



ISSN 1349-1113  
JAXA-RR-09-009

# 宇宙航空研究開発機構研究開発報告

## JAXA Research and Development Report

---

### フェアリング部材の音響透過簡易試験と解析法の検証 —アルミ板の場合—

高橋 孝, 金田 英和, 村上 桂一, 橋本 敦, 青山 剛史,  
モハメド・カリル, 村橋 慶紀, 森 浩一, 中村 佳朗

2010 年 3 月

宇宙航空研究開発機構  
Japan Aerospace Exploration Agency

# 目 次

概 要 .....	1
1. はじめに .....	2
2. 音響透過実験 .....	2
2.1 実験装置 .....	2
2.1.1 無響室 .....	2
2.1.2 音源 .....	3
2.1.3 試験板固定部 .....	3
2.1.4 マイクロフォン .....	4
2.1.5 加速度センサ .....	4
2.1.6 試験板 .....	5
2.2 実験方法 .....	5
2.2.1 入射平面音波検証法 .....	5
2.2.2 位相の測定法 .....	6
2.2.3 入射音圧分布の測定法 .....	6
2.2.4 透過損失の測定法 .....	6
2.2.5 入射音インテンシティの測定法 .....	6
2.2.6 透過音インテンシティの測定法 .....	7
2.2.7 試験板の固有振動数の測定方法 .....	8
2.3 平面音波の検証 .....	8
2.3.1 逆自乗則との比較 .....	8
2.3.2 位相の比較 .....	8
2.3.3 入射音圧分布 .....	10
2.4 透過損失測定の結果 .....	10
2.4.1 固有振動数の測定結果及び固有振動モード .....	11
2.4.2 透過損失と板の振動の関係 .....	11
3. 音響透過解析 .....	12
3.1 解析モデル .....	12
3.2 3次元 WBM の検証 .....	13
4. まとめ .....	16
補遺 A 3次元内部定常音響構造連成問題に関する波動ベース法の定式化 .....	18
A1 問題設定 .....	18

A1.1	幾何モデル .....	18
A1.1.1	音響キャビティの幾何モデル .....	18
A1.1.2	音響境界面の幾何モデル .....	18
A1.1.3	構造の幾何モデル .....	22
A1.1.4	構造境界の幾何モデル .....	23
A1.2	支配方程式 .....	23
A1.2.1	音響の支配方程式 .....	23
A1.2.2	構造の支配方程式 .....	23
A1.3	音響境界条件 .....	24
A1.4	部分領域インターフェイス条件 .....	24
A1.4.1	圧力-速度連成手法 .....	24
A1.4.2	インピーダンス連成手法 .....	24
A1.5	構造境界条件 .....	25
A1.5.1	音響領域における構造境界条件 .....	25
A1.5.2	構造自身の境界条件 .....	25
A2	変数展開式 .....	26
A2.1	音響の変数展開 .....	26
A2.1.1	音響波動関数の寄与項 .....	26
A2.1.2	音源の寄与による特解 .....	27
A2.1.3	導関数の導出 .....	28
A2.2	構造の変数展開 .....	28
A2.2.1	構造波動関数の寄与項 .....	29
A2.2.2	構造への強制力の寄与に関する特解 .....	30
A2.2.3	音圧の寄与に関する特解 .....	30
A2.2.4	音源の寄与に関する特解 .....	31
A2.2.5	導関数の導出 .....	32
A3	重み付き残差法による定式化 .....	34
A3.1	音響境界条件に関する重み付き残差モデル .....	34
A3.1.1	重み関数の定義 .....	34
A3.1.2	残差誤差関数の定義 .....	34
A3.1.3	重み付き残差式の定式化 .....	35
A3.1.4	圧力境界条件に関する項 .....	35
A3.1.5	速度境界条件に関する項 .....	35
A3.1.6	法線方向インピーダンス境界条件に関する項 .....	36
A3.1.7	連続性条件に関する項 .....	36

A3.1.8	構造境界条件に関する項 .....	37
A3.1.9	行列方程式の導出 .....	38
A3.2	構造境界条件に関する重み付き残差モデル .....	39
A3.2.1	重み関数の定義 .....	39
A3.2.2	残差誤差関数の定義 .....	39
A3.2.3	重み付き残差式の定式化 .....	39
A3.2.4	構造並進変位に関する項 .....	39
A3.2.5	構造回転変位に関する項 .....	39
A3.2.6	行列方程式の導出 .....	40
A3.3	波動モデルの組み立て .....	40
A4	数値計算 .....	40
A4.1	音響波動関数の選択 .....	40
A4.2	構造波動関数の選択 .....	41
A4.3	波動関数の線形独立性 .....	41
A4.3.1	音響波動関数の線形独立性 .....	41
A4.3.2	構造波動関数の線形独立性 .....	42
A4.4	数値積分について .....	42

# フェアリング部材の音響透過簡易試験と解析法の検証 —アルミ板の場合—\*

高橋 孝<sup>\*1</sup>, 金田 英和<sup>\*2</sup>, 村上 桂一<sup>\*1</sup>, 橋本 敦<sup>\*1</sup>, 青山 剛史<sup>\*1</sup>,  
モハメド・カリル<sup>\*3</sup>, 村橋 慶紀<sup>\*4</sup>, 森 浩一<sup>\*4</sup>, 中村 佳朗<sup>\*4</sup>

## Verification of the Numerical Prediction Method by Fundamental Sound Transmission Experiments for Fairing Materials: Aluminum Plates<sup>\*</sup>

Takashi TAKAHASHI<sup>\*1</sup>, Hidekazu KANEDA<sup>\*2</sup>, Keiichi MURAKAMI<sup>\*1</sup>, Atsushi HASHIMOTO<sup>\*1</sup>, Takashi AOYAMA<sup>\*1</sup>,  
Mohammed KHALIL<sup>\*3</sup>, Yoshiki MURAHASHI<sup>\*4</sup>, Koichi MORI<sup>\*4</sup> and Yoshiaki NAKAMURA<sup>\*4</sup>

### Abstract

The mechanical vibration is applied to a spacecraft via the interface to a launch vehicle at lift-off. The spacecraft is also exposed to acoustic pressure with wide frequency range. Lightweight and large area structures, such as solar paddles, antennas, and components with relatively high natural frequencies, are sensitive to acoustic load. Although the acoustic tests are usually conducted for components and system of the spacecraft, acoustic tests and analysis of the spacecraft mounted in a fairing have not been sufficiently done. It is expected that numerical analysis can be applied to the prediction of acoustic environment inside of fairings. Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA) has been developing a vibroacoustic prediction tool by the wave based method (WBM), which is one of the deterministic approaches and is proposed for numerical prediction up to the mid-frequency range. The existing deterministic approaches can not accurately solve vibroacoustic problems in this range. In this paper, numerical prediction results of sound transmission by the 3D WBM and FEM are compared with those by an experiment, and verification of the 3D WBM is examined.

**Keywords** : Payload Fairing, WBM, FEM

### 概 要

ロケットで打ち上げられる宇宙機には、ロケットとの間のインターフェイスを通じて機械振動が加わる。さらに、広い周波数成分をもつ音圧がフェアリングを透過して宇宙機表面に加わるにより振動する。太陽電池パドルやアンテナなど軽量で大きな面積をもつ構造や、比較的高い固有振動数をもつコンポーネントは、音響荷重に影響されやすい。しかし、衛星のコンポーネントやシステムの音響試験は行なわれているが、フェアリングまでを含めた衛星の十分な音響試験及び解析は行なわれていないのが現状である。そこで、解析によって、事前に全系の検討が十分に行われることが期待されている。JAXA では、フェアリングまでを含めた衛星の音響解析手法の確立を目指し、今までに2次元 WBM をフェアリング内部の衛星の音響連成問題に適用し、その応用性について検討してきた。また、解析コードの検証を目的として簡易フェアリング部材を用いた音響透過実験を、名古屋大学との共同研究で行なってきた。本論文では、3次元 WBM の解析結果を、FEM の解析結果及び音響透過実験での結果と比較し、3次元 WBM の精度に関する妥当性について検証した。

---

\* 平成 21 年 12 月 24 日受付 (Received 24 December 2009)

\*1 研究開発本部 数値解析グループ (Numerical Analysis Group, Aerospace Research and Development Directorate)

\*2 (株) 計算力学研究センター (Research Center of Computational Mechanics, Inc)

\*3 カイロ大学 (Cairo University)

\*4 名古屋大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻 (Department of Aerospace Engineering, Graduate School of Engineering, Nagoya University)

## 1. はじめに

ロケットで打ち上げられる宇宙機には、ロケットとの間のインターフェイスを通じて機械振動が加わる。さらに、広い周波数成分をもつ音圧がフェアリングを透過して宇宙機表面に加わることで振動する。太陽電池パドルやアンテナなど軽量で大きな面積をもつ構造や、比較的高い固有振動数をもつコンポーネントは、音響荷重に影響されやすい。しかし、衛星のコンポーネントやシステムの音響試験は行なわれているが、フェアリングまでを含めた衛星の十分な音響試験及び解析は行なわれていないのが現状である。実際、フェアリング内では、局所的に音圧レベルが不均一となる現象（フィル・エフェクト（fill effect））が起こると報告されている。このように地上試験で十分に再現できない現象を含め、解析によって事前に十分な検討が行われることが期待されている。

一般に音響振動の解析手法に着目すると、既存の手法としては、低周波側では有限要素法（FEM）等の決定論的手法、高周波側では統計的エネルギー法（SEA）等の確率統計的手法が適用される。しかし、両手法では信頼性の高い解析のできない中間周波数帯が存在する。そこで、中間周波帯を含む領域での解析が可能な波動ベース法（WBM）が提案されている<sup>1)</sup>。これは、支配方程式を厳密に満たす特異でない解（波動関数）の重ね合わせで解を表現するアプローチであり、FEM等の要素ベース手法で問題となる数値分散誤差<sup>2)</sup>を含まないため、小さな自由度のモデルで高精度な予測結果が得られると期待できる。ここで、数値分散誤差とは、厳密で連続な支配方程式から得られる解と、離散化された数値的な支配方程式の解の波数が異なることで認識される誤差である。つまり、空間等を離散化するあらゆる数値解法には必ず存在する誤差のひとつである。

著者ら<sup>3)</sup>は、フェアリングまでを含めた衛星の音響解析手法の確立を目指し、まずは2次元（以下、2D）WBMをフェアリング内部の衛星の音響連成問題に適用し、その応用性について検討してきた。また、解析コードの検証を目的として簡易フェアリング部材を用いた音響透過実験<sup>4)</sup>を、名古屋大学との共同研究で行なってきた。この実験装置は、音源室と受音室の2つの部屋を壁で仕切り、音源室にあるスピーカーから音波を放射し、部屋の連結部に固定された弾性板を通じて受音室へ透過する音を測定するものである。

この実験に基づいた解析コードの検証の第1段階として、2Dモデルを用いてWBMとFEM（MSC.Nastran）との定常音響構造連成解析の結果比較を行ない、2D WBMの検証と、その比較対象としてのFEMモデルの妥当性について検討した<sup>5)</sup>。

本報告では、定常音響構造連成問題に対するWBMの解析コードを3次元（以下、3D）化し、3D WBMと既存のFEM及び実験との比較を行なうことにより、3D WBMの計算精度に関する妥当性について検討する。

## 2. 音響透過実験

### 2.1 実験装置

#### 2.1.1 無響室

WBMを主とする数値解析手法の検証を目的として、音源側無響室（図2.1～2.2）と透過音測定側無響室（図2.3）の2つの無響室から成る音響透過実験設備を構築した。図2.4は、実験装置全体の概念図を示したものである。そして、それぞれの無響室内部の壁面には吸音材が張られており、壁面による音波の反射を防ぐように設計されている<sup>6)</sup>。吸音材はグラスウールから成り、密度の異なる3種類の板状のものを使用した。具体的には、表面から、 $12[\text{kg/m}^3]$ のものを100[mm]、 $20[\text{kg/m}^3]$ のものを50[mm]、 $32[\text{kg/m}^3]$ のものを100[mm]積層している。グラスウール全体の厚さは250[mm]であり、200[Hz]以上の周波数の音波を吸音するように設計した<sup>7)</sup>。また、それぞれの無響室の仕様を表2.1～2.2に示す。

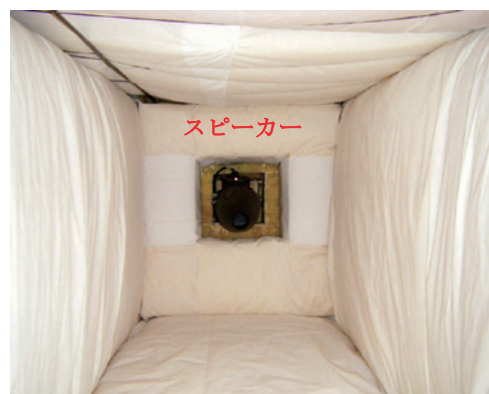


図 2.1 音源側無響室内 音源部



図 2.2 音源側無響室内 板の固定部



図 2.3 透過音測定側無響室

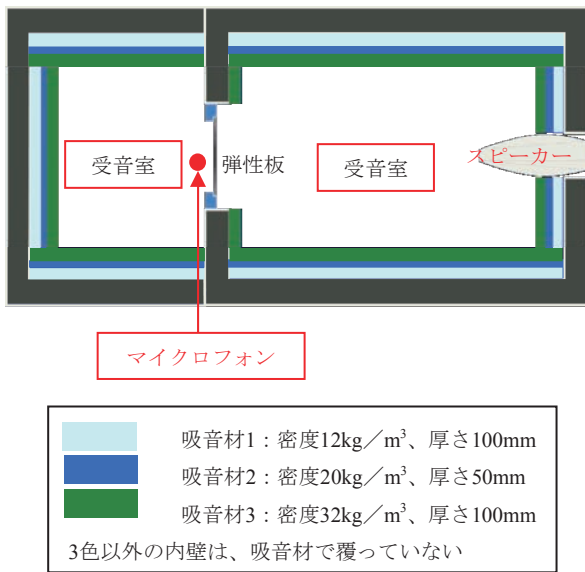


図 2.4 実験装置概略図

表 2.1 音源側無響室仕様

外寸	(縦)2200mm×(横)1400mm ×(高さ)1400mm
内寸(グラスウール除く)	(縦)1640mm×(横)700mm ×(高さ)700mm
グラスウール厚さ	250mm
音源から試験板までの距離	1350mm *1
最低吸音周波数(理論値)	340Hz

\*1：弾性板の固定部周辺は 100mm のグラスウールを使用

表 2.2 透過側無響室仕様

外寸	(縦)1100mm×(横)1400mm ×(高さ)1400mm
内寸(グラスウール除く)	(縦)750mm×(横)700mm ×(高さ)700mm
グラスウール厚さ	250mm *2
最低吸音周波数(理論値)	340Hz

\*2：透過側測定面の壁面にはグラスウールを貼り付けていない

## 2.1.2 音源

音源は、スピーカーOmnisource Loudspeaker4295 (Brüel & Kjær)を用いた。(図 2.5)。その仕様を、表 2.3 に示す。また、出力音波の周波数特性と指向性を図 2.6 に示す。

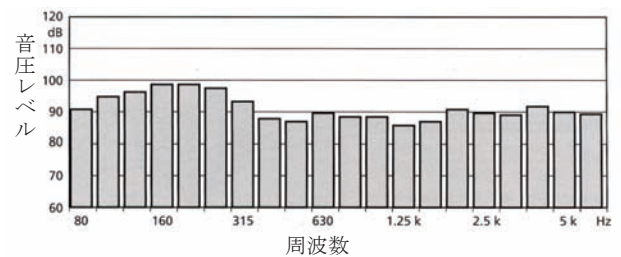


図 2.5 Omnisource Loudspeaker4295

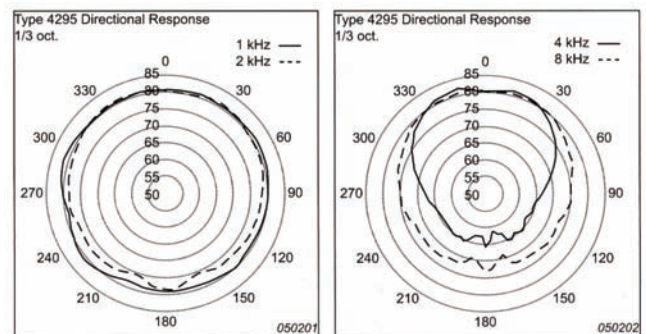
表 2.3 Loudspeaker4295 の仕様

周波数範囲	80～6300[Hz]
ノーマル・インピーダンス	6[Ω]
定格出力	50[W]
音圧レベル (広帯域)	105[dB]
(1/3 オクターブ・バンド)	85[dB]以上*

\*：バンド毎に特性は異なる



(a) 1/3 オクターブ・バンド毎の出力音波の音圧レベル特性



(b) 出力音波の指向性

図 2.6 Loudspeaker4295 の出力特性

## 2.1.3 試験板固定部

本実験では試験板を 4 辺固定の条件とするため、図 2.7 に示すフレームを用いて固定した。このフレームには、250[mm]×250[mm]、厚さ 5[mm] の鉄板を使用し、200[mm]×200[mm]の開口部をもつ。そして、試験板の固定には、試験板を両側から 2 つのフレームで挟み、約 30[mm]間隔で合計 32 個のボルトで締め付ける。このとき、ボルトに



よる締め付けを均一にするためにトルク・レンチを使用し、13[Nm]の一定のトルクで締め付けることとした。

試験板は、無響室の中心軸上にあり、音源に対して垂直に設置されている。

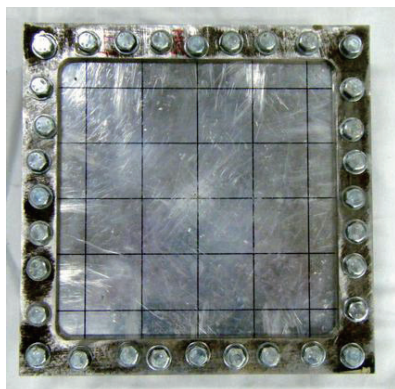


図 2.7 試験材料固定フレーム

#### 2.1.4 マイクロフォン

実験設備内部の音圧を測定するため、2つの 1/4 インチマイクロフォン(Pressure-Field Microphone Type4938, Free-Field Microphone Type4939, Brüel & Kjær)をプリアンプ(Preamplifier2670, Brüel & Kjær)に接続して使用した(図 2.8)。表 2.4 に、それぞれの仕様を示す。これらのマイクロフォンは、実験前に音圧校正器(Sound Calibrator Type4231, Brüel & Kjær)によって校正をした後に使用する。取得された信号は、FFT 分析器(PULSE 7770 FFT Analysis, Brüel & Kjær)で周波数解析を行う。



図 2.8 Pressure-Field Microphone Type4938, Free-Field Microphone Type4939

表 2.4 Pressure-Field Microphone Type4938, Free-Field Microphone Type4939 の仕様

	Pressure-Field Microphone Type4938	Free-Field Microphone Type4939
用途	音圧音場	自由音場
直径	1/4 [inch]	1/4 [inch]
開放感度	1.6 [mV/Pa]	4.0 [mV/Pa]
偏極電圧	200 [V]	200 [V]
周波数範囲	4–70000 [Hz]	4–100000 [Hz]
自己ノイズ	30 [dB(A)]	28 [dB(A)]
静電容量	6.1 [pF]	6.1 [pF]

また、実験装置内部の音響インテンシティを測定するために、インテンシティ・プローブを利用する。図 2.9 に、そのインテンシティ・プローブの外観図を示す。インテンシティ・プローブは、位相整合がとられた 2 つのマイクロフォン(1/2-Microphone pair Type4197, Brüel & Kjær)と位相整合のとられたデュアルプリアンプ(Dual Preamplifier2683, Brüel & Kjær)から成る。このマイクロフォンの仕様を表 2.5 に、プリアンプの仕様を表 2.6 に示す。マイクロフォンは実験前に音圧校正器(Sound Calibrator Type4231, Brüel & Kjær)によって校正をした後、使用する。取得されたデータは FFT 分析器(PULSE 7770 FFT Analysis, Brüel & Kjær)で周波数解析を行った。



図 2.9 インテンシティ・プローブ

表 2.5 Microphone Type4197 の仕様

自由音場での周波数応答 (±1dB 以内)	5–12500 [Hz]
(±2dB 以内)	0.3–20000 [Hz]
位相応答のずれ (20–250Hz)	0.05 [deg] 以下
(250–6300Hz)	f(Hz)/5000 [deg] 以下
振幅応答のずれ (20–1000Hz)	0.2 [dB] 以下
(20–7100Hz)	0.4 [dB] 以下
周波数範囲 (50mm スペーサー)	20–1250 [Hz]
(12mm スペーサー)	250–5000 [Hz]
(8.5mm スペーサー)	250–6300 [Hz]

表 2.6 Dual Preamplifier2683 の仕様

位相整合 (50Hz)	0.015 [deg] 以下
(250–100000Hz)	f(Hz)×0.06 [deg]
マイクロフォン感度に対する自己ノイズ	19.4 [dB(A)]

#### 2.1.5 加速度センサ

試験板における構造振動を測定するために、加速度センサ(Accelerometer Type4517-002, Brüel & Kjær)を使用する(図 2.10)。その加速度センサの仕様を、表 2.7 に示す。そして、加速度センサで測定された信号は、FFT アナライザ(ONO SOKKI CF-5210)を用いて周波数解析した。



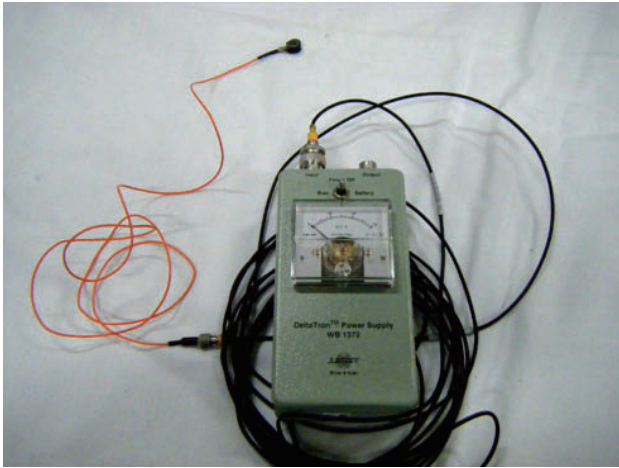


図 2.10 Accelerometer Type4517-002

表 2.7 Accelerometer Type4517-002 の仕様

感度 (159.2Hz)	1.046 [mV/ms <sup>-2</sup> ]
周波数範囲 (±1dB)	1～20000 [Hz]
共振周波数	70900 [Hz]
自己ノイズ	60 [μV] (RMS)
重量	0.7 [g]

### 2.1.6 試験板

音響透過試験に用いる試験板（アルミニウム 1050）の厚さと物性値を表 2.8 に示す。試験板は、250[mm]×250[mm]の大きさであり、外縁から 25[mm]をサポートで固定しているため、最終的な試験面積は 200[mm]×200[mm]となる。

表 2.8 試験板（アルミニウム 1050）の大きさと物性値

厚さ	1.0 [mm]
面密度	10.80 [kg/m <sup>2</sup> ]
縦弾性係数	69 [GPa]
横弾性係数	26 [GPa]

## 2.2 実験方法

本研究では、無響室を用いた平面音波入射時における透過損失(transmission loss)（以下、TL）の測定方法を考案し、その装置を用いて試験板の平面音波透過特性について調べた。一般に、TL は、JIS や ISO など規格されたランダム入射に基づく手法で測定されるが、本研究では、解析手法の妥当性を検討するため、物理的に単純な平面波による垂直入射に基づいた手法を試みる。

まず始めに、2 つの検証実験を行い、本無響室を用いた実験法の評価と有効性の確認を行った。その上で、試験板の TL の測定を行い、透過特性について調べる。

本実験は、以下の項目から成る。

- (1) 入射平面音波の検証実験
- (2) 1[mm]厚のアルミ板の TL 測定

### 2.2.1 入射平面音波検証法

音源側無響室内において、無響室壁面による反射がなく音源から放射された音波が直接試験板に入射することを確認するために、無響室の中心軸上の 0.1～0.9[m]で 0.1[m]おきに音圧レベルを測定し（図 2.11 と図 2.12）、その測定値を逆自乗則と比較した。逆自乗則とは、自由音場空間における音響インテンシティの減衰を表す式<sup>8)</sup>であり、式(2.1)で表される。

$$\text{SPL} = \text{PWL} + 10 \log_{10} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \right) \quad (2.1)$$

ここで、SPL は音圧レベル、PWL は音源のパワー・レベルを表し、 $r$  は音源からの距離である。本実験において、音響パワーは音源から 0.1[m]の位置で測定した音圧レベルから算出した。逆自乗則を利用すれば、音源の音響パワーと音源からの距離によって、その点における音圧レベルを求めることができる。

なお、本実験では板の固定部による音波の反射を防ぐため、対向壁面には他の壁面と同様に 3 層に積層された 250[mm]厚のグラスウールを貼り付け、グラスウールの平面とした。出力音波は 0～3200[Hz]のホワイト・ノイズを放射し、10 秒間加算平均して算出している。なお、FFT の周波数レンジは 6.4[kHz]であり、8[Hz]刻みで測定した。



図 2.11 無響室中心軸上の音圧分布測定法

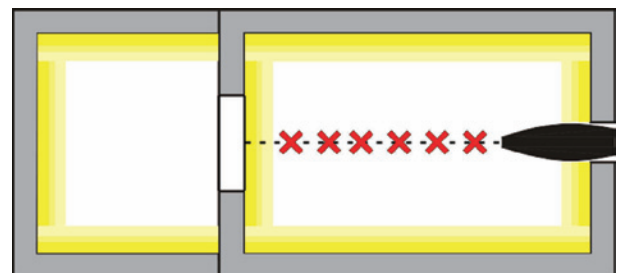


図 2.12 中心軸上の音圧測定法概略図

### 2.2.2 位相の測定法

音源側無響室内において、試験板に入射する音波が同位相であることを確認するために、音源から 0.9[m] の距離の任意の 2 点で同時に位相を測定することによって位相にずれがないか確認した。実験の様子を図 2.13 と図 2.14 に示す。このとき、出力音波は単一周波数の正弦波を使用し、2 つのマイクロフォンで同時に測定を行った。



図 2.13 位相測定法

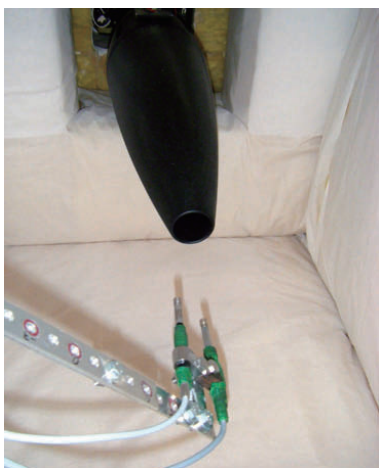


図 2.14 マイクロフォン間誤差測定確認

### 2.2.3 入射音圧分布の測定法

音源側無響室内において、試験板に入射している音波の一様性を確認するために、試験板を設置している範囲（無響室中心軸から 200[mm]×200[mm]）で音圧レベルを測定し、入射音圧分布を調べた。計測の様子を図 2.15 に示す。測定は、40[mm]間隔の計 25 点で行い、次式を用いて各点の音圧レベル( $SPL_{(x,y)}$ )と平均音圧レベル  $SPL_{ave}$  との差で評価した。

$$\Delta SPL = SPL_{(x,y)} - SPL_{ave} \quad (2.2)$$

対向壁面については、試験板の固定部にグラスウールを貼りつけている。出力音波は単一周波数の正弦波を放射し、10 秒間加算平均して算出している。なお、FFT の周波数レンジは 6.4[kHz] であり、8[Hz] 刻みで測定した。

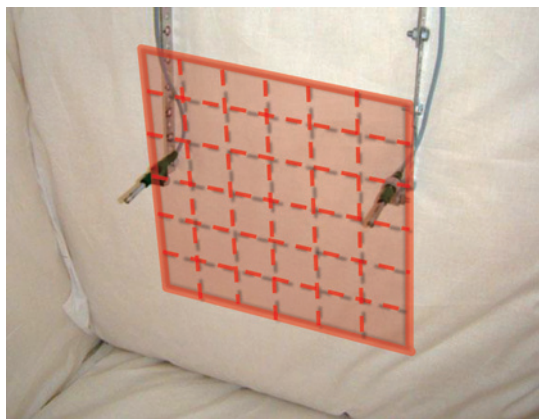


図 2.15 入射音圧分布測定法

本実験では、 $\Delta SPL$  が 3[dB] 以内であれば平面音波と評価した。これは、スピーカーの再現性が 0.5[dB] 程度であること、2 つのマイクロフォンはそれぞれ 0.3[dB] の測定精度が保障されていること、そして、全部で 15 回の実験を行ったことを考慮して算出した。

### 2.2.4 透過損失の測定法

まず、TL の定義式を以下に示す<sup>9)</sup>。

$$TL = 10 \log_{10} \left( \frac{I_i}{I_t} \right) \quad (2.3)$$

ここで、 $I_i$  は入射音波の（入射方向の）音響インテンシティ、 $I_t$  は透過音波の（透過方向の）音響インテンシティを表している。音響インテンシティとは、音波の音圧  $p$  と（ある一方方向の）粒子速度  $u$  の積の時間平均値であり、次式で与えられるように単位面積当たりの音響パワーを表す。

$$I = \overline{pu} \quad (2.4)$$

本実験では、次に示す式を用いて TL を算出した。

$$TL = 10 \log_{10} \left( \frac{I_i}{I_{ref}} \right) - 10 \log_{10} \left( \frac{I_t}{I_{ref}} \right) \\ = IL_i - IL_t \quad (2.5)$$

ここで、 $IL_i$  は入射音波のインテンシティ・レベル、 $IL_t$  は透過音波のインテンシティレベルである。なお、本節で定義している入射音波のインテンシティは試験板に入射するインテンシティであり、試験板によって反射されるインテンシティは含まない。

### 2.2.5 入射音インテンシティの測定法

入射音波を平面音波と仮定している。平面音波である場合、音響インテンシティは、次式の音波の 1 次元波動方程式を解くことにより求めることができる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (2.6)$$

ここで、 $c$  は音速を表す。この式を解くことにより、音圧が、

$$p = -\rho_0 j \omega A \exp[j(\omega t - kx)] \quad (2.7)$$

で表され、粒子速度は音圧を用いて

$$u = -jkA \exp[j(\omega t - kx)] = \frac{p}{\rho_0 c} \quad (2.8)$$

と表すことができる。ここで、 $\rho_0$  は空気密度の平均値、 $k(=\omega/c)$  は波数、 $A$  は振幅、 $j$  は $\sqrt{-1}$ を表す。これより、入射音波の(入射方向の)音響インテンシティ(式(2.4))は、音圧と空気密度、及び、音速から次式のように表すことができる。

$$I = \frac{p^2}{\rho_0 c} \quad (2.9)$$

したがって、入射音波のインテンシティ・レベルは、次式のように音圧レベルで表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{IL}_i &= 10 \log_{10} \left( \frac{I_i}{I_{\text{ref}}} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{p_i^2 / (\rho_0 c)}{p_{\text{ref}}^2 / (\rho_0 c)} \right) \\ &= 20 \log_{10} \left( \frac{p_i}{p_{\text{ref}}} \right) = \text{SPL}_i \end{aligned} \quad (2.10)$$

試験板によって反射される反射音波のインテンシティ成分を除去するため、試験板がない状態で音源から 0.1[m] の点で音圧を測定し、逆自乗則を用いて板の直前の入射音波のインテンシティを算出した。その際の測定は、前節で述べた方法と同様の方法で行った(図 2.16)。外挿する点は音源から 1.29[m] の点であり、試験板から 0.06[m] 手前に相当する。これは透過音の測定を板の後方 0.06[m]で行ったためである。



図 2.16 入射音圧測定方法

## 2.2.6 透過音インテンシティの測定法

本実験では、インテンシティ・プローブを用いて透過音波のインテンシティも測定することができる。インテンシティ・プローブの測定原理を以下に示す(図 2.17)。

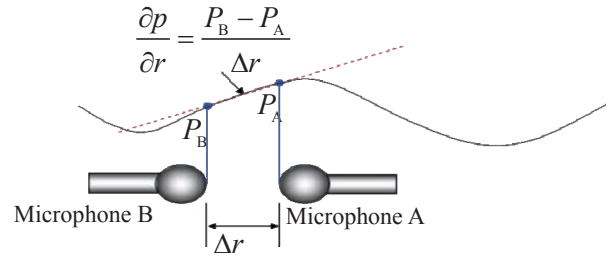


図 2.17 インテンシティ・プローブ測定原理

音響インテンシティは、式(2.4)で示したように音圧と粒子速度の積の時間平均値である。音圧はマイクロフォンで直接測定することができるが、粒子速度は直接測定することはできない。そこで、音波のオイラー方程式を用いて、粒子速度を次式のように表す。

$$u = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial p}{\partial r} dt \quad (2.11)$$

