に用いることにより真の鮮明な画像を推定する手法である。その後もさまざまな派生手法[e.g., 6, 7, 8, 9]が開発されており、現在でも X 線観測の分野で使われている[e.g., 10, 11, 12]。

RL 法を用いた先行研究では、観測画像に対し単一形状の PSF を用いる場合が多く、Chandra 衛星の画像解析[e.g., 11, 12]でも PSF が同一と見做せる局所領域でのみ RL 法を利用するに留まっていた。Chandra 衛星視野の全領域にわたる画像解析においては、PSF の位置依存性が無視できないため、場所毎の PSF の違いを適切に考慮した位置依存型 RL 法[e.g., 4, 18, 3]が必要となる。位置依存型 RL 法を用いた先行研究としては、宇宙のガンマ線観測[4]やデジタルカメラのモーショントラッキング画像の復元[18]などがある。ガンマ線の先行研究[4]では、一つ一つの光子の位置とエネルギーに対して PSF を用意する必要があるため、Chandra 衛星のような光子数の大きい観測では計算コストの面で適用が難しい。一方、デジタル画像[18]の先行研究では、ガウスノイズを想定して実装しているため、Chandra 衛星画像の光子統計とは性質が異

なる。このように、観測機器等に合わせた手法の実装が必要となる。本研究では、観測画像視野全体で精度を損なわず現実的な計算コストで実行するため、PSF のサンプリング間隔を大きくし、そのサンプリングの境界に適切な処理を施した位置依存型 RL 法[3]を実装した。そして、その実証として超新星残骸カシオペア座 A の観測画像全体に本手法を適用し、その鮮明化に成功した。

本論文の構成は次のとおりである。2 章でイメージデコンボリューションの概観を説明し、3 章では RL 法の手法とその特徴について詳しく解説する。そして、4 章では位置依存型 RL 法について紹介する。最後の 5 章では、Chandra 衛星による超新星残骸カシオペア座 A の観測画像全体への適用結果や、高速化に向けた PSF の取り扱い方法について紹介する。本論文内で使われた位置依存型 RL 法の実装コードは、doi:10.5281/zenodo.8020557 で公開されている。

2. イメージデコンボリューションの概観

2.1. ブレとは

ブレ (ブラー、ぼけ) とは、観測機器の光学系などによって対象が不鮮明に見える現象である。このブレ画像を数学的に記述する際には、点源が撮影時にどのように広がって観測されるかを表した PSF が使われる。PSF と観測画像との関係を図 1 に示す。

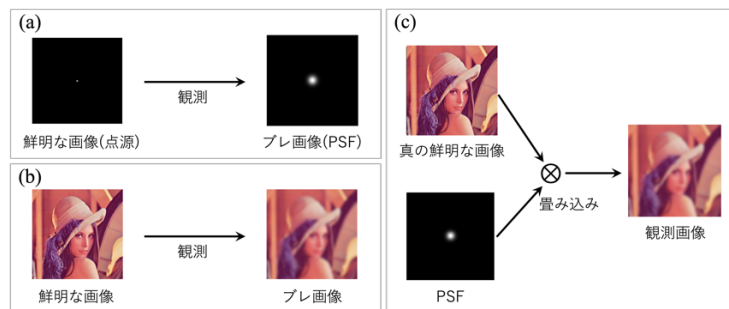


図 1. PSF と観測の関係。(a) : 点源を観測した場合の概念図、(b) : 鮮明な画像を観測した場合の概念図、(c) : 観測を畳み込みで表した概念図。

図 1(a)は点源を観測したブレ画像、すなわち PSF を示す。図 1(b)は現実の鮮明な画像を観測した場合におけるブレ画像を表している。図 1(b)の元画像の各ピクセルは、図 1(a)の点源と同様に PSF で拡散され、それらが重なり合っただけでブレ画像として観測される。図 1(b)は、図 1(c)のように畳み込み演算 (⊗) を用いて表現できる。

2.2. ブレの数式表現

以降、数式は簡単のため 1 次元で考える。ブレは畳み込み演算を用いて

$$H(x) = (W \otimes P)(x) = \int W(\xi)P(x|\xi)d\xi = \int W(\xi)p(x - \xi)d\xi \quad (1)$$

と表せる。ここで、 $W(\xi)$ は元の鮮明な真の画像の ξ 番目のピクセル値を表し、 $H(x)$ は観測画像の x 番目のピクセル値である。 $P(x|\xi)$ は、真の画像 W の ξ 番目の値が、観測画像 H の x 番目で観測される確率を表す。PSF が一様である場合、 $P(x|\xi)$ は形状関数 $p(x)$ を平行移動させた関数 $p(x - \xi)$ で表現することができる。

式(1)は理想的な場合を示しており、一般的には観測時の様々なノイズ N が加わり、

$$H(x) = (W \otimes P)(x) + N(x) \quad (2)$$

となる。

2.3. イメージデコンボリューションの種類

イメージデコンボリューションとは、ブレの原因となる PSF などを使用して真の画像を推定する手法である。ここでは、デコンボリューションの古典的な方法と機械学習を用いた手法の概要について説明する。

2.3.1. 古典的手法

PSF が既知または未知の場合は、それぞれ Non-Blind deconvolution、Blind deconvolution と呼ばれる。図 2 は、左から順に観測、Non-Blind deconvolution、Blind deconvolution の概念図を示したものである。古典的手法では、観測に適切なモデルを仮定し、逆畳み込み演算 (\otimes^*) を用いて真の画像を推定する。本論文で取り上げる RL 法は、Non-Blind deconvolution に属する。

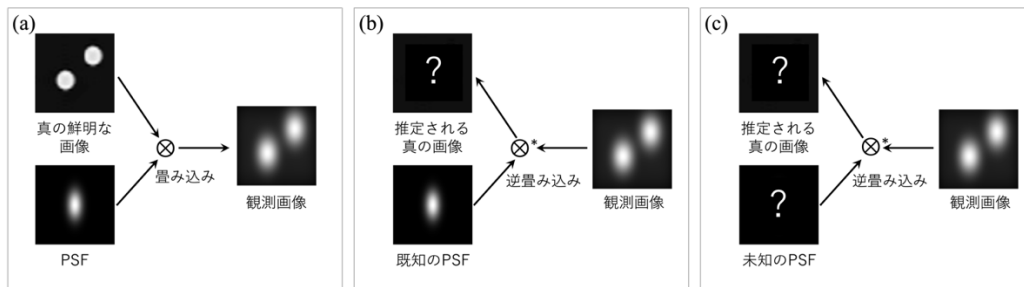


図 2. イメージデコンボリューションの種類。(a): 観測の概念図、(b): Non-blind deconvolution の概念図、(c): Blind deconvolution の概念図。

2.3.2. 機械学習手法

機械学習を活用したイメージデコンボリューション手法も広く研究されており、文献[5]にまとめられている。これらの手法は、ブレ画像と鮮明な画像のペアを大量に使用して教師あり学習を行うことが一般的であり、学習データの収集や推定画像の信頼性の評価が難しいという課題がある。特に X 線観測の場合、光学系や様々な観測上の制約により、鮮明な画像の取得が困難であり、推定される画像の信頼性に対する懸念があり、そのため機械学習の直接の利用は難しい場合が多い。

