

次世代電気推進機関のための外部電磁場による プラズマ電流励起モデル

羽田 亨*¹, 篠原 俊二郎*¹, 都木 恭一郎*²,
谷川 隆夫*³, 船木 一幸*⁴

Theoretical Modeling of Next Generation Electrodeless Plasma Thrusters Driven By External Electromagnetic Field

T. HADA*¹, S. SHINOHARA*¹, K. TOKI*², T. TANIKAWA*³ and I. FUNAKI*⁴

Abstract

Electric thrusters, characterized with high specific impulse, are suited to long duration operations such as planetary missions. On the other hand, the performance of many of the conventional electric thrusters is severely limited by electrode wastage. In order to overcome this difficulty, some novel methods of electrodeless discharge and electromagnetic acceleration have been proposed by making use of a compact helicon plasma source. With this application in mind, we here discuss some basic elements on the behaviour of a collisional, cylindrical plasma, when it is driven by an external time-varying electromagnetic field. By introducing a linear response function, we argue that the external field can resonantly drive the plasma to large amplitude oscillations, which may be utilized for the next generation thrusters.

Keywords: electrodeless plasma thruster, compact helicon source

1. はじめに

宇宙空間での衛星推進および制御, 特に外惑星探査等の長距離航行ミッションにおいて, 比推力の高い電気推進機関は有用であり, 今後の惑星探査計画等において活躍が期待されている^[1]. その一方, DC アークジェット, イオンスラスタなど, 既に実用化されている多くの電気推進機関は有電極であり, 電極の摩耗が長時間オペレーションのネックとなっている. この問題を根本的に解決するために, 都木達^[2,3] はヘリコン波プラズマ源を外部アンテナ (外部電磁場) により加速する, プラズマ生成と加速のいずれの段階にも電極を使用しない「オール無電極型」の推進機関を提案し, ここ数年間にわたり基礎的プラズマ実験を行ってきた (最新の研究成果は, 本講演集の都木等の論文^[4] を参照のこと). 実験先行で始まった研究であり, 特にヘリコンプラズマ生成に関しては既に多くの興味深い結果が報告されている^[5]. しかし, これと相補的に行われるべき理論および数値モデル計算に関しては, まだ十分に解析がされていないのが現状である.

* 1 Kyushu University

* 2 本年5月に故人とられました. 謹んでご冥福をお祈り申し上げます.

* 3 Tokai University

* 4 ISAS/JAXA

そこで本稿ではその手始めとして、時間変動する外部電磁場を外部から加えた際の円柱プラズマの挙動を理論的に検討した結果を報告する。我々が提案する無電極電気推進機関にはいくつかの種類があるが（そのうちの2つについては^[5]を参照）、これらの多くに共通する動作原理は、外部電流により励起された回転方向のプラズマ内部電流と、背景磁場とによって得られるローレンツ力を利用してプラズマ流を得る、というものである。特に、推進機関の末端部近くでは背景磁場に径成分（円柱座標で r 方向の成分）があるため、これと周方向（同 z 方向）プラズマ電流とのローレンツ力により、軸方向（同 z 方向）の推進力が得られる。また、推進機関の中心部では背景磁場はほぼ軸方向であるが、これと周方向プラズマ電流とのローレンツ力によりプラズマは中心軸方向に加速され、これが中心部での圧力上昇により軸方向に変換されて推力となることが期待される。

したがって、現実の推進機関を解析するにあたっては、非一様な背景磁場およびプラズマ分布のもとで、外部電磁場がどのようなプラズマ内部電流を励起し、それがどのような力を生み、そしてそれが最終的にどの程度の推進力を生み出すか、を定量的に評価することが目標となる。しかし本稿は、このような現実的な系の詳細からは離れ、物理的視点から外部電磁場とプラズマ挙動とのカップリングを理解することに重点を置く。そのため、プラズマ、デバイスともに無限長の円柱状と仮定し、衝突項は線形摩擦で近似、またプラズマ応答は外部電磁場に対して線形の範囲のみを考える等の仮定を行う。本稿での議論の目的は、簡略化された系の振る舞いを物理的視点から理解することにより、より現実的な推進機関の解析を考える際のゼロ次モデルを提供することにある。