インテンシティ・プローブでは、式(2.11)中の音圧の空間勾配の項  $\partial p / \partial r$  を 2 つのマイクロフォン間の測定値の差とマイクロフォン間の距離を使い、空間差分の項  $(P_B - P_A) / \Delta r$  と置き換えることにより、粒子速度を、

$$u = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{P_B - P_A}{\Delta r} dt \quad (2.12)$$

から求める。このとき、音圧は、次のように 2 つのマイクロフォンの平均値とする。

$$p = \frac{P_A + P_B}{2} \quad (2.13)$$

したがって、音響インテンシティは、

$$I = -\frac{P_A + P_B}{2\rho_0 \Delta r} \int (P_B - P_A) dt \quad (2.14)$$

と表すことができる。透過音波のインテンシティ測定は試験板から 60[mm] 後方で行い(図 2.18)、測定範囲は 120[mm]×120[mm](図 2.19)、20[mm]間隔の 49 点で測定した。そして、この測定データを 140[mm]×140[mm]の範囲で面積分し、透過音波のインテンシティとした。このとき、試験板から離れた位置で測定したのは、試験板固定時に生じる固定端の影響を除去するためである。



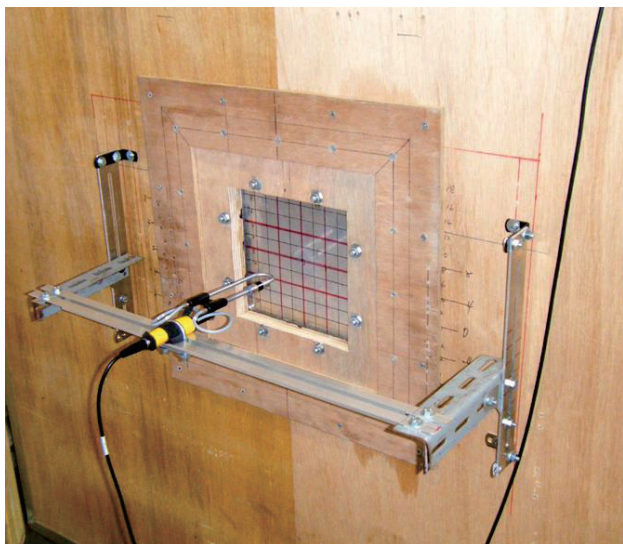


図 2.18 透過音波インテンシティ測定法

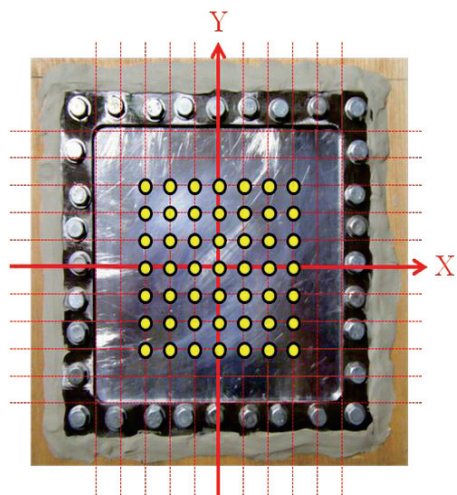


図 2.19 透過音波インテンシティ測定点

### 2.2.7 試験板の固有振動数の測定方法

加速度センサを用いてハンマリング試験を行い、試験板の固有振動数を測定した。加速度センサによりピックアップされた信号はアンプを通して増幅し、FFT アナライザで周波数解析を行った。なお、FFT の周波数レンジは 6.4[kHz]、サンプリング周波数は 16.384[kHz]であり、8[Hz]刻みで測定した。また、データは 30 回加算平均して算出している。

ハンマリング試験時には、加速度センサをフレーム上に設置した（図 2.20）。これは、センサの自重により試験板自身の固有振動数が低下するのを防ぐためである。測定はフレーム上の 16 点で行い、それぞれのデータを平均化した。



図 2.20 固有振動測定法

## 2.3 平面音波の検証

### 2.3.1 逆自乗則との比較

図 2.21 に無響室の中心軸上で測定した音圧レベルと逆自乗則を比較した結果を示す。横軸に音源からの距離を、縦軸には音圧レベル(SPL : Sound Pressure Level)を示す。この図の (a) 200[Hz]、(b) 400[Hz]、(c) 504[Hz]のグラフにおいて、測定値と逆自乗則に 5[dB]程度のずれが見られる点が存在する。これは対向壁面からの反射による影響と考えられる。つまり、これら3つの周波数はグラスウールの厚さに比べて波長が長いいため、垂直に入射した場合では吸収しきれずに反射してしまい、その結果、入射音波と反射音波の干渉により定在波が生じて、逆自乗則からずれてしまうと考えられる。これは、グラフ中の測定音圧の結果が、音源からの距離に対して波打つ様に減衰していることから分かる。また、その他の周波数では、全体的に実験結果は逆自乗則とよく一致している。これより、本無響室では、壁面のグラスウールは音波を十分に吸収しており、無響室内では反射のない自由音場空間が成立しているといえる。

### 2.3.2 位相の比較

図 2.22 に音源から 0.9[m]の距離の2点で測定した位相の測定結果を示す。また、そのときの位相差を表 2.9 に示す。なお、マイクロフォン間の位相誤差の測定は、音源から 0.1[m]の点で2つのマイクロフォン間距離を 45[mm]として行った。

表 2.9 より測定位相差は最大で 3.5[%]であり、おおよそ一致していることが分かる。これより、試験板には同位相の音波が入射しているといえる。

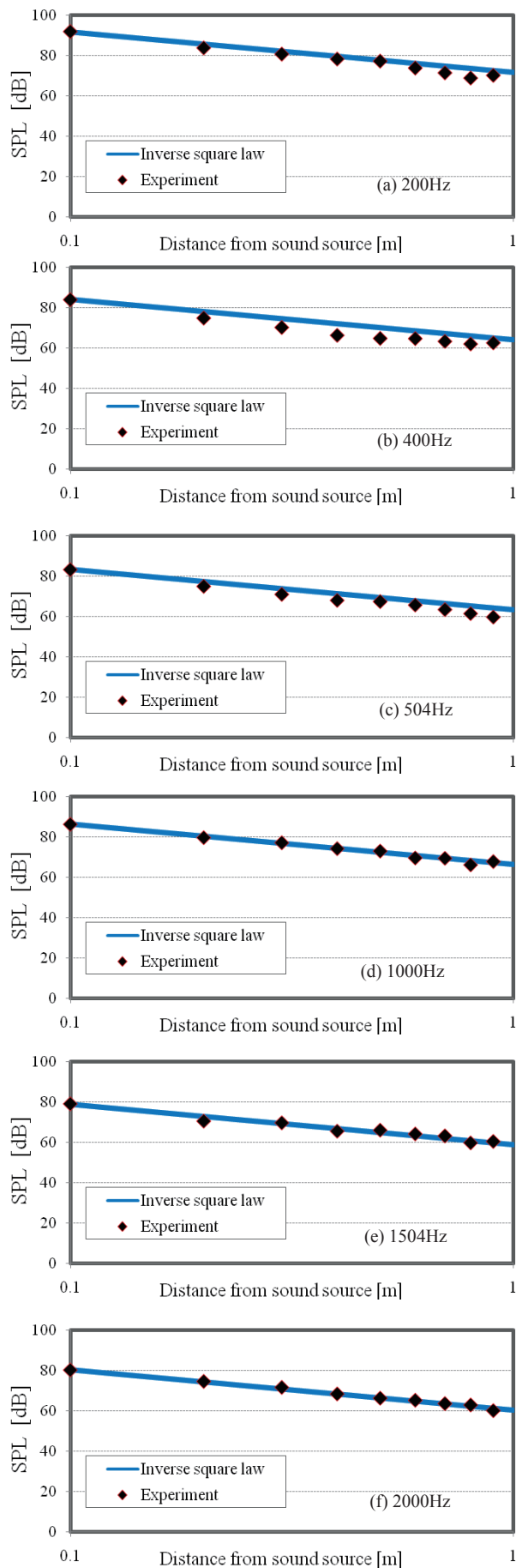


図 2.21 逆自乗則との比較

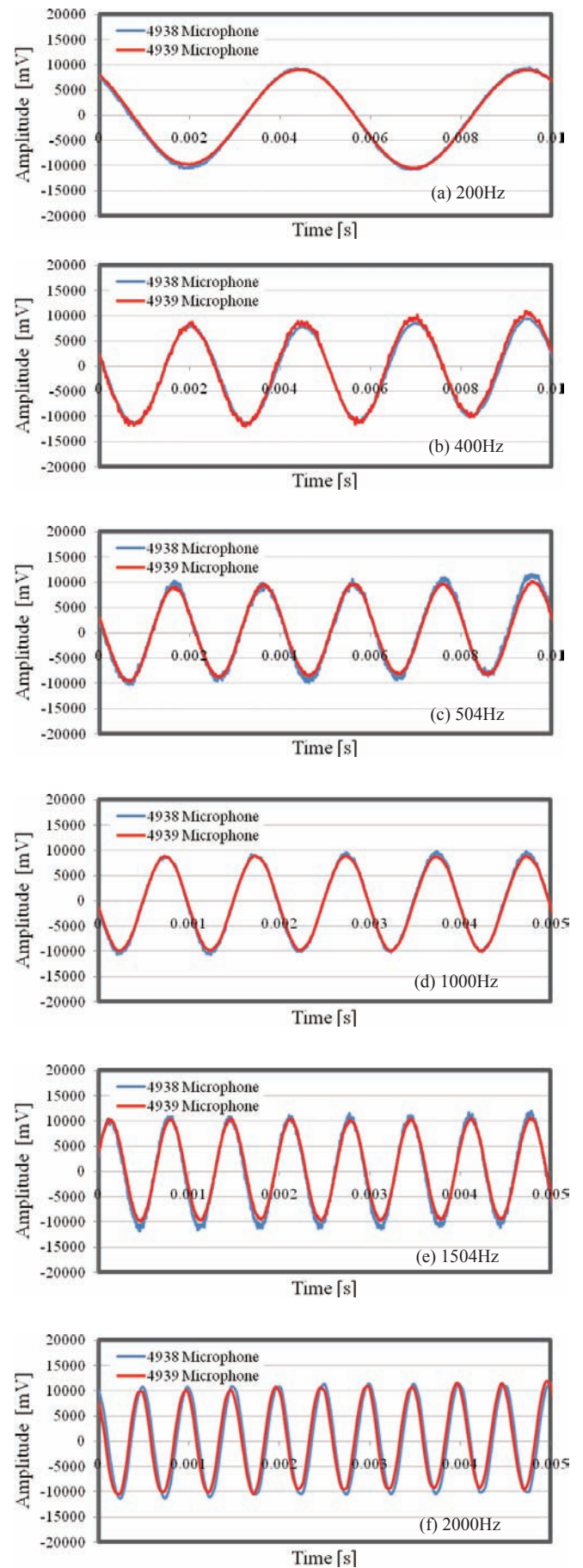


図 2.22 位相の比較



表 2.9 位相の比較

周波数 [Hz]	マイクログフォン間の 測定誤差		測定位相差	
	[deg]	[%]	[deg]	[%]
200	0.7	0.2	3.1	0.8
400	1.0	0.3	1.8	0.5
504	0.9	0.2	0.9	0.3
1000	0.5	0.1	1.8	0.5
1504	6.1	1.7	0.2	0.1
2000	6.3	1.7	12.7	3.5

### 2.3.3 入射音圧分布

次に、入射音圧分布の測定結果を図 2.23 に示す。図中の分布は、平均値からのずれを示したものである。また表 2.10 に、得られた入射音圧の平均値、最大値、最小値、及び、平均値との差を示す。表 2.10 を見ると、平均値からのずれは 2000[Hz]で最大 2.6 (= 1.2 + 1.4)[dB]となっているが、これは測定誤差の範囲内である。したがって、試験板には一様な音圧をもったほぼ平面な音波が入射していることが確認できた。

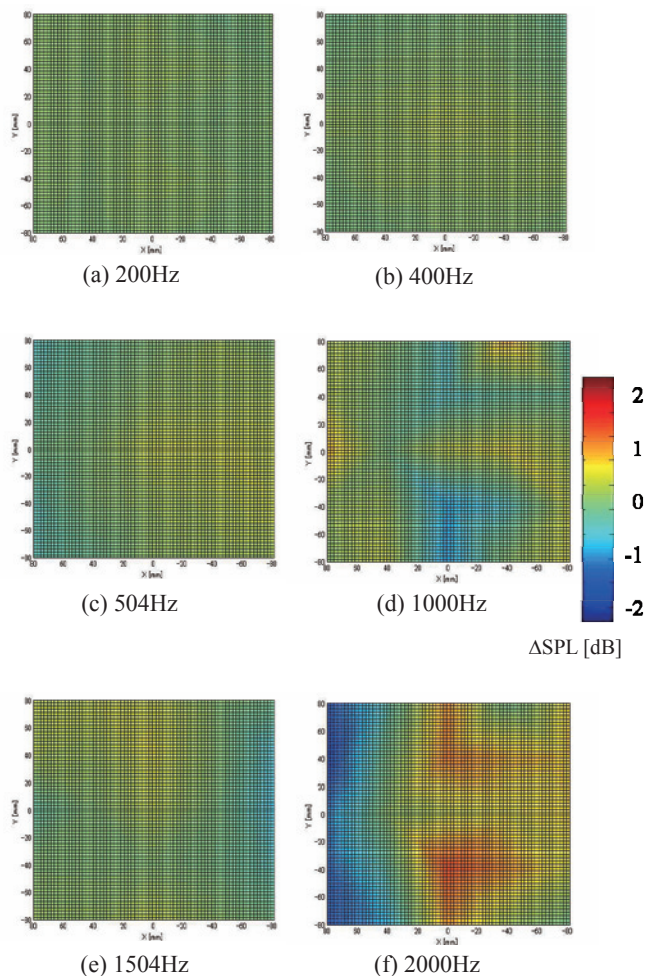


図 2.23 入射音圧分布

表 2.10 入射音圧分布の測定結果

周波数 [Hz]	平均値 [dB]	最大値 [dB]	最小値 [dB]	最大値 との差 [dB]	最小値 との差 [dB]
200	75.8	75.9	75.6	0.1	0.2
400	68.5	68.8	68.3	0.3	0.2
504	68.9	69.3	68.5	0.3	0.5
1000	72.8	73.5	71.9	0.7	0.9
1504	68.9	69.3	68.2	0.4	0.6
2000	69.4	70.6	68.0	1.2	1.4

### 2.4 透過損失測定の結果

図 2.24 に TL 測定結果を示す。入射音波のインテンシティは音源の音響パワーを測定し、逆自乗則を用いて外挿したものを使用した。

このとき、TL の理論値としては、次の垂直入射質量則 (normal incident mass law)<sup>9)</sup>を使用した。

$$TL = 20 \log_{10}(mf) - 20 \log_{10}\left(\frac{\rho_0 c}{\pi}\right) \quad (2.15)$$

ここで、 $m$  は試験板の面密度を表しており、 $f$  は入射音波の周波数、 $\rho_0$  は空気密度、 $c$  は空気中の音速である。この質量則とは、音波によって無限の大きさの板が振動し、その結果、音が透過するという理論のもとに導かれた式であり、入射音波の周波数が試験板の 1 次の固有振動数以降に適用できる。これより、質量則では試験板の面密度と音波の周波数から TL を求めることができ、面密度が一定の場合、周波数が大きくなるにつれて TL も大きくなるのが分かる。

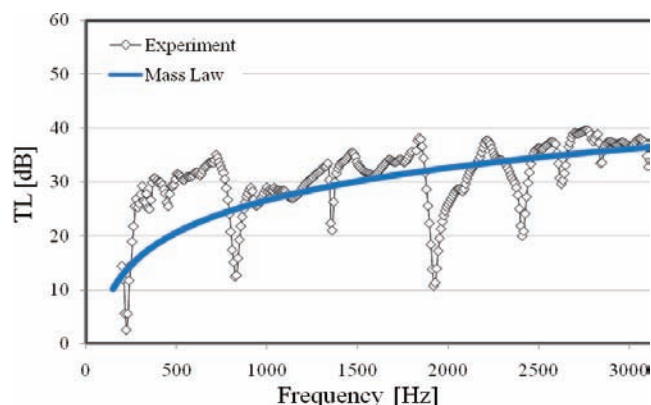


図 2.24 1[mm]厚アルミ板の透過損失の測定結果

しかし、実際の実験結果では、TL は入射音波の周波数によって大きく変化している。特に、227[Hz]、835[Hz]、1388[Hz]、1964[Hz]、2408[Hz]、及び、2624[Hz]で TL が減少している。これらの周波数は、試験板の固有振動数と一致しており、試験板の振幅が大きくなるために起こる。また、TL が減少す



る最初の周波数（227[Hz]）から 2 番目の周波数（835[Hz]）の間では、質量則に比べて TL が大きくなっている。これは音波の波長が試験板の 1 辺よりも長いいため、音波の放射効率が低下するためであると考えられる<sup>8)</sup>。また、835[Hz]以降の周波数では、TL は質量則とほぼ一致し、周波数が高くなるにつれて TL が増加するという結果が得られた。

#### 2.4.1 固有振動数の測定結果及び固有振動モード

図 2.25 にハンマリング試験により得られた 1[mm]アルミ板の加速度のパワー・スペクトルを示す。この図から、表 2.11 の実験値として示した周波数において、パワー・スペクトルのピークが存在し、これらの周波数は本試験板の固有振動数に相当すると考えられる。

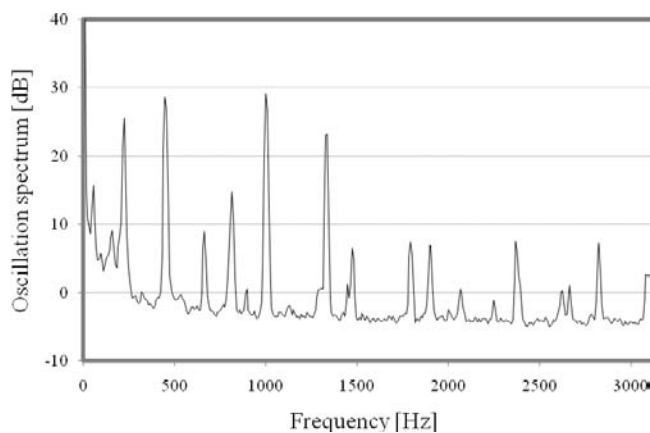


図 2.25 1[mm]厚アルミ板の振動スペクトル

一方、試験板の固有値解析を MSC.Nastran を用いて行った。表 2.11 は、この解析結果から得られた固有振動数と、図 2.25 に示した実験結果から得られた固有振動数とを比較したものである。測定値と解析値の差は最大でも 3[%]程度であり、おおよそ一致している。これより、本実験において、試験板は 4 辺固定の条件で固定されており、4 辺固定の条件下で振動していると考えられる。

次に、固有値解析から得られた固有振動モードを図 2.26 に示す。このとき、これらのモードはその形状によって大きく 2 つのグループに分けることができる。つまり、板の中心に腹をもち、図の縦横軸に対してともに対称な振動モードをもつ（図 2.26 中では）1 次、5 次、8 次、13 次、及び、17 次の固有振動モード（以下、単に対称モードと呼ぶ）と、それ以外（以下、非対称モードと呼ぶ）に分けることができる。

表 2.11 1[mm]厚アルミ板の固有振動数

固有振動数 (モード)	解析値 [Hz]	実験値 [Hz]	差 [%]
1 次	221	227	2.7
2 次	451	463	2.7
3 次	665	684	2.9
4 次	809	831	2.7
5 次	813	835	2.7
6 次	1014	1041	2.7
7 次	1295	1335	3.1
8 次	1352	1388	2.7
9 次	1489	1531	2.8
10 次	1495	1538	2.9
11 次	1821	1868	2.6
12 次	1902	1962	3.2
13 次	1904	1964	3.2

#### 2.4.2 透過損失と板の振動の関係

続いて、図 2.27 に、TL の測定結果と試験板の振動スペクトルの測定結果の関係を示す。この図から、TL が減少するピークの周波数は試験板の固有振動数に対応することが分かる。そして、TL が減少する周波数は、試験板の 1 次、5 次、8 次、13 次、及び、17 次の対称モードの固有周波数においてである。このとき、もう少し細かく TL の減少量を比較すると、1 次、5 次、13 次、及び、17 次のほぼ同心円状に広がる対称モードの固有周波数では、8 次の市松模様状の対称モードの固有周波数のときに比べて減少量が大きくなっている。つまり、同じ対称モードでも、今回の実験条件においては、軸対称に近いモードのほうが生じやすくなっている。一方、対称モードの固有周波数以外の周波数では、TL の減少がほとんどみられない。これは、本実験ではほぼ平面の音波が板に垂直に入射するという条件で実験を行ったので、試験板にほぼ一様な音圧が加わるため、試験板の振動波形が縦横対称になると考えられる<sup>9)</sup>。つまり、板の振動は、いずれの周波数においても基本的には対称なモード形状のみの重ね合わせとなる（現実の実験設備は少なからず非対称性を有するので、非対称のモードも生じるが、その影響はかなり小さい）。そして、励振周波数が対称モードの固有振動数と一致するときのみ板の共振が起きることによって、受音室側の透過音が大きくなる（TL が著しく減少する）と考えられる。この透過損失と板の振動の関係については、次章において、数値解析結果を用いて再度考察することにする。

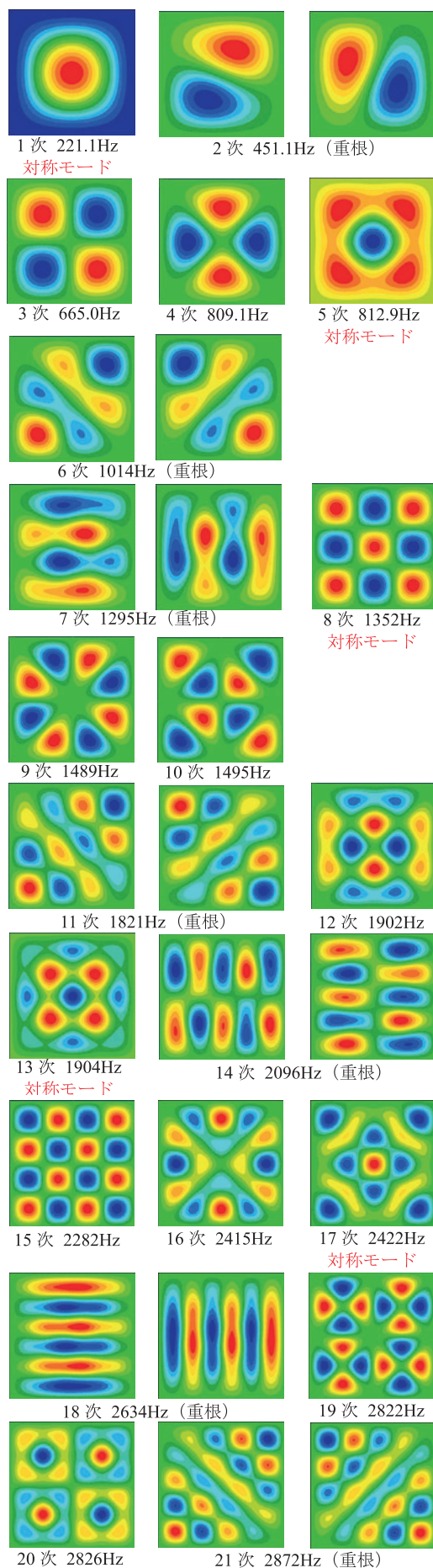


図 2.26 1[mm]厚アルミ板の固有振動モード

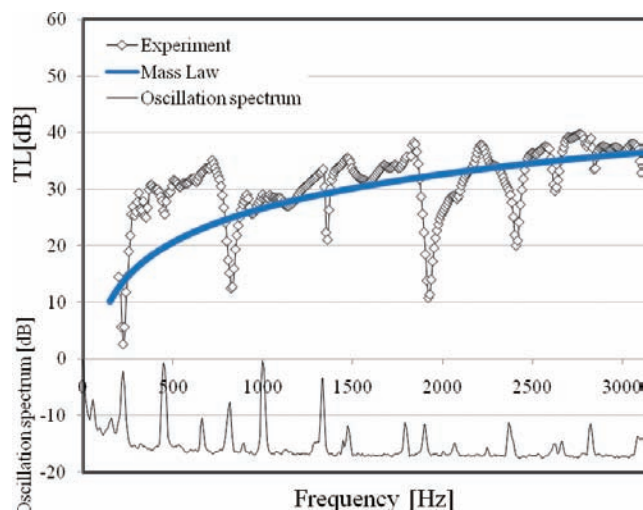


図 2.27 透過損失と試験板の固有振動数の関係

### 3. 音響透過解析

前章で示した音響透過実験から得られた結果を、定常音響構造連成問題に対する 3D WBM の解析結果と比較し、解析の妥当性を検討する。そのため、これまで 2D 解析用に構築して利用してきた解析コードを 3D 問題に対応できるように拡張した。汎用的な 3D WBM についての定式化とその性質については、補遺 A に示した。そして、実験データに加えて、解析の信頼性の高い（しかし、高い周波数領域では計算コストの高い）既存の FEM による解析結果とも比較を行う。

#### 3.1 解析モデル

図 3.1 に、前節で示した音響透過実験設備に基づいた、3D 解析用のモデルの幾何形状を示す（形状は、3D WBM と FEM で共通）。この装置では、音源室と受音室の内壁を吸音材（グラスウール）で覆い（部屋の一部分、吸音材で覆っていない壁がある）、音源室にあるスピーカーから音波を放射して、部屋の連結部にある弾性板（アルミニウム 1050：大きさ  $200[\text{mm}] \times 200[\text{mm}]$ 、厚さ  $t = 1[\text{mm}]$ 、密度  $\rho_s = 2700[\text{kg/m}^3]$ 、ポアソン比  $\nu = 0.33$ ）を通じて受音室へ透過する音を測定する。全ての部屋は空気（密度  $\rho = 1.2[\text{kg/m}^3]$ 、音速  $c = 340[\text{m/s}]$ ）で満たされている。

実験装置の内壁は、図 3.2 に示すように吸音材で覆われている部分と覆われていない部分があるが、WBM と FEM の両解析モデルに適用する境界条件としては、それらの部分に別々の比音響インピーダンス境界を適用する。この比音響インピーダンスの値は、一般に周波数依存であり、正確には実験で値を同定する必要があるが、ここでは簡単のため、吸音材で覆っている壁は理想的な吸音材であると仮定して、空気の固有音響インピーダンス  $Z = \rho c$ （近似的な自由境界）を適用し、吸音材で覆っていない壁には比音響インピーダンス  $Z = \infty$ （剛壁：完全反射）を適用する。

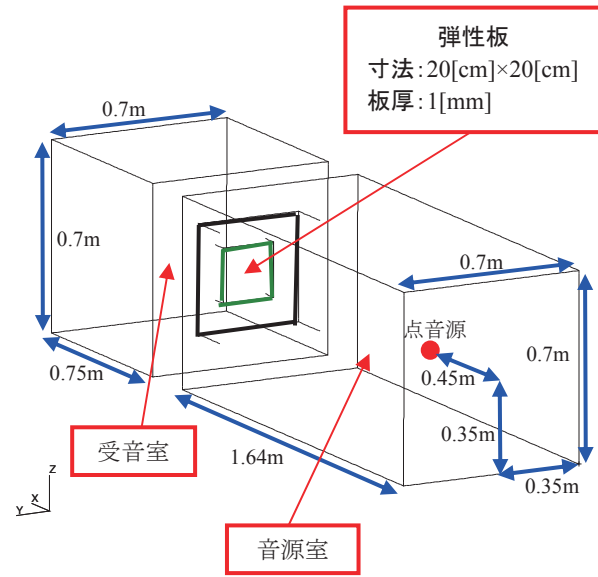


図 3.1 3次元解析モデル

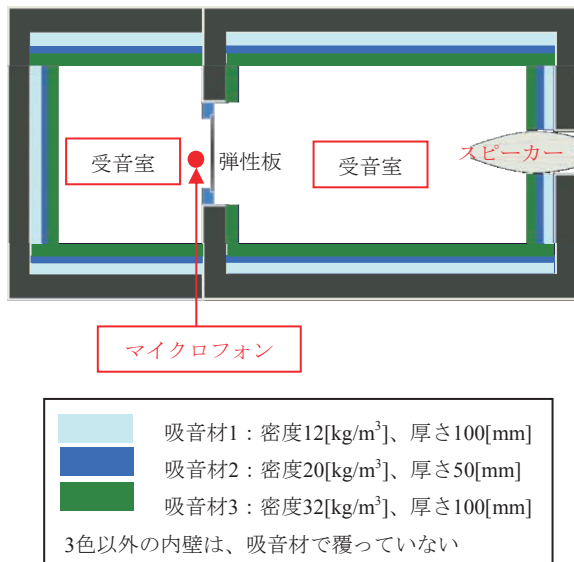


図 3.2 吸音材の配置

部屋の連結部に設置している弾性板の損失係数 $\eta$ には一般に周波数依存性があり、正確には実験で値を同定する必要があるが、ここでも簡単のため、損失係数として0[%]と5[%]という両極端な2ケースを用いて解析を行う。実際の損失係数の値は、(周波数にも依るが) この間の値であると考えられる。

図 3.1 の幾何モデルを WBM で解析するためには、まず、解析領域を凸形状の部分領域に分割する必要がある。今回は、弾性板が取り付けられる部分のキャビティのくびれを考慮して、音源室と受音室の両キャビティ領域をそれぞれ2つの3D 凸部分領域に分割し、合計4個の音響部分領域を使用することとした。そして、上記の比音響インピーダンス境界条件に加えて、部分領域間に圧力と法線方向速度の連続性条件が課される(実際には、数値粘性を含むインピーダンス連成手法を適用した；詳細は補遺 A の A1.4.2 節を参照)。一方、

弾性板は、あらかじめ2Dの凸形状(矩形)なので分割する必要はない。また、弾性板の周囲の構造境界条件は、理想的な固定境界とした。このとき、各音響部分領域と構造領域に用いる波動関数の数は、補遺 A の A4.1 節と A4.2 節でそれぞれ示した指標に基づいて解析周波数ごとに自動的に決められる。そして、弾性板表面の振動と2つの部屋のキャビティの振動は、インハウスで構築した WBM の解析ツールを用いて完全に連成するように解かれる(詳細は、補遺 A を参照)。

一方、WBM の比較対象として実施する FEM 解析のモデルは、250[Hz]までの周波数応答解析の解を保証する数値分散誤差を想定<sup>2)</sup>したメッシュを用いて、MSC.Nastran で解析する。このメッシュは、構造部分のシェル要素とキャビティ部分の音響ソリッド要素の2種類から成り、合計約64万節点、約61万要素である。全解析周波数にわたって音響波長よりも構造の曲げ波長のほうが小さいので、音響要素のサイズは、構造から離れるにつれて徐々に大きくなるように構築した。このメッシュを用いて、実際には3000[Hz]まで解析を行うが、計算時間と計算リソースの制約から、この程度のメッシュに留めている。ちなみに、FEM の補間誤差を考慮すると、1次要素の場合、応答波長を(解析周波数に依らず)最低6等分しなければならないという簡単な指標が得られ、通常はこの指標に基づいてメッシュを構築することが多い。一方、数値分散誤差の指標によると、さらにメッシュを細かく切らなければならない、1波長あたりに必要な最低要素数も周波数依存となる。ここで用いるメッシュに関しては、2000[Hz]において、音響の1波長あたり最小で約7個、構造曲げの1波長あたり最小で約6個の要素に切られており、250[Hz]から2000[Hz](実際には構造に近い音響要素はさらに細かく切られているので、もう少し高い周波数)までの周波数領域における FEM の解析誤差は、ほぼ数値分散誤差であると考えられる。

### 3.2 3次元 WBM の検証

WBM と FEM の解析結果及び実験結果を、次式で定義される TL を用いて比較することにする。

$$\text{TL} = 10 \log_{10} \frac{\int I_i ds}{\int I_t ds} = 10 \log_{10} \frac{\int p_i v_i ds}{\int p_t v_t ds} \quad (3.1)$$

ここで、 $I_i$ 、 $p_i$ 、 $v_i$  は、それぞれ、音源室から入射する音の音響インテンシティ、音圧、粒子速度であり、 $I_t$ 、 $p_t$ 、 $v_t$  は、それぞれ、弾性板から受音室へ透過する音の音響インテンシティ、音圧、粒子速度である。このとき比較検討には、図 3.3 に示す弾性板中心付近(140[mm]四方の面)における平均の TL を用いた。また、入射波及び透過波の音響インテンシティ計測面は、それぞれ、弾性板から音源室側へ60[mm]と受音室側へ60[mm]の位置にある。