3. Richardson-Lucy deconvolution の概観

この章では、RL 法の導出方法および代表的な派生手法を紹介する。ここで紹介する派生手法などは、観測条件に合わせて 4 章の位置依存型 RL 法と組み合わせることも可能である。

3.1. 観測とベイズの定理の関係

真の画像 W を求めるためには、観測画像 H の x で検出されたイベントが、真の画像 W の画素 ξ からの放射

である確率 $Q(\xi|x)$ を求める必要がある。この $Q(\xi|x)$ はベイズの定理を用いて、

$$Q(\xi|x) = \frac{W(\xi)P(x|\xi)}{\int W(\xi)P(x|\xi)d\xi} \quad (3)$$

と表すことができる。畳み込みと逆畳み込みの関係は

$$\begin{cases} H(x) = \int W(\xi)P(x|\xi)d\xi \\ W(\xi) = \int H(x)Q(\xi|x)dx \end{cases} \quad (4)$$

で与えられる。逆畳み込みの関係は自明ではないため、式を追って確認する。式(4)の Q に式(3)を代入すると、

$$\begin{aligned} \int H(x)Q(\xi|x)dx &= \int H(x) \frac{W(\xi)P(x|\xi)}{\int W(\xi)P(x|\xi)d\xi} dx \\ &= \int H(x) \frac{W(\xi)P(x|\xi)}{H(x)} dx \\ &= \int W(\xi)P(x|\xi)dx \\ &= W(\xi) \int P(x|\xi)dx \\ &= W(\xi) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。したがって、逆畳み込みの関係式は成り立つ。

3.2. ベイズ推定と RL 法の関係

ベイズ推定は、初期の事前分布（推定する真の画像の初期値）を設定し、観測（真の画像と PSF の畳み込み）による事後分布（更新された真の画像）をベイズの定理に基づいて推定する手法である。RL 法では、この事後分布を次の事前分布として使用し、複数の反復により真の画像を推定する。ここでは、ベ

イズ推定と RL 法の関係について式を追って説明する。

真の画像は本来知り得ないため、適当な主観的な事前分布 W_r をベイズの定理の式(3)に代入すると Q_r は、

$$Q_r(\xi|x) = \frac{W_r(\xi)P(x|\xi)}{\int W_r(\xi)P(x|\xi)d\xi} \quad (6)$$

と表される。式(6)を式(4)の逆畳み込みの式に代入すると、事後分布 W_{r+1} は、

$$\begin{aligned} W_{r+1}(\xi) &= \int H(x)Q_r(\xi|x)dx \\ &= \int H(x) \frac{W_r(\xi)P(x|\xi)}{\int W_r(\xi)P(x|\xi)d\xi} dx \\ &= W_r(\xi) \int H(x) \frac{P(x|\xi)}{\int W_r(\xi)P(x|\xi)d\xi} dx \end{aligned} \quad (7)$$

となる。式(7)の初期値を $r = 0$ として設定すると、

$$W_{r+1}(\xi) = W_r(\xi) \int \frac{H(x)}{\int W_r(\xi)P(x|\xi)d\xi} P(x|\xi)dx \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

となる。式(8)は RL 法の式であり、畳み込み演算子 \otimes を用いて、

$$W_{r+1}(\xi) = W_r(\xi) \left(\frac{H}{W_r \otimes P} \otimes P^* \right) (\xi) \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

と表すこともできる。ここで、 P^* は P の転置行列したものに相当する。 $P(x|\xi) = p(x - \xi)$ がかつ 2 次元画像の場合、 P^* は PSF の中心に対して点対称移動したものに相当する。

3.3. RL 法の性質

ここでは、RL 法の性質について式を追って確認する。

3.3.1. RL 法の真の画像の非負性

RL 法の式(8)から、観測画像と真の画像の初期値が非負の場合、推定される真の画像も必ず非負となる性質がある。

3.3.2. RL 法の積分値の保存性

RL 法は、真の画像と観測画像の積分値が保存する性質がある。この特徴について導出する。式(8)の両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} \int W_{r+1}(\xi)d\xi &= \int \left(W_r(\xi) \int \frac{H(x)}{\int W_r(\xi)P(x|\xi)d\xi} P(x|\xi)dx \right) d\xi \\ &= \int \frac{H(x)}{\int W_r(\xi)P(x|\xi)d\xi} \left(\int W_r(\xi)P(x|\xi)d\xi \right) dx \\ &= \int H(x)dx \end{aligned} \quad (10)$$

となる。したがって、推定される真の画像 W_{r+1} と観測画像 H の積分値は等しい。式(10)は W_r の積分値に依らないため、数値計算において真の画像の初期値を観測画像の積分値に合わせる必要がないことを示している。

3.3.3. RL 法の PSF の規格化性

RL 法には、PSF の項が分母分子で打ち消し合うため、PSF の積分値が規格化される性質がある。この特徴について式を用いて確認する。 $\lambda(> 0)$ 倍した PSF を $P_\lambda = \lambda P$ とし、式(8)に代入してその積分値を求めると

$$\begin{aligned} \int W_{r+1}(\xi) d\xi &= \int \left(W_r(\xi) \int \frac{H(x)}{\int W_r(\xi) P_\lambda(x|\xi) d\xi} P_\lambda(x|\xi) dx \right) d\xi \\ &= \int \frac{H(x)}{\int W_r(\xi) P_\lambda(x|\xi) d\xi} \left(\int W_r(\xi) P_\lambda(x|\xi) d\xi \right) dx \\ &= \int \frac{H(x)}{\int W_r(\xi) \lambda P(x|\xi) d\xi} \left(\int W_r(\xi) \lambda P(x|\xi) d\xi \right) dx \\ &= \int H(x) dx \end{aligned} \quad (11)$$

となる。実際、PSF は有限の領域に対してシミュレーションされるとき、厳密にはその積分値は 1 以下となる場合が多いが、RL 法では PSF の積分値が 1 に規格化される。

3.3.4. RL 法の真の画像の収束条件

RL 法の収束条件について説明する。式(8)の分母は観測の計算を意味するため、反復回数 r の真の画像から得られた擬似的な観測画像 $H_r(x) := \int W_r(\xi) P(x|\xi) d\xi$ を導入する。 $H/H_r \sim 1$ を式(8)に代入すると、

$$\begin{aligned} W_{r+1}(\xi) &= W_r(\xi) \int \frac{H(x)}{H_r(x)} P(x|\xi) dx \\ &\sim W_r(\xi) \int P(x|\xi) dx \\ &\sim W_r(\xi) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。したがって、 $H/H_r \sim 1$ のとき、 $W_{r+1} \sim W_r$ となり、RL 法は収束する。