以下、次章では議論の出発点となる基礎方程式を示した後、プラズマ線形応答が従う方程式系を書き下し、これに基づいてプラズマ境界に与えた外部電流に対するプラズマ応答の一般解を求める。続く3章では、外部電流に対するプラズマ内部電流密度の応答関数を定義し、その性質について議論する。また、内部電流密度の積分値と外部電流密度の比として電流増幅率を定義し、これの外部電流周波数および衝突周波数に対する依存性について詳しい考察を行う。4章では本稿で得られた結果をまとめ、現実的なパラメータを用いた推進力の概算を与え、さらに今後の展望について議論する。

2. モデル

2.1 基礎方程式系

ヘリコン波により生成されたプラズマに時間変動する外部電流（アンテナ電流）を加えた際のプラズマ応答を考える。ここでは簡単のために（1）円柱座標系（ r, ϕ, z ）をとったときに物理量は径方向の座標 r のみに依存（つまり、 m, k をそれぞれ周方向（ ϕ 方向）、軸方向（ z 方向）のモード数としたときに $m=0$ かつ $k=0$ ）、（2）ヘリコンプラズマを流体として扱えるものと仮定、（3）ゼロ次の磁場およびプラズマ密度は空間的に一様、（4）散逸効果としては静止している中性粒子との衝突のみを考慮、（5）プラズマ圧力は無視できるほど小さい、（6）外部励起に対してプラズマの線形応答のみが重要、の各項目を仮定する。これらの仮定はモデルを拡張することにより、順次取り除いていくことができる。基礎方程式は以下の通りである（ここではガウス単位系を用いているが、すぐ後に無次元化する）。例えばフル粒子シミュレーション結果との比較検討を行うときのために、実験結果との比較の際には無視することがほとんどである変位電流やイオン運動の効果などを、とりあえずの出発点としてここには含めている。

$$\frac{\partial n_\sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\sigma \mathbf{u}_\sigma) = 0 \quad (1)$$

$$n_\sigma m_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\sigma \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_\sigma = n_\sigma q_\sigma (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_\sigma}{c} \times \mathbf{B}) - n_\sigma m_\sigma \nu_\sigma \mathbf{u}_\sigma \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3,4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad (5,6)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{ext} + \sum_{\sigma} n_{\sigma} q_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \quad ; \quad \rho = \sum_{\sigma} n_{\sigma} q_{\sigma} \quad (7,8)$$

ここに、 σ は粒子種（イオンまたは電子）、 \mathbf{j}_{ext} は外部電流密度（外部コイルによりテータ・ピンチ的に励起）、 v_{σ} は中性粒子との衝突周波数、その他は通常の記法と同様である。なお、典型的な状況では $v_e \gg v_i$ であるが、ここではとりあえず v_i も残しておく（式（25）の導出後に $v = v_e$ 、 $v_i = 0$ とする）。

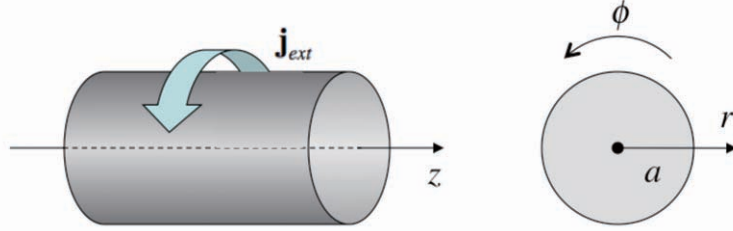


図1 本稿で考えるプラズマのモデル．半径 a の円柱内部にプラズマは一様密度で存在し、また、軸方向の長さは非常に長いものとする．さらにコイルド・プラズマを仮定、散逸効果としては中性粒子との線形衝突のみを考慮する．このような円柱プラズマのまわりに周方向の外部電流を流した際のプラズマの応答を線形の範囲で議論する．

2.2 プラズマの線形応答

外部電流により作られる電磁場がプラズマ中に浸透するスケールは、外部電流の周波数に依存する．これは主に次の2つの理由による：(i) 外部電流の周波数がプラズマ中の自由モードの周波数帯内にあるか否かにより、励起が波動としてプラズマ中に伝播するか、エヴァネッセントモードとして浸透するかが決まるため、(ii) プラズマに散逸過程が含まれる場合、散逸の周波数依存性により特性長（スキニング長）が異なるため^[6]．これらはいずれも重要であるが、特に(ii)については散逸過程をどのような形でモデルに取り入れるかに結果が依存することに留意が必要である．