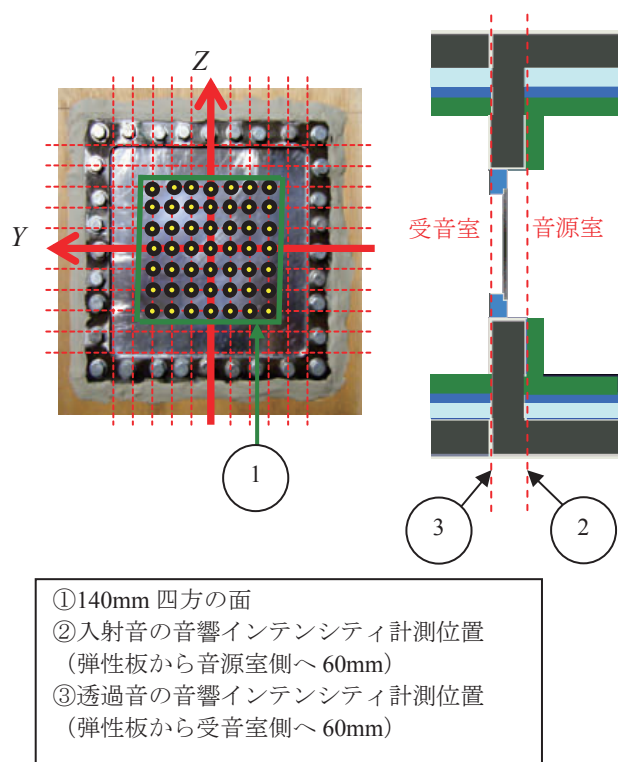


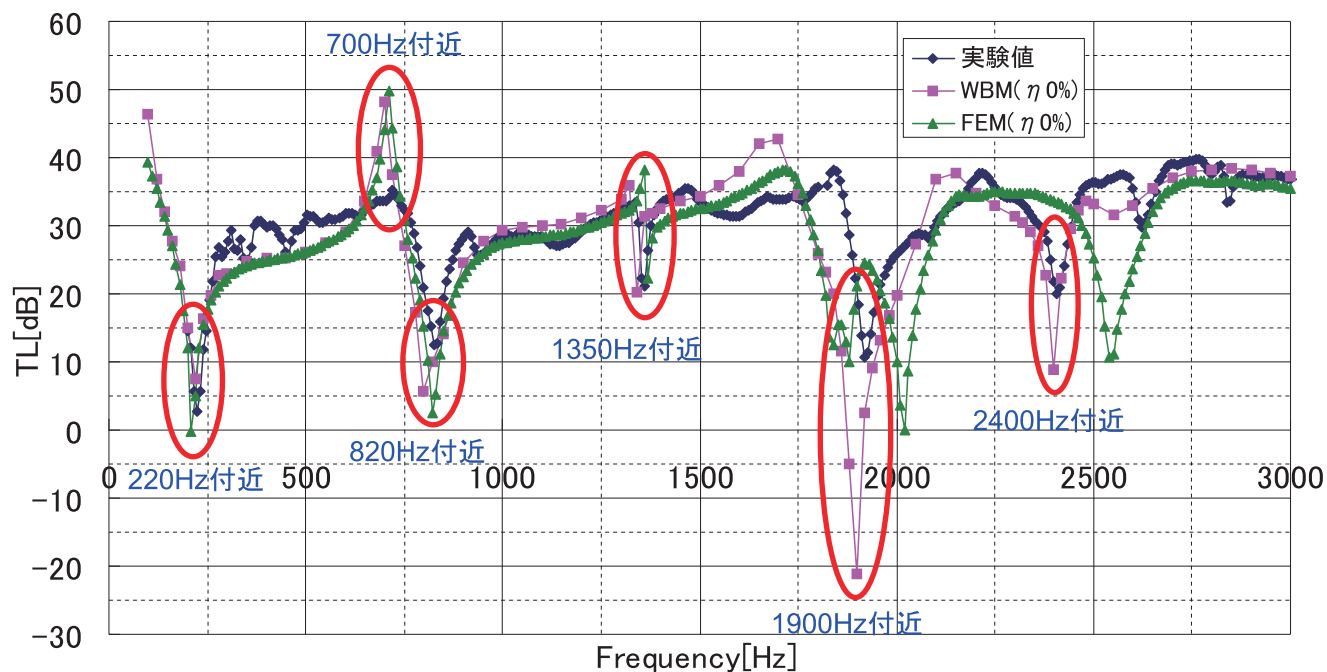
図 3.3 音響インテンシティ計測位置

以上のことを考慮して、WBM と FEM を利用した解析を実施した。図 3.4 に、それぞれの TL の解析値と実験値を重ねて示す。この図の(a)と(b)は、弾性板の構造損失係数  $\eta$  を 0[%]または 5[%]とした場合である。このグラフから、TL が、WBM と FEM の解析結果及び実験結果ともにはほぼ同様の傾向を示していることが分かる。ただし、TL の解析結果において、負の値を示す点がいくつか生じている（特に、図 3.4(a) の 1900[Hz]付近における WBM の計算結果）。これは、物理的にはあり得ないことであり、今回は、音響室も受音室も、少なくとも吸音材に関する遮断周波数である 200[Hz]以上ではほぼ無響状態を実現しており、定在波が生じた影響であるとも考えにくく（特に入射波は、板を外した状態で計測、または、計算している）、原因はデータの処理方法に起因していると考えられる。これについては、図 3.3 における各観測点（黄点）の TL を調べたり、観測点の数を増やしたりするなど、今後、詳細な検討をする必要がある。

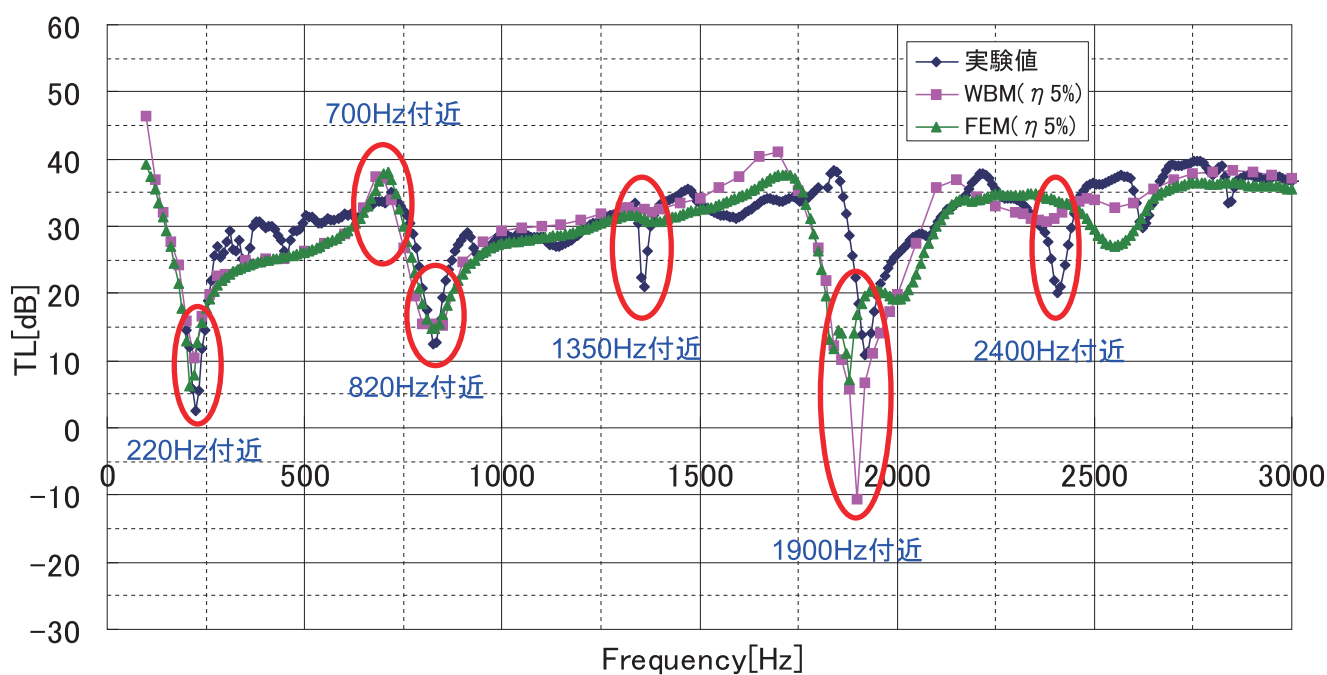
また、解析結果はともに、損失係数を入れたほうが、特に低い周波数領域における極値（220[Hz]、700[Hz]、及び、820[Hz]付近）で実験値に近い値になる傾向を示している。さらに、図 3.5 に、WBM で TL が極値になる周波数（220[Hz]、700[Hz]、及び、820[Hz]）における弾性板の法線方向変位の

コンター及び中心線上の法線方向変位のグラフを示す。これより、図 3.4 における TL が極小値になる周波数（220[Hz]と 820[Hz]）と、図 2.26 における固有モードが対称モードになる周波数（1 次: 221.1[Hz]と 5 次: 812.9[Hz]）が一致することが分かる。これは、平面波が弾性板に垂直に入射されるので、弾性板の固有モードのうち対称モードだけが励起され、受音室側へ音が透過しやすくなるために起こると考えられる。これに対して、700[Hz]付近では TL が極大値となっている。これは、物理的には、弾性板の 1 次モードの逆相と 5 次モードの同相が混在し、それぞれが打ち消しあうことにより、弾性板の振動が抑えられるために起こると考えられる。図 3.5 における周波数 700[Hz]と 820[Hz]の変位を比べると、700[Hz]の方が 820[Hz]より 1 桁小さくなっており、上述した考察の妥当性を補足するものとなっている。

一方、さらに高い周波数領域（2000[Hz]前後付近と 2500[Hz]前後付近）をみると、WBM と FEM では、TL の低下する周波数にずれが生じていることが分かる。具体的には、WBM の数値解では、1900[Hz]付近と 2400[Hz]付近で TL が低下するのに対して、FEM の数値解では、2000[Hz]付近と 2600[Hz]付近で低下する。このとき、それらの周波数領域における対称な弾性板のモードは、図 2.26 から、13 次(1904[Hz])と 17 次(2422[Hz])である。実際の系では、音響と構造が連成するのでそのモードは純粋な構造のモードとは若干異なるとはいえ、WBM は、より高い周波数領域においても、構造の共振振動に起因する現象を正確にとらえていることが分かる。これは、WBM において、解析領域を細かなメッシュに離散化する必要がなく、数値解を展開する際に用いる波動関数が連続系の支配方程式を厳密に満たすことから、数値解に本質的に数値分散誤差が含まれないためである。一方、FEM では、解析領域を小さな要素に分割しなければならず、連続系（無限自由度）から自由度を打ち切った離散系（有限自由度）は、一般に、連続系よりも剛性の高い硬い系となる。つまり、数値分散誤差によって FEM の解析で得られる固有周波数は、一般に、解析周波数が上がるほど高くなる傾向を示す。3.1 節の FEM のメッシュに関して説明したように、2000[Hz]程度までの FEM の解析誤差は、ほぼ数値分散誤差と考えて良いので、少なくとも 13 次モードのずれに関しては FEM の数値分散誤差が悪影響を与えているといえる。さらに、今回用いた FEM のメッシュは、250[Hz]までの数値分散誤差を考慮したに過ぎないので、さらに高い周波数領域における連成解析のためにはメッシュが粗すぎる（これを克服するためには、さらに詳細なメッシュが必要であり、計算コストや消費リソースの上昇に繋がる）。

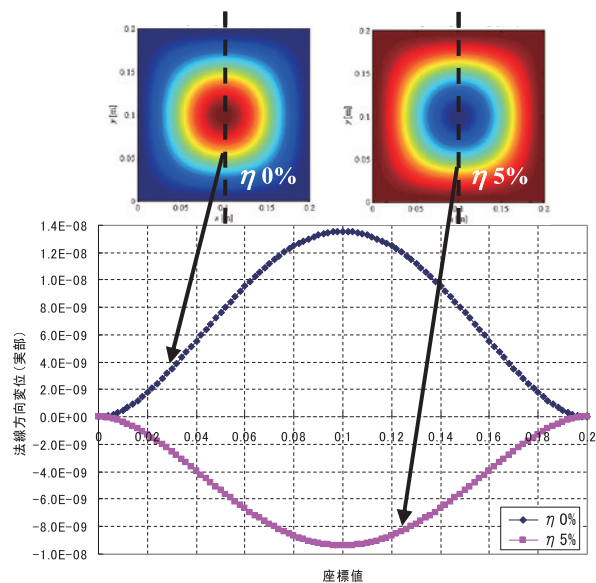


(a) 損失係数 0%

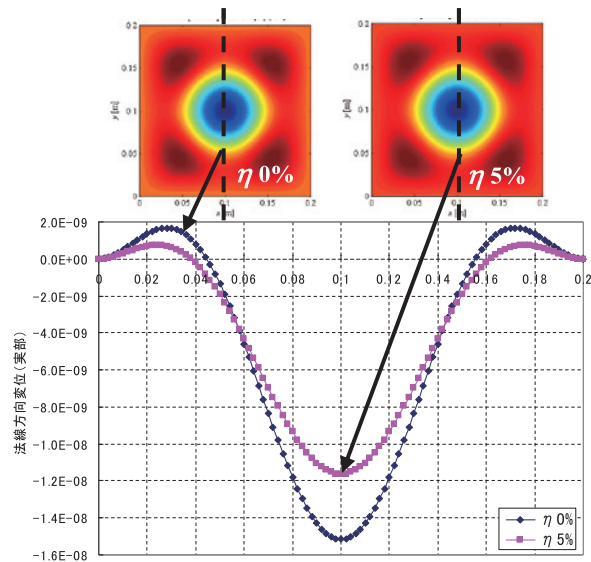


(b) 損失係数 5%

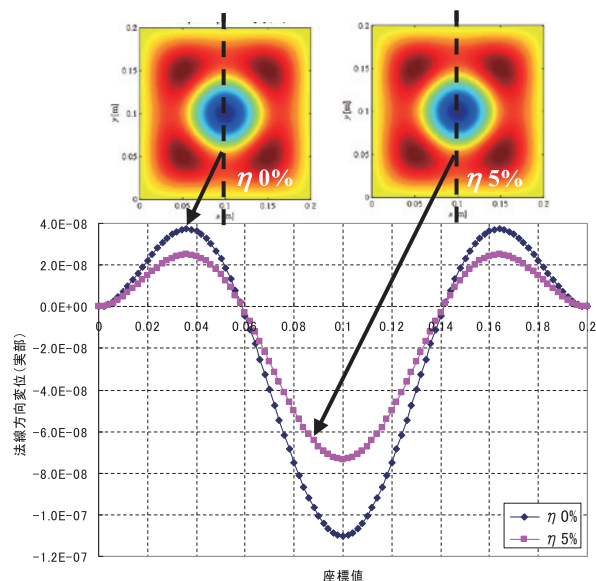
図 3.4 解析結果と実験結果の透過損失比較



(a) 周波数 220Hz



(b) 周波数 700Hz



(c) 周波数 820Hz

図 3.5 弾性板の法線方向変位

#### 4. まとめ

3D WBM 解析コードを検証するために、音響透過問題に対して、WBM の解析結果と、信頼性が高い (ただし、高い周波数領域では計算コストの大きい) FEM の解析結果、及び、実験結果との比較を行なった。TL の比較から、実験と両解析結果に同様の傾向を示すことが分かったので、3D WBM の妥当性が確認された。ただし、高い周波数領域において WBM と FEM の解析結果を比較すると、TL が低下する周波数にずれが生じている。このとき、WBM が構造の共振に起因する現象を正確にとらえているのに対し、FEM の解析結果は、数値分散誤差によって汚染されていることが分かった (本研究で用いたメッシュでは、2000[Hz]以上になると補間誤差も含まれるが、少なくとも 2000[Hz]あたりまでは、数値分散誤差のみの影響である)。この点から、数値分散誤差を本質的に含まない WBM は、特に高い周波数の解析における解析精度において、メッシュの切り方が解析結果に影響する FEM よりも安全で信頼性が高いといえる。

今後は、吸音材表面の比音響インピーダンス及び弾性板の損失係数を実験で同定し、これらを解析に反映させ、更に詳細な検証を進める予定である。また、WBM の FEM に対する優位性を示すためには、さらに計算速度や必要な計算リソースについても比較する必要がある。解析解への収束速度は、FEM よりも WBM のほうが優っていることは指摘されているものの、ほぼ完全に最適化されている商用の FEM コードと計算速度等を比較するためには、インハウスの WBM コードもさらにチューニングを進めなければならない。

#### 参考文献

- 1) Pluymers B., Van Hal B., Vandepitte D., and Desmet W., Trefftz-based methods for time-harmonic acoustics, *Archives of Computational Methods in Engineering*, DOI: 10.1007/s11831-007-9010-x, pp.343-381, 2007.
- 2) Ihlenburg, F. and Babuska, I., Finite Element Solution of the Helmholtz Equation with High Wave Number Part I: The h-version of the FEM, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.30, pp.9-37, 1995.
- 3) 高橋 孝, 村上桂一, 青山剛史, 相曽秀昭, 音響振動解析のための数値計算法に関する研究, JAXA-RR-07-012, 2008.
- 4) 古賀 豊, ハニカムパネルの音響透過特性に関する研究, 2008 年度名古屋大学修士論文.
- 5) 金田英和, 高橋 孝, 村上桂一, 橋本 敦, 青山剛史, 古賀 豊, 宮 信大, Ibrahim, M. K., 森 浩一, 中村佳朗, フェアリングの音響透過に関する数値解析と実験の基礎的検討, 第 52 回宇宙科学技術連合講演会, 2008, 1D09(CD-ROM).
- 6) Beranek, L. L. and Sleeper, Jr., H. P., The Design and Construction of Anechoic Chambers, *The Journal of The Acoustical Society of America*, Vol. 18, No.1, pp.140-150, 1946.
- 7) 吉川昭吉郎, 渡辺真吾, 梶浦英男, 村上正之, 簡易無響室の吸音構造に関する検討, 日本音響学会誌, 第 24 巻, 第 6



号, 1968.

- 8) Biesel, V. B. and Cunefare, K. A., A Test System for Free-Field Qualification of Anechoic Chambers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 5, pp.22-26, 2003.
- 9) Fahy, F. J. and Gardonio, P., *Sound and Structural Vibration* (2<sup>nd</sup> ed.), Academic Press, 2007.

### 補遺 A 3 次元内部定常音響構造連成問題に関する波動ベース法の定式化

本補遺では、2 次元（以下、2D）内部定常音響構造連成問題に関する波動ベース法（以下、WBM）の定式化を、3 次元（以下、3D）問題に拡張した定式化を示す。このとき、板は薄い平板に限定するが、キャビティの境界面は曲面である場合も考える。

#### A1 問題設定

本章では、3D 内部定常音響構造連成問題における問題設定について説明する。

##### A1.1 幾何モデル

本節では、3D 内部定常音響構造連成 WBM の定式化の準備段階として、主に幾何学（運動学）的な定式化を示す。

###### A1.1.1 音響キャビティの幾何モデル

図 A.1 は、2 つの凸のキャビティ  $\Omega^{(\alpha)}$  と  $\Omega^{(\beta)}$  から成る連成系の例を示している。それぞれのキャビティは、流体で満たされており、いくつかの種類の境界面（ $\Omega^{(\alpha)}$  に関して、 $\Gamma_p^{(\alpha)}$ ,  $\Gamma_v^{(\alpha)}$ ,  $\Gamma_z^{(\alpha)}$ ,  $\Gamma_s^{(\alpha)}$ ,  $\Gamma_c^{(\alpha)}$ ）（A1.3-A1.5 節で説明する）で囲まれている。

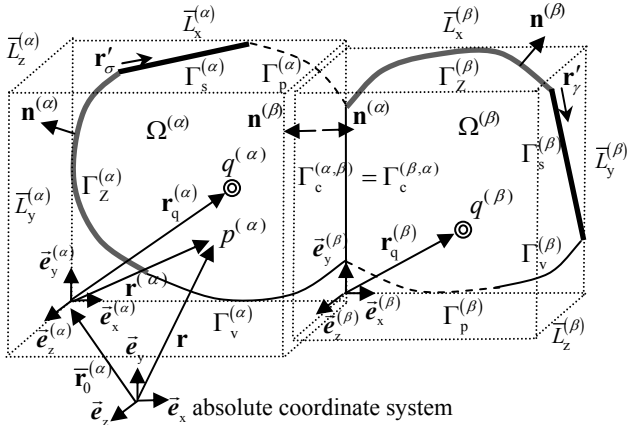


図 A.1 3次元内部音響振動連成モデル

まず、A2.1 節において述べる WBM の波動関数の性質から、このキャビティ領域が、重なり合わない  $n_\Omega$  個の凸部分領域に分割されていると一般化して考える。そして、 $\alpha = 1, \dots, n_\Omega$  で番号付けされた 1 つの凸部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  を考える。そして、簡単のため、各凸部分領域は、同じ種類の流体（密度  $\rho$ 、音速  $c$ ）で満たされているとする（流体の種類をキャビティごとに変えることは容易）。このとき、唯一存在する絶対座標系  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ （正規直交な右手系を成す単位ベクトルの組）とは別に、各  $\Omega^{(\alpha)}$  に局所座標系  $\{\vec{e}_x^{(\alpha)}, \vec{e}_y^{(\alpha)}, \vec{e}_z^{(\alpha)}\}$ （絶対座標系と同様）を設定する。

このとき、一般に、空間において同じ位置を示すベクトルの絶対成分（絶対座標系における成分列で、以下、絶対位置とよぶ） $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ （ $T$  は、行列やベクトルの転置を表す演算子）と、 $\Omega^{(\alpha)}$  における局所成分（局所座標系における成分列で、以下、局所位置とよぶ） $\mathbf{r}^{(\alpha)} = [x^{(\alpha)} \ y^{(\alpha)} \ z^{(\alpha)}]^T$  との間には、次の関係があるとする。

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}_0^{(\alpha)} + \bar{\mathbf{C}}^{(\alpha)} \mathbf{r}^{(\alpha)} \quad (\text{A1.1})$$

ここで、 $\bar{\mathbf{r}}_0^{(\alpha)} = [\bar{x}_0^{(\alpha)} \ \bar{y}_0^{(\alpha)} \ \bar{z}_0^{(\alpha)}]^T$  は、絶対座標系の原点からみた局所座標系の原点位置を表す絶対位置ベクトルであり、 $\bar{\mathbf{C}}^{(\alpha)}$  は、それら座標系間の相対姿勢を表す  $3 \times 3$  正規直交行列（方向余弦行列）である。そして、式(A1.1)を用いて  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$  から  $\mathbf{r}$  へ変換することを、簡単に  $\mathbf{r}(\mathbf{r}^{(\alpha)})$ 、またその逆を  $\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$  と書くことにする。

さらに、 $\Gamma_a^{(\alpha)}$  を  $\Omega^{(\alpha)}$  の全境界面とすると、 $\mathbf{n}^{(\alpha)} = [n_x^{(\alpha)} \ n_y^{(\alpha)} \ n_z^{(\alpha)}]^T$  は、 $\Gamma_a^{(\alpha)}$  上の法線ベクトルの局所座標系成分であり、キャビティの外側を正方向とする。

一方、外部点音源  $q^{(\alpha)}$ （単位体積あたりの音源強さ  $[1/s]$ ）を、 $\Omega^{(\alpha)}$  内の局所位置  $\bar{\mathbf{r}}_q^{(\alpha)} = [\bar{x}_q^{(\alpha)} \ \bar{y}_q^{(\alpha)} \ \bar{z}_q^{(\alpha)}]^T$  に置く。簡単のため、音源は各部分領域に 1 つずつ存在するとする（複数個への拡張は容易）。ただし、ここでは定常（周波数）解析を考えているので、この外部励振源は、角周波数  $\omega$  の時間調和関数であると仮定する。そして、 $\Omega^{(\alpha)}$  は、大きさ  $\bar{L}_x^{(\alpha)} \times \bar{L}_y^{(\alpha)} \times \bar{L}_z^{(\alpha)}$  を有する直方体領域で外接される。この、外接直方体領域は、A2.1 節で、波動関数を定義する際に用いる。

###### A1.1.2 音響境界面の幾何モデル

次に、凸部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  の各境界面を考える。ここでは、例として、事前に圧力値が指定される境界面  $\Gamma_p^{(\alpha)}$ （以下、圧力境界面と呼ぶ）のみを考えることにする。その他の種類の音響境界面についても同様で、記号も、ここで用いる添字の  $p$  を、 $\Gamma_v^{(\alpha)}$  に対しては  $v$ 、 $\Gamma_z^{(\alpha)}$  に対しては  $z$  に変えるだけとする。また、圧力境界面  $\Gamma_p^{(\alpha)}$  は、一般に、部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  の適当な境界面に複数個離れて存在する。その 1 つを  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  とし、 $i = 1, \dots, n_p^{(\alpha)}$  だけあるとする。つまり、 $\Gamma_p^{(\alpha)} = \bigcup_{i=1}^{n_p^{(\alpha)}} \Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  と表せるとする。

###### 一般の平面形状の場合

境界面  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  に対して、図 A.2 に示すように、それを外接する大きさ  $\bar{L}_{xpi}^{(\alpha)} \times \bar{L}_{ypi}^{(\alpha)}$  の矩形と、2D 境界面局所座標系

$\{\vec{e}_{xpi}^{(\alpha)}, \vec{e}_{ypi}^{(\alpha)}\}$  を設定する（簡単のため、外接矩形の左下の角に原点を設定しているが、任意の位置でも容易に拡張できる）。さらに、境界  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  が平面形状である場合には、図 A.2 のように（WBM における数値積分のため、便宜的に）2つの関数  $y = f_{1pi}^{(\alpha)}(x)$  と  $y = f_{2pi}^{(\alpha)}(x)$  ( $0 \leq x \leq \bar{L}_{xpi}^{(\alpha)}$ ) を用いて表されるとする。よって、ある関数  $g(\mathbf{r}^{(\alpha)})$  に関する  $\Gamma_p^{(\alpha)}$  にわたる面積分は、

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}) d\Gamma \\
 &= \sum_{i=1}^{n_p^{(\alpha)}} \int_0^{\bar{L}_{xpi}^{(\alpha)}} \left[ \int_{f_{1pi}^{(\alpha)}(\xi)}^{f_{2pi}^{(\alpha)}(\xi)} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\xi, \eta)) d\eta \right] d\xi \quad (A1.2)
 \end{aligned}$$

のように、音響部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  にある複数の圧力境界  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  ( $i = 1, \dots, n_p^{(\alpha)}$ ) の和とし、さらに境界積分は2重積分の形式を利用することになる。

このとき、 $\mathbf{r}_{pi}^{(\alpha)} = [x_{pi}^{(\alpha)} \ y_{pi}^{(\alpha)}]^T$  を、境界面  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  の局所座標系からみた  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  上の局所位置として、部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  における局所位置  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$  との間に以下の関係があるとする。

$$\mathbf{r}^{(\alpha)} = \bar{\mathbf{r}}_{0pi}^{(\alpha)} + \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} \mathbf{r}_{pi}^{(\alpha)} \quad (A1.3a)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{xxpi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{yxpi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{zpxi}^{(\alpha)} \\ \bar{c}_{xypi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{yyi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{zyi}^{(\alpha)} \end{bmatrix}^T \quad (A1.3b)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{r}}_{0pi}^{(\alpha)} = [\bar{x}_{0pi}^{(\alpha)} \ \bar{y}_{0pi}^{(\alpha)} \ \bar{z}_{0pi}^{(\alpha)}]^T$  は、 $\Omega^{(\alpha)}$  における局所座標系の原点からみた  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  の局所座標系の原点位置を表すベクトルである。そして、式(A1.2a)を用いて  $\mathbf{r}_{pi}^{(\alpha)}$  から  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$  へ変換することを、簡単に  $\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_{pi}^{(\alpha)})$ 、またその逆を  $\mathbf{r}_{pi}^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)})$  と書く。さらに、 $\mathbf{r}_{pi}^{(\alpha)}$  から  $\mathbf{r}$  へ変換することを  $\mathbf{r}(\mathbf{r}_{pi}^{(\alpha)})$ 、その逆を  $\mathbf{r}_{pi}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$  と書くことにする。

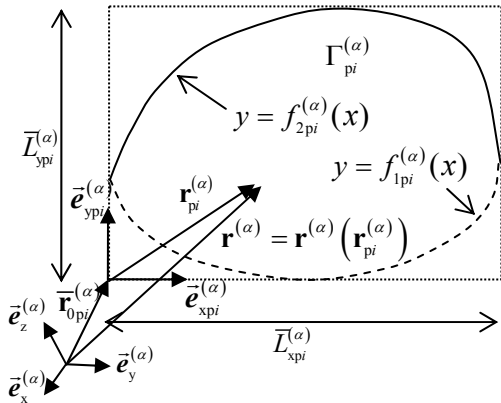


図 A.2: 圧力境界の形状を表す関数

また、2つの異なるキャビティ  $\Omega^{(\alpha)}$  と  $\Omega^{(\beta)}$  が共有するインターフェイス（以下、I/F）面  $\Gamma_c^{(\alpha, \beta)}$ （同じ面を、 $\Omega^{(\alpha)}$  からみた場合  $\Gamma_c^{(\alpha, \beta)}$  と書き、 $\Omega^{(\beta)}$  からみた場合  $\Gamma_c^{(\beta, \alpha)}$  と書く）においては、以下の点に注意する必要がある（この境界面の詳細については、A1.4 節参照）。つまり、ここでは簡単のため、それぞれ  $\Gamma_c^{(\alpha, \beta)}$  と  $\Gamma_c^{(\beta, \alpha)}$  上で定義される 2D 境界面局所座標系  $\{\vec{e}_{xc}^{(\alpha, \beta)}, \vec{e}_{yc}^{(\alpha, \beta)}\}$  と  $\{\vec{e}_{xc}^{(\beta, \alpha)}, \vec{e}_{yc}^{(\beta, \alpha)}\}$  は、原点も姿勢も一致する（共通の座標系を用いる）ものとして定式化する。

#### 円形状の場合

以下で述べるように、境界面として円筒側面、円錐側面、球面の一部が導入されると、必然的に円形状の境界面が現れる。この特別な場合に対しては、境界面局所座標系  $\{\vec{e}_{xpi}^{(\alpha)}, \vec{e}_{ypi}^{(\alpha)}\}$  の原点を円の中心に設定するのが自然であろう。このとき、積分式(A1.2)は、極座標ではなく直交座標を用いれば式(A1.2)と同様に以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}) d\Gamma \\
 &= \sum_{i=1}^{n_p^{(\alpha)}} \int_{-\bar{r}}^{\bar{r}} \left[ \int_{-\sqrt{\bar{r}^2 - \xi^2}}^{\sqrt{\bar{r}^2 - \xi^2}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\xi, \eta)) d\eta \right] d\xi \quad (A1.4)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{r}$  は、円の半径である。

#### 一般の曲面形状の場合

一般に、境界面  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  が、図 A.3 に示すような任意の曲面の場合、必要に応じて適当な 3D 境界面局所座標系  $\{\vec{e}_{xpi}^{(\alpha)}, \vec{e}_{ypi}^{(\alpha)}, \vec{e}_{zpi}^{(\alpha)}\}$  を設定し、ある曲線座標  $\xi_{pi}^{(\alpha)}$  を用いて、

$$\mathbf{r}^{(\alpha)} = \bar{\mathbf{r}}_{0pi}^{(\alpha)} + \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} f_{xpi}^{(\alpha)}(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \\ f_{ypi}^{(\alpha)}(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \\ f_{zpi}^{(\alpha)}(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(\alpha)} \in \Gamma_{pi}^{(\alpha)} \quad (A1.5)$$

という関係が得られたとする。このとき、3D 的に、

$$\xi_{pi}^{(\alpha)} = [\xi_{pi}^{(\alpha)} \ \eta_{pi}^{(\alpha)} \ \zeta_{pi}^{(\alpha)}]^T \quad (A1.6a)$$

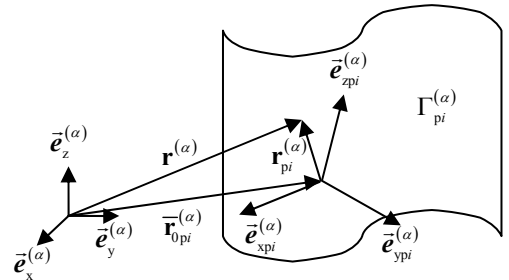


図 A.3: 曲面で表された境界面

$$\bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{xspi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{xypi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{xzpi}^{(\alpha)} \\ \bar{c}_{yspi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{yypi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{yzpi}^{(\alpha)} \\ \bar{c}_{zspi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{zypi}^{(\alpha)} & \bar{c}_{zzpi}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (A1.6b)$$

となることに注意したい。そして、 $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  は、曲線座標  $\xi_{pi}^{(\alpha)}$  の 1 成分、例えば  $\xi_{pi}^{(\alpha)}$  を一定値  $\bar{\xi}_{pi}^{(\alpha)}$  とした曲面であり、 $\bar{\xi}_{1pi}^{(\alpha)} \leq \xi_{pi}^{(\alpha)} \leq \bar{\xi}_{2pi}^{(\alpha)}$ 、及び、 $\bar{\eta}_{1pi}^{(\alpha)} \leq \eta_{pi}^{(\alpha)} \leq \bar{\eta}_{2pi}^{(\alpha)}$  の範囲で考慮したい表面形状が表されるとする。このとき、ある関数  $g(\mathbf{r}^{(\alpha)})$  に関する  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  にわたる面積分は、