3.3.5. PSF が点源の場合の真の画像の収束性

PSF が全ての場所で点源、つまりブレの全くない画像の場合の真の画像の収束性について説明する。このとき、PSF はディラックのデルタ関数 δ を用いて表現でき、式(8)の $r = 0$ に代入すると

$$\begin{aligned} W_1(\xi) &= W_0(\xi) \int \frac{H(x)}{\int W_0(\xi) P(x|\xi) d\xi} P(x|\xi) dx \\ &= W_0(\xi) \int \frac{H(x)}{\int W_0(\xi) \delta(x - \xi) d\xi} \delta(x - \xi) dx \\ &= W_0(\xi) \int \frac{H(x)}{W_0(x)} \delta(x - \xi) dx \\ &= W_0(\xi) \frac{H(\xi)}{W_0(\xi)} \\ &= H(\xi) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。したがって、1 反復で真の画像は観測画像と同一のものとなる。このように、RL 法では PSF が点源の場合も正しく計算できる。

3.3.6. RL 法の定性的な更新の定性的イメージ

RL 法における反復処理による更新のイメージを説明する。式(12)で導入した W_r から得られる擬似的な観測画像 H_r を用いると RL 法の式(8)は、

$$W_{r+1}(\xi) = W_r(\xi) \int \frac{H(x)}{H_r(x)} P(x|\xi) dx \quad r = 0, 1, 2, \dots \tag{14}$$

となる。ここで、式(14)では真の画像を推定する際に、 H/H_r の項により観測画像同士を比較し、 H_r が H に近づくとき、推定された W_r が本来知り得ない真の画像に近づくことが期待される。ただし、観測画像同士の比較には PSF の不定性が含まれるため、PSF の重みを掛けたものが W_{r+1} として更新される。図 3 はその更新の概念図を示しており、本質を損なわずに図示を容易にするため、 H/H_r ではなく $H - H_r$ を用いる。

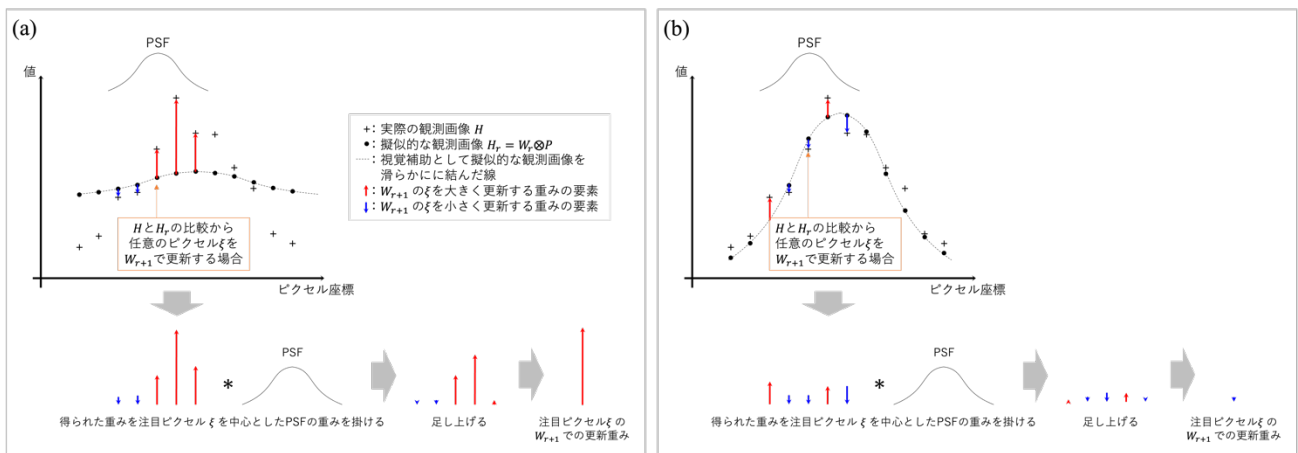


図 3. RL 法の真の画像の更新のイメージ図。(a) : 反復初期。(b) : 反復が進んだ後。

図 3(a)は反復初期の状態を示しており、 $H - H_r$ が非常に大きくなり、したがって仮定した W_r が大きく異なることを意味する。 W_{r+1} の重みは、その値に対し PSF の重みが合わさって決まる。そして、反復が進むと図 3(b)の状態になり、ノイズ等が正負にできるが打ち消し合うため $H - H_r$ はゼロに近づき、軽微な違いが W_{r+1} で更新される。このように、RL 法は反復を通じて観測画像と真の画像の比較を行い、徐々に真の画像に収束するプロセスとして理解できる。

3.3.7. RL 法の真の画像の初期値依存性

RL 法は PSF よりも高周波な構造を推定することが、更新の適切な重みを得られないため困難である。そのため、一般的には真の画像の初期値 W_0 には観測画像や全ての画素に同じ値を入れた画像を用いることが多い。

実際に真の画像の初期値における違いをシミュレーションにより比較した結果が図 4 である。図 4(a)は、点源を真の画像として使用し、PSF の畳み込みことにより観測画像をシミュレーションしたものである。図 4(b)は、その PSF を用いて真の画像の異なる初期値 W_0 に対して RL 法で推定した結果である。図 4 上段の高周波の初期値では初期値に強く影響を受け、適切な更新重みが得られていないことがわかる。この結果から、真の画像の初期値は慎重に選ぶ必要があり、高周波の初期値は RL 法の収束に悪影響を与える可能性があることが確認できる。

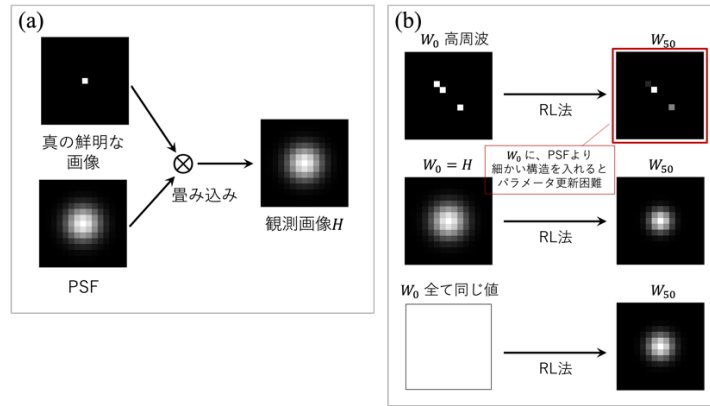


図 4. 真の画像の初期値による推定画像の違い。(a) : 真の鮮明な画像を PSF で畳み込み作成した観測画像。(b) : (a)の観測画像と PSF を用いて、真の画像の初期値 W_0 を変えた際の RL 法の結果を並べたも。上から順に高周波画像、観測画像と全く同じ画像、全て同じ値を入れた画像。