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{pi}^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}) d\Gamma \\ &= \sum_{i=1}^{n_p^{(\alpha)}} \int_{\bar{\xi}_{1pi}^{(\alpha)}}^{\bar{\xi}_{2pi}^{(\alpha)}} \left[ \int_{\bar{\eta}_{1pi}^{(\alpha)}}^{\bar{\eta}_{2pi}^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\xi_{pi}^{(\alpha)}, \eta_{pi}^{(\alpha)}, \bar{\xi}_{pi}^{(\alpha)}) \right. \\ & \quad \left. \times \left\| \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \xi_{pi}^{(\alpha)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \eta_{pi}^{(\alpha)}} \right\| d\eta_{pi}^{(\alpha)} \right] d\xi_{pi}^{(\alpha)} \quad (A1.7) \end{aligned}$$

と書ける（以下、 $\bar{\xi}_{pi}^{(\alpha)}$  は省略）。また、単位法線ベクトルの部分領域局所座標系での成分  $\mathbf{n}^{(\alpha)}$  は、

$$\mathbf{n}^{(\alpha)} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \eta_{pi}^{(\alpha)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \xi_{pi}^{(\alpha)}} \right) / \left\| \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \eta_{pi}^{(\alpha)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \xi_{pi}^{(\alpha)}} \right\| \quad (A1.8)$$

（あるいは、キャビティの外向きを正と定義していることに注意して、その逆符号）と表せる。

#### 一般の回転体表面の場合

例えば、 $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  が、図 A.4 に示すように、 $\bar{\mathbf{e}}_{xpi}^{(\alpha)} - \bar{\mathbf{e}}_{zpi}^{(\alpha)}$  平面において、

$$x_{pi}^{(\alpha)} = f(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \quad (A1.9a)$$

$$z_{pi}^{(\alpha)} = g(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \quad (A1.9b)$$

とパラメータ表示された曲線を  $\bar{\mathbf{e}}_{zpi}^{(\alpha)}$  まわりに回転してできた凸な回転体表面であるとする。このとき、 $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  は、ある範囲の  $\xi_{pi}^{(\alpha)}$  と  $\eta_{pi}^{(\alpha)}$  に対して、

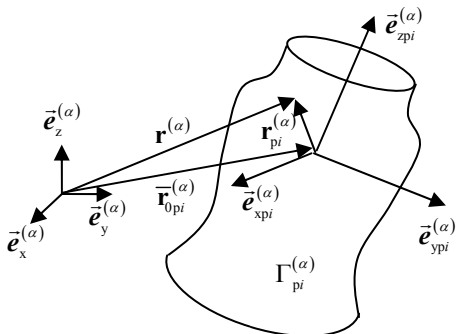


図 A.4: 回転体表面としての境界面（実際には凸形状）

$$\mathbf{r}^{(\alpha)} = \bar{\mathbf{r}}_{0pi}^{(\alpha)} + \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} f(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \cos(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ f(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \sin(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ g(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(\alpha)} \in \Gamma_{pi}^{(\alpha)} \quad (A1.10)$$

と表せる。よって、式(1.8)の法線ベクトル成分は、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(\alpha)} &= \frac{\bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)}}{\sqrt{(f'(\xi_{pi}^{(\alpha)}))^2 + (g'(\xi_{pi}^{(\alpha)}))^2}} \\ & \times \begin{bmatrix} g'(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \cos(\eta_{pi}^{(\alpha)}) & g'(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \sin(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ -f'(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \end{bmatrix}^T \quad (A1.11) \end{aligned}$$

（あるいは、その逆符号）と表せる。ここで、

$$f'(\xi_{pi}^{(\alpha)}) = \partial f(\xi_{pi}^{(\alpha)}) / \partial \xi_{pi}^{(\alpha)} \quad (A1.12a)$$

$$g'(\xi_{pi}^{(\alpha)}) = \partial g(\xi_{pi}^{(\alpha)}) / \partial \xi_{pi}^{(\alpha)} \quad (A1.12b)$$

とした。そして、式(A1.7)の積分において、対応するベクトル外積のノルムの部分は、

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \xi_{pi}^{(\alpha)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \eta_{pi}^{(\alpha)}} \right\| \\ &= |f(\xi_{pi}^{(\alpha)})| \left\| \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} -g'(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \cos(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ -g'(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \sin(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ f'(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \end{bmatrix} \right\| \\ &= |f(\xi_{pi}^{(\alpha)})| \sqrt{(f'(\xi_{pi}^{(\alpha)}))^2 + (g'(\xi_{pi}^{(\alpha)}))^2} \quad (A1.13) \end{aligned}$$

と書ける（ $\bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)}$  は正規直交行列ゆえ）。

#### 円筒側面の場合

回転体の特別な場合として、 $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  が、図 A.5 に示すような半径  $\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}$ （一定）の円筒側面の一部であるときを考える（高さは、適宜、積分範囲で表すことができる）。境界面局所座標系の原点は、円筒の中心軸（図 A.5 の  $\bar{\mathbf{e}}_{zpi}^{(\alpha)}$  軸）上の任意の点にあるとする。この円筒側面は、

$$x_{pi}^{(\alpha)} = \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \quad (A1.14a)$$

$$z_{pi}^{(\alpha)} = \xi_{pi}^{(\alpha)} \quad (A1.14b)$$

と表される直線の回転体表面と考えられるから、適当な範囲（実際の積分範囲となる）の  $\xi_{pi}^{(\alpha)}$ （高さ方向の長さ）と  $\eta_{pi}^{(\alpha)}$ （角度）を用いて、式(A1.10)より、

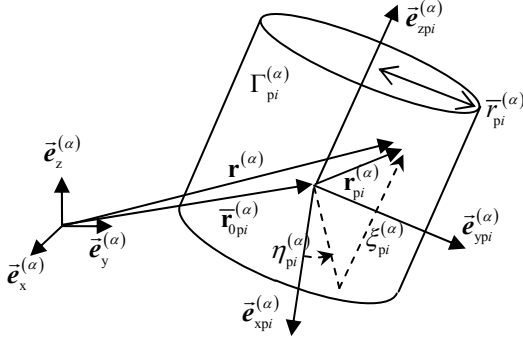


図 A.5: 円筒側面としての境界面

$$\mathbf{r}^{(\alpha)} = \bar{\mathbf{r}}_{0pi}^{(\alpha)} + \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \cos(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \sin(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ \xi_{pi}^{(\alpha)} \end{bmatrix}, \mathbf{r}^{(\alpha)} \in \Gamma_{pi}^{(\alpha)} \quad (\text{A1.15})$$

が成り立つ。よって、法線ベクトル成分は、式(A1.11)より、

$$\mathbf{n}^{(\alpha)} = \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} \cos(\eta_{pi}^{(\alpha)}) & \sin(\eta_{pi}^{(\alpha)}) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A1.16})$$

と書ける。そして、式(A1.7)の積分において、対応するベクトル外積のノルムの部分は、式(A1.13)より、

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \xi_{pi}^{(\alpha)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \eta_{pi}^{(\alpha)}} \right\| = \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \quad (\text{A1.17})$$

となる。つまり、式(A1.7)は、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{pi}^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}) d\Gamma \\ &= \sum_{i=1}^{n_{pi}^{(\alpha)}} \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \int_{\xi_{1pi}^{(\alpha)}}^{\xi_{2pi}^{(\alpha)}} \left[ \int_{\eta_{1pi}^{(\alpha)}}^{\eta_{2pi}^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\xi_{pi}^{(\alpha)}, \eta_{pi}^{(\alpha)})) d\eta_{pi}^{(\alpha)} \right] d\xi_{pi}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (\text{A1.18})$$

#### 円錐側面の場合

次に、 $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  が、図 A.6 に示すような底面の半径  $\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}$ 、高さ  $\bar{h}_{pi}^{(\alpha)}$  の円錐側面の一部である場合を考える。境界面局所座標系の原点は、円錐の中心軸（図 A.6 の  $\bar{\mathbf{e}}_{zpi}^{(\alpha)}$  軸）上の任意の点（底面から  $\bar{\mathbf{g}}_{pi}^{(\alpha)}$  の距離）にあるとする。このとき、円錐側面は、

$$x_{pi}^{(\alpha)} = \xi_{pi}^{(\alpha)} \quad (\text{A1.19a})$$

$$z_{pi}^{(\alpha)} = \bar{h}_{pi}^{(\alpha)} \left( 1 - \frac{\xi_{pi}^{(\alpha)}}{\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}} \right) - \bar{g}_{pi}^{(\alpha)} \quad (\text{A1.19b})$$

と表される直線の回転体表面と考えられるから、適当な範囲の  $\xi_{pi}^{(\alpha)}$ （半径方向の長さ）と  $\eta_{pi}^{(\alpha)}$ （角度）を用いて、式(A1.10)より、

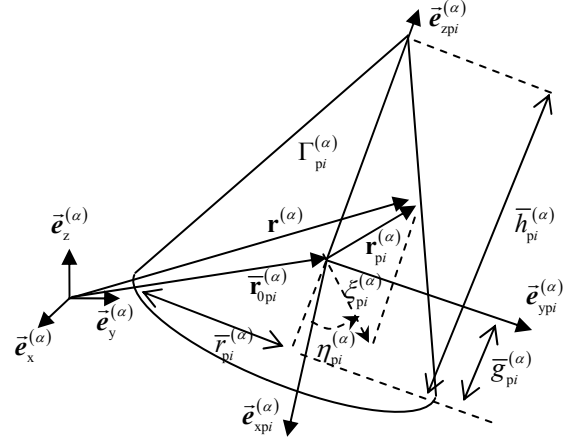


図 A.6: 円錐側面としての境界面

$$\mathbf{r}^{(\alpha)} = \bar{\mathbf{r}}_{0pi}^{(\alpha)} + \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} \xi_{pi}^{(\alpha)} \cos(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ \xi_{pi}^{(\alpha)} \sin(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ \bar{h}_{pi}^{(\alpha)} \left( 1 - \xi_{pi}^{(\alpha)} / \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \right) - \bar{g}_{pi}^{(\alpha)} \end{bmatrix}, \mathbf{r}^{(\alpha)} \in \Gamma_{pi}^{(\alpha)} \quad (\text{A1.20})$$

が成り立つ。このとき、円錐と同じく高さ方向に  $\xi_{pi}^{(\alpha)}$  を取ったほうが自然な入力ができる場合には、高さ方向の積分範囲を  $[\xi_{1pi}^{(\alpha)}, \xi_{2pi}^{(\alpha)}]$  として入力したら、プログラム内部で、

$$\bar{\xi}_{1pi}^{(\alpha)} = \frac{\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}}{\bar{h}_{pi}^{(\alpha)}} \left( \bar{h}_{pi}^{(\alpha)} - \bar{g}_{pi}^{(\alpha)} - \bar{\xi}_{2pi}^{(\alpha)} \right) \quad (\text{A1.21a})$$

$$\bar{\xi}_{2pi}^{(\alpha)} = \frac{\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}}{\bar{h}_{pi}^{(\alpha)}} \left( \bar{h}_{pi}^{(\alpha)} - \bar{g}_{pi}^{(\alpha)} - \bar{\xi}_{1pi}^{(\alpha)} \right) \quad (\text{A1.21b})$$

によって単に半径方向の積分範囲  $[\bar{\xi}_{1pi}^{(\alpha)}, \bar{\xi}_{2pi}^{(\alpha)}]$  に変換しさえすればよい。また、法線ベクトル成分は、式(A1.11)（の逆符号）より、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(\alpha)} &= \frac{\bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\bar{h}_{pi}^{(\alpha)}}{\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}} \right)^2}} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{\bar{h}_{pi}^{(\alpha)}}{\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}} \cos(\eta_{pi}^{(\alpha)}) & \frac{\bar{h}_{pi}^{(\alpha)}}{\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}} \sin(\eta_{pi}^{(\alpha)}) & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{A1.22})$$

と書ける。そして、式(A1.7)の積分において、対応するベクトル外積のノルムの部分は、式(A1.13)より、

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \xi_{pi}^{(\alpha)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \eta_{pi}^{(\alpha)}} \right\| = \xi_{pi}^{(\alpha)} \sqrt{1 + \left( \frac{\bar{h}_{pi}^{(\alpha)}}{\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}} \right)^2} \quad (\text{A1.23})$$

となる ( $\xi_{pi}^{(\alpha)} \geq 0$ )。つまり、式(A1.7)は、以下のように書ける ( $\xi_{pi}^{(\alpha)}$  を半径方向に取ったのは、以下の積分計算がより単純であることも1つの理由である)。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{pi}^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}) d\Gamma \\ &= \sum_{i=1}^{n_p^{(\alpha)}} \sqrt{1 + \left( \frac{\bar{h}_{pi}^{(\alpha)}}{\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}} \right)^2} \int_{\xi_{1pi}^{(\alpha)}}^{\xi_{2pi}^{(\alpha)}} \left[ \int_{\eta_{1pi}^{(\alpha)}}^{\eta_{2pi}^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\xi_{pi}^{(\alpha)}, \eta_{pi}^{(\alpha)})) \right. \\ & \quad \left. \times \xi_{pi}^{(\alpha)} d\eta_{pi}^{(\alpha)} \right] d\xi_{pi}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (A1.24)$$

#### 球面の場合

さらに、 $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  が、図 A.8 に示すような半径  $\bar{r}_{pi}^{(\alpha)}$  の球面の一部である場合を考える。境界面局所座標系の原点は、球の中心にあるとする。このとき、球面は、

$$x_{pi}^{(\alpha)} = \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \sin(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \quad (A1.25a)$$

$$z_{pi}^{(\alpha)} = \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \cos(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \quad (A1.25b)$$

と表される曲線の回転体と考えられるから、適当な範囲の  $\xi_{pi}^{(\alpha)}$  (角度) と  $\eta_{pi}^{(\alpha)}$  (角度) を用いて、式(A1.10)より、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(\alpha)} &= \bar{\mathbf{r}}_{0pi}^{(\alpha)} + \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \sin(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \cos(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \sin(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \sin(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ \bar{r}_{pi}^{(\alpha)} \cos(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r}^{(\alpha)} &\in \Gamma_{pi}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (A1.26)$$

が成り立つ。よって、法線ベクトル成分は、式(A1.11)より、

$$\mathbf{n}^{(\alpha)} = \bar{\mathbf{C}}_{pi}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} \sin(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \cos(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ \sin(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \sin(\eta_{pi}^{(\alpha)}) \\ \cos(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \end{bmatrix} \quad (A1.27)$$

このとき、式(A1.7)の積分において、対応するベクトル外積のノルムの部分は、

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \xi_{pi}^{(\alpha)}} \times \frac{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}}{\partial \eta_{pi}^{(\alpha)}} \right\| = (\bar{r}_{pi}^{(\alpha)})^2 \sin(\xi_{pi}^{(\alpha)}) \quad (A1.28)$$

となる。つまり、式(A1.7)は、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{pi}^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}) d\Gamma \\ &= \sum_{i=1}^{n_p^{(\alpha)}} (\bar{r}_{pi}^{(\alpha)})^2 \int_{\xi_{1pi}^{(\alpha)}}^{\xi_{2pi}^{(\alpha)}} \left[ \int_{\eta_{1pi}^{(\alpha)}}^{\eta_{2pi}^{(\alpha)}} g(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\xi_{pi}^{(\alpha)}, \eta_{pi}^{(\alpha)})) \right. \\ & \quad \left. \times \sin(\xi_{pi}^{(\alpha)}) d\eta_{pi}^{(\alpha)} \right] d\xi_{pi}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (A1.29)$$

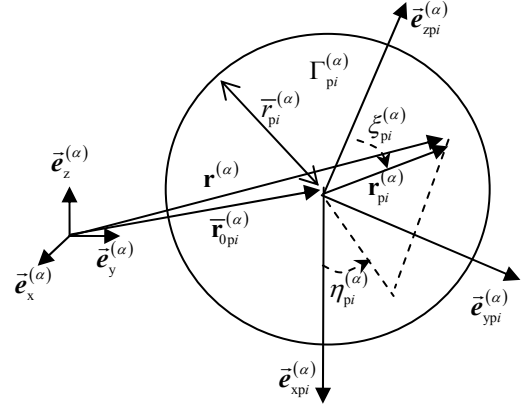


図 A.7: 球面としての境界面

#### A1.1.3 構造の幾何モデル

図 A.3 (または、図 A.4) に、 $\sigma$  で番号付けされた平板領域  $\Omega_\sigma$ 、その境界  $\Gamma_\sigma$  (異なる境界  $\Gamma_{w0\sigma}$ ,  $\Gamma_{mQ\sigma}$ ,  $\Gamma_{wm\sigma}$  から成り、詳細は、A1.5 節で説明する)、及び、板上の局所座標系  $\{\bar{\mathbf{e}}'_{x\sigma}, \bar{\mathbf{e}}'_{y\sigma}\}$  を示す。ここで、平板領域  $\Omega_\sigma$  は、部分音響領域  $\Omega^{(\alpha)}$  にとっての構造境界  $\Gamma_{s\sigma}^{(\alpha)}$  とも考えられるとする。

このとき、板番号  $\sigma$  は、キャビティの部分領域番号  $\alpha$  とは独立に割り振られているものとし、 $\sigma = 1, \dots, n_\Sigma$  (もちろん、 $n_\Sigma = 0$  であれば非連成音響問題となり、 $n_\Sigma \neq 0$  かつ  $n_\Omega = 0$  ならば非連成構造問題となる) であると一般化して考える。さらには、一般に、キャビティ同様、板も凸部分領域に分割する必要があるが、ここでは簡単のため、各板はあらかじめ凸形状であるために部分領域に分割する必要はないと仮定する。また、図中の外接矩形は、後に構造波動関数を定義するために必要となり、その大きさは  $\bar{\mathbf{e}}'_{x\sigma}$  と  $\bar{\mathbf{e}}'_{y\sigma}$  方向にそれぞれ、 $\bar{L}'_{x\sigma}$  と  $\bar{L}'_{y\sigma}$  であるとする。このとき、平板領域  $\Omega_\sigma$  がキャビティ  $\Omega^{(\alpha)}$  と接する境界を  $\Gamma_{s\sigma}^{(\alpha)}$  と書けば、一般に、キャビティ  $\Omega^{(\alpha)}$  の構造境界は  $\Gamma_s^{(\alpha)} = \bigcup_{\sigma=1}^{n_\Sigma} \Gamma_{s\sigma}^{(\alpha)}$  のように書ける。また、境界  $\Gamma_\sigma$  の形状が、図 A.8 のように 2 つの関数  $y = f_{1\sigma}(x)$  と  $y = f_{2\sigma}(x)$  ( $0 \leq x \leq \bar{L}'_{x\sigma}$ ) を用いて表されるとする。

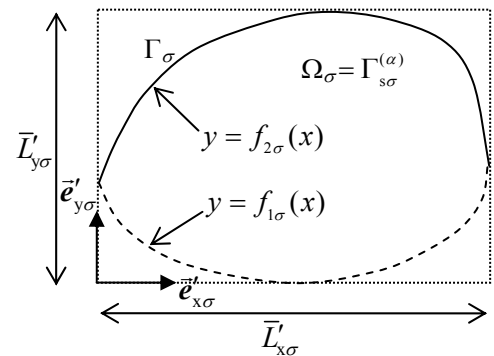


図 A.8: 平板の境界形状を表す関数



いま、 $\mathbf{r}'_\sigma = [x'_\sigma \ y'_\sigma]^T$  は、板の局所座標系からみた板上の局所位置ベクトルであり、キャビティ  $\Omega^{(\alpha)}$  における局所座標  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$  との間には以下の関係があるとする（図 A.9 参照）。

$$\mathbf{r}^{(\alpha)} = \bar{\mathbf{r}}_{0\sigma}^{(\alpha)} + \bar{\mathbf{C}}_\sigma^{(\alpha)} \mathbf{r}'_\sigma \quad (\text{A1.30a})$$

$$\bar{\mathbf{C}}_\sigma^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} & \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} & \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} \\ \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} & \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} & \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A1.30b})$$

ここで、 $\bar{\mathbf{r}}_{0\sigma}^{(\alpha)} = [\bar{x}_{0\sigma}^{(\alpha)} \ \bar{y}_{0\sigma}^{(\alpha)} \ \bar{z}_{0\sigma}^{(\alpha)}]^T$  は、 $\Omega^{(\alpha)}$  における局所座標系の原点からみた板の局所座標系の原点位置を表すベクトルである。そして、式(A1.2a)を用いて  $\mathbf{r}'_\sigma$  から  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$  へ変換することを、簡単に  $\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)$ 、またその逆を  $\mathbf{r}'_\sigma(\mathbf{r}^{(\alpha)})$  と書く。さらに、 $\mathbf{r}'_\sigma$  から  $\mathbf{r}$  へ変換することを  $\mathbf{r}(\mathbf{r}'_\sigma)$ 、その逆を  $\mathbf{r}'_\sigma(\mathbf{r})$  と書くことにする。

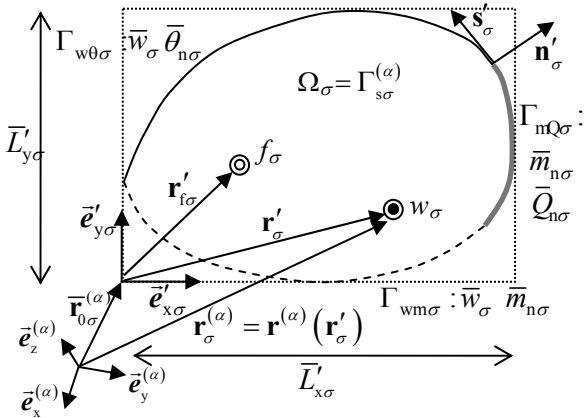


図 A.9: 平板モデル

また、外力  $f_\sigma$  を、平板  $\Omega_\sigma$  上の局所位置  $\bar{\mathbf{r}}'_{f\sigma} = [\bar{x}'_{f\sigma} \ \bar{y}'_{f\sigma}]^T$  に作用させる。ただし、ここでも簡単のため、この平板に働く外力は各平板において 1 箇所だけ（複数箇所への拡張は容易）であるとし、外部音源と同様、角周波数  $\omega$  の時間調和関数であると仮定する。

#### A1.1.4 構造境界の幾何モデル

一方、板の周囲に課される BC についても考える必要がある。その場合の板の境界形状は、1 次元曲線と考えられる。そして、例えば、平板領域  $\Omega_\sigma$  のある境界  $\Gamma_{w0\sigma}$  の形状が、1 個のスカラーのパラメータ  $s$  を用いて  $\mathbf{r}'_\sigma = \mathbf{r}'_\sigma(s)$  ( $\bar{l}_{w0\sigma}^L \leq s \leq \bar{l}_{w0\sigma}^H$ ,  $0 \leq \bar{l}_{w0\sigma}^L, \bar{l}_{w0\sigma}^H \leq \bar{L}_{x\sigma}$ ,  $\mathbf{r}'_\sigma \in \Gamma_{w0\sigma}$ ) で表されるものとする。他の種類の境界についても同様である。

## A1.2 支配方程式

### A1.2.1 音響の支配方程式

部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  の絶対位置  $\mathbf{r}$  における定常音圧  $p^{(\alpha)}(\mathbf{r})$  は、ヘルムホルツ方程式(Helmholtz equations)

$$\nabla^2 p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) + k^2 p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -j\rho\omega q^{(\alpha)}\delta(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}), \bar{\mathbf{r}}_q^{(\alpha)}) \quad (\text{A1.31})$$

により支配される。ここで、 $j = \sqrt{-1}$  であり、 $k (= \omega/c)$  は音響波数、 $\delta$  はディラックのデルタ関数であり、

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z} \right]^T \quad (\text{A1.32a})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A1.32b})$$

である。 $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$  は、それぞれ、 $\bar{\mathbf{e}}_x, \bar{\mathbf{e}}_y, \bar{\mathbf{e}}_z$  方向の空間偏微分を表す。

### A1.2.2 構造の支配方程式

一方、板  $\sigma$  の局所位置  $\mathbf{r}'_\sigma$  における定常法線方向変位  $w_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma)$  は、次式の薄い平板の面外曲げの方程式であるキルヒホッフ方程式(Kirchhoff equations)により支配される。

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma'^4 w_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma) - k_{b\sigma}^4 w_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma) \\ = \frac{f_\sigma}{D_\sigma} \delta(\mathbf{r}'_\sigma, \bar{\mathbf{r}}'_{f\sigma}) + \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \bar{\zeta}_\sigma^{(\alpha)} \frac{p^{(\alpha)}(\mathbf{r}(\mathbf{r}'_\sigma))}{D_\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A1.33})$$

ここで、

$$\nabla'_\sigma = \left[ \frac{\partial}{\partial x'_\sigma} \ \frac{\partial}{\partial y'_\sigma} \right]^T \quad (\text{A1.34a})$$

$$\nabla_\sigma'^4 = \frac{\partial^4}{\partial x_\sigma'^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_\sigma'^2 \partial y_\sigma'^2} + \frac{\partial^4}{\partial y_\sigma'^4} \quad (\text{A1.34b})$$

である。 $\partial/\partial x'_\sigma$ ,  $\partial/\partial y'_\sigma$  は、それぞれ、 $\bar{\mathbf{e}}'_{x\sigma}, \bar{\mathbf{e}}'_{y\sigma}$  方向の空間偏微分を表す。また、 $k_{b\sigma}$  は構造波数、 $D_\sigma$  は曲げ剛性であり、 $\bar{t}_\sigma$  を板厚、 $\rho_\sigma$  を体積密度、 $E_\sigma$  を（実数の）縦弾性係数、 $\nu_\sigma$  をポアソン比、 $\eta_\sigma$  を損失係数(loss factor)として、それぞれ次のように定義される。

$$k_{b\sigma} = \sqrt[4]{\frac{\rho_\sigma \bar{t}_\sigma \omega^2}{D_\sigma}} \quad (\text{A1.35a})$$

$$D_\sigma = \frac{E_\sigma \bar{t}_\sigma^3 (1 + j\eta_\sigma)}{12(1 - \nu_\sigma^2)} = \frac{E_\sigma^* \bar{t}_\sigma^3}{12(1 - \nu_\sigma^2)} \quad (\text{A1.35b})$$

このとき、実数の縦弾性係数  $E_\sigma$  を、

$$E_{\sigma}^*(\omega) = E_{\sigma}(1 + j\eta_{\sigma}(\omega)) \quad (\text{A1.36})$$

のように複素数と考えることによって構造の減衰を表現している。 $\eta_{\sigma}$  は、一般に 1[%]程度であるが、周波数依存でもあることに注意したい。さらに、 $\bar{\zeta}_{\sigma}^{(a)}$  は、板 $\sigma$ 表面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}_{\sigma} = [n_{x\sigma} \ n_{y\sigma} \ n_{z\sigma}]^T$  ( $\Omega^{(a)}$ の局所座標系における成分)としたときに、 $\mathbf{n}_{\sigma}^T \mathbf{n}^{(a)}$  で定義される。つまり、 $\mathbf{n}_{\sigma}$  と  $\mathbf{n}^{(a)}$  が一致するとき+1、反対方向のとき-1、それ以外は0とする。

薄板の場合は、低周波数と中間周波数領域においてのみ音響振動連成効果が重要となる。この場合、板の曲げ運動におけるせん断変形と回転慣性力の効果が無視できるので、より一般的なミンドリン板理論の代わりにキルヒホッフ板理論が使える。また、板の面内振動は、一般に面外振動に比べて音響振動連成効果がみられないので無視できる(空気の粘性を考慮しないため)。さらに、より一般的な分布力による励振は、離散的で直線的な力による励振の重ね合わせと考えられるから、このような力に制限している点も一般性を失っていない。

### A1.3 音響境界条件

部分領域 $\Omega^{(a)}$ の音響境界 $\Gamma_a^{(a)}$ は、5種類の異なる条件が課される境界面から成り、以下のように書ける。

$$\Gamma_a^{(a)} = \Gamma_p^{(a)} \cup \Gamma_v^{(a)} \cup \Gamma_z^{(a)} \cup \Gamma_s^{(a)} \cup \Gamma_c^{(a)} \quad (\text{A1.37})$$

ここで、境界 $\Gamma_p^{(a)}$ 、 $\Gamma_v^{(a)}$ 、 $\Gamma_z^{(a)}$ は、それぞれ、圧力、法線方向速度、法線方向インピーダンスの境界条件(boundary conditions、以下、BC)が課される境界面である。

$$p^{(a)}(\mathbf{r}) = \bar{p}^{(a)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_p^{(a)} \quad (\text{A1.38a})$$

$$\mathbf{L}_v^{(a)}[p^{(a)}(\mathbf{r})] = \bar{v}_n^{(a)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_v^{(a)} \quad (\text{A1.38b})$$

$$\mathbf{L}_v^{(a)}[p^{(a)}(\mathbf{r})] = \frac{p^{(a)}(\mathbf{r})}{\bar{Z}_n^{(a)}(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_z^{(a)} \quad (\text{A1.38c})$$

ここで、 $p^{(a)}(\mathbf{r})$ は、絶対位置 $\mathbf{r}$ におけるキャビティ内の音圧であり、 $\bar{p}^{(a)}$ 、 $\bar{v}_n^{(a)}$ 、 $\bar{Z}_n^{(a)}$ は、それぞれ、事前に与えられる境界圧力、法線方向速度、法線方向インピーダンスである。また、以下で定義された演算子を用いた。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_v^{(a)}[\bullet] &= \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{n}^{(a)}} \\ &= \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(a)T} (\nabla^{(a)} \bullet) = \frac{j}{\rho\omega} (\nabla^{(a)} \bullet)^T \mathbf{n}^{(a)} \end{aligned} \quad (\text{A1.39a})$$

$$\nabla^{(a)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(a)}} & \frac{\partial}{\partial y^{(a)}} & \frac{\partial}{\partial z^{(a)}} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A1.39b})$$

このとき、 $\partial/\partial x^{(a)}$ 、 $\partial/\partial y^{(a)}$ 、 $\partial/\partial z^{(a)}$ は、それぞれ、 $\bar{\mathbf{e}}_x^{(a)}$ 、 $\bar{\mathbf{e}}_y^{(a)}$ 、 $\bar{\mathbf{e}}_z^{(a)}$ 方向の空間偏微分を表す。

さらに、境界 $\Gamma_c^{(a)}$ は部分領域 I/F であり、詳細については A1.4 節で述べる。また、境界 $\Gamma_s^{(a)}$ は構造境界であり、詳細は A1.5 節で述べる。

## A1.4 部分領域インターフェイス条件

### A1.4.1 圧力-速度連成手法

境界 $\Gamma_c^{(a)} = \bigcup_{\beta=1, \beta \neq a}^{n_{\Omega}} \Gamma_c^{(a, \beta)}$ は、 $\Omega^{(a)}$ と他の部分領域との間の共通 I/F 面である。WBM における音響波動関数の性質上、キャビティを凸の部分領域に分割することから生じる部分領域間の境界面である(つまり、WBM に特有)。図 A.1 の場合、単に $\Gamma_c^{(a)} = \Gamma_c^{(a, \beta)} = \Gamma_c^{(\beta)} = \Gamma_c^{(\beta, a)}$ である。ただし、 $\Gamma_c^{(a, \beta)}$ は、 $\Omega^{(a)}$ と隣接する $\Omega^{(\beta)}$ との間の I/F 面であり、一般に、 $\Gamma_c^{(a, \beta)} = \Gamma_c^{(\beta, a)}$  ( $\forall \alpha, \forall \beta, \alpha \neq \beta$ ) が成り立つ。そして、この I/F 面において、厳密には、次のように圧力と法線方向速度の両方の連続性条件を課す必要がある。

$$p^{(a)}(\mathbf{r}) = p^{(\beta)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_c^{(a, \beta)} \quad (\text{A1.40a})$$

$$\mathbf{L}_v^{(a)}[p^{(a)}(\mathbf{r})] = -\mathbf{L}_v^{(\beta)}[p^{(\beta)}(\mathbf{r})], \quad \mathbf{r} \in \Gamma_c^{(a, \beta)} \quad (\text{A1.40b})$$

WBM では、2つの部分領域を連成させるために、ラグランジュ未定乗数のような補助変数を間接的に使用する(間接連成手法)ことなく、考慮する部分領域の音響変数に連続性条件(A1.40a)と(A1.40b)を適用させる直接連成手法を採用している。このとき、問題を適切(well-posed)にするために、各部分領域に1つの連続性条件を課す。このような連続性条件を課す手法は、(直接)圧力-速度連成(pressure-velocity coupling)手法と呼ばれる。ただし、後述するように、特に(理論的にも値が発散するような)共鳴周波数近辺の解析において数値解析が不安定になる。以下では便宜的に、 $\alpha < \beta$ のとき圧力 BC を、 $\alpha > \beta$ のとき法線速度 BC を課すことにする。そこで、圧力の連続条件を課す境界を $\Gamma_{cp}^{(a, \beta)}$  ( $\alpha < \beta$ )、法線方向速度の連続条件を課す境界を $\Gamma_{cv}^{(a, \beta)}$  ( $\alpha > \beta$ )と改めて書くことにする。

### A1.4.2 インピーダンス連成手法

一方で、これと等価な連続性条件が、 $\alpha = 1, \dots, n_{\Omega}$ 、 $\beta = 1, \dots, n_{\Omega}$ 、 $\alpha \neq \beta$ に対して以下のように定義できる。

$$\mathbf{L}_{eq+}^{(a)}[p^{(a)}(\mathbf{r})] = \mathbf{L}_{eq-}^{(\beta)}[p^{(\beta)}(\mathbf{r})], \quad \mathbf{r} \in \Gamma_c^{(a, \beta)} \quad (\text{A1.41a})$$

$$\mathbf{L}_{eq+}^{(\beta)}[p^{(\beta)}(\mathbf{r})] = \mathbf{L}_{eq-}^{(a)}[p^{(a)}(\mathbf{r})], \quad \mathbf{r} \in \Gamma_c^{(a, \beta)} \quad (\text{A1.41b})$$

ここで、等価法線方向速度演算子を次のように定義した。

$$\mathbf{L}_{\text{eq}+}^{(\alpha)}[\bullet] = \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{n}^{(\alpha)}} - \frac{\bullet}{\bar{Z}_c} = \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} (\nabla^{(\alpha)} \bullet) - \frac{\bullet}{\bar{Z}_c} \quad (\text{A1.42a})$$

$$\mathbf{L}_{\text{eq}-}^{(\alpha)}[\bullet] = \frac{-j}{\rho\omega} \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{n}^{(\alpha)}} - \frac{\bullet}{\bar{Z}_c} = \frac{-j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} (\nabla^{(\alpha)} \bullet) - \frac{\bullet}{\bar{Z}_c} \quad (\text{A1.42b})$$

スカラー  $\bar{Z}_c$  はインピーダンス連成因子である。この連続性条件により、 $\bar{Z}_c$  を通じて人工的な数値粘性が導入されるので、従来の圧力-速度連成手法を用いるよりは、特に共鳴周波数近辺の解析において安定な定式化となる。インピーダンス連成因子  $\bar{Z}_c$  として流体の音響インピーダンス  $\rho c$  を選ぶと、収束速度に関して適当であることが示されている。この場合も問題を適切に設定するため、各部分領域に 1 つの連続性条件を課す。ここでも、式(A1.41a,b)の連続条件を課す境界を、 $\Gamma_{\text{cz}}^{(\alpha,\beta)}$  と改めて書くことにする。このような連続性条件を課すやり方を、(直接)インピーダンス連成 (impedance coupling) 手法と呼ぶ。

## A1.5 構造境界条件

### A1.5.1 音響領域における構造境界条件

境界  $\Gamma_{\text{ss}}^{(\alpha)}$  には、板の面外変形速度と、その面に接する流体の法線方向速度が一致するという条件が課される。

$$\mathbf{L}_{\text{v}}^{(\alpha)}[p^{(\alpha)}(\mathbf{r})] = j\omega \zeta_{\sigma}^{(\alpha)} w_{\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{\text{ss}}^{(\alpha)} \quad (\text{A1.43})$$

### A1.5.2 構造自身の境界条件

一方、その板自身に課される BC についても考える必要がある。板の境界  $\Gamma_{\sigma}$  上に指定される BC は、主に次の 3 つのタイプとして与えられる。つまり、次式となる。

$$\Gamma_{\sigma} = \Gamma_{\text{w0}\sigma} \cup \Gamma_{\text{mq}\sigma} \cup \Gamma_{\text{wm}\sigma} \quad (\text{A1.44})$$

#### (1) 幾何学的 BC

事前に、並進変位  $w_{\sigma}$  と回転変位  $\theta_{\text{ns}\sigma}$  を課す BC であり (それぞれ、事前に与える値を  $\bar{w}_{\sigma}, \bar{\theta}_{\text{ns}\sigma}$  として)、

$$w_{\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma}) = \bar{w}_{\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma}), \quad \mathbf{r}'_{\sigma} \in \Gamma_{\text{w0}\sigma} \quad (\text{A1.45a})$$

$$\mathbf{L}_{\theta\sigma}[w_{\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma})] = \bar{\theta}_{\text{ns}\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma}), \quad \mathbf{r}'_{\sigma} \in \Gamma_{\text{w0}\sigma} \quad (\text{A1.45b})$$

のように書ける。ここで、以下を用いた。

$$\mathbf{L}_{\theta\sigma}[\bullet] = -\frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{n}'_{\sigma}} = -\mathbf{n}_{\sigma}^{\text{T}} (\nabla'_{\sigma} \bullet) = -(\nabla'_{\sigma} \bullet)^{\text{T}} \mathbf{n}'_{\sigma} \quad (\text{A1.46})$$

また、BC(A1.45a,b)は、回転変位成分  $\theta_{\text{ss}\sigma} = -\partial w_{\sigma} / \partial \mathbf{s}'_{\sigma}$  に対しても事前に与えられる値であることに注意したい。ただし、 $\mathbf{n}'_{\sigma} = [n'_{x\sigma} \ n'_{y\sigma}]^{\text{T}}$  と  $\mathbf{s}'_{\sigma} = [s'_{x\sigma} \ s'_{y\sigma}]^{\text{T}}$  は、それぞれ、

板の境界の法線方向 (板の外向きを正) と接線方向である。これら幾何学的 BC は、例えば、板の固定境界において指定される ( $\bar{w}_{\sigma}=0, \bar{\theta}_{\text{ns}\sigma}=0$ )。

#### (2) 力学的 BC

これは、境界に沿うせん断力、曲げモーメント、ねじりモーメントに対して、事前に与えられる関数  $\bar{q}_{\text{ns}\sigma}, \bar{m}_{\text{ns}\sigma}, \bar{m}_{\text{ss}\sigma}$  を課す BC である。実際は、これら BC の内の 2 つだけを課すことになるので、事前に与えられるせん断力関数とねじりモーメント関数を、次のように、1 つの一般化せん断力 (generalized shear force) 関数  $Q_{\text{ns}\sigma}$  に組み合わせて与える ( $\bar{Q}_{\text{ns}\sigma}$ )。

$$\mathbf{L}_{\text{ms}\sigma}[w_{\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma})] = \bar{m}_{\text{ns}\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma}), \quad \mathbf{r}'_{\sigma} \in \Gamma_{\text{mq}\sigma} \quad (\text{A1.47a})$$

$$\mathbf{L}_{\text{Q}\sigma}[w_{\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma})] = \bar{Q}_{\text{ns}\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma}) = \bar{q}_{\text{ns}\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma}) + \frac{\partial \bar{m}_{\text{ss}\sigma}(\mathbf{r}'_{\sigma})}{\partial \mathbf{s}'_{\sigma}}, \quad \mathbf{r}'_{\sigma} \in \Gamma_{\text{mq}\sigma} \quad (\text{A1.47b})$$

ここで、以下を用いた。

$$\mathbf{L}_{\text{ms}\sigma}[\bullet] = -D_{\sigma} \left( \frac{\partial^2 \bullet}{\partial \mathbf{n}_{\sigma}^{\prime 2}} + \bar{v}_{\sigma} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial \mathbf{s}_{\sigma}^{\prime 2}} \right) \quad (\text{A1.48a})$$

$$\mathbf{L}_{\text{Q}\sigma}[\bullet] = -D_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'_{\sigma}} \left( \frac{\partial^2 \bullet}{\partial \mathbf{n}_{\sigma}^{\prime 2}} + (2 - \bar{v}_{\sigma}) \frac{\partial^2 \bullet}{\partial \mathbf{s}_{\sigma}^{\prime 2}} \right) \quad (\text{A1.48b})$$

これら演算子は、板の辺が直線の場合、つまり、 $\mathbf{n}'_{\sigma}$  と  $\mathbf{s}'_{\sigma}$  が位置に依存しない場合には、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{ms}\sigma}[\bullet] &= -D_{\sigma} \left( \mathbf{n}_{\sigma}^{\prime \text{T}} \left\{ \nabla'_{\sigma} \left[ \mathbf{n}_{\sigma}^{\prime \text{T}} (\nabla'_{\sigma} \bullet) \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \bar{v}_{\sigma} \mathbf{s}_{\sigma}^{\prime \text{T}} \left\{ \nabla'_{\sigma} \left[ \mathbf{s}_{\sigma}^{\prime \text{T}} (\nabla'_{\sigma} \bullet) \right] \right\} \right) \\ &= -D_{\sigma} \left[ n_{x\sigma}^{\prime 2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_{\sigma}^{\prime 2}} + 2n_{x\sigma}' n_{y\sigma}' \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_{\sigma}' \partial y_{\sigma}'} + n_{y\sigma}^{\prime 2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial y_{\sigma}^{\prime 2}} \right. \\ &\quad \left. + \bar{v}_{\sigma} \left( s_{x\sigma}^{\prime 2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_{\sigma}^{\prime 2}} + 2s_{x\sigma}' s_{y\sigma}' \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_{\sigma}' \partial y_{\sigma}'} + s_{y\sigma}^{\prime 2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial y_{\sigma}^{\prime 2}} \right) \right] \\ &= -D_{\sigma} \left[ \left( n_{x\sigma}^{\prime 2} + \bar{v}_{\sigma} s_{x\sigma}^{\prime 2} \right) \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_{\sigma}^{\prime 2}} + \left( n_{y\sigma}^{\prime 2} + \bar{v}_{\sigma} s_{y\sigma}^{\prime 2} \right) \frac{\partial^2 \bullet}{\partial y_{\sigma}^{\prime 2}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( n_{x\sigma}' n_{y\sigma}' + \bar{v}_{\sigma} s_{x\sigma}' s_{y\sigma}' \right) \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_{\sigma}' \partial y_{\sigma}'} \right] \quad (\text{A1.47a}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{Q}\sigma}[\bullet] &= -D_{\sigma} \left( \mathbf{n}_{\sigma}^{\prime \text{T}} \left[ \nabla'_{\sigma} \left\{ \mathbf{n}_{\sigma}^{\prime \text{T}} \left\{ \nabla'_{\sigma} \left[ \mathbf{n}_{\sigma}^{\prime \text{T}} (\nabla'_{\sigma} \bullet) \right] \right\} \right\} \right] \right. \\ &\quad \left. + (2 - \bar{v}_{\sigma}) \mathbf{n}_{\sigma}^{\prime \text{T}} \left[ \nabla'_{\sigma} \left\{ \mathbf{s}_{\sigma}^{\prime \text{T}} \left\{ \nabla'_{\sigma} \left[ \mathbf{s}_{\sigma}^{\prime \text{T}} (\nabla'_{\sigma} \bullet) \right] \right\} \right\} \right] \right) \\ &= -D_{\sigma} \left\{ n_{x\sigma}^{\prime 3} \frac{\partial^3 \bullet}{\partial x_{\sigma}^{\prime 3}} + 3n_{x\sigma}^{\prime 2} n_{y\sigma}' \frac{\partial^3 \bullet}{\partial x_{\sigma}^{\prime 2} \partial y_{\sigma}'} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3n'_{x\sigma}n'^2_{y\sigma}\frac{\partial^3\bullet}{\partial x'_\sigma\partial y'^2_\sigma}+n'^3_{y\sigma}\frac{\partial^3\bullet}{\partial y'^3_\sigma} \\
& +\left(2-\bar{\nu}_\sigma\right)\left[n'_{x\sigma}s'^2_{y\sigma}\frac{\partial^3\bullet}{\partial x'^3_\sigma}+n'_{y\sigma}s'^2_{x\sigma}\frac{\partial^3\bullet}{\partial y'^3_\sigma}\right. \\
& \quad +s'_{x\sigma}\left(2n'_{x\sigma}s'_{y\sigma}+s'_{x\sigma}n'_{y\sigma}\right)\frac{\partial^3\bullet}{\partial x'^2_\sigma\partial y'_\sigma} \\
& \quad \left.+s'_{y\sigma}\left(n'_{x\sigma}s'_{y\sigma}+2s'_{x\sigma}n'_{y\sigma}\right)\frac{\partial^3\bullet}{\partial x'_\sigma\partial y'^2_\sigma}\right]\Bigg\} \\
& =-D_\sigma\left\{n'_{x\sigma}\left[n'^2_{x\sigma}+\left(2-\bar{\nu}_\sigma\right)s'^2_{x\sigma}\right]\frac{\partial^3\bullet}{\partial x'^3_\sigma}\right. \\
& \quad +\left[3n'^2_{x\sigma}n'_{y\sigma}+\left(2-\bar{\nu}_\sigma\right)s'_{x\sigma}\left(2n'_{x\sigma}s'_{y\sigma}+s'_{x\sigma}n'_{y\sigma}\right)\right]\frac{\partial^3\bullet}{\partial x'^2_\sigma\partial y'_\sigma} \\
& \quad +\left[3n'_{x\sigma}n'^2_{y\sigma}+\left(2-\bar{\nu}_\sigma\right)s'_{y\sigma}\left(n'_{x\sigma}s'_{y\sigma}+2s'_{x\sigma}n'_{y\sigma}\right)\right]\frac{\partial^3\bullet}{\partial x'_\sigma\partial y'^2_\sigma} \\
& \quad \left.+n'_{y\sigma}\left[n'^2_{y\sigma}+\left(2-\bar{\nu}_\sigma\right)s'^2_{y\sigma}\right]\frac{\partial^3\bullet}{\partial y'^3_\sigma}\right\} \quad (\text{A1.47b}')
\end{aligned}$$

この BC は、例えば、板の自由境界において指定される。

### (3) 混合 BC

幾何学的 BC 1 個と力学的 BC 1 個が指定される境界もある。例えば、単純支持境界に対して、法線方向変位  $w_\sigma$  と曲げモーメント  $m_{n\sigma}$  の値が事前に指定される。

$$w_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma) = \bar{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma), \quad \mathbf{r}'_\sigma \in \Gamma_{wm\sigma} \quad (\text{A1.49a})$$

$$L_{m\sigma}[w_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma)] = \bar{m}_{n\sigma}(\mathbf{r}'_\sigma), \quad \mathbf{r}'_\sigma \in \Gamma_{wm\sigma} \quad (\text{A1.49b})$$

## A2 変数展開式

### A2.1 音響の変数展開

WBM では、音圧  $p^{(\alpha)}(\mathbf{r})$  を次式のように展開する。

$$\begin{aligned}
p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) & \approx \hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \\
& = \sum_{i=1}^{n_a^{(\alpha)}} p_i^{(\alpha)} \Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) + p_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r})), \\
& \quad \mathbf{r} \in \Omega^{(\alpha)} \quad (\text{A2.1})
\end{aligned}$$

ここで、右辺の最初の級数項は、方程式(A1.31)の同次式を厳密に満たす  $n_a^{(\alpha)}$  個の音響波動関数(acoustic wave functions)  $\Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}))$  ( $i = 1, \dots, n_a^{(\alpha)}$ ) の重ね合わせを表しており、 $p_i^{(\alpha)}$  (位置の関数でないことに注意) は、各波動関数の寄与分を表す未知の係数である。ただし、波動関数の数  $n_a^{(\alpha)}$  は、物理的な波数や外接矩形領域のサイズに基づいて、無限個から有限個に打ち切られた結果である ( $n_a^{(\alpha)}$  の選択方

法については、後述する)。以下、 $\Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}))$  などは、簡単のため単に  $\Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)})$  や  $\Phi_i^{(\alpha)}$  と書くことにする。

#### A2.1.1 音響波動関数の寄与項

実際、式(A2.1)の級数項は、3 次元 WBM においてはさらに分解され、次のように定義される。

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_a^{(\alpha)}} p_i^{(\alpha)} \Phi_i^{(\alpha)} & = \\
& \sum_{i=0}^{n_{la}^{A(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{A(\alpha)}} p_{ij}^{A(\alpha)+} \Phi_{ij}^{A(\alpha)+} + \sum_{i=0}^{n_{la}^{A(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{A(\alpha)}} p_{ij}^{A(\alpha)-} \Phi_{ij}^{A(\alpha)-} \\
& + \sum_{i=0}^{n_{la}^{B(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{B(\alpha)}} p_{ij}^{B(\alpha)+} \Phi_{ij}^{B(\alpha)+} + \sum_{i=0}^{n_{la}^{B(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{B(\alpha)}} p_{ij}^{B(\alpha)-} \Phi_{ij}^{B(\alpha)-} \\
& + \sum_{i=0}^{n_{la}^{C(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{C(\alpha)}} p_{ij}^{C(\alpha)+} \Phi_{ij}^{C(\alpha)+} + \sum_{i=0}^{n_{la}^{C(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{C(\alpha)}} p_{ij}^{C(\alpha)-} \Phi_{ij}^{C(\alpha)-} \quad (\text{A2.2})
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\Phi_{ij}^{A(\alpha)\pm} & = \\
& \cos(k_{xi}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{yj}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \exp(-jk_{zij}^{A(\alpha)\pm} z^{(\alpha)}), \\
& i = 0, \dots, n_{la}^{A(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{ja}^{A(\alpha)} \quad (\text{A2.3a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{ij}^{B(\alpha)\pm} & = \\
& \cos(k_{xi}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \exp(-jk_{yij}^{B(\alpha)\pm} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zj}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}), \\
& i = 0, \dots, n_{la}^{B(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{ja}^{B(\alpha)} \quad (\text{A2.3b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{ij}^{C(\alpha)\pm} & = \\
& \exp(-jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} x^{(\alpha)}) \cos(k_{yi}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zj}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}), \\
& i = 0, \dots, n_{la}^{C(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{ja}^{C(\alpha)} \quad (\text{A2.3c})
\end{aligned}$$

である (複号同順: 以下、同様)。そして、 $\exp(\bullet)$  は、自然対数の底  $e$  の指数関数を表す。また、式(A2.2, 3)で用いられる  $n_{la}^{A(\alpha)}$ ,  $n_{ja}^{A(\alpha)}$ ,  $n_{la}^{B(\alpha)}$ ,  $n_{ja}^{B(\alpha)}$ ,  $n_{la}^{C(\alpha)}$ ,  $n_{ja}^{C(\alpha)}$  と音響波動関数の総数  $n_a^{(\alpha)}$  との間には、次の関係がある (式(A2.2)の右辺の級数が 0 から始まるので+1、さらに、その級数における±を考慮して 2 倍の係数が掛っていることに注意)。

$$\begin{aligned}
n_a^{(\alpha)} & = 2(n_{la}^{A(\alpha)} + 1)(n_{ja}^{A(\alpha)} + 1) \\
& \quad + 2(n_{la}^{B(\alpha)} + 1)(n_{ja}^{B(\alpha)} + 1) \\
& \quad + 2(n_{la}^{C(\alpha)} + 1)(n_{ja}^{C(\alpha)} + 1) \quad (\text{A2.4})
\end{aligned}$$

そして、これら波動関数が、方程式(A1.31)の同次式の厳密解であるためには、

$$(k_{xi}^{A(\alpha)})^2 + (k_{yj}^{A(\alpha)})^2 + (k_{zij}^{A(\alpha)\pm})^2 =$$

$$\begin{aligned} & \left(k_{xi}^{B(\alpha)}\right)^2 + \left(k_{yij}^{B(\alpha)\pm}\right)^2 + \left(k_{zj}^{B(\alpha)}\right)^2 = \\ & \left(k_{xij}^{C(\alpha)\pm}\right)^2 + \left(k_{yi}^{C(\alpha)}\right)^2 + \left(k_{zj}^{C(\alpha)}\right)^2 = k^2 \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

であることが要求される。WBM では、次の波数成分を選択することが提案されている。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{ij}^{A(\alpha)\pm} &= \begin{bmatrix} k_{xi}^{A(\alpha)} & k_{yij}^{A(\alpha)} & k_{zj}^{A(\alpha)\pm} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} i\pi/\bar{L}_x^{(\alpha)} \\ j\pi/\bar{L}_y^{(\alpha)} \\ \pm\sqrt{k^2 - \left(k_{xi}^{A(\alpha)}\right)^2 - \left(k_{yij}^{A(\alpha)}\right)^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2.6a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{ij}^{B(\alpha)\pm} &= \begin{bmatrix} k_{xi}^{B(\alpha)} & k_{yij}^{B(\alpha)\pm} & k_{zj}^{A(\alpha)} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} i\pi/\bar{L}_x^{(\alpha)} \\ \pm\sqrt{k^2 - \left(k_{xi}^{B(\alpha)}\right)^2 - \left(k_{zj}^{B(\alpha)}\right)^2} \\ j\pi/\bar{L}_z^{(\alpha)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2.6b})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{ij}^{C(\alpha)\pm} &= \begin{bmatrix} k_{xij}^{C(\alpha)\pm} & k_{yi}^{C(\alpha)} & k_{zj}^{C(\alpha)} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \pm\sqrt{k^2 - \left(k_{yi}^{C(\alpha)}\right)^2 - \left(k_{zj}^{C(\alpha)}\right)^2} \\ i\pi/\bar{L}_y^{(\alpha)} \\ j\pi/\bar{L}_z^{(\alpha)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2.6c})$$

このとき、 $\bullet = A, B, C$ ,  $i = 0, \dots, n_{la}^{(\alpha)}$  としたときに、

$$\Phi_i^{\bullet(\alpha)\pm} = \begin{bmatrix} \Phi_{i0}^{\bullet(\alpha)\pm} & \dots & \Phi_{in_{Ja}^{(\alpha)}}^{\bullet(\alpha)\pm} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.7})$$

$$\mathbf{p}_i^{\bullet(\alpha)\pm} = \begin{bmatrix} p_{i0}^{\bullet(\alpha)\pm} & \dots & p_{in_{Ja}^{(\alpha)}}^{\bullet(\alpha)\pm} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A2.8})$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \Phi^{(\alpha)} &= \begin{bmatrix} \Phi_1^{(\alpha)} & \dots & \Phi_{n_a^{(\alpha)}}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_0^{A(\alpha)+} & \Phi_0^{A(\alpha)-} & \dots & \Phi_{n_{la}^{(\alpha)}}^{A(\alpha)+} & \Phi_{n_{la}^{(\alpha)}}^{A(\alpha)-} \\ \Phi_0^{B(\alpha)+} & \Phi_0^{B(\alpha)-} & \dots & \Phi_{n_{la}^{(\alpha)}}^{B(\alpha)+} & \Phi_{n_{la}^{(\alpha)}}^{B(\alpha)-} \\ \Phi_0^{C(\alpha)+} & \Phi_0^{C(\alpha)-} & \dots & \Phi_{n_{la}^{(\alpha)}}^{C(\alpha)+} & \Phi_{n_{la}^{(\alpha)}}^{C(\alpha)-} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2.9})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(\alpha)} &= \begin{bmatrix} p_1^{(\alpha)} & \dots & p_{n_a^{(\alpha)}}^{(\alpha)} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^{A(\alpha)+T} & \mathbf{p}_0^{A(\alpha)-T} & \dots & \mathbf{p}_{n_{la}^{(\alpha)}}^{A(\alpha)+T} & \mathbf{p}_{n_{la}^{(\alpha)}}^{A(\alpha)-T} \\ \mathbf{p}_0^{B(\alpha)+T} & \mathbf{p}_0^{B(\alpha)-T} & \dots & \mathbf{p}_{n_{la}^{(\alpha)}}^{B(\alpha)+T} & \mathbf{p}_{n_{la}^{(\alpha)}}^{B(\alpha)-T} \\ \mathbf{p}_0^{C(\alpha)+T} & \mathbf{p}_0^{C(\alpha)-T} & \dots & \mathbf{p}_{n_{la}^{(\alpha)}}^{C(\alpha)+T} & \mathbf{p}_{n_{la}^{(\alpha)}}^{C(\alpha)-T} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{A2.10})$$

を定義すれば、式(A2.2)は、次のように簡潔に書ける（行ベクトル  $\Phi^{(\alpha)}$  と列ベクトル  $\mathbf{p}^{(\alpha)}$  の第  $i$  成分が、それぞれ  $\Phi_i^{(\alpha)}$  と  $p_i^{(\alpha)}$ ）。

$$\sum_{i=1}^{n_a^{(\alpha)}} p_i^{(\alpha)} \Phi_i^{(\alpha)} = \Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} \quad (\text{A2.11})$$

また、式(A2.3a-c)で定義される波動関数は、後述する WBM のシステム行列の数値的な悪条件を緩和するために実装上はスケールリングする必要がある。つまり、改めて、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{A(\alpha)\pm} &= \cos\left(k_{xi}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}\right) \cos\left(k_{yij}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{zj}^{A(\alpha)\pm} \left(z^{(\alpha)} - f_{ij}^{A(\alpha)\pm} \bar{L}_z^{(\alpha)}\right)\right), \\ &\quad i = 0, \dots, n_{la}^{(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{Ja}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (\text{A2.12a})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{B(\alpha)\pm} &= \cos\left(k_{xi}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}\right) \cos\left(k_{zj}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{yij}^{B(\alpha)\pm} \left(y^{(\alpha)} - f_{ij}^{B(\alpha)\pm} \bar{L}_y^{(\alpha)}\right)\right), \\ &\quad i = 0, \dots, n_{la}^{(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{Ja}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (\text{A2.12b})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{C(\alpha)\pm} &= \cos\left(k_{yi}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}\right) \cos\left(k_{zj}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} \left(x^{(\alpha)} - f_{ij}^{C(\alpha)\pm} \bar{L}_x^{(\alpha)}\right)\right), \\ &\quad i = 0, \dots, n_{la}^{(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{Ja}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (\text{A2.12c})$$

ここで、 $\bullet = A, B, C$  のとき、それぞれ  $\ast = z, y, x$  として、

$$f_{ij}^{\bullet(\alpha)\pm} = \begin{cases} 1 & \text{Im}\left(k_{\ast ij}^{\bullet(\alpha)\pm}\right) > 0 \\ 0 & \text{Im}\left(k_{\ast ij}^{\bullet(\alpha)\pm}\right) \leq 0 \end{cases}, \quad (\text{A2.13})$$

である。 $\text{Im}(z)$  は、複素数  $z$  の虚部を表す。また、これら波動関数を用いた展開式が厳密解に収束するための十分条件は、全ての部分領域が凸であるということが示されている<sup>13)</sup>。

### A2.1.2 音源の寄与による特解

一方、式(A2.1)の右辺の第 2 項は、方程式(A1.31)の右辺の外部点音源の寄与を考慮した場合の特解の 1 つを表しており、次のように定義される。

$$p_q^{(\alpha)} = \frac{j\rho\omega Q^{(\alpha)}}{4\pi} \frac{\exp\left(-jk\rho_q^{(\alpha)}\right)}{\rho_q^{(\alpha)}} \quad (\text{A2.14a})$$

$$\rho_q^{(\alpha)} = \left\| \mathbf{r}^{(\alpha)} - \bar{\mathbf{r}}_q^{(\alpha)} \right\| \quad (\text{A2.14b})$$

ここで、 $Q^{(\alpha)}$  は音源強さ（体積流[m<sup>3</sup>/s]）であり、次式で定義される。

$$Q^{(\alpha)} = \int_{\Omega^{(\alpha)}} q^{(\alpha)} d\Omega \quad (\text{A2.15})$$

実際の解析では、この  $Q^{(\alpha)}$  を直接入力して用いる。



### A2.1.3 導関数の導出

次に、流体速度ベクトル  $\mathbf{v}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$  を考える。これは、次式でから求められる。

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{L}_v^{(\alpha)} \left[ p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \right] \approx \mathbf{L}_v^{(\alpha)} \left[ \hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{j}{\rho\omega} \left( \mathbf{B}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + \nabla^{(\alpha)} p_q^{(\alpha)} \right), \quad \mathbf{r} \in \Omega^{(\alpha)} \quad (\text{A2.16})\end{aligned}$$

ここで、音響波動関数ベクトル  $\Phi^{(\alpha)}$  の勾配成分を集めた行列として定義される  $\mathbf{B}^{(\alpha)}$  は、以下のように定義される。

$$\mathbf{B}^{(\alpha)} = \nabla^{(\alpha)} \Phi^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \nabla^{(\alpha)} \Phi_{00}^{A(\alpha)+} & \cdots & \nabla^{(\alpha)} \Phi_{n_{\text{la}}^{C(\alpha)} n_{\text{ja}}^{C(\alpha)}}^{C(\alpha)-} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.17})$$

$$\begin{aligned}\nabla^{(\alpha)} \Phi_{ij}^{\bullet(\alpha)\pm} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{ij}^{\bullet(\alpha)\pm}}{\partial x^{(\alpha)}} & \frac{\partial \Phi_{ij}^{\bullet(\alpha)\pm}}{\partial y^{(\alpha)}} & \frac{\partial \Phi_{ij}^{\bullet(\alpha)\pm}}{\partial z^{(\alpha)}} \end{bmatrix}^T, \\ \bullet &= A, B, C, \quad i=0, \dots, n_{\text{la}}^{(\alpha)}, j=0, \dots, n_{\text{ja}}^{(\alpha)} \quad (\text{A2.18})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}^{A(\alpha)\pm}}{\partial x^{(\alpha)}} &= -k_{xi}^{A(\alpha)} \sin(k_{xi}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{yj}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{zij}^{A(\alpha)\pm} \left(z^{(\alpha)} - f_{ij}^{A(\alpha)\pm} \bar{L}_z^{(\alpha)}\right)\right), \\ i &= 0, \dots, n_{\text{la}}^{A(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{\text{ja}}^{A(\alpha)} \quad (\text{A2.19a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}^{A(\alpha)\pm}}{\partial y^{(\alpha)}} &= -k_{yj}^{A(\alpha)} \cos(k_{xi}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \sin(k_{yj}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{zij}^{A(\alpha)\pm} \left(z^{(\alpha)} - f_{ij}^{A(\alpha)\pm} \bar{L}_z^{(\alpha)}\right)\right), \\ i &= 0, \dots, n_{\text{la}}^{A(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{\text{ja}}^{A(\alpha)} \quad (\text{A2.19b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}^{A(\alpha)\pm}}{\partial z^{(\alpha)}} &= -jk_{zij}^{A(\alpha)\pm} \cos(k_{xi}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{yj}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{zij}^{A(\alpha)\pm} \left(z^{(\alpha)} - f_{ij}^{A(\alpha)\pm} \bar{L}_z^{(\alpha)}\right)\right), \\ i &= 0, \dots, n_{\text{la}}^{A(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{\text{ja}}^{A(\alpha)} \quad (\text{A2.19c})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}^{B(\alpha)\pm}}{\partial x^{(\alpha)}} &= -k_{xi}^{B(\alpha)} \sin(k_{xi}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{zj}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{yij}^{B(\alpha)\pm} \left(y^{(\alpha)} - f_{ij}^{B(\alpha)\pm} \bar{L}_y^{(\alpha)}\right)\right), \\ i &= 0, \dots, n_{\text{la}}^{B(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{\text{ja}}^{B(\alpha)} \quad (\text{A2.20a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}^{B(\alpha)\pm}}{\partial y^{(\alpha)}} &= -jk_{yij}^{B(\alpha)\pm} \cos(k_{xi}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{zj}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{yij}^{B(\alpha)\pm} \left(y^{(\alpha)} - f_{ij}^{B(\alpha)\pm} \bar{L}_y^{(\alpha)}\right)\right), \\ i &= 0, \dots, n_{\text{la}}^{B(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{\text{ja}}^{B(\alpha)} \quad (\text{A2.20b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}^{B(\alpha)\pm}}{\partial z^{(\alpha)}} &= -k_{zj}^{B(\alpha)} \cos(k_{xi}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \sin(k_{zj}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{yij}^{B(\alpha)\pm} \left(y^{(\alpha)} - f_{ij}^{B(\alpha)\pm} \bar{L}_y^{(\alpha)}\right)\right), \\ i &= 0, \dots, n_{\text{la}}^{B(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{\text{ja}}^{B(\alpha)} \quad (\text{A2.20c})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}^{C(\alpha)\pm}}{\partial x^{(\alpha)}} &= -jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} \cos(k_{yi}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zj}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} \left(x^{(\alpha)} - f_{ij}^{C(\alpha)\pm} \bar{L}_x^{(\alpha)}\right)\right), \\ i &= 0, \dots, n_{\text{la}}^{C(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{\text{ja}}^{C(\alpha)} \quad (\text{A2.21a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}^{C(\alpha)\pm}}{\partial y^{(\alpha)}} &= -k_{yi}^{C(\alpha)} \sin(k_{yi}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zj}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} \left(x^{(\alpha)} - f_{ij}^{C(\alpha)\pm} \bar{L}_x^{(\alpha)}\right)\right), \\ i &= 0, \dots, n_{\text{la}}^{C(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{\text{ja}}^{C(\alpha)} \quad (\text{A2.21b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{ij}^{C(\alpha)\pm}}{\partial z^{(\alpha)}} &= -k_{zj}^{C(\alpha)} \cos(k_{yi}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \sin(k_{zj}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\ &\quad \times \exp\left(-jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} \left(x^{(\alpha)} - f_{ij}^{C(\alpha)\pm} \bar{L}_x^{(\alpha)}\right)\right), \\ i &= 0, \dots, n_{\text{la}}^{C(\alpha)}, j = 0, \dots, n_{\text{ja}}^{C(\alpha)} \quad (\text{A2.21c})\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}\nabla^{(\alpha)} p_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial p_q^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} & \frac{\partial p_q^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} & \frac{\partial p_q^{(\alpha)}}{\partial z^{(\alpha)}} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{-j\rho\omega Q^{(\alpha)}}{4\pi(\rho_q^{(\alpha)})^2} \left( \frac{1}{\rho_q^{(\alpha)}} + jk \right) \exp(-jk\rho_q^{(\alpha)}) \\ &\quad \times (\mathbf{r}^{(\alpha)} - \bar{\mathbf{r}}_q^{(\alpha)}) \quad (\text{A2.22})\end{aligned}$$