3.4. 最尤法と RL 法の関係

RL 法はポアソン分布を尤度関数とした最尤法から求められる。この関係について式を追って説明する。

3.4.1. 最尤法

最尤法とは、データの分布やモデルの仮定に基づいて、データを最もよく説明するパラメータを推定する方法である。RL 法においては、観測画像 H を最もよく説明する真の画像 W を求めることに対応する。真の画像 W と観測画像 H の各画素の n 個のピクセル値をそれぞれ $W = (W(1), W(2), \dots, W(n))$, $H = (H(1), H(2), \dots, H(n))$ と表すと尤度関数 L は、

$$L(W|H) = \prod_{x=1}^n P(H(x)|W) \quad (15)$$

となる。最尤推定量 \hat{W} を求めると、

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \arg \max_W L(W|H) \\ &= \arg \max_W \prod_{x=1}^n P(H(x)|W) \\ &= \arg \min_W - \ln \prod_{x=1}^n P(H(x)|W) \\ &= \arg \min_W - \sum_{x=1}^n \ln P(H(x)|W) \\ &= \arg \min_W - \int \ln P(H(x)|W) dx \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここで、式(16)の積分記号は、以降の数式を簡略化させるために用いた。最尤法は、この最尤推定量 \hat{W} を求めることに対応する。

3.4.2. 尤度関数がポアソン分布の場合

光子統計に関する画像の尤度関数はポアソン分布に従い、この場合の尤度関数は

$$L(W|H) = \prod_{x=1}^n P(H(x)|W) = \prod_{x=1}^n \frac{(W \otimes P)(x)^{H(x)} e^{-(W \otimes P)(x)}}{H(x)!} \quad (17)$$

と表される。式(17)を式(16)に代入すると最尤推定量 \hat{W} は、

$$\begin{aligned}
\hat{W} &= \arg \min_W - \int \ln P(H(x)|W) dx \\
&= \arg \min_W \int -\ln \frac{(W \otimes P)(x)^{H(x)} e^{-(W \otimes P)(x)}}{H(x)!} dx \\
&= \arg \min_W \int ((W \otimes P)(x) - H(x) \ln(W \otimes P)(x) + \ln H(x)!) dx \\
&= \arg \min_W \int ((W \otimes P)(x) - H(x) \ln(W \otimes P)(x)) dx \tag{18}
\end{aligned}$$

となる。ポアソン分布の性質より、式(18)の n 個の W 関数は凹関数であるので、最尤推定量は全てのパラメータにおける偏微分がゼロのときとなる。数値最適化手法の一つである EM アルゴリズム[16]を用いると RL 法の更新式が導出できる[17]。

3.5. RL 法の派生手法

RL 法にはさまざまな派生手法があり、ここでは代表的な手法について紹介する。

3.5.1. 尤度関数がガウス分布の RL 法

RL 法は、尤度関数にガウス分布を使用した場合にも適用できる。ここでは、ガウスノイズの場合の RL 法[15]について説明する。ガウスノイズの場合の尤度関数は

$$L(W|H) = \prod_{x=1}^n P(H(x)|W) = \prod_{x=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(H(x) - (W \otimes P)(x))^2}{2\sigma^2}\right) \tag{19}$$

と表される。ここで、 σ^2 は分散である。式(19)を式(16)に代入すると最尤推定量 \hat{W} は、

$$\begin{aligned}
\hat{W} &= \arg \min_W - \int \ln P(H(x)|W) dx \\
&= \arg \min_W \int -\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(H(x) - (W \otimes P)(x))^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \arg \min_W \int -\ln \exp\left(-\frac{(H(x) - (W \otimes P)(x))^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \arg \min_W \int (H(x) - (W \otimes P)(x))^2 dx \tag{20}
\end{aligned}$$

となる。式(20)は W に関して凹関数である。EM アルゴリズムを用いると、更新式

$$W_{r+1}(k) = W_r(k) + \lambda(H - W_r \otimes P) \otimes P^*(k) \tag{21}$$

が導かれる。文献[15]によると、 λ は反復の途中で可変的に変化させて使うことができる。

3.5.2. 和形式の表現

RL 法は更新重みの項を積で表す式(9)のほか、本質的には和で重みを表現することもできる。和形式での RL 法[6]は、その更新の重みを λ として

$$W_{r+1}(\xi) = W_r(\xi) - \lambda \left(1 - \left(\frac{H}{W_r \otimes P} \otimes P^*\right)(\xi)\right) \quad r = 0, 1, 2, \dots \tag{22}$$

と表される。式(22)は、RL 法の特徴の一つである真の画像の非負性および積分値の保存性については破綻するが、反復毎の更新の重みを任意に調整できるという利点がある。

3.5.3. 正則化を用いた表現

RL 法はノイズに対して過度に収束しやすい性質や、画像の境界やエッジ領域でリングアーチファクトが発生しやすい課題がある。その影響を抑えるためのさまざまな派生手法がある。ここでは、Tikhonov-Miller, Total Variation, Bilateral Filter を正則化として用いた方法について説明する。ここで、ポアソンノイズのもとでの対数尤度関数を

$$J(W) = \int ((W \otimes P)(x) - H(x) \ln(W \otimes P)(x)) dx \quad (23)$$

とにおいて、以降の正則化の数式で使用する。

3.5.3.1. Tikhonov-Miller の正則化手法

文献[6]で提案された Tikhonov-Miller の正則化を用いた RL 法の最尤推定量 \hat{W}_{TM} は式(23)を用いて

$$\hat{W}_{TM} = \arg \min_W \left(J(W) + \lambda_{TM} \int |\nabla W(x)|^2 dx \right) \quad (24)$$

と表され、これを解くと

$$W_{r+1}(\xi) = \frac{W_r(\xi)}{1 + 2\lambda_{TM}\Delta W_r(\xi)} \left(\frac{H}{W_r \otimes P} \otimes P^* \right)(\xi) \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

となる。ここで、 Δ はラプラシアン作用素、 λ_{TM} は重みパラメータである。文献[6]では $\lambda_{TM} \sim 10^{-4}$ が使われている。この手法は、ポアソンノイズの過剰な増幅を抑える効果が確認されているが、同時に画像中のエッジも平滑化されるという問題が報告されている[6]。

3.5.3.2. Total Variation の正則化手法

文献[7]で提案された Total Variation の正則化を用いた RL 法の最尤推定量 \hat{W}_{TV} は

$$\hat{W}_{TV} = \arg \min_W \left(J(W) + \lambda_{TV} \int |\nabla W(x)| dx \right) \quad (26)$$

と表され、これを解くと

$$W_{r+1}(\xi) = \frac{W_r(\xi)}{1 - \lambda_{TV} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla W_r(\xi)}{|\nabla W_r(\xi)|} \right)} \left(\frac{H}{W_r \otimes P} \otimes P^* \right)(\xi) \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

となる。ここで、 $\nabla W_r(\xi)$ は $W_r(\xi)$ の勾配、 $\operatorname{div}(\cdot)$ は発散を表す。文献[7]では $\lambda_{TV} \sim 0.002$ が使われている。この方法は、ポアソンノイズの過剰な増幅を抑える効果があり、前述の Tikhonov-Miller の方法と比べ画像中のエッジも保持されることが確認されている[7]。

3.5.3.3. Bilateral Filter の正則化手法

文献[8]で提案された Bilateral Filter の正則化マップを F_{BFW_r} として

$$F_{BFW_r} = \iint \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{2\sigma_s}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{|W_r(x) - W_r(\xi)|^2}{2\sigma_r}\right)\right) d\xi dx \quad (28)$$