である。一般に、FEM 等の要素ベース解析手法では、解析結果として直接求まる圧力（主変数）を空間微分して得られる流体速度ベクトル（2 次変数）は、微分により補間多項式の次数が下がるために精度も下がる。一方、WBM では、式(A2.16)から分かるように、支配方程式を厳密に満たす圧力（主変数）展開式を直接空間微分して得られるので、流体速度ベクトル（2 次変数）に精度低下は生じない。同様に、流体変位ベクトルも、式(A2.16)を時間積分する（つまり、 $1/(j\omega)$ を掛ける）だけなので精度の低下はない。

### A2.2 構造の変数展開

WBM の定式化では、板領域  $\Omega_\sigma$  における定常法線方向変位  $w_\sigma(\mathbf{r}')$  を次式のように展開する。

$$\begin{aligned}w_\sigma(\mathbf{r}') &\approx \hat{w}_\sigma(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in \Omega_\sigma \\ &= \sum_{i=1}^{n_{s\sigma}} w_{\sigma i} \Psi_{\sigma i}(\mathbf{r}'_\sigma) + w_{f\sigma}(\mathbf{r}'_\sigma) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \zeta_\sigma^{(\alpha)} \left( \sum_{i=1}^{n_\alpha^{(\alpha)}} p_i^{(\alpha)} W_{a\sigma i}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) + w_{q\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) \right) \quad (\text{A2.22})\end{aligned}$$

ここで、右辺の最初の級数項は、方程式(A1.33)の同次式を厳密に満たす  $n_{s\sigma}$  個の構造波動関数(structural wave functions)  $\Psi_{\sigma i}$  ( $i = 1, \dots, n_{s\sigma}$ ) の重ね合わせを表しており、 $w_{\sigma i}$  (位置の



関数でないことに注意) は、各波動関数の寄与分を表す未知の係数である。ただし、波動関数の数  $n_{s\sigma}$  は、物理的な波数や外接矩形領域のサイズに基づいて、無限個から有限個に打ち切られた結果である ( $n_{s\sigma}$  の選択方法については、後述する)。

### A2.2.1 構造波動関数の寄与項

実際、式(A2.22)の最初の級数項は、3次元 WBM においてはさらに分解され、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_{s\sigma}} w_{\sigma i} \Psi_{\sigma i} = & \sum_{i=0}^{n_{s\sigma}^A} \left( w_{\sigma i}^{A1+} \Psi_{\sigma i}^{A1+} + w_{\sigma i}^{A1-} \Psi_{\sigma i}^{A1-} \right. \\ & \left. + w_{\sigma i}^{A2+} \Psi_{\sigma i}^{A2+} + w_{\sigma i}^{A2-} \Psi_{\sigma i}^{A2-} \right) \\ & + \sum_{i=0}^{n_{s\sigma}^B} \left( w_{\sigma i}^{B1+} \Psi_{\sigma i}^{B1+} + w_{\sigma i}^{B1-} \Psi_{\sigma i}^{B1-} + w_{\sigma i}^{B2+} \Psi_{\sigma i}^{B2+} + w_{\sigma i}^{B2-} \Psi_{\sigma i}^{B2-} \right) \end{aligned} \quad (A2.23)$$

ここで、

$$\Psi_{\sigma i}^{Au\pm} = \cos(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma) \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \quad (A2.24a)$$

$$\Psi_{\sigma i}^{Bu\pm} = \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} x'_\sigma) \cos(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \quad (A2.24b)$$

である。このとき、式(A2.24)で用いられる  $n_{s\sigma}^A$  と  $n_{s\sigma}^B$ 、及び、構造波動関数の総数  $n_{s\sigma}$  との間には、次の関係がある (式(A2.23)の右辺の級数が 0 から始まるので+1、さらに、その級数における±と  $u=1, 2$  を考慮して4倍の係数が掛っていることに注意)。

$$n_{s\sigma} = 4(n_{s\sigma}^A + 1) + 4(n_{s\sigma}^B + 1) \quad (A2.25)$$

この波動関数が、方程式(A1.33)の同次式の厳密解であるためには、

$$\begin{aligned} \left[ (k_{b\sigma xi}^A)^2 + (k_{b\sigma yi}^{A1\pm})^2 \right]^2 &= \left[ (k_{b\sigma xi}^A)^2 + (k_{b\sigma yi}^{A2\pm})^2 \right]^2 = \\ \left[ (k_{b\sigma xi}^{B1\pm})^2 + (k_{b\sigma yi}^B)^2 \right]^2 &= \left[ (k_{b\sigma xi}^{B2\pm})^2 + (k_{b\sigma yi}^B)^2 \right]^2 = k_{b\sigma}^4 \end{aligned} \quad (A2.26)$$

であることが要求され、WBM では、次の波数成分を選択することが提案されている。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{b\sigma i}^{A1\pm} &= \begin{bmatrix} k_{b\sigma xi}^A & k_{b\sigma yi}^{A1\pm} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} i\pi/\bar{L}'_{x\sigma} & \pm \sqrt{k_{b\sigma}^2 - (k_{b\sigma xi}^A)^2} \end{bmatrix}^T, \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A \end{aligned} \quad (A2.27a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{b\sigma i}^{A2\pm} &= \begin{bmatrix} k_{b\sigma xi}^A & k_{b\sigma yi}^{A2\pm} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} i\pi/\bar{L}'_{x\sigma} & \pm j\sqrt{k_{b\sigma}^2 + (k_{b\sigma xi}^A)^2} \end{bmatrix}^T, \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A \end{aligned} \quad (A2.27b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{b\sigma i}^{B1\pm} &= \begin{bmatrix} k_{b\sigma xi}^{B1\pm} & k_{b\sigma yi}^B \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \pm \sqrt{k_{b\sigma}^2 - (k_{b\sigma xi}^B)^2} & i\pi/\bar{L}'_{y\sigma} \end{bmatrix}^T, \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B \end{aligned} \quad (A2.27c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{b\sigma i}^{B2\pm} &= \begin{bmatrix} k_{b\sigma xi}^{B2\pm} & k_{b\sigma yi}^B \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \pm j\sqrt{k_{b\sigma}^2 + (k_{b\sigma xi}^B)^2} & i\pi/\bar{L}'_{y\sigma} \end{bmatrix}^T, \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B \end{aligned} \quad (A2.27d)$$

このとき、 $\bullet = A, B, u=1, 2$  としたときに、

$$\Psi_{\sigma}^{\bullet u\pm} = \begin{bmatrix} \Psi_{\sigma 0}^{\bullet u\pm} & \dots & \Psi_{\sigma n_{s\sigma}^{\bullet}}^{\bullet u\pm} \end{bmatrix} \quad (A2.28)$$

$$\mathbf{w}_{\sigma}^{\bullet k\pm} = \begin{bmatrix} w_{\sigma 0}^{\bullet k\pm} & \dots & w_{\sigma n_{s\sigma}^{\bullet}}^{\bullet k\pm} \end{bmatrix}^T \quad (A2.29)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \Psi_{\sigma} &= \begin{bmatrix} \Psi_{\sigma 1} & \dots & \Psi_{\sigma n_{s\sigma}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Psi_{\sigma}^{A1+} & \Psi_{\sigma}^{A1-} & \Psi_{\sigma}^{A2+} & \Psi_{\sigma}^{A2-} \\ \Psi_{\sigma}^{B1+} & \Psi_{\sigma}^{B1-} & \Psi_{\sigma}^{B2+} & \Psi_{\sigma}^{B2-} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A2.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\sigma} &= \begin{bmatrix} w_{\sigma 1} & \dots & w_{\sigma n_{s\sigma}} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\sigma}^{A1+T} & \mathbf{w}_{\sigma}^{A1-T} & \mathbf{w}_{\sigma}^{A2+T} & \mathbf{w}_{\sigma}^{A2-T} \\ \mathbf{w}_{\sigma}^{B1+T} & \mathbf{w}_{\sigma}^{B1-T} & \mathbf{w}_{\sigma}^{B2+T} & \mathbf{w}_{\sigma}^{B2-T} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (A2.31)$$

を定義すれば、式(A2.24)は、次のように簡潔に書ける。

$$\sum_{i=1}^{n_{s\sigma}} w_{\sigma i} \Psi_{\sigma i} = \Psi_{\sigma} \mathbf{w}_{\sigma} \quad (A2.32)$$

また、式(A2.24a, b)で定義される波動関数は、後述する WBM のシステム行列の数値的な悪条件を緩和するために実装上はスケーリングする必要がある。つまり、改めて、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Psi_{\sigma i}^{Au\pm} &= \cos(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma) \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma})), \\ & \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.33a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm} &= \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \cos(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \\ & \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.33b)$$

ここで、 $\bullet = A, B$  のとき、それぞれ  $\bullet = y, x$  として、

$$f_i^{\bullet u \pm} = \begin{cases} 1 & \text{Im}(k_{b\sigma^* i}^{\bullet u \pm}) > 0 \\ 0 & \text{Im}(k_{b\sigma^* i}^{\bullet u \pm}) \leq 0 \end{cases}, \quad u=1, 2 \quad (\text{A2.34})$$

である。また、これら波動関数を用いた展開式が厳密解に収束するための十分条件は、全ての部分領域が凸であるということが示されている<sup>13)</sup>。

### A2.2.2 構造への強制力の寄与に関する特解

次に、式(A2.22)の第 2 項を考える。これは、方程式(A1.33)の右辺の外部励振力の寄与を考慮した場合の特解の 1 つを表しており、

$$w_{f\sigma}(\mathbf{r}'_\sigma) = \frac{-j f_\sigma}{8k_{b\sigma}^2 D_\sigma} \left[ H_0^{(2)}(k_{b\sigma} \rho_{f\sigma}) - H_0^{(2)}(-jk_{b\sigma} \rho_{f\sigma}) \right] \quad (\text{A2.35})$$

$$\rho_{f\sigma} = \|\mathbf{r}'_\sigma - \mathbf{r}_{f\sigma}\| \quad (\text{A2.36})$$

で定義される。ここで、 $H_i^{(2)}$  は、 $i$  次の第 2 種ハンケル関数である。

### A2.2.3 音圧の寄与に関する特解

また、式(A2.22)の第 3 項の級数中の  $W_{asi}^{(\alpha)}$  を含む級数項を考える。この級数項は、方程式(A1.33)の右辺の音圧項を考慮したとき、式(A2.1)の音響波動関数を含む項の影響から導出される特解の 1 つであり、図 A.3 も参考にして、次のように書ける。

$$\begin{aligned} W_{asi}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) &= -\frac{j}{8k_{b\sigma}^2 D_\sigma} \int_{\Omega_\sigma = \Gamma_{s\sigma}^{(\alpha)}} \Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}')) d\Omega \\ &\times \left[ H_0^{(2)}(k_{b\sigma} \|\mathbf{r}'_\sigma - \mathbf{r}'\|) - H_0^{(2)}(-jk_{b\sigma} \|\mathbf{r}'_\sigma - \mathbf{r}'\|) \right] d\Omega \\ &= -\frac{j}{8k_{b\sigma}^2 D_\sigma} \int_0^{\bar{L}_{x\sigma}} \left\{ \int_{f_{l\sigma}(\xi)}^{f_{2\sigma}(\xi)} \Phi_i^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\xi, \zeta)) \right. \\ &\times \left[ H_0^{(2)} \left( k_{b\sigma} \sqrt{(x'_\sigma - \xi)^2 + (y'_\sigma - \zeta)^2} \right) \right. \\ &\left. \left. - H_0^{(2)} \left( -jk_{b\sigma} \sqrt{(x'_\sigma - \xi)^2 + (y'_\sigma - \zeta)^2} \right) \right] d\zeta \right\} d\xi \quad (\text{A2.37}) \end{aligned}$$

この  $W_{asi}^{(\alpha)}$  は  $i=1, \dots, n_a^{(\alpha)}$  だけあるので、この面積分を数値的に行うのは非常に計算負荷がかかる。ただし、板が平板である場合には、面積分の解析解に基づいた表現を利用して計算を高速化することができる。そのために、まず、 $w_{asi}^{(\alpha)}$  を含む級数を式(A2.2)と同様に分解して表す。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_a^{(\alpha)}} p_i^{(\alpha)} W_{asi}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) &= \\ \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{A(\alpha)+} W_{asij}^{A(\alpha)+} &+ \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{A(\alpha)-} W_{asij}^{A(\alpha)-} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{B(\alpha)+} W_{asij}^{B(\alpha)+} + \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{B(\alpha)-} W_{asij}^{B(\alpha)-} \\ &+ \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{C(\alpha)+} W_{asij}^{C(\alpha)+} + \sum_{i=0}^{n_{la}^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n_{ja}^{(\alpha)}} p_{ij}^{C(\alpha)-} W_{asij}^{C(\alpha)-} \quad (\text{A2.38}) \end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned} W_{asij}^{A(\alpha)\pm}(\mathbf{r}'_\sigma) &= \frac{\Omega_{sij}^{A(\alpha)\pm}(\mathbf{r}'_\sigma)}{4D_\sigma} \\ &\times \exp\left(-jk_{zij}^{A(\alpha)\pm} \left( z^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) - f_{ij}^{A(\alpha)\pm} \bar{L}_z^{(\alpha)} \right) \right) \quad (\text{A2.39a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{asij}^{B(\alpha)\pm}(\mathbf{r}'_\sigma) &= \frac{\Omega_{sij}^{B(\alpha)\pm}(\mathbf{r}'_\sigma)}{4D_\sigma} \\ &\times \exp\left(-jk_{yij}^{B(\alpha)\pm} \left( y^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) - f_{ij}^{B(\alpha)\pm} \bar{L}_y^{(\alpha)} \right) \right) \quad (\text{A2.39b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{asij}^{C(\alpha)\pm}(\mathbf{r}'_\sigma) &= \frac{\Omega_{sij}^{C(\alpha)\pm}(\mathbf{r}'_\sigma)}{4D_\sigma} \\ &\times \exp\left(-jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} \left( x^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) - f_{ij}^{C(\alpha)\pm} \bar{L}_x^{(\alpha)} \right) \right) \quad (\text{A2.39c}) \end{aligned}$$

と書き表すことができる。ここで、 $\bullet = A, B, C$  のときに、それぞれ、 $i=0, \dots, n_{la}^{(\alpha)}$ ,  $j=0, \dots, n_{ja}^{(\alpha)}$  として、

$$\begin{aligned} \Omega_{sij}^{(\alpha)\pm}(\mathbf{r}'_\sigma) &= B_{1sij}^{(\alpha)\pm} C_{1si}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) C_{jsj}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) \\ &+ j B_{2sij}^{(\alpha)\pm} C_{1si}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) S_{jsj}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) \\ &+ j B_{3sij}^{(\alpha)\pm} S_{1si}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) C_{jsj}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) \\ &+ B_{4sij}^{(\alpha)\pm} S_{1si}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) S_{jsj}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) \quad (\text{A2.40}) \end{aligned}$$

$$C_{1si}^{A(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \cos(k_{xi}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.41a})$$

$$S_{1si}^{A(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \sin(k_{xi}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.41b})$$

$$C_{jsj}^{A(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \cos(k_{yj}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.41c})$$

$$S_{jsj}^{A(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \sin(k_{yj}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.41d})$$

$$C_{1si}^{B(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \cos(k_{xi}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.42a})$$

$$S_{1si}^{B(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \sin(k_{xi}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.42b})$$

$$C_{jsj}^{B(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \cos(k_{zj}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.42c})$$

$$S_{jsj}^{B(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \sin(k_{zj}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.42d})$$

$$C_{1si}^{C(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \cos(k_{yi}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.43a})$$

$$S_{1si}^{C(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \sin(k_{yi}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.43b})$$

$$C_{jsj}^{C(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \cos(k_{zj}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.43c})$$

$$S_{jsj}^{C(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma) = \sin(k_{zj}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma)) \quad (\text{A2.43d})$$

$$B_{1\sigma ij}^{*(\alpha)\pm} = +\frac{1}{A_{1\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} + \frac{1}{A_{2\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} + \frac{1}{A_{3\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} + \frac{1}{A_{4\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} \quad (\text{A2.44a})$$

$$B_{2\sigma ij}^{*(\alpha)\pm} = -\frac{1}{A_{1\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} - \frac{1}{A_{2\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} + \frac{1}{A_{3\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} + \frac{1}{A_{4\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} \quad (\text{A2.44b})$$

$$B_{3\sigma ij}^{*(\alpha)\pm} = -\frac{1}{A_{1\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} + \frac{1}{A_{2\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} - \frac{1}{A_{3\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} + \frac{1}{A_{4\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} \quad (\text{A2.44c})$$

$$B_{4\sigma ij}^{*(\alpha)\pm} = -\frac{1}{A_{1\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} + \frac{1}{A_{2\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} + \frac{1}{A_{3\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} - \frac{1}{A_{4\sigma ij}^{*(\alpha)\pm}} \quad (\text{A2.44d})$$

$$A_{1\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} = \left[ \left( +k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( +k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.45a})$$

$$A_{2\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} = \left[ \left( -k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( -k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.45b})$$

$$A_{3\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} = \left[ \left( +k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} - k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( +k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} - k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.45c})$$

$$A_{4\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} = \left[ \left( -k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} - k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( -k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} - k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.45d})$$

$$A_{1\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} = \left[ \left( +k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( +k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.46a})$$

$$A_{2\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} = \left[ \left( -k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( -k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.46b})$$

$$A_{3\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} = \left[ \left( +k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} - k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( +k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} - k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.46c})$$

$$A_{4\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} = \left[ \left( -k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} - k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( -k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} - k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.46d})$$

$$A_{1\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} = \left[ \left( +k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right. \\ \left. + \left( +k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.47a})$$

$$A_{2\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} = \left[ \left( -k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( -k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.47b})$$

$$A_{3\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} = \left[ \left( +k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} - k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( +k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} - k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.47c})$$

$$A_{4\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} = \left[ \left( -k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} - k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 + \left( -k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} - k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \right] - k_{b\sigma}^4 \quad (\text{A2.47d})$$

である。このとき、 $\bullet = A, B, C, i=0, \dots, n_{\text{la}}^{(\alpha)}$  として、

$$\mathbf{W}_{a\sigma i}^{*(\alpha)\pm} = \begin{bmatrix} W_{a\sigma i0}^{*(\alpha)\pm} & \dots & W_{a\sigma i n_{\text{la}}^{(\alpha)}}^{*(\alpha)\pm} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.48})$$

を用いて、

$$\mathbf{W}_{a\sigma}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} W_{a\sigma 1}^{(\alpha)} & \dots & W_{a\sigma n_{\text{la}}^{(\alpha)}}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{a\sigma 0}^{A(\alpha)+} & \mathbf{W}_{a\sigma 0}^{A(\alpha)-} & \dots & \mathbf{W}_{a\sigma n_{\text{la}}^{(\alpha)}}^{A(\alpha)+} & \mathbf{W}_{a\sigma n_{\text{la}}^{(\alpha)}}^{A(\alpha)-} \\ \mathbf{W}_{a\sigma 0}^{B(\alpha)+} & \mathbf{W}_{a\sigma 0}^{B(\alpha)-} & \dots & \mathbf{W}_{a\sigma n_{\text{la}}^{(\alpha)}}^{B(\alpha)+} & \mathbf{W}_{a\sigma n_{\text{la}}^{(\alpha)}}^{B(\alpha)-} \\ \mathbf{W}_{a\sigma 0}^{C(\alpha)+} & \mathbf{W}_{a\sigma 0}^{C(\alpha)-} & \dots & \mathbf{W}_{a\sigma n_{\text{la}}^{(\alpha)}}^{C(\alpha)+} & \mathbf{W}_{a\sigma n_{\text{la}}^{(\alpha)}}^{C(\alpha)-} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.49})$$

を定義すれば、式(A2.38)は、次のように簡潔に書ける。

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{a}}^{(\alpha)}} p_i^{(\alpha)} W_{a\sigma i}^{(\alpha)} = \mathbf{W}_{a\sigma}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} \quad (\text{A2.50})$$

#### A2.2.4 音源の寄与に関する特解

さらに、式(A2.22)の第 3 項の級数中の  $w_{q\sigma}^{(\alpha)}$  を含む項を考える。この項は、方程式(A1.33)の右辺の音源項を考慮したとき、式(A2.1)の特解関数の影響から導出される特解の 1 つであり、次のように書ける。

$$w_{q\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_{\sigma}) = -\frac{j}{8k_{b\sigma}^2 D_{\sigma}} \int_{\Omega_{\sigma}=\Gamma_{s\sigma}^{(\alpha)}} p_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}')) \\ \times \left[ H_0^{(2)}(k_{b\sigma} \|\mathbf{r}'_{\sigma} - \mathbf{r}'\|) - H_0^{(2)}(-jk_{b\sigma} \|\mathbf{r}'_{\sigma} - \mathbf{r}'\|) \right] d\Omega \\ = -\frac{j}{8k_{b\sigma}^2 D_{\sigma}} \int_0^{\bar{L}_{x\sigma}} \left\{ \int_{f_{1\sigma}(\xi)}^{f_{2\sigma}(\xi)} p_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\xi, \zeta)) \right. \\ \left. \times \left[ H_0^{(2)} \left( k_{b\sigma} \sqrt{(x'_{\sigma} - \xi)^2 + (y'_{\sigma} - \zeta)^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - H_0^{(2)} \left( -jk_{b\sigma} \sqrt{(x'_{\sigma} - \xi)^2 + (y'_{\sigma} - \zeta)^2} \right) \right] d\zeta \right\} d\xi$$

$$-H_0^{(2)} \left( -jk_{b\sigma} \sqrt{(x'_\sigma - \xi)^2 + (y'_\sigma - \zeta)^2} \right) \Big] d\zeta \Big\} d\xi \quad (A2.51)$$

この面積分は解析解を利用できないが、関数  $w_{q\sigma}^{(a)}$  はスカラー量なので、行ベクトル  $\mathbf{W}_{a\sigma}^{(a)}$  の場合のように各要素 (A2.37) について数値積分が必要なものに比べれば、計算負荷の問題は少ない。

### A2.2.5 導関数の導出

ここで、次節以降で述べる WBM のシステム行列の導出に必要ないくつかの導関数を示す。まず、構造波動関数ベクトルの勾配成分を集めた行列  $\mathbf{B}_\sigma$  は、次のように表せる。

$$\mathbf{B}_\sigma = \nabla'_\sigma \Psi_\sigma = \begin{bmatrix} \nabla'_\sigma \Psi_{\sigma 0}^{A1+} & \cdots & \nabla'_\sigma \Psi_{\sigma n_{s\sigma}^B}^{B2-} \end{bmatrix} \quad (A2.52)$$

$$\nabla'_\sigma \Psi_{\sigma i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial x'_\sigma} & \frac{\partial \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial y'_\sigma} \end{bmatrix}^T \quad (A2.53)$$

$$\bullet = A, B, u=1, 2, i=0, \dots, n_{s\sigma}^*$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial x'_\sigma} &= -k_{b\sigma xi}^A \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma})) \\ &\quad \times \sin(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.54a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial y'_\sigma} &= -jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma})) \\ &\quad \times \cos(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.54b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm}}{\partial x'_\sigma} &= -jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \\ &\quad \times \cos(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.55a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm}}{\partial y'_\sigma} &= -k_{b\sigma yi}^B \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \\ &\quad \times \sin(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.55b)$$

構造波動関数に関しては、WBM のシステム行列を導出する際に空間に関する 3 階までの導関数が必要となる。それらを (一般形ではなくあえてそれぞれ展開して) 以下に記す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial x'^2_\sigma} &= -(k_{b\sigma xi}^A)^2 \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma})) \\ &\quad \times \cos(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.56a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial y'^2_\sigma} &= -(k_{b\sigma yi}^{Au\pm})^2 \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma})) \\ &\quad \times \cos(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.56b)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial x'_\sigma \partial y'_\sigma} = jk_{b\sigma xi}^A k_{b\sigma yi}^{Au\pm} \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma}))$$

$$\times \sin(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \quad (A2.56c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm}}{\partial x'^2_\sigma} &= -(k_{b\sigma xi}^{Bu\pm})^2 \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \\ &\quad \times \cos(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.57a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm}}{\partial y'^2_\sigma} &= -(k_{b\sigma yi}^B)^2 \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \\ &\quad \times \cos(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.57b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm}}{\partial x'_\sigma \partial y'_\sigma} &= jk_{b\sigma yi}^B k_{b\sigma xi}^{Bu\pm} \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \\ &\quad \times \sin(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.57c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial x'^3_\sigma} &= (k_{b\sigma xi}^A)^3 \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma})) \\ &\quad \times \sin(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.58a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial y'^3_\sigma} &= j(k_{b\sigma yi}^{Au\pm})^3 \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma})) \\ &\quad \times \cos(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.58b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial x'^2_\sigma \partial y'_\sigma} &= j(k_{b\sigma xi}^A)^2 k_{b\sigma yi}^{Au\pm} \\ &\quad \times \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma})) \\ &\quad \times \cos(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.58c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_{\sigma i}^{Au\pm}}{\partial x'_\sigma \partial y'^2_\sigma} &= k_{b\sigma xi}^A (k_{b\sigma yi}^{Au\pm})^2 \\ &\quad \times \exp(-jk_{b\sigma yi}^{Au\pm} (y'_\sigma - f_i^{Au\pm} \bar{L}'_{y\sigma})) \\ &\quad \times \sin(k_{b\sigma xi}^A x'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^A, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.58d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm}}{\partial x'^3_\sigma} &= j(k_{b\sigma xi}^{Bu\pm})^3 \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \\ &\quad \times \cos(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.59a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm}}{\partial y'^3_\sigma} &= (k_{b\sigma yi}^B)^3 \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \\ &\quad \times \sin(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.59b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm}}{\partial x'^2_\sigma \partial y'_\sigma} &= k_{b\sigma yi}^B (k_{b\sigma xi}^{Bu\pm})^2 \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \\ &\quad \times \sin(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \quad i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \end{aligned} \quad (A2.59c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_{\sigma i}^{Bu\pm}}{\partial x'_\sigma \partial y'^2_\sigma} &= j(k_{b\sigma yi}^B)^2 k_{b\sigma xi}^{Bu\pm} \\ &\quad \times \exp(-jk_{b\sigma xi}^{Bu\pm} (x'_\sigma - f_i^{Bu\pm} \bar{L}'_{x\sigma})) \cos(k_{b\sigma yi}^B y'_\sigma), \end{aligned}$$



$$i=0, \dots, n_{s\sigma}^B, u=1, 2 \quad (\text{A2.59d})$$

次に、 $\nabla'_\sigma w_{f\sigma} = [\partial w_{f\sigma} / \partial x'_\sigma \quad \partial w_{f\sigma} / \partial y'_\sigma]^T$  の成分は、  
 $\partial H_i^{(2)}(z) / \partial z = -H_{i+1}^{(2)}(z)$  を利用して以下のように表せる。

$$\nabla'_\sigma w_{f\sigma} = \frac{j f_\sigma (\mathbf{r}'_\sigma - \bar{\mathbf{r}}_{f\sigma})}{8 k_{b\sigma} D_\sigma \rho_{f\sigma}} \left[ H_1^{(2)}(k_{b\sigma} \rho_{f\sigma}) - j H_1^{(2)}(-j k_{b\sigma} \rho_{f\sigma}) \right], \quad (\text{A2.60})$$

さらに、 $\nabla'_\sigma \mathbf{W}_{a\sigma}^{(\alpha)}$  は、以下のように表せる。

$$\nabla'_\sigma \mathbf{W}_{a\sigma}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \nabla'_\sigma W_{a\sigma 00}^{(\alpha)+} & \dots & \nabla'_\sigma W_{a\sigma n_{la}^{C(\alpha)} n_{ja}^{C(\alpha)}}^{(\alpha)-} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.61})$$

$$\nabla'_\sigma W_{a\sigma ij}^{(\alpha)\pm} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_{a\sigma ij}^{(\alpha)\pm}}{\partial x'_\sigma} & \frac{\partial W_{a\sigma ij}^{(\alpha)\pm}}{\partial y'_\sigma} \end{bmatrix}^T$$

$$\bullet = A, B, C, i=0, \dots, n_{la}^{(\alpha)}, j=0, \dots, n_{ja}^{(\alpha)} \quad (\text{A2.62})$$

ここで、各要素は、以下のように求められる。

$$\frac{\partial W_{a\sigma ij}^{(\alpha)\pm}}{\partial x'_\sigma} = \frac{1}{4 D_\sigma} \times$$

$$\left[ \begin{aligned} & \left( -k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{A(\alpha)} C_{J\sigma j}^{A(\alpha)} \\ & + \left( k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} - k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{A(\alpha)} S_{J\sigma j}^{A(\alpha)} \\ & + j \left( k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. - k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{A(\alpha)} C_{J\sigma j}^{A(\alpha)} \\ & - j \left( k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{A(\alpha)} S_{J\sigma j}^{A(\alpha)} \end{aligned} \right]$$

$$\times \exp \left( -j k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \left( z^{(\alpha)} (\mathbf{r}'_\sigma) - f_{ij}^{A(\alpha)\pm} \bar{L}_z^{(\alpha)} \right) \right),$$

$$i=0, \dots, n_{la}^{A(\alpha)}, j=0, \dots, n_{ja}^{A(\alpha)} \quad (\text{A2.63a})$$

$$\frac{\partial W_{a\sigma ij}^{(\alpha)\pm}}{\partial y'_\sigma} = \frac{1}{4 D_\sigma} \times$$

$$\left[ \begin{aligned} & \left( -k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{A(\alpha)} C_{J\sigma j}^{A(\alpha)} \\ & + \left( k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} - k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{A(\alpha)} S_{J\sigma j}^{A(\alpha)} \\ & + j \left( k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. - k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{A(\alpha)} C_{J\sigma j}^{A(\alpha)} \\ & - j \left( k_{xi}^{A(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} + k_{yj}^{A(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{A(\alpha)} S_{J\sigma j}^{A(\alpha)} \end{aligned} \right]$$

$$+ k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{A(\alpha)\pm} \left) S_{1\sigma i}^{A(\alpha)} S_{J\sigma j}^{A(\alpha)} \right]$$

$$\times \exp \left( -j k_{zij}^{A(\alpha)\pm} \left( z^{(\alpha)} (\mathbf{r}'_\sigma) - f_{ij}^{A(\alpha)\pm} \bar{L}_z^{(\alpha)} \right) \right),$$

$$i=0, \dots, n_{la}^{A(\alpha)}, j=0, \dots, n_{ja}^{A(\alpha)} \quad (\text{A2.63b})$$

$$\frac{\partial W_{a\sigma ij}^{B(\alpha)\pm}}{\partial x'_\sigma} = \frac{1}{4 D_\sigma} \times$$

$$\left[ \begin{aligned} & \left( -k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} + k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{B(\alpha)} C_{J\sigma j}^{B(\alpha)} \\ & + \left( k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} - k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{B(\alpha)} S_{J\sigma j}^{B(\alpha)} \\ & + j \left( k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} + k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. - k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{B(\alpha)} C_{J\sigma j}^{B(\alpha)} \\ & - j \left( k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} + k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{B(\alpha)} S_{J\sigma j}^{B(\alpha)} \end{aligned} \right]$$

$$\times \exp \left( -j k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \left( y^{(\alpha)} (\mathbf{r}'_\sigma) - f_{ij}^{B(\alpha)\pm} L_y^{(\alpha)} \right) \right),$$

$$i=0, \dots, n_{la}^{B(\alpha)}, j=0, \dots, n_{ja}^{B(\alpha)} \quad (\text{A2.64a})$$

$$\frac{\partial W_{a\sigma ij}^{B(\alpha)\pm}}{\partial y'_\sigma} = \frac{1}{4 D_\sigma} \times$$

$$\left[ \begin{aligned} & \left( -k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} + k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{B(\alpha)} C_{J\sigma j}^{B(\alpha)} \\ & + \left( -k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} + k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{B(\alpha)} S_{J\sigma j}^{B(\alpha)} \\ & + j \left( k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} + k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. - k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{B(\alpha)} C_{J\sigma j}^{B(\alpha)} \\ & - j \left( k_{xi}^{B(\alpha)} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} + k_{zj}^{B(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{B(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{B(\alpha)} S_{J\sigma j}^{B(\alpha)} \end{aligned} \right]$$

$$\times \exp \left( -j k_{yij}^{B(\alpha)\pm} \left( y^{(\alpha)} (\mathbf{r}'_\sigma) - f_{ij}^{B(\alpha)\pm} \bar{L}_y^{(\alpha)} \right) \right),$$

$$i=0, \dots, n_{la}^{B(\alpha)}, j=0, \dots, n_{ja}^{B(\alpha)} \quad (\text{A2.64b})$$

$$\frac{\partial W_{a\sigma ij}^{C(\alpha)\pm}}{\partial x'_\sigma} = \frac{1}{4 D_\sigma} \times$$

$$\left[ \begin{aligned} & \left( -k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{C(\alpha)} C_{J\sigma j}^{C(\alpha)} \\ & + \left( k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} - k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{C(\alpha)} S_{J\sigma j}^{C(\alpha)} \\ & + j \left( k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. - k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \right) C_{1\sigma i}^{C(\alpha)} C_{J\sigma j}^{C(\alpha)} \\ & - j \left( k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \right. \\ & \quad \left. + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \right) S_{1\sigma i}^{C(\alpha)} S_{J\sigma j}^{C(\alpha)} \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \Big) C_{1\sigma i}^{C(\alpha)} C_{1\sigma j}^{C(\alpha)} \\
& -j \Big( k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yx'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zx'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \\
& \quad + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xx'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \Big) S_{1\sigma i}^{C(\alpha)} S_{1\sigma j}^{C(\alpha)} \Big] \\
& \times \exp \Big( -jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} \Big( x^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_{\sigma}) - \int_{ij}^{C(\alpha)\pm} \bar{L}_x^{(\alpha)} \Big) \Big), \\
& i=0, \dots, n_{la}^{C(\alpha)}, j=0, \dots, n_{ja}^{C(\alpha)} \quad (A2.65a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_{a\sigma ij}^{C(\alpha)\pm}}{\partial y'_{\sigma}} &= \frac{1}{4D_{\sigma}} \times \\
& \Big[ \Big( -k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \\
& \quad + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \Big) S_{1\sigma i}^{C(\alpha)} C_{1\sigma j}^{C(\alpha)} \\
& + \Big( k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} - k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \\
& \quad + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \Big) C_{1\sigma i}^{C(\alpha)} S_{1\sigma j}^{C(\alpha)} \\
& + j \Big( k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \\
& \quad - k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{1\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \Big) C_{1\sigma i}^{C(\alpha)} C_{1\sigma j}^{C(\alpha)} \\
& - j \Big( k_{yi}^{C(\alpha)} \bar{c}_{yy'\sigma}^{(\alpha)} B_{2\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} + k_{zj}^{C(\alpha)} \bar{c}_{zy'\sigma}^{(\alpha)} B_{3\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \\
& \quad + k_{xij}^{C(\alpha)\pm} \bar{c}_{xy'\sigma}^{(\alpha)} B_{4\sigma ij}^{C(\alpha)\pm} \Big) S_{1\sigma i}^{C(\alpha)} S_{1\sigma j}^{C(\alpha)} \Big] \\
& \times \exp \Big( -jk_{xij}^{C(\alpha)\pm} \Big( x^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_{\sigma}) - \int_{ij}^{C(\alpha)\pm} \bar{L}_x^{(\alpha)} \Big) \Big), \\
& i=0, \dots, n_{la}^{C(\alpha)}, j=0, \dots, n_{ja}^{C(\alpha)} \quad (A2.65b)
\end{aligned}$$

最後に、 $\nabla'_{\sigma} w_{q\sigma}^{(\alpha)} = \left[ \partial w_{q\sigma}^{(\alpha)} / \partial x'_{\sigma} \quad \partial w_{q\sigma}^{(\alpha)} / \partial y'_{\sigma} \right]^T$  次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\nabla'_{\sigma} w_{q\sigma}^{(\alpha)} &= \frac{j}{8k_{b\sigma} D_{\sigma}} \int_{\Omega_{\sigma} = \Gamma_{s\sigma}^{(\alpha)}} p_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r}')) \frac{\mathbf{r}'_{\sigma} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'_{\sigma} - \mathbf{r}'\|} \\
& \times \left[ H_1^{(2)}(k_{b\sigma} \|\mathbf{r}'_{\sigma} - \mathbf{r}'\|) + j H_1^{(2)}(-jk_{b\sigma} \|\mathbf{r}'_{\sigma} - \mathbf{r}'\|) \right] d\Omega \\
& \quad (A2.66a)
\end{aligned}$$

そして、その成分は、 $\bullet = x, y$  のとき、それぞれ  $\bullet = \xi, \zeta$  として、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{q\sigma}^{(\alpha)}}{\partial \bullet'_{\sigma}} &= \frac{j}{8k_{b\sigma} D_{\sigma}} \int_0^{\bar{L}_{x\sigma}} \left\{ \int_{f_{1\sigma}(\xi)}^{f_{2\sigma}(\xi)} p_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\xi, \zeta)) \right. \\
& \times \frac{\bullet'_{\sigma} - \bullet}{\sqrt{(x'_{\sigma} - \xi)^2 + (y'_{\sigma} - \zeta)^2}} \\
& \times \left[ H_1^{(2)} \left( k_{b\sigma} \sqrt{(x'_{\sigma} - \xi)^2 + (y'_{\sigma} - \zeta)^2} \right) \right. \\
& \left. \left. + j H_1^{(2)} \left( -jk_{b\sigma} \sqrt{(x'_{\sigma} - \xi)^2 + (y'_{\sigma} - \zeta)^2} \right) \right] d\zeta \right\} d\xi, \\
& \quad (A2.66b)
\end{aligned}$$

### A3 重み付き残差法による定式化

前節で示した定義から、音圧の展開式(A2.1)と板の法線方向変位の展開式(A2.24)は、それぞれ、支配方程式(A1.31)と(A1.33)を厳密に満たすことが分かる。これは、WBMにより得られる数値解には数値分散誤差(numerical dispersion error) (元の連続系の支配方程式と、FEMのように空間を離散化することによって得られる離散系の支配方程式が異なることによって生じる数値誤差；連続系の波数と離散系の波数が異なることによって明示的に理解される)が含まれないことを表しており、広い周波数成分を有する音響振動応答を予測するために非常に重要な性質である。

本節では、変数の展開式(A2.1)と(A2.22)における未知数である、波動関数の寄与分を表す係数ベクトル  $\mathbf{p}^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, \dots, n_{\Omega}$ )と  $\mathbf{w}_{\sigma}$  ( $\sigma = 1, \dots, n_{\Sigma}$ )を決めるため、音響 BC と構造 BC に重み付き残差法(weighted residual method)を適用する。つまり、支配方程式は厳密に満たされるが、BC は積分の意味で近似的に満たされることになる。最小二乗法を用いた定式化も可能であるが、重み付き残差法を用いたほうが、数値解の収束速度が速いことが分かっている。

#### A3.1 音響境界条件に関する重み付き残差モデル

まず、音響部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  における音響 BC に、重み付き残差法を適用する。

##### A3.1.1 重み関数の定義

FEMにおけるガラーキン法(Galerkin method)と同様にして、音響部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  における重み関数  $\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$  を、次式のよう

$$\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \Phi^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)T} \Phi^{(\alpha)T}(\mathbf{r}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) \quad (A3.1)$$

##### A3.1.2 残差誤差関数の定義

そして、事前に与えられた境界値を用いて得られる値と、式(A2.1)および式(A2.22)で展開した変数を用いたときの計算式との差として定義される音響 BC の残差誤差関数を、次のように定義する。

$$R_p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) - \bar{p}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_p^{(\alpha)} = \bigcup_{i=1}^{n_p^{(\alpha)}} \Gamma_{pi}^{(\alpha)} \quad (A3.2)$$

$$R_v^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = L_v^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) - \bar{v}_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_v^{(\alpha)} = \bigcup_{i=1}^{n_v^{(\alpha)}} \Gamma_{vi}^{(\alpha)} \quad (A3.3)$$

$$R_z^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = L_z^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) - \frac{\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})}{\bar{Z}_n(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_z^{(\alpha)} = \bigcup_{i=1}^{n_z^{(\alpha)}} \Gamma_{zi}^{(\alpha)} \quad (A3.4)$$

また、凸部分領域間の連続性条件に関する残差関数は、インピーダンス連成手法では、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} R_{cz}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} R_{cz}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{r}) \\ &= L_{eq+}^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) - \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} L_{eq-}^{(\beta)}(\hat{p}^{(\beta)}(\mathbf{r})), \\ \mathbf{r} \in \Gamma_{cz}^{(\alpha)} &= \bigcup_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \Gamma_{cz}^{(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (A3.5)$$

一方、圧力-速度連成手法では、 $\alpha < \beta$  のとき圧力、 $\alpha > \beta$  のとき法線方向速度の連続性が課されるとしているので、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} R_{cp}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\beta=\alpha+1}^{n_\Omega} R_{cp}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{r}) = \hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=\alpha+1}^{n_\Omega} \hat{p}^{(\beta)}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{r} \in \Gamma_{cp}^{(\alpha)} &= \bigcup_{\beta=\alpha+1}^{n_\Omega} \Gamma_{cp}^{(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (A3.6a)$$

$$\begin{aligned} R_{cv}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} R_{cv}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{r}) \\ &= L_v^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} L_v^{(\beta)}(\hat{p}^{(\beta)}(\mathbf{r})), \\ \mathbf{r} \in \Gamma_{cv}^{(\alpha)} &= \bigcup_{\beta=1}^{\alpha-1} \Gamma_{cv}^{(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (A3.6b)$$

さらに、構造 BC に関する重み付き残差式は、

$$\begin{aligned} R_s^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\sigma=1}^{n_\Sigma} R_{s\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \\ &= L_v^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) - j\omega \sum_{\sigma=1}^{n_\Sigma} \bar{\zeta}_\sigma^{(\alpha)} \hat{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma), \\ \mathbf{r} \in \Gamma_s^{(\alpha)} &= \bigcup_{\sigma=1}^{n_\Sigma} \Gamma_{s\sigma}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{r}'_\sigma \in \Gamma_{s\sigma}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (A3.7)$$

によって与えられる。同様な誤差関数が、 $n_\Omega$  個の音響部分領域に対して導出される。

### A3.1.3 重み付き残差式の定式化

このとき、重み付き残差式は、導入した誤差関数を利用してインピーダンス連成手法では、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} L_v^{(\alpha)}(\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) R_p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_v^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma + \int_{\Gamma_z^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_z^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{cz}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_{cz}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma + \int_{\Gamma_s^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_s^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ & = 0 \end{aligned} \quad (A3.8a)$$

一方、圧力-速度連成手法を用いた場合、式(A3.8a)の左辺 4 番目の積分項が、以下の項に置き換えられる。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha)}} L_v^{(\alpha)}(\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) R_{cp}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{cv}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_{cv}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \end{aligned} \quad (A3.8b)$$

以下、例えば、波動関数ベクトル  $\Phi^{(\alpha)}$  は、局所位置ベクトル  $\mathbf{r}^{(\alpha)}$  で定義されることが明らかなので、ベクトルの位置依存性を表記から除くことにする。

### A3.1.4 圧力境界条件に関する項

まず、圧力展開式(A2.1)と重み関数展開式(A3.1)を、重み付き残差式(A3.8a)の左辺第 1 項に代入すると、式(A1.39a)を利用して、

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} L_v^{(\alpha)}(\tilde{p}^{(\alpha)}) R_p^{(\alpha)} d\Gamma \\ & = - \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \frac{j}{\rho\omega} (\nabla^{(\alpha)} \tilde{p}^{(\alpha)})^T \mathbf{n}^{(\alpha)} (\hat{p}^{(\alpha)} - \bar{p}) d\Gamma \\ & = - \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \frac{j}{\rho\omega} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)T} (\nabla^{(\alpha)} \Phi^{(\alpha)})^T \mathbf{n}^{(\alpha)} \\ & \quad \times (\Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_q^{(\alpha)} - \bar{p}) d\Gamma \\ & = \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)T} (\mathbf{A}_p^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} - \mathbf{b}_p^{(\alpha)}) \end{aligned} \quad (A3.9)$$

を得る。ここで、式(A2.17)も利用して、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_p^{(\alpha)} = - \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \mathbf{B}^{(\alpha)T} \mathbf{n}^{(\alpha)} \Phi^{(\alpha)} d\Gamma \quad (A3.10a)$$

$$\mathbf{b}_p^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \mathbf{B}^{(\alpha)T} \mathbf{n}^{(\alpha)} (p_q^{(\alpha)} - \bar{p}) d\Gamma \quad (A3.10b)$$

実際の数値計算では、音響部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  にある複数の圧力境界  $\Gamma_{pi}^{(\alpha)}$  ( $i = 1, \dots, n_p^{(\alpha)}$ ) の和とし、さらに境界積分は 2 重積分の形式を利用することになる。以下で導出する他の項についても同様である。

### A3.1.5 速度境界条件に関する項

また、重み付き残差式(A3.8a)の左辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_v^{(\alpha)} d\Gamma = \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} (L_v^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}) - \bar{v}_n) d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)T} \Phi^{(\alpha)T} \\ & \quad \times \left\{ \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)T} [\nabla^{(\alpha)} (\Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_q^{(\alpha)})] - \bar{v}_n \right\} d\Gamma \\ & = \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)T} (\mathbf{A}_v^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} - \mathbf{b}_v^{(\alpha)}) \end{aligned} \quad (A3.11)$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_v^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)T} \mathbf{n}^{(\alpha)T} \mathbf{B}^{(\alpha)} d\Gamma \quad (A3.12a)$$

$$\mathbf{b}_v^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\top} \left( \bar{\mathbf{v}}_n - \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \left( \nabla^{(\alpha)} p_q^{(\alpha)} \right) \right) d\Gamma \quad (\text{A3.12b})$$

### A3.1.6 法線方向インピーダンス境界条件に関する項

同様に、式(A3.8a)の左辺第3項は、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_Z^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_Z^{(\alpha)} d\Gamma &= \int_{\Gamma_Z^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \left( \mathbf{L}_v^{(\alpha)} \left( \hat{p}^{(\alpha)} \right) - \frac{\hat{p}^{(\alpha)}}{\bar{Z}_n} \right) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_Z^{(\alpha)}} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\top} \Phi^{(\alpha)\top} \\ &\quad \times \left\{ \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \left[ \nabla^{(\alpha)} \left( \Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_q^{(\alpha)} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\bar{Z}_n} \left( \Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_q^{(\alpha)} \right) \right\} d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\top} \left( \mathbf{A}_Z^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} - \mathbf{b}_Z^{(\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.13})$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_Z^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_Z^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\top} \left( \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \mathbf{B}^{(\alpha)} - \frac{1}{\bar{Z}_n} \Phi^{(\alpha)} \right) d\Gamma \quad (\text{A3.14a})$$

$$\mathbf{b}_Z^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_Z^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\top} \left( \frac{p_q^{(\alpha)}}{\bar{Z}_n} - \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \left( \nabla^{(\alpha)} p_q^{(\alpha)} \right) \right) d\Gamma \quad (\text{A3.14b})$$

### A3.1.7 連続性条件に関する項

#### A3.1.7.1 インピーダンス連成手法の適用

一方、部分領域間の連続性条件に関して、インピーダンス連成手法を採用した場合は、式(A3.8a)の左辺第4項が、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_{cZ}^{(\alpha)} d\Gamma &= \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \mathbf{L}_{eq+}^{(\alpha)} \left( \hat{p}^{(\alpha)} \right) d\Gamma \\ &\quad - \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha, \beta)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \mathbf{L}_{eq-}^{(\beta)} \left( \hat{p}^{(\beta)} \right) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \left[ \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \left( \nabla^{(\alpha)} \hat{p}^{(\alpha)} \right) - \frac{\hat{p}^{(\alpha)}}{\bar{Z}_c} \right] d\Gamma \\ &\quad - \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha, \beta)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \left[ \frac{-j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\beta)\top} \left( \nabla^{(\beta)} \hat{p}^{(\beta)} \right) - \frac{\hat{p}^{(\beta)}}{\bar{Z}_c} \right] d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha)}} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\top} \Phi^{(\alpha)\top} \\ &\quad \times \left\{ \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \left[ \nabla^{(\alpha)} \left( \Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_q^{(\alpha)} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\bar{Z}_c} \left( \Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_q^{(\alpha)} \right) \right\} d\Gamma \\ &\quad + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha, \beta)}} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\top} \Phi^{(\alpha)\top} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\beta)\top} \left[ \nabla^{(\beta)} \left( \Phi^{(\beta)} \mathbf{p}^{(\beta)} + p_q^{(\beta)} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{Z}_c} \left( \Phi^{(\beta)} \mathbf{p}^{(\beta)} + p_q^{(\beta)} \right) \right\} d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\top} \left( \mathbf{A}_{cZ}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{C}_{cZ}^{(\alpha, \beta)} \mathbf{p}^{(\beta)} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{b}_{cZ}^{(\alpha)} - \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{cZ}^{(\alpha, \beta)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.15})$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_{cZ}^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\top} \left( \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \mathbf{B}^{(\alpha)} - \frac{1}{\bar{Z}_c} \Phi^{(\alpha)} \right) d\Gamma \quad (\text{A3.16a})$$

$$\mathbf{C}_{cZ}^{(\alpha, \beta)} = \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha, \beta)}} \Phi^{(\alpha)\top} \left( \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\beta)\top} \mathbf{B}^{(\beta)} + \frac{1}{\bar{Z}_c} \Phi^{(\beta)} \right) d\Gamma, \quad \beta \neq \alpha \quad (\text{A3.16b})$$

$$\mathbf{b}_{cZ}^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\top} \left[ \frac{p_q^{(\alpha)}}{\bar{Z}_c} - \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \left( \nabla^{(\alpha)} p_q^{(\alpha)} \right) \right] d\Gamma \quad (\text{A3.16c})$$

$$\mathbf{b}_{cZ}^{(\alpha, \beta)} = - \int_{\Gamma_{cZ}^{(\alpha, \beta)}} \Phi^{(\alpha)\top} \left[ \frac{p_q^{(\beta)}}{\bar{Z}_c} + \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\beta)\top} \left( \nabla^{(\beta)} p_q^{(\beta)} \right) \right] d\Gamma, \quad \beta \neq \alpha \quad (\text{A3.16d})$$

#### A3.1.7.2 圧力-速度連成手法の適用

また、圧力-速度連成手法を採用した場合は、まず、式(A3.8b)の第1項から、

$$\begin{aligned} &- \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha)}} \mathbf{L}_v^{(\alpha)} \left( \tilde{p}^{(\alpha)} \right) R_{cp}^{(\alpha)} d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha)}} \frac{j}{\rho\omega} \left( \nabla^{(\alpha)} \tilde{p}^{(\alpha)} \right)^\top \mathbf{n}^{(\alpha)} \hat{p}^{(\alpha)} d\Gamma \\ &\quad + \sum_{\beta=\alpha+1}^{n_\Omega} \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha, \beta)}} \frac{j}{\rho\omega} \left( \nabla^{(\alpha)} \tilde{p}^{(\alpha)} \right)^\top \mathbf{n}^{(\alpha)} \hat{p}^{(\beta)} d\Gamma \\ &= - \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha)}} \frac{j}{\rho\omega} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\top} \left( \nabla^{(\alpha)} \Phi^{(\alpha)} \right)^\top \mathbf{n}^{(\alpha)} \\ &\quad \times \left( \Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_q^{(\alpha)} \right) d\Gamma \\ &\quad + \sum_{\beta=\alpha+1}^{n_\Omega} \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha, \beta)}} \frac{j}{\rho\omega} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\top} \left( \nabla^{(\alpha)} \Phi^{(\alpha)} \right)^\top \mathbf{n}^{(\alpha)} \\ &\quad \times \left( \Phi^{(\beta)} \mathbf{p}^{(\beta)} + p_q^{(\beta)} \right) d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\top} \left( \mathbf{A}_{cp}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{n_\Omega} \mathbf{C}_{cp}^{(\alpha, \beta)} \mathbf{p}^{(\beta)} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{b}_{cp}^{(\alpha)} - \sum_{\beta=\alpha+1}^{n_\Omega} \mathbf{b}_{cp}^{(\alpha, \beta)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.17})$$



を得る。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_{\text{cp}}^{(\alpha)} = -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{cp}}^{(\alpha)}} \mathbf{B}^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)} \Phi^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A3.18a})$$

$$\mathbf{C}_{\text{cp}}^{(\alpha,\beta)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{cp}}^{(\alpha,\beta)}} \mathbf{B}^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)} \Phi^{(\beta)} d\Gamma, \quad \alpha < \beta \quad (\text{A3.18b})$$

$$\mathbf{b}_{\text{cp}}^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{cp}}^{(\alpha)}} \mathbf{B}^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)} p_{\text{q}}^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A3.18c})$$

$$\mathbf{b}_{\text{cp}}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{cp}}^{(\alpha,\beta)}} \mathbf{B}^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)} p_{\text{q}}^{(\beta)} d\Gamma, \quad \alpha < \beta \quad (\text{A3.18d})$$

そして、式(A3.8b)の第2項から、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_{\text{cv}}^{(\alpha)} d\Gamma &= \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \mathbf{L}_{\text{v}}^{(\alpha)} (\hat{p}^{(\alpha)}) d\Gamma \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \int_{\Gamma_{\text{cp}}^{(\alpha,\beta)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \mathbf{L}_{\text{v}}^{(\beta)} (\hat{p}^{(\beta)}) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha)}} \frac{j}{\rho\omega} \tilde{p}^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} (\nabla^{(\alpha)} \hat{p}^{(\alpha)}) d\Gamma \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha,\beta)}} \frac{j}{\rho\omega} \tilde{p}^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(\beta)\text{T}} (\nabla^{(\beta)} \hat{p}^{(\beta)}) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha)}} \frac{j}{\rho\omega} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\text{T}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} \left[ \nabla^{(\alpha)} (\Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_{\text{q}}^{(\alpha)}) \right] d\Gamma \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha,\beta)}} \frac{j}{\rho\omega} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\text{T}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\beta)\text{T}} \\ &\quad \times \left[ \nabla^{(\beta)} (\Phi^{(\beta)} \mathbf{p}^{(\beta)} + p_{\text{q}}^{(\beta)}) \right] d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\text{T}} \left( \mathbf{A}_{\text{cv}}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \mathbf{C}_{\text{cv}}^{(\alpha,\beta)} \mathbf{p}^{(\beta)} - \mathbf{b}_{\text{cv}}^{(\alpha)} - \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \mathbf{b}_{\text{cv}}^{(\alpha,\beta)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.19})$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_{\text{cv}}^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{B}^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A3.20a})$$

$$\mathbf{C}_{\text{cv}}^{(\alpha,\beta)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha,\beta)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\beta)\text{T}} \mathbf{B}^{(\beta)} d\Gamma, \quad \alpha > \beta \quad (\text{A3.20b})$$

$$\mathbf{b}_{\text{cv}}^{(\alpha)} = -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} (\nabla^{(\alpha)} p_{\text{q}}^{(\alpha)}) d\Gamma \quad (\text{A3.20c})$$

$$\mathbf{b}_{\text{cv}}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{cv}}^{(\alpha,\beta)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\beta)\text{T}} (\nabla^{(\beta)} p_{\text{q}}^{(\beta)}) d\Gamma, \quad \alpha > \beta \quad (\text{A3.20d})$$

### A3.1.8 構造境界条件に関する項

最後に、式(A3.8a)の左辺第5項は、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\text{s}}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_{\text{s}}^{(\alpha)} d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_{\text{s}}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \mathbf{L}_{\text{v}}^{(\alpha)} (\hat{p}^{(\alpha)}) d\Gamma - \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} j\omega \hat{w}_{\sigma} d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Gamma_{\text{s}}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} (\nabla^{(\alpha)} \hat{p}^{(\alpha)}) d\Gamma \\ &\quad - \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} j\omega \hat{w}_{\sigma} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{\text{s}}^{(\alpha)}} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\text{T}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} \left[ \nabla^{(\alpha)} (\Phi^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + p_{\text{q}}^{(\alpha)}) \right] d\Gamma \\ &\quad - \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\text{T}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} j\omega \left[ \Psi_{\sigma} \mathbf{w}_{\sigma} + w_{\text{fs}\sigma} \right. \\ &\quad \left. + \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} (\mathbf{W}_{\text{as}\sigma}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + w_{\text{qs}\sigma}^{(\alpha)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_{\Omega}} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\beta)} (\mathbf{W}_{\text{as}\sigma}^{(\beta)} \mathbf{p}^{(\beta)} + w_{\text{qs}\sigma}^{(\beta)}) \right] d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)\text{T}} \left[ \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \mathbf{C}_{\text{as}\sigma}^{(\alpha)} \mathbf{w}_{\sigma} + (\mathbf{A}_{\text{s}}^{(\alpha)} + \mathbf{G}_{\text{s}}^{(\alpha)}) \mathbf{p}^{(\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_{\Omega}} \mathbf{G}_{\text{sc}}^{(\alpha,\beta)} \mathbf{p}^{(\beta)} - \mathbf{b}_{\text{s}}^{(\alpha)} - \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_{\Omega}} \mathbf{b}_{\text{sc}}^{(\alpha,\beta)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.21})$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{C}_{\text{as}\sigma}^{(\alpha)} = -j\omega \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \Psi_{\sigma} d\Gamma \quad (\text{A3.22a})$$

$$\mathbf{A}_{\text{s}}^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{s}}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{B}^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A3.22b})$$

$$\mathbf{G}_{\text{s}}^{(\alpha)} = -j\omega \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \left( \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} \right)^2 \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{W}_{\text{as}\sigma}^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A3.22c})$$

$$\mathbf{G}_{\text{sc}}^{(\alpha,\beta)} = -j\omega \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \left( \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\beta)} \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{W}_{\text{as}\sigma}^{(\beta)} d\Gamma \right), \quad \beta \neq \alpha \quad (\text{A3.22d})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\text{s}}^{(\alpha)} &= -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{\text{s}}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} (\nabla^{(\alpha)} p_{\text{q}}^{(\alpha)}) d\Gamma \\ &\quad + j\omega \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} (w_{\text{fs}\sigma} + \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} w_{\text{qs}\sigma}^{(\alpha)}) d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A3.22e})$$

$$\mathbf{b}_{\text{sc}}^{(\alpha,\beta)} = j\omega \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\beta)} \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} w_{\text{qs}\sigma}^{(\beta)} d\Gamma, \quad \beta \neq \alpha \quad (\text{A3.22f})$$

式(A3.22b,e)は、 $\bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} = \mathbf{n}_{\sigma}^{\text{T}} \mathbf{n}^{(\alpha)}$ 、つまり、 $\mathbf{n}^{(\alpha)\text{T}} = \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} \mathbf{n}_{\sigma}^{\text{T}}$ であることを利用すれば、

$$\mathbf{A}_{\text{s}}^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \mathbf{n}_{\sigma}^{\text{T}} \mathbf{B}^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A3.22b'})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\text{s}}^{(\alpha)} &= \sum_{\sigma=1}^{n_{\Sigma}} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} \int_{\Gamma_{\text{ss}\sigma}^{(\alpha)}} \Phi^{(\alpha)\text{T}} \left[ -\frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}_{\sigma}^{\text{T}} (\nabla^{(\alpha)} p_{\text{q}}^{(\alpha)}) \right. \\ &\quad \left. + j\omega (w_{\text{fs}\sigma} + \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} w_{\text{qs}\sigma}^{(\alpha)}) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A3.22e'})$$

とも書け、共通して $\sigma$ に関する和の形で表すこともできる。

### A3.1.9 行列方程式の導出

以上をまとめると、音響部分領域  $\Omega^{(\alpha)}$  に対して、重み付き残差式(A3.8a)、あるいは、部分領域 I/F の連続性条件に関する項を式(A3.8b)に置き換えた残差式は、次の形式となる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)T} & \left( \mathbf{C}_{as1}^{(\alpha)} \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{C}_{asn_\Sigma}^{(\alpha)} \mathbf{w}_{n_\Sigma} \right. \\ & + \mathbf{C}_a^{(\alpha,1)} \mathbf{p}^{(1)} + \cdots + \mathbf{C}_a^{(\alpha,\alpha-1)} \mathbf{p}^{(\alpha-1)} + \mathbf{A}_a^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} \\ & + \mathbf{C}_a^{(\alpha,\alpha+1)} \mathbf{p}^{(\alpha+1)} + \cdots + \mathbf{C}_a^{(\alpha,n_\Omega)} \mathbf{p}^{(n_\Omega)} \\ & - \mathbf{b}_c^{(\alpha,1)} - \cdots - \mathbf{b}_c^{(\alpha,\alpha-1)} \\ & \left. - \mathbf{b}_a^{(\alpha)} - \mathbf{b}_c^{(\alpha,\alpha+1)} - \cdots - \mathbf{b}_c^{(\alpha,n_\Omega)} \right) = 0 \quad (\text{A3.23}) \end{aligned}$$

ここで、行列  $\mathbf{A}_a^{(\alpha)}$  は、インピーダンス連成手法(imp)と圧力-速度連成手法(pv)で場合分けして、

$$\mathbf{A}_a^{(\alpha)} = \begin{cases} \mathbf{A}_p^{(\alpha)} + \mathbf{A}_v^{(\alpha)} + \mathbf{A}_Z^{(\alpha)} + \mathbf{A}_s^{(\alpha)} + \mathbf{G}_s^{(\alpha)} + \mathbf{A}_{cZ}^{(\alpha)} & (\text{imp}) \\ \mathbf{A}_p^{(\alpha)} + \mathbf{A}_v^{(\alpha)} + \mathbf{A}_Z^{(\alpha)} + \mathbf{A}_s^{(\alpha)} + \mathbf{G}_s^{(\alpha)} + \mathbf{A}_{cp}^{(\alpha)} + \mathbf{A}_{cv}^{(\alpha)} & (\text{pv}) \end{cases} \quad (\text{A3.24})$$

と定義される。ただし、行列  $\mathbf{A}_p^{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{A}_v^{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{A}_Z^{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{A}_s^{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{A}_{cZ}^{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{A}_{cp}^{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{A}_{cv}^{(\alpha)}$  は対称行列、 $\mathbf{G}_s^{(\alpha)}$  は非対称行列である。実装では、これら対称行列の性質を利用して計算の高速化が可能となる。

そして、行列  $\mathbf{C}_a^{(\alpha,\beta)}$ 、ベクトル  $\mathbf{b}_a^{(\alpha)}$ 、及び、ベクトル  $\mathbf{b}_c^{(\alpha,\beta)}$  も、同様に場合分けして、次のように定義される。

$$\mathbf{C}_a^{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} \mathbf{C}_{cZ}^{(\alpha,\beta)} + \mathbf{G}_{sc}^{(\alpha,\beta)} & (\text{imp}) \\ \mathbf{C}_{cp}^{(\alpha,\beta)} + \mathbf{G}_{sc}^{(\alpha,\beta)} & (\alpha < \beta) \\ \mathbf{C}_{cv}^{(\alpha,\beta)} + \mathbf{G}_{sc}^{(\alpha,\beta)} & (\alpha > \beta) \end{cases} \quad (\text{pv}) \quad (\text{A3.25})$$

$$\mathbf{b}_a^{(\alpha)} = \begin{cases} \mathbf{b}_p^{(\alpha)} + \mathbf{b}_v^{(\alpha)} + \mathbf{b}_Z^{(\alpha)} + \mathbf{b}_s^{(\alpha)} + \mathbf{b}_{cZ}^{(\alpha)} & (\text{imp}) \\ \mathbf{b}_p^{(\alpha)} + \mathbf{b}_v^{(\alpha)} + \mathbf{b}_Z^{(\alpha)} + \mathbf{b}_s^{(\alpha)} + \mathbf{b}_{cp}^{(\alpha)} + \mathbf{b}_{cv}^{(\alpha)} & (\text{pv}) \end{cases} \quad (\text{A3.26})$$

$$\mathbf{b}_c^{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} \mathbf{b}_{cZ}^{(\alpha,\beta)} + \mathbf{b}_{sc}^{(\alpha,\beta)} & (\text{imp}) \\ \mathbf{b}_{cp}^{(\alpha,\beta)} + \mathbf{b}_{sc}^{(\alpha,\beta)} & (\alpha < \beta) \\ \mathbf{b}_{cv}^{(\alpha,\beta)} + \mathbf{b}_{sc}^{(\alpha,\beta)} & (\alpha > \beta) \end{cases} \quad (\text{pv}) \quad (\text{A3.27})$$

ところで、重み付き残差式(A3.23)は、任意の  $\tilde{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  に対して成り立つので、括弧内の式は 0 でなければならない。これにより、未知波動関数寄与ベクトルに関する  $n_a^{(\alpha)}$  次元の線形連立方程式が得られる。

$$\left[ \mathbf{C}_{as1}^{(\alpha)} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{asn_\Sigma}^{(\alpha)} \quad \middle| \right]$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_a^{(\alpha,1)} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_a^{(\alpha,\alpha-1)} \quad \mathbf{A}_a^{(\alpha)} \\ & \mathbf{C}_a^{(\alpha,\alpha+1)} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_a^{(\alpha,n_\Omega)} \quad \left. \right] \\ & \times \left[ \mathbf{w}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{n_\Sigma}^T \quad \middle| \right. \\ & \mathbf{p}^{(1)T} \quad \cdots \quad \mathbf{p}^{(\alpha-1)T} \quad \mathbf{p}^{(\alpha)T} \\ & \left. \mathbf{p}^{(\alpha+1)T} \quad \cdots \quad \mathbf{p}^{(n_\Omega)T} \right]^T = \mathbf{b}^{(\alpha)} \quad (\text{A3.28}) \end{aligned}$$