とおく。ここで、式(28)の最初の指数関数の項は場所における重みを表し、2つ目は W の値による重みを表している。文献[8]によると、 σ_s は使用する PSF の半径を R とした場合、 $\sigma_s = (R/3)^2$ とし、 σ_r は W の最大値 (max) と最小値 (min) を用いて、 $\sigma_r = 0.01(\max(W_r) - \min(W_r))^2$ としている。この正則化を用いた最尤推定量 \hat{W}_{BF} は、

$$\hat{W}_{BF} = \arg \min_W \left(J(W) + \lambda_{BF} F_{BFW_r} \right) \quad (29)$$

と表され、これを解くと

$$W_{r+1}(\xi) = \frac{W_r(\xi)}{1 + \lambda_{BF} \nabla F_{BF, W_r}(\xi)} \left(\frac{H}{W_r \otimes P} \otimes P^* \right) (\xi) \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

となる。文献[8]では、 $\lambda_{BF} \sim 0.05$ が使われている。この手法により、リングングアーチファクトの抑制の効果が確認されている[8]。

3.5.4. Blind RL 法

RL 法は通常既知の PSF を使用するが、PSF を未知の Blind deconvolution にも適用できる。この方法は、文献[9]で提案され Blind RL 法と呼ばれる。この手法は、真の画像と PSF は数学的に入れ替え可能であることを利用し、真の画像と PSF を交互に反復的に推定する。数式では

$$\begin{aligned} P_{r+1}(\xi) &= P_r(\xi) \left(\frac{H}{W_r \otimes P_r} \otimes W_r^* \right) (\xi) \\ W_{r+1}(\xi) &= W_r(\xi) \left(\frac{H}{W_r \otimes P_{r+1}} \otimes P_{r+1}^* \right) (\xi) \quad r = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

と表される。数値計算において式(31)の P は、現実的に考えられる PSF のスケールに合わせた適切な計算範囲を指定することや、PSF の形状の制限を与えることで推定精度の向上が期待できる。

4. 提案手法

ここでは、5章で用いる PSF の位置依存性を考慮した RL 法について説明する。RL 法は、観測画像に対し単一の PSF を用いて計算されることが多い。しかし、場所毎で PSF が異なる場合にも利用できる。実際、式(8)では、 $P(x|\xi)$ において場所 ξ ごとに異なる PSF を使うことが考慮されており、それを明示的に示すために $P_\xi(x)$ を導入する。ここで、 $P_\xi(x)$ は、場所 ξ で得られる PSF に基づいて $P(x|\xi)$ を計算する関数である。このようにして位置依存型 RL 法[3]は、

$$W_{r+1}(\xi) = W_r(\xi) \int \frac{H(x)}{\int W_r(\xi) P_\xi(x) d\xi} P_\xi(x) dx \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

と表される。この式(32)により、各場所で別々の PSF で計算される。ただし、数値計算において、計算コストの制約から、PSF をピクセル単位で用意することが難しい場合もあるため、本研究では一定区間毎に PSF をサンプリングし、その区間毎に PSF を切り替えて使用する。なお、式(32)は、問題に応じて3章で紹介した任意の尤度関数や正則化手法を組み合わせることも可能である。実際に文献[3]では Chandra の観測データに適用する際に、ポアソンノイズの過剰な増幅を防ぐために、Total Variation 正則化を組み込んだ手法が提案されている。

5. Chandra 衛星で観測した超新星残骸カシオペア座 A への適用

5.1. 使用したデータ

本研究では、Chandra 衛星の観測データを使用した。それらのデータを表 1 に示す。データ解析には、Chandra 衛星の標準データ処理パッケージである Chandra Interactive Analysis of Observations (CIAO[13]) を使用した。表 1 の観測データに対し、level 1 のイベントファイルから CIAO の”chandra_repro”を用いて前処理を行った。各観測は、光軸とロール角が揃っていないため、CIAO の”merge_obs”により 1 つの観測画像に結合して、解析に使用した。

表 1. 本研究で利用した Chandra 衛星の超新星残骸カシオペア座 A の観測データ

Obs. ID	Obs. Start yyyy mmm dd	Exp. Time (ks)	Detector	R.A. (deg)	Decl. (deg)	Roll (deg)
4636	2004 Apr 20	143.48	ACIS-S	350.9129	58.8412	49.7698
4637	2004 Apr 22	163.50	ACIS-S	350.9131	58.8414	49.7665
4639	2004 Apr 25	79.05	ACIS-S	350.9132	58.8415	49.7666
5319	2004 Apr 18	42.25	ACIS-S	350.9127	58.8411	49.7698

5.2. PSF の作成方法

PSF を Model of AXAF Response to X-rays (MARX[14])を用いてモデリングした。その際、CIAO の”simulate_psf”を使用した。本研究では 0.5-7.0 keV のエネルギー帯域の観測データを用いたが、単一のエネルギー 2.3 keV で PSF を作成した。表 1 に示された 4 つの観測データは、光軸の位置が一致しているため、PSF はその代表として Obs. ID=4636 で計算されたものを使用した。図 5 はカシオペア座 A の観測画像を背景として、 35×35 ピクセル間隔毎に作成した PSF を重ねて表示したものである。図 5 から、Chandra 衛星の PSF は光軸から離れるほど広がり、画像の鮮明度は低下することが分かる。また、PSF の形状が光軸周りの方位角によっても変化することが確認できる。左側に拡大して図示した 2 箇所から、角度分解能が桁で変化することもわかる。

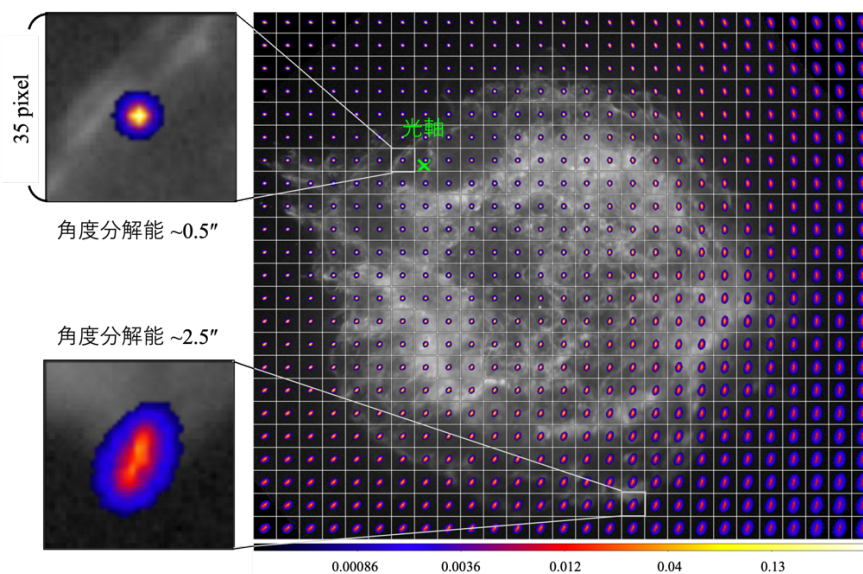


図 5. 背景のカシオペア座 A (Obs. ID=4636) の観測画像とその場所に対応した PSF。カラーバーは PSF の確率、クロスは光軸、PSF のサンプリング間隔は 35×35 ピクセル。

5.3. 位置依存型 RL 法の結果

図 6(a)は表 1 の観測画像であり、図 6(b)は位置依存型 RL 法の反復計算を 200 回行って得られた結果である。5.2 節で説明した 35×35 ピクセル間隔で作成した PSF を使い、領域毎に PSF を切り替えながら計算した。この手法を適用する前後の結果を比較するために、図 6 の四角枠で示した領域の拡大図を図 6 (a-1, -2, -3)および(b-1, -2, -3)に示した。観測画像全域にわたって鮮明になっていることが定性的に確認できる。

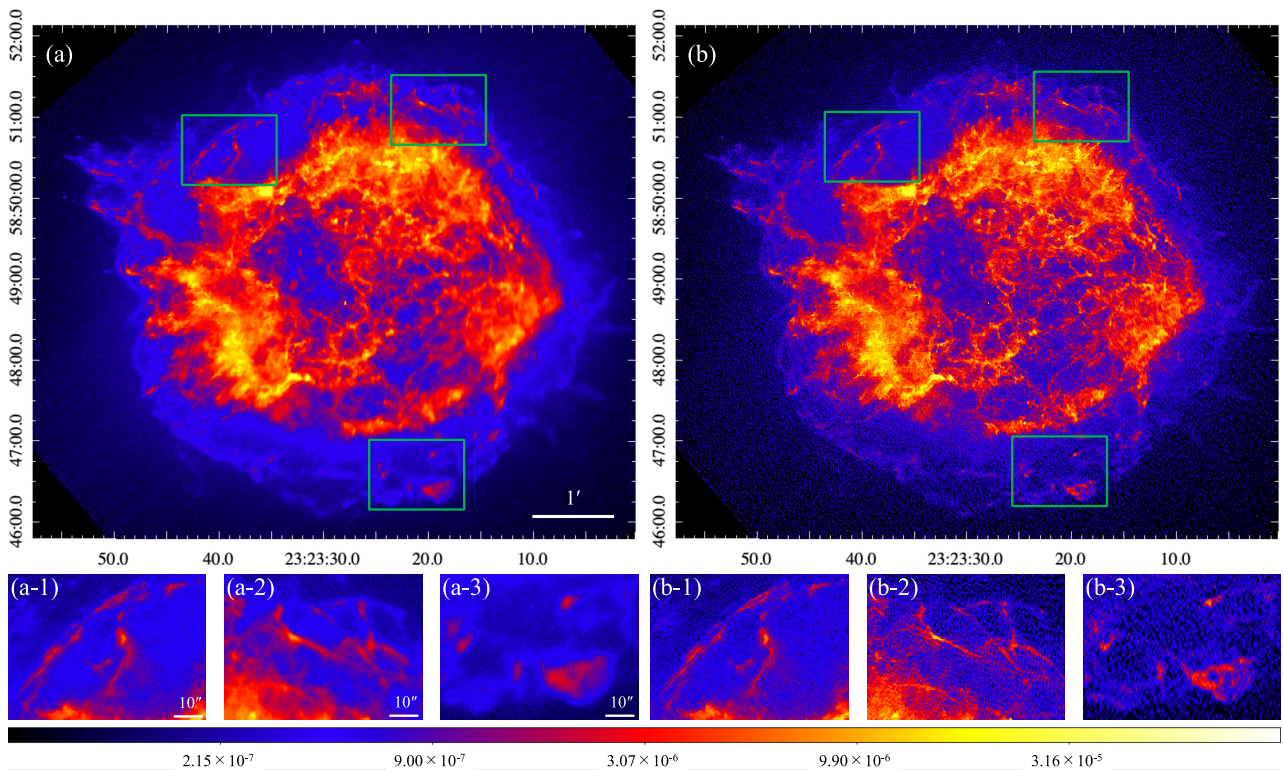


図 6. 観測画像と位置依存型 RL 法で得られた画像の比較。(a) : Chandra 衛星によるカシオペア座 A の 0.5-7.0 keV の X 線画像。(a-1, -2, -3) : (a)の四角枠で示した領域の拡大図。(b) : 位置依存型 RL 法で得られた画像、(b-1, -2, -3) : (b)の四角枠で示した領域の拡大図。下方のカラーバーは画像中の色と Flux ($\text{photons cm}^{-2} \text{s}^{-1}$)の対応関係を表す。

5.4. 位置依存型 RL 法の PSF のサンプリング間隔による違い

図 6 では PSF のサンプリング間隔を 35×35 ピクセルとしたが、ここでは異なるサンプリング間隔を持つ場合の位置依存型 RL 法の結果を比較する。

図 7 は、観測画像全体に対して位置依存型 RL 法を適用して得られた画像から、4つの領域を拡大表示したものである。上から順に北東領域 (on-axis)、南東領域 (光軸からの距離 : 約 150 秒角)、南西領域 (光軸からの距離 : 約 250 秒角)、北西領域 (光軸からの距離 : 約 150 秒角) である。また左から順に PSF のサンプリング間隔を $n=5, 15, 25, 35, 45, 55$ ピクセルとした場合を示す。ここで PSF が切り替わる境界を画像周縁の目盛りで示した。図 7 の北東領域および南西領域の結果ではサンプリングによる違いがほとんど見られないが、南東領域の $n=45$ ピクセル以降の結果では、PSF の境界で画像の横方向に人工的な線 (アーチファクト) が顕著に見られる。同様に、北西領域の $n=45$ ピクセル以降でも、境界部で画像の縦方向にアーチファクトが確認できる。

これらの PSF の境界のアーチファクトの原因として、サンプリング間隔の増加に伴い隣接する PSF が境界で急激に変化することが挙げられる。Chandra 衛星の PSF は、主に光軸からの離角と光軸周りの方位角の 2 つのパラメータに依存して形状が決まる。光軸からの離角は主に PSF 中心付近での分布を変化させるが、方位角は主に PSF 周辺部での形状の変化に寄与する。中心付近の確率密度は周辺部に比べ大きいので、PSF の変化が顕著に現れるのは光軸からの離角方向の PSF の境界であり、アーチファクトが発生しやすいと考えられる。