ここで、

$$\mathbf{b}^{(\alpha)} = \mathbf{b}_a^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{b}_c^{(\alpha,\beta)} \quad (\text{A3.29})$$

である。このとき、未知波動関数寄与ベクトルの次元は、

$$n_s = \sum_{\sigma=1}^{n_\Sigma} n_{s\sigma} \quad (\text{A3.30a})$$

$$n_a = \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} n_a^{(\alpha)} \quad (\text{A3.30b})$$

としたときに、

$$n_{\text{WBM}} = n_s + n_a \quad (\text{A3.31})$$

であり、方程式の数と未知数の数はまだ一致していない。そこでまず、 $n_\Omega$  個の音響部分領域に対してそれぞれ得られる式(A3.28)を全て組み合わせる。すると、 $n_{\text{WBM}}$  個の未知の波動関数寄与ベクトルに関する  $n_a$  次元の連立線形方程式から成る音響 WB モデルが得られる。

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{C}_{as1}^{(1)} & \cdots & \mathbf{C}_{asn_\Sigma}^{(1)} & \mathbf{A}_a^{(1)} & \mathbf{C}_a^{(1,2)} & \cdots & \mathbf{C}_a^{(1,n_\Omega)} \\ \mathbf{C}_{as1}^{(2)} & \cdots & \mathbf{C}_{asn_\Sigma}^{(2)} & \mathbf{C}_a^{(2,1)} & \mathbf{A}_a^{(2)} & \cdots & \mathbf{C}_a^{(2,n_\Omega)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{as1}^{(n_\Omega)} & \cdots & \mathbf{C}_{asn_\Sigma}^{(n_\Omega)} & \mathbf{C}_a^{(n_\Omega,1)} & \mathbf{C}_a^{(n_\Omega,2)} & \cdots & \mathbf{A}_a^{(n_\Omega)} \end{array} \right] \\ & \times \left[ \mathbf{w}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{n_\Sigma}^T \quad \middle| \quad \mathbf{p}^{(1)T} \quad \mathbf{p}^{(2)T} \quad \cdots \quad \mathbf{p}^{(n_\Omega)T} \right]^T \\ & = \left[ \mathbf{b}^{(1)T} \quad \mathbf{b}^{(2)T} \quad \cdots \quad \mathbf{b}^{(n_\Omega)T} \right]^T \quad (\text{A3.32a}) \end{aligned}$$

そして、この音響 WB 行列方程式(A3.32a)は、

$$\left[ \mathbf{C}_{as} \quad \mathbf{A}_a \right] \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (\text{A3.32b})$$

のように簡潔な形式で書ける。ここで、以下を用いた。

$$\mathbf{w} = \left[ \mathbf{w}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{n_\Sigma}^T \right]^T \quad (\text{A3.33a})$$

$$\mathbf{p} = \left[ \mathbf{p}^{(1)T} \quad \cdots \quad \mathbf{p}^{(n_\Omega)T} \right]^T \quad (\text{A3.33b})$$

$$\mathbf{C}_{as} = \left[ \mathbf{C}_{as}^{(1)T} \quad \mathbf{C}_{as}^{(2)T} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{as}^{(n_\Omega)T} \right]^T \quad (\text{A3.33c})$$

$$\mathbf{C}_{as}^{(\alpha)} = \left[ \mathbf{C}_{as1}^{(\alpha)} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{asn_\Sigma}^{(\alpha)} \right] \quad (\text{A3.33d})$$

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^{(1)} & \mathbf{C}_a^{(1,2)} & \cdots & \mathbf{C}_a^{(1,n_\Omega)} \\ \mathbf{C}_a^{(2,1)} & \mathbf{A}_a^{(2)} & \cdots & \mathbf{C}_a^{(2,n_\Omega)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_a^{(n_\Omega,1)} & \mathbf{C}_a^{(n_\Omega,2)} & \cdots & \mathbf{A}_a^{(n_\Omega)} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.33e})$$

$$\mathbf{b}_a = [\mathbf{b}^{(1)\top} \quad \mathbf{b}^{(2)\top} \quad \cdots \quad \mathbf{b}^{(n_\Omega)\top}]^\top \quad (\text{A3.33f})$$

ここまでは、まだ音響 BC を考えただけなので、式(A3.32a)あるいは式(A3.32b)において方程式の数は足りない。この不足分は、次節で導出する構造 BC に関する重み付き残差式から得られる。

### A3.2 構造境界条件に関する重み付き残差モデル

本節では、構造 BC について考える。ただし、簡単のため、平板領域 $\Omega_\sigma$ の周囲に課される BC として、幾何学的 BC、つまり、境界 $\Gamma_{w\theta\sigma}$ の場合だけを考える。このとき、 $\bar{w}_\sigma = 0$ ,  $\bar{\theta}_{n\sigma} = 0$  とすれば固定 BC となる。

#### A3.2.1 重み関数の定義

まず、音響 BC の場合と同様にガラーキン法に基づいて、平板領域 $\Omega_\sigma$ における重み関数 $\tilde{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma)$ を、次式のように構造波動関数を利用して定義する。

$$\tilde{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma) = \Psi_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma) \tilde{\mathbf{w}}_\sigma = \tilde{\mathbf{w}}_\sigma^\top \Psi_\sigma^\top(\mathbf{r}'_\sigma) \quad (\text{A3.34})$$

#### A3.2.2 残差誤差関数の定義

続いて、構造 BC に関する残差誤差関数を定義する。これは、式(A1.45a,b)より、以下のように与えられる。

$$R_{w\sigma}(\mathbf{r}'_\sigma) = \hat{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma) - \bar{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma) \quad \mathbf{r}'_\sigma \in \Gamma_{w\theta\sigma} \quad (\text{A3.35a})$$

$$R_{\theta\sigma}(\mathbf{r}'_\sigma) = \mathbf{L}_{\theta\sigma}[\hat{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma)] - \bar{\theta}_{n\sigma}(\mathbf{r}'_\sigma) \quad \mathbf{r}'_\sigma \in \Gamma_{w\theta\sigma} \quad (\text{A3.35b})$$

#### A3.2.3 重み付き残差式の定式化

これより、重み付き残差式が、次式で与えられる。

$$\int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\tilde{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma)] R_{w\sigma}(\mathbf{r}'_\sigma) d\Gamma + \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{m\sigma}[\tilde{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma)] R_{\theta\sigma}(\mathbf{r}'_\sigma) d\Gamma = 0 \quad (\text{A3.36})$$

以下では、音響 BC の場合と同様に、ベクトルの位置依存性が明らかな場合には、それを表記から省略する。

#### A3.2.4 構造並進変位に関する項

まず、式(A3.36)の左辺第 1 式に、法線方向変位展開式(A2.23)と重み関数(A3.34)を代入し、式(A1.47a,b)を利用すると、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\tilde{w}_\sigma] R_{w\sigma} d\Gamma &= \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\tilde{w}_\sigma](\hat{w}_\sigma - \bar{w}_\sigma) d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_\sigma^\top \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\Psi_\sigma^\top] \left[ \Psi_\sigma \mathbf{w}_\sigma + w_{f\sigma} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. + \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \bar{\zeta}_\sigma^{(\alpha)} (\mathbf{W}_{a\sigma}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + w_{q\sigma}^{(\alpha)}) - \bar{w}_\sigma \right] d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_\sigma^\top \left( \mathbf{A}_{sw\sigma} \mathbf{w}_\sigma + \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \mathbf{C}_{sa\sigma}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} - \mathbf{f}_{sw\sigma} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.37})$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_{sw\sigma} = \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\Psi_\sigma^\top] \Psi_\sigma d\Gamma \quad (\text{A3.38a})$$

$$\mathbf{C}_{sa\sigma}^{(\alpha)} = \bar{\zeta}_\sigma^{(\alpha)} \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\Psi_\sigma^\top] \mathbf{W}_{a\sigma}^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A3.38b})$$

$$\mathbf{f}_{sw\sigma} = \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\Psi_\sigma^\top] \left( \bar{w}_\sigma - w_{f\sigma} - \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \bar{\zeta}_\sigma^{(\alpha)} w_{q\sigma}^{(\alpha)} \right) d\Gamma \quad (\text{A3.38c})$$

平板領域 $\Omega_\sigma$ の境界 $\Gamma_{w\theta\sigma}$ の形状が、あるスカラーのパラメータ $s$ を用いて $\mathbf{r}'_\sigma = \mathbf{r}'_\sigma(s)$  ( $\bar{l}_{w\theta\sigma}^L \leq s \leq \bar{l}_{w\theta\sigma}^H$ ,  $0 \leq \bar{l}_{w\theta\sigma}^L, \bar{l}_{w\theta\sigma}^H \leq \bar{L}'_{x\sigma}$ ,  $\mathbf{r}'_\sigma \in \Gamma_{w\theta\sigma}$ )で表されるとすると、実際に数値積分を行う際には、

$$\mathbf{A}_{sw\sigma} = \int_{\bar{l}_{w\theta\sigma}^L}^{\bar{l}_{w\theta\sigma}^H} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\Psi_\sigma^\top(\mathbf{r}'_\sigma(s))] \Psi_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma(s)) ds \quad (\text{A3.38a'})$$

$$\mathbf{C}_{sa\sigma}^{(\alpha)} = \bar{\zeta}_\sigma^{(\alpha)} \int_{\bar{l}_{w\theta\sigma}^L}^{\bar{l}_{w\theta\sigma}^H} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\Psi_\sigma^\top(\mathbf{r}'_\sigma(s))] \mathbf{W}_{a\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma(s)) ds \quad (\text{A3.38b'})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{sw\sigma} &= \int_{\bar{l}_{w\theta\sigma}^L}^{\bar{l}_{w\theta\sigma}^H} \mathbf{L}_{Q\sigma}[\Psi_\sigma^\top(\mathbf{r}'_\sigma(s))] \left( \bar{w}_\sigma(\mathbf{r}'_\sigma(s)) \right. \\ &\quad \left. - w_{f\sigma}(\mathbf{r}'_\sigma(s)) - \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \bar{\zeta}_\sigma^{(\alpha)} w_{q\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'_\sigma(s)) \right) ds \end{aligned} \quad (\text{A3.38c'})$$

という 1 次元積分の形式を利用する。

#### A3.2.5 構造回転変位に関する項

さらに、式(A3.36)の左辺第 2 式に、法線方向変位展開式(A2.22)と重み関数(A3.34)を代入すると、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{m\sigma}[\tilde{w}_\sigma] R_{\theta\sigma} d\Gamma &= \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{m\sigma}[\tilde{w}_\sigma](\mathbf{L}_{\theta\sigma}[\hat{w}_\sigma] - \bar{\theta}_{n\sigma}) d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_\sigma^\top \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{m\sigma}[\Psi_\sigma^\top] \left\{ -\mathbf{n}_\sigma'^\top \left[ \nabla_\sigma \left( \Psi_\sigma \mathbf{w}_\sigma + w_{f\sigma} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \bar{\zeta}_\sigma^{(\alpha)} (\mathbf{W}_{a\sigma}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} + w_{q\sigma}^{(\alpha)}) \right) \right] - \bar{\theta}_{n\sigma} \right\} d\Gamma \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_\sigma^\top \left( \mathbf{A}_{s\theta\sigma} \mathbf{w}_\sigma + \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \mathbf{C}_{sa\sigma}^{(\alpha)} \mathbf{p}^{(\alpha)} - \mathbf{f}_{s\theta\sigma} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.39})$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_{s\theta\sigma} = - \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{m\sigma}[\Psi_\sigma^\top] \mathbf{n}_\sigma'^\top \mathbf{B}_\sigma d\Gamma \quad (\text{A3.40a})$$

$$\mathbf{C}_{sa\theta\sigma}^{(\alpha)} = -\bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{m\sigma} [\Psi_{\sigma}^T] \mathbf{n}_{\sigma}^{rT} (\nabla'_{\sigma} \mathbf{W}_{a\sigma}^{(\alpha)}) d\Gamma \quad (\text{A3.40b})$$

$$\mathbf{f}_{s\theta\sigma} = \int_{\Gamma_{w\theta\sigma}} \mathbf{L}_{m\sigma} [\Psi_{\sigma}^T] \times \left\{ \bar{\theta}_{n\sigma} + \mathbf{n}_{\sigma}^{rT} \left[ \nabla'_{\sigma} \mathbf{w}_{f\sigma} + \sum_{\alpha=1}^{n_{\Omega}} \bar{\zeta}_{\sigma}^{(\alpha)} (\nabla'_{\sigma} \mathbf{w}_{q\sigma}^{(\alpha)}) \right] \right\} d\Gamma \quad (\text{A3.40c})$$

並進変位の場合の式(A3.38a',b')と同様に、実際に数値積分を行う際には1次元積分の形式を利用することになる。

### A3.2.6 行列方程式の導出

以上より、式(A3.37)と式(A3.39)を重み付き残差式(A3.36)に代入すると、平板領域 $\Omega_{\sigma}$ に対して、

$$\tilde{\mathbf{w}}_{\sigma}^T (\mathbf{A}_{s\sigma} \mathbf{w}_{\sigma} + \mathbf{C}_{sa\sigma}^{(1)} \mathbf{p}^{(1)} + \dots + \mathbf{C}_{sa\sigma}^{(n_{\Omega})} \mathbf{p}^{(n_{\Omega})} - \mathbf{f}_{s\sigma}) = 0 \quad (\text{A3.41})$$

のような形式の関係式が得られる。ここで、以下を用いた。

$$\mathbf{A}_{s\sigma} = \mathbf{A}_{sw\sigma} + \mathbf{A}_{s\theta\sigma} \quad (\text{A3.42a})$$

$$\mathbf{C}_{sa\sigma}^{(\alpha)} = \mathbf{C}_{saw\sigma}^{(\alpha)} + \mathbf{C}_{sa\theta\sigma}^{(\alpha)} \quad (\text{A3.42b})$$

$$\mathbf{f}_{s\sigma} = \mathbf{f}_{sw\sigma} + \mathbf{f}_{s\theta\sigma} \quad (\text{A3.42c})$$

ところで、重み付き残差式(A3.41)は、任意の $\tilde{\mathbf{w}}_{\sigma}$ に対して成り立つので、括弧内の式は0でなければならない。これにより、未知波動関数寄与ベクトルに関する $n_{s\sigma}$ 次元の線形連立方程式が得られる。

$$\left[ \mathbf{A}_{s\sigma} \mid \mathbf{C}_{sa\sigma}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{C}_{sa\sigma}^{(n_{\Omega})} \right] \times \left[ \mathbf{w}_{\sigma}^T \mid \mathbf{p}^{(1)T} \quad \dots \quad \mathbf{p}^{(n_{\Omega})T} \right]^T = \mathbf{f}_{s\sigma} \quad (\text{A3.43})$$

この式(A3.43)を $n_{\Sigma}$ 個の平板についてまとめると、構造BCに関する部分のみの $n_{\text{WBM}}$ 個の未知数を含む $n_s$ 次元の代数連立方程式となる。

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A}_{s1} & & 0 & \mathbf{C}_{sa1}^{(1)} & \dots & \mathbf{C}_{sa1}^{(n_{\Omega})} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mathbf{A}_{sn_{\Sigma}} & \mathbf{C}_{sasn_{\Sigma}}^{(1)} & \dots & \mathbf{C}_{sasn_{\Sigma}}^{(n_{\Omega})} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{w}_1^T & \dots & \mathbf{w}_{n_{\Sigma}}^T & \mathbf{p}^{(1)T} & \dots & \mathbf{p}^{(n_{\Omega})T} \end{array} \right]^T = \mathbf{f}_s \quad (\text{A3.44a})$$

ここで、

$$\mathbf{f}_s = \left[ \mathbf{f}_{s1}^T \quad \dots \quad \mathbf{f}_{sn_{\Sigma}}^T \right]^T \quad (\text{A3.45})$$

とした。これは、さらに簡潔に次式のように書ける。

$$\left[ \mathbf{A}_s \quad \mathbf{C}_{sa} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{f}_s \quad (\text{A3.44b})$$

ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{A}_{sn_{\Sigma}} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.46a})$$

$$\mathbf{C}_{sa} = \left[ \mathbf{C}_{sa1}^T \quad \dots \quad \mathbf{C}_{sasn_{\Sigma}}^T \right]^T \quad (\text{A3.46b})$$

$$\mathbf{C}_{sa\sigma} = \left[ \mathbf{C}_{sa\sigma}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{C}_{sa\sigma}^{(n_{\Omega})} \right], \quad \sigma = 1, \dots, n_{\Sigma} \quad (\text{A3.46c})$$

$$\mathbf{f}_s = \left[ \mathbf{f}_{s1}^T \quad \dots \quad \mathbf{f}_{sn_{\Sigma}}^T \right]^T \quad (\text{A3.46d})$$

## A3.3 波動モデルの組み立て

最終的に、構造 BC(A3.44a)あるいは(A3.44b)と、音響 BCと連続性条件から得られる形式(A3.32a)あるいは(A3.32b)を組み合わせると、 $n_{\text{WBM}}$  個の未知波動関数寄与ベクトル  $\mathbf{w}$  と  $\mathbf{p}$  に関する行列方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{C}_{sa} \\ \mathbf{C}_{as} & \mathbf{A}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{b}_a \end{bmatrix} \quad (\text{A3.47})$$

FEM と対照的に、WBM においては、その成分が複素数で、周波数独立な部分行列に分けることのできない密な行列をもつ行列方程式となる。これは、BEM の場合と同様である。しかしながら、WBM の大きな利点は、連立代数方程式の次元が、FEM や BEM などの要素ベース手法と比べて非常に小さく抑えられることである。このような速い収束性により、WBM は、動的な応答計算に対して計算要求の小さい方法となるため、中間周波数領域を含む広い周波数領域を含んだ問題が解析できるのである。

## A4 数値計算

式(A3.47)を数値計算によって得るためには、以下に示す点に注意する必要がある。

### A4.1 音響波動関数の選択

式(A2.1)、あるいは、式(A2.2)の級数は、実際は無限和であるが、数値実装のために有限個 $n_a^{(\alpha)}$ に打ち切る(truncation)必要がある。この打ち切り方は、FEM と同様に周波数に依存しない一定の個数を用いるか、周波数に依存して可変にするかのいずれかの方法が考えられる（もちろん、FEM が、周波数によってアダプティブにメッシュを再詳細化するのであれば、後者となる）。後者の規則については、物理的な音響波数  $k$  を利用して線形に決めることが提案されている。ただし、構造との連成問題の場合、式(A1.35a)で定義される構造波数  $k_{b\sigma}$  も考える必要があるため、 $k_{\max}^{(\alpha)} = \max(k, k_{b\sigma})$  ( $\sigma$  は、境界  $\Gamma_{s\sigma}^{(\alpha)}$  に含まれるもの全て) を考えることになる（通常は、 $k$  よりも  $k_{b\sigma}$  のほうがかなり大きいので、構造の影響のほうが効いてくる）。このとき、式



(A2.2)式の最初の級数に関しては、物理波数  $k_{\max}^{(\alpha)}$  の打ち切り係数  $N_a^{(\alpha)}$  倍より小さいか、およそ等しい波数要素をもつ波動関数が波動関数の集合として加えられる。

$$\frac{n_{la}^{A(\alpha)} \pi}{\bar{L}_x^{(\alpha)}} \simeq N_a^{(\alpha)} k_{\max}^{(\alpha)}, \quad \frac{n_{ja}^{A(\alpha)} \pi}{\bar{L}_y^{(\alpha)}} \simeq N_a^{(\alpha)} k_{\max}^{(\alpha)} \quad (\text{A4.1})$$

よって、実際には、

$$n_{la}^{A(\alpha)} = \text{CEIL} \left( \frac{N_a^{(\alpha)} k_{\max}^{(\alpha)} \bar{L}_x^{(\alpha)}}{\pi} \right) \quad (\text{A4.2a})$$

$$n_{ja}^{A(\alpha)} = \text{CEIL} \left( \frac{N_a^{(\alpha)} k_{\max}^{(\alpha)} \bar{L}_y^{(\alpha)}}{\pi} \right) \quad (\text{A4.2b})$$

と書くことができる。ここで、 $\text{CEIL}(\bullet)$ は、与えられた倍精度指数よりも次に大きな整数を返す切り上げ整数化関数である。式(A2.2)の他の級数に対しても同様で、

$$n_{la}^{B(\alpha)} = n_{la}^{A(\alpha)} \quad (\text{A4.2c})$$

$$n_{ja}^{B(\alpha)} = \text{CEIL} \left( \frac{N_a^{(\alpha)} k_{\max}^{(\alpha)} \bar{L}_z^{(\alpha)}}{\pi} \right) \quad (\text{A4.2d})$$

$$n_{la}^{C(\alpha)} = n_{ja}^{A(\alpha)} \quad (\text{A4.2e})$$

$$n_{ja}^{C(\alpha)} = n_{ja}^{B(\alpha)} \quad (\text{A4.2f})$$

と決められる。

このとき、 $N_a$  は、計算量を最小にするためにできるだけ小さな値を設定したい訳であるが、音響波動関数に含まれる最小の波長が、問題の波長  $\lambda_{\min}^{(\alpha)} = 2\pi/k_{\max}^{(\alpha)}$  の半分より大きくならないようにするため、 $N_a^{(\alpha)} = 2$  (または、それ以上) とすることが推奨される。ただし、ここで示した規則は、非常に低周波における解析のために適用する際には注意を要する。つまり、小さな波数  $k_{\max}^{(\alpha)}$  では、各整数が全て小さくなり、極端な場合には全て 1 に等しくなってしまう (このとき、 $n_a^{(\alpha)} = 24$ )。一般に、この波動関数の数は、部分領域内部の圧力場を正確に表すには十分でなく、実際にはさらに多くの波動関数が必要となる。しかし、低周波領域における波動関数の数は、扱う問題に依存してしまい、いまのところ事前に決める規則が得られていないので、問題に応じて試してみるしかない (数値誤差は基本的に BC に含まれるので、BC がどの程度満たされているかを確認すれば、波動関数の数が十分かどうかは判断できる)。

## A4.2 構造波動関数の選択

A4.1 節で述べた音響波動関数の打ち切り規則と同様の規則を、構造波動関数の打ち切りにも適用する。ただし、連成問題の場合、構造波数だけでなく音響波数も考える必要

があるため、 $k_{\max, \sigma} = \max(k, k_{b\sigma})$  と考えればよい。このとき、打ち切り係数  $N_{b\sigma}$  を用いて、

$$\frac{n_{s\sigma}^A \pi}{\bar{L}'_{x\sigma}} \simeq N_{b\sigma} k_{\max, \sigma}, \quad \frac{n_{y\sigma}^B \pi}{\bar{L}'_{y\sigma}} \simeq N_{b\sigma} k_{\max, \sigma} \quad (\text{A4.3})$$

より、以下のように決められる。

$$n_{s\sigma}^A = \text{CEIL} \left( \frac{N_{b\sigma} k_{\max, \sigma} \bar{L}'_{x\sigma}}{\pi} \right) \quad (\text{A4.4a})$$

$$n_{y\sigma}^B = \text{CEIL} \left( \frac{N_{b\sigma} k_{\max, \sigma} \bar{L}'_{y\sigma}}{\pi} \right) \quad (\text{A4.4b})$$

この場合も、 $N_{b\sigma} = 2$  (または、それ以上) が推奨される。

## A4.3 波動関数の線形独立性

### A4.3.1 音響波動関数の線形独立性

音響波動関数において、式(A2.4)に示した波数関係式が常に成り立つ。このとき、さらに励振周波数が次の関係を有する場合、つまり、励振周波数が、部分領域の外接矩形領域に関する共鳴周波数と一致する場合を考える。

$$\begin{aligned} k^2 &= \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 = \left( \frac{l\pi}{\bar{L}_x^{(\alpha)}} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{\bar{L}_y^{(\alpha)}} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\bar{L}_z^{(\alpha)}} \right)^2 \\ &= \left( k_{xl}^{A(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{ym}^{A(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{zn}^{B(\alpha)} \right)^2 \\ &= \left( k_{xl}^{A(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{ym}^{A(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{zn}^{C(\alpha)} \right)^2 \\ &= \left( k_{xl}^{B(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{ym}^{A(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{zn}^{B(\alpha)} \right)^2 \\ &= \left( k_{xl}^{B(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{ym}^{C(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{zn}^{B(\alpha)} \right)^2 \\ &= \left( k_{xl}^{A(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{ym}^{C(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{zn}^{C(\alpha)} \right)^2 \\ &= \left( k_{xl}^{B(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{ym}^{C(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{zn}^{C(\alpha)} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A4.5})$$

ここで、 $l, m, n = 0, 1, \dots$  である。よってこの状況では、式(A2.4)が、

$$\begin{aligned} &\left( k_{xl}^{A(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{ym}^{A(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{zlm}^{A(\alpha)\pm} \right)^2 = \\ &\left( k_{xl}^{B(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{yln}^{B(\alpha)\pm} \right)^2 + \left( k_{zn}^{B(\alpha)} \right)^2 = \\ &\left( k_{xmn}^{C(\alpha)\pm} \right)^2 + \left( k_{ym}^{C(\alpha)} \right)^2 + \left( k_{zn}^{C(\alpha)} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

と書けるので、式(A4.5)と比べることによって、

$$k_{xl}^{A(\alpha)} = k_{xl}^{B(\alpha)} = k_{xmn}^{C(\alpha)\pm} \quad (\text{A4.7a})$$

$$k_{ym}^{A(\alpha)} = k_{ym}^{C(\alpha)} = k_{yln}^{B(\alpha)\pm} \quad (\text{A4.7b})$$

$$k_{zn}^{B(\alpha)} = k_{zn}^{C(\alpha)} = k_{zlm}^{A(\alpha)\pm} \quad (\text{A4.7c})$$

が成り立つことが分かる。よって、音響波動関数は、

$$\begin{aligned}
\Phi_{lm}^{A(\alpha)+} &= \cos(k_{xl}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{ym}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \exp(-jk_{zn}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\
&= \cos(k_{xl}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{ym}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \exp(-jk_{zn}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}), \quad (A4.8a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{lm}^{A(\alpha)-} &= \cos(k_{xl}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{ym}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \exp(jk_{zn}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\
&= \cos(k_{xl}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{ym}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \exp(jk_{zn}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}), \quad (A4.8b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{lm}^{B(\alpha)+} &= \cos(k_{xl}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \exp(-jk_{ym}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zn}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\
&= \cos(k_{xl}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \exp(-jk_{ym}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zn}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}), \quad (A4.9a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{lm}^{B(\alpha)-} &= \cos(k_{xl}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \exp(jk_{ym}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zn}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}) \\
&= \cos(k_{xl}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \exp(jk_{ym}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zn}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}), \quad (A4.9b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{mn}^{C(\alpha)+} &= \exp(-jk_{xl}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{ym}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zn}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}), \\
&= \exp(-jk_{xl}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{ym}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zn}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}) \quad (A4.10a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{mn}^{C(\alpha)-} &= \exp(jk_{xl}^{A(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{ym}^{A(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zn}^{C(\alpha)} z^{(\alpha)}), \\
&= \exp(jk_{xl}^{B(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{ym}^{C(\alpha)} y^{(\alpha)}) \cos(k_{zn}^{B(\alpha)} z^{(\alpha)}) \quad (A4.10b)
\end{aligned}$$

と書けるから、

$$\Phi_{lm}^{A(\alpha)+} + \Phi_{lm}^{A(\alpha)-} = \Phi_{ln}^{B(\alpha)+} + \Phi_{ln}^{B(\alpha)-} = \Phi_{mn}^{C(\alpha)+} + \Phi_{mn}^{C(\alpha)-} \quad (A4.11)$$

が成り立つので、これらの関数は線形従属であることが分かる。

したがって、実際には式(A4.5)を満たす  $l, m, n$  が存在するとき、 $\Phi_{lm}^{A(\alpha)+}$  と  $\Phi_{lm}^{A(\alpha)-}$  の組、 $\Phi_{ln}^{B(\alpha)+}$  と  $\Phi_{ln}^{B(\alpha)-}$  の組、及び  $\Phi_{mn}^{C(\alpha)+}$  と  $\Phi_{mn}^{C(\alpha)-}$  の組のいずれか 2 組を音響波動関数から削除して、線形独立な関数列のみを残さなければ式(A3.47)を解くことはできない。

#### A4.3.2 構造波動関数の線形独立性

構造波動関数において、式(A2.25)に示した波数関係式が常に成り立つ。このとき、さらに励振周波数が次の関係を有する場合、つまり、励振周波数と、構造領域の外接矩形

領域と同じ大きさの非減衰平板が周囲を単純支持された場合の共振周波数とが一致する場合を考える。

$$f = \frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{l\pi}{\bar{L}'_{x\sigma}} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{\bar{L}'_{y\sigma}} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{E_\sigma \bar{t}_\sigma^2}{12\rho_\sigma (1-\nu_\sigma^2)}} \quad (A4.12)$$

これより、平板が非減衰であるとき、

$$k_{b\sigma}^4 = \left[ \left( \frac{l\pi}{\bar{L}'_{x\sigma}} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{\bar{L}'_{y\sigma}} \right)^2 \right]^2 = \left[ \left( k_{b\sigma xl}^A \right)^2 + \left( k_{b\sigma ym}^B \right)^2 \right]^2 \quad (A4.13)$$

が成り立つ。ここで、 $l, m = 0, 1, \dots$  である。よって、式(A2.25)と式(A4.12)から、次式が成り立つ。

$$k_{b\sigma xl}^A = k_{b\sigma xm}^{Bu\pm} \quad (u = 1, 2) \quad (A4.14a)$$

$$k_{b\sigma ym}^B = k_{b\sigma yl}^{Au\pm} \quad (u = 1, 2) \quad (A4.14b)$$

このとき、

$$\Psi_{\sigma l}^{Au+} = \cos(k_{b\sigma xl}^A x'_\sigma) \exp(-jk_{b\sigma ym}^B y'_\sigma) \quad (A4.15a)$$

$$\Psi_{\sigma l}^{Au-} = \cos(k_{b\sigma xl}^A x'_\sigma) \exp(jk_{b\sigma ym}^B y'_\sigma) \quad (A4.15b)$$

$$\Psi_{\sigma m}^{Bu+} = \exp(-jk_{b\sigma xl}^A x'_\sigma) \cos(k_{b\sigma ym}^B y'_\sigma) \quad (A4.16a)$$

$$\Psi_{\sigma m}^{Bu-} = \exp(jk_{b\sigma xl}^A x'_\sigma) \cos(k_{b\sigma ym}^B y'_\sigma) \quad (A4.16b)$$

と書けるから、

$$\Psi_{\sigma l}^{Au+} + \Psi_{\sigma l}^{Au-} = \Psi_{\sigma m}^{Bu+} + \Psi_{\sigma m}^{Bu-} \quad (A4.17)$$

が成り立つので、これらの関数は線形従属であることが分かる。

したがって、実際には式(A4.12)を満たす  $l$  と  $m$  が存在するとき、 $\Psi_{\sigma l}^{Au+}$  と  $\Psi_{\sigma l}^{Au-}$  の組と  $\Psi_{\sigma m}^{Bu+}$  と  $\Psi_{\sigma m}^{Bu-}$  の組のいずれか 1 組を構造波動関数から削除して、線形独立な関数列のみを残さなければ式(A3.47)を解くことはできない。

#### A4.4 数値積分について

式(A3.47)の行列方程式における各部分行列を計算するためには、数値積分が必要となる。通常、この数値積分を行うためには、ガウス-ルジャンドル積分(Gauss-Legendre quadrature)を用いると効率的である。ただし、WBM では、波動関数が問題領域において (FEM の場合のように、形状関数を局所的に定義するのとは対照的に) 大域的に定義されるので、高精度の (高次の) 数値積分が要求される。つまり、ガウス-ルジャンドル積分では、多くの積分点を使用することになる。WBM では、波動関数の集合における数値的な波数の  $x, y, z$  成分の内の最大値を  $k_{\max}$  (それに対応する最小の波長を  $\lambda_{\min}$ ) と置くと、単位長さあたりの積分点の個数  $n_l$  を、

$$n_I \geq 2k_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda_{\min}} \quad (\text{A4.18})$$

のように決めることが提案されている。つまり、この規則に従うと、最大波数  $k_{\max}$  を有する伝播波の波長 ( $\lambda_{\min}$ ) あたり少なくとも 12 個の積分点を用いることになる。実際には、ある係数  $N_I$  を用いて、

$$n_I = \text{CEIL}(2N_I k_{\max}) \quad (\text{A4.19})$$

と調整できるように設定すると便利である。ここで、 $N_I$  は 1 以上が推奨される。

一方、通常は、積分区間を部分区間に分割し、各区間における積分を足し合わせたほうが計算精度の良い積分値が得られる。WBM でも、境界積分する際の積分区間を部分区間に分ければ、各部分区間では、FEM で用いられるような低次のガウス-ルジャンドル積分が利用できる。