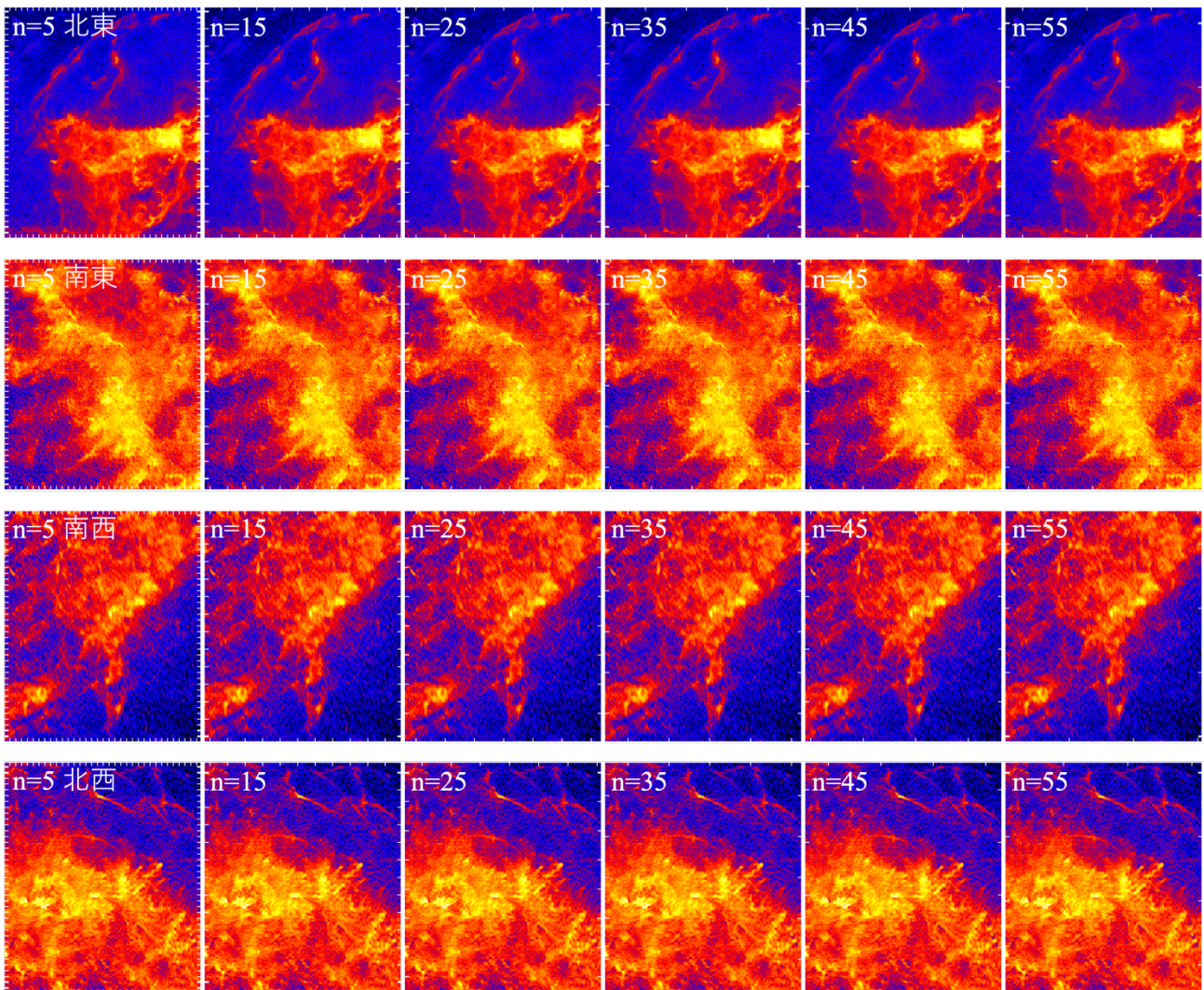


図 7. PSF のサンプリング間隔の違いによる位置依存型 RL 法反復回数 200 回の結果。上から順に領域と光軸との距離の関係は、北東 (on-axis)、南東 (off-axis 150 秒角)、南西 (off-axis 250 秒角)、北西 (off-axis 150 秒角) 領域である。n は PSF のサンプリング間隔の一辺であり、画像周縁の目盛りは PSF の切り替え部を表す。

5.4.1. PSF の境界部のアーチファクトの抑制

PSF の境界部におけるアーチファクトを抑制する方法として、サンプリング間隔を細かくして境界部での変化を軽減させる方法が挙げられるが、一方で計算コストは増加する。逆にサンプリング間隔を粗くすると PSF の精度は低下する。ここでは、PSF の境界部におけるアーチファクトの抑制方法として、境界部の PSF を周辺の PSF を用いて補完する方法を提案する。このアプローチにより、PSF の変化の急激な境界部において、PSF の変化が緩やかになりアーチファクトを軽減させる効果が期待できる。

図 8 は、PSF の境界部における補完に使用される PSF の重みを示している。本研究では補完方法として、平均化とランダム化の 2 つの方法を用いる。平均化による補完では、図 8 に示された PSF の重みに従って、複数の PSF を合成して使用する。一方、ランダム化による補完では、PSF の境界で一意的に切り替えるのではなく、境界部近くの各反復回でランダムに選択された 1 つの PSF を使用する。

図 9 は、南東領域においてこの補完方法を使用した位置依存型 RL 法の結果を示している。図 9(a)は、

補完を行わずに $n=5$ のサンプリング間隔で 200 回の反復を行った結果で、アーチファクトがほとんど見られないことから、この結果をリファレンス画像として評価する。一般的には、 $n=1$ をリファレンスとするのが理想だが、計算コストの制約から $n=5$ を用いた。図 9(b, c, d)は、それぞれ補完を行わない場合、平均化補完、ランダム化補完を使用して位置依存型 RL 法を実行した結果を示している。図 9(*-1)は、これらの結果とリファレンス画像 (図 9(a)) との絶対値の差分画像である。補完を行った場合、境界部での差分が $n=5$ の結果に近づいており、アーチファクトが軽減されていることが確認できる。図 9(-2)では、差分画像 (図 9(-1)) をリファレンス画像 (図 9(a)) で割った変化率を示している。明るい領域において、補完を行った場合、境界部での変化率は 1%程度となり、補完なしの場合に比べて改善されている。南東領域の明るい領域では統計誤差が 3%程度であるため、補完によって統計誤差の範囲内で $n=5$ と近い結果が得られたことがわかる。

A:1	A:1	A:2/3, B:1/3	A:1/3, B:2/3	B:1	B:1
A:1	A:1	A:2/3, B:1/3	A:1/3, B:2/3	B:1	B:1
A:2/3, C:1/3	A:2/3, C:1/3	A:4/9, B:2/9, C:2/9, D:1/9	A:2/9, B:4/9, C:1/9, D:2/9	B:2/3, D:1/3	B:2/3, D:1/3
A:1/3, C:2/3	A:1/3, C:2/3	A:2/9, B:1/9, C:4/9, D:2/9	A:1/9, B:2/9, C:2/9, D:4/9	B:1/3, D:2/3	B:1/3, D:2/3
C:1	C:1	C:2/3, D:1/3	C:1/3, D:2/3	D:1	D:1
C:1	C:1	C:2/3, D:1/3	C:1/3, D:2/3	D:1	D:1

図 8. 境界部近傍における PSF の平均化とランダム化の重み。黒太線は PSF の切り替え領域、薄線はピクセルを表す。A, B, C, D はそれぞれの場所における PSF を示し、境界線では 1/3, 2/3 の重みが、4 つのコーナーの境界では 1/9, 2/9, 4/9 の重みが適用される。

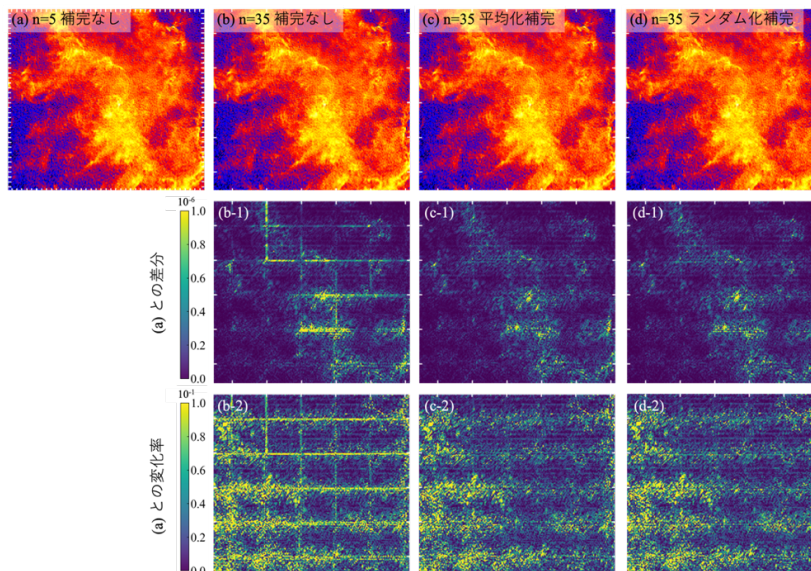


図 9. 南東領域における境界の PSF の補完の有無による比較。PSF のサンプリングピクセル間隔を n で示す。PSF の境界部を画像周縁の目盛りで示す。(a) : $n=5$ の場合、境界の PSF の補完を行わずに位置依存型 RL 法を適用し、リファレンス画像として使用。(b) : $n=35$ の場合、境界の PSF の補完を行わずに位置依存型 RL 法を適用。(c, d) : (b) と同じ PSF 間隔で、境界部の PSF を図 8 の重みに従ってそれぞれ平均化、ランダム化して位置依存型 RL 法を適用。(b-1, c-1, d-1) : (b, c, d) と (a) の差分の絶対値。(b-2, c-2, d-2) : (b-1, c-1, d-1) を (a) で割った差分の変化率。

5.4.2. 補完によるアーチファクトの抑制効果の定量評価

図 9 の結果を定量的に評価するために、平均絶対誤差、平均二乗誤差、平均変化率の評価指標を使用する。これらの評価指標の結果を表 2 に示す。表 2 からわかるように、いずれの評価指標においても、補完を行った場合（平均化補完およびランダム化補完）が補完を行わない場合（補完なし）に比べて改善されている。この結果から、PSF の境界部のアーチファクトを抑制するために、簡単な補完方法が効果的であることが示唆される。

表 2. 図 9 の南東領域における PSF の図 9(a) をリファレンス画像とし、図 9(b, c, d) の各誤差指標での結果。

	補完なし	平均化補完	ランダム化補完
平均絶対誤差 (10^{-7} flux)	1.42	1.16	1.18
平均二乗誤差 (10^{-14} flux ²)	6.33	3.70	3.95
平均変化率 (%)	3.80	3.22	3.27

6. まとめ

本研究は、画像デコンボリューション法の一つである RL 法を、X 線衛星 Chandra の観測画像全体での適用のために、PSF の位置依存性を適切に考慮して実装した。この手法を Chandra 衛星の超新星残骸カシオペア座 A に適用し、観測画像全体で鮮明化できることを確認した。さらに、位置依存型 RL 法は計算コストが課題となるが、PSF のサンプリング間隔を調整し、境界部を適切に補完する方法を提案した。この方法により、計算速度を向上させつつも、推定精度を保つことができることを確認した。この研究成果は、Chandra 衛星以外の他の人工衛星においても応用可能であり、光学系に合わせて補完方法を最適化することで、現実的な計算コストでの実用化が期待される。宇宙開発および宇宙観測に携わる人で RL 法に興味を持った人の一助となれば幸いである。

謝 辞

本研究は、日本学術振興会（JSPS）科学研究費 挑戦的研究(開拓)JP20K20527「精密 X 線分光偏光観測に向けた極低温コンプトンカメラの開発（研究代表者：山田真也）」、基盤研究(B)JP22H01272「X 線連星 SS433 ジェットによる電波星雲 W50 の形成とガンマ線放射生成機構の解明（研究分担者：山田真也）」基盤研究(B)JP20H01941「輻射磁気流体計算に基づく活動銀河中心核状態遷移過程の解明（研究分担者：山田真也）」による助成を受けて行われた。

参考文献

- [1] Richardson, W. H., Bayesian-based iterative method of image restoration, *JoSA*, 62.1, 1972, 55.
- [2] Lucy, L. B., An iterative technique for the rectification of observed distributions, *AJ*, 79, 1974, 745.
- [3] Sakai Y., et al., Richardson–Lucy Deconvolution with a Spatially Variant Point-spread Function of Chandra: Supernova Remnant Cassiopeia A as an Example, *ApJ*, 951, 2023, 59.
- [4] Tajima, H., et al., Studies of EGRET sources with a novel image restoration technique, *AIP Conf. Proc.*, 921, 2007, 187.
- [5] Zhang, K., et al., Deep image deblurring: A survey, *International Journal of Computer Vision*, 130, 2022, 2103
- [6] Dey, N., et al., 3D microscopy deconvolution using Richardson-Lucy algorithm with total variation regularization, *INRIA*, 2004, 1.
- [7] Dey, N., et al., Richardson–Lucy algorithm with total variation regularization for 3D confocal microscope deconvolution, *Microsc. Res. and Tech.*, 69, 2006, 260.
- [8] Yuan, L., et al., Progressive inter-scale and intra-scale non-blind image deconvolution, *ACM Trans. Graph.*, 27, 2008, 1.
- [9] Fish, D. A., et al., Blind deconvolution by means of the Richardson–Lucy algorithm, *JOSA A*, 12.1, 1995, 58.
- [10] Grefenstette, B. W., et al., Locating the most energetic electrons in Cassiopeia A, *ApJ*, 802, 2015, 15.
- [11] Thimmappa, R., et al., Chandra imaging of the western hotspot in the radio galaxy Pictor A: image deconvolution and variability analysis, *ApJ*, 903, 2020, 109.
- [12] Sobolenko, M., et al., NGC 6240 supermassive black hole binary dynamical evolution based on Chandra data, *MNRAS*, 517.2, 2022, 1791.
- [13] Fruscione, A., et al., CIAO: Chandra's data analysis system, *Proc. SPIE*, 6270, 2006, 586.
- [14] Davis, J. E., et al., Raytracing with MARX: X-ray observatory design, calibration, and support, *Proc. SPIE*, 8443, 2012, 375.
- [15] Daube-Witherspoon, M. E., & Muehllehner, G., n iterative image space reconstruction algorithm suitable for volume ECT, *IEEE transactions on medical imaging*, 5.2, 1986, 61.
- [16] Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B., Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the royal statistical society: series B (methodological)* 39.1, 1977, 1.
- [17] Shepp, L. A., & Vardi, Y., Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE transactions on medical imaging*, 1.2, 1982, 113.
- [18] Tai, Y. W., Tan, P., & Brown, M. S, Richardson-lucy deblurring for scenes under a projective motion path. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33.8, 2010, 1603.