プラズマの線形応答を考えるため、すべての物理量をゼロ次量と摂動とに分け、またゼロ次量に関しては磁場を $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ 、 B_0 およびプラズマ密度 n_0 （準中性条件よりイオンと電子の0次密度は等しい）を一定としよう．摂動は時間に対してフーリエ変換し、 $\partial/\partial t \sim -i\omega$ と置き換える．ここで ω は摂動の複素角周波数である．摂動電場によりプラズマ運動が励起され、したがって摂動電流が生じるが、これはStix^[7]に類似の記法を用いれば、以下のようにまとめられる．

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{ext} - \frac{i\omega}{4\pi} \begin{bmatrix} S-1 & -iD & 0 \\ iD & S-1 & 0 \\ 0 & 0 & P-1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E} \quad (9)$$

$$R = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\Pi_{\sigma}^2}{\omega(\omega_{\sigma} + \Omega_{\sigma})} \quad ; \quad L = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\Pi_{\sigma}^2}{\omega(\omega_{\sigma} - \Omega_{\sigma})} \quad ; \quad P = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\Pi_{\sigma}^2}{\omega\omega_{\sigma}} \quad (10 \text{ a, b, c})$$

$$S = \frac{R+L}{2} = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{\sigma}\Pi_{\sigma}^2}{\omega(\omega_{\sigma}^2 - \Omega_{\sigma}^2)} \quad ; \quad D = \frac{R-L}{2} = \sum_{\sigma} \frac{\Pi_{\sigma}^2\Omega_{\sigma}}{\omega(\omega_{\sigma}^2 - \Omega_{\sigma}^2)} \quad (10 \text{ d, e})$$

ここで、粒子種 σ に対するプラズマ角周波数、 $\Pi_{\sigma}^2 = 4\pi n_{\sigma} q_{\sigma}^2 / m_{\sigma}$ 、およびサイクロトロン角周波数（符号を含んでいる）、 $\Omega_{\sigma} = q_{\sigma} B_0 / m_{\sigma} c$ を定義した．

マックスウェルの方程式、(3)と(5)より、電流効果を含む波動方程式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad (11)$$

が得られるが、電流は外部電流とプラズマ電流の和であること (9) を用い、さらに (11) を各方向の成分毎に書き下すと以下を得る。

$$\frac{im}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) + \frac{m^2}{r^2} E_r + k^2 E_r + ik \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\omega^2}{c^2} (SE_r - iDE_\phi) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_{ext,r} \quad (12 a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) \right) + im \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E_r}{r} \right) - \frac{mk}{r} E_z + k^2 E_\phi - \frac{\omega^2}{c^2} (SE_\phi + iDE_r) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_{ext,\phi} \quad (12 b)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{m^2}{r^2} E_z + \frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) - \frac{mk}{r} E_\phi - \frac{\omega^2}{c^2} PE_z = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_{ext,z} \quad (12 c)$$

ここで $\partial/\partial\phi \sim im$, $\partial/\partial z \sim ik$ は周方向および軸方向のモード数である。本稿では詳しくは述べないが、非軸対称 ($m \neq 0$) の時間変動電場 (もしくは磁場) によりプラズマ回転を励起し、これを推進に利用する可能性について現在検討中である [4]。このようなスキームにおいては方程式系は複雑になるが $m \neq 0$ としておかなければならない。また、現実のプラズマの軸方向長さは有限であり、ヘリコン源および開放端での境界条件を考えると $k \neq 0$ とする必要がある。しかしここでは外部電磁場によるプラズマ運動励起の物理過程について考えることに重点を置き、もっとも基本的な $m = k = 0$ モードについてのみ詳しい考察をする。さらに外部電流は周方向のみの成分を持つとすれば、上の方程式は以下のように簡単化される。

$$-\omega^2 (SE_r - iDE_\phi) = 0 \quad (13 a)$$

$$-c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) \right) - \omega^2 (SE_\phi + iDE_r) = 4\pi i\omega j_{ext,\phi} \quad (13 b)$$

$$-\frac{c^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - \omega^2 PE_z = 0 \quad (13 c)$$

2.3 プラズマ領域の波動

前節の (13 c) は、いわゆる正常波モードについての波動方程式である。このモードは、ここで想定している周方向の外部電流とカップルしないため、少なくとも線形の範囲では励起されないため、以下では考慮しない。

一方、いわゆる異常波は周方向の外部電流により励起される。上の (13 a, b) から E_r を消去することにより

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial r} + \left(K - \frac{1}{r^2} \right) E_\phi = -\frac{4\pi i\omega}{c^2} j_{ext,\phi}, \quad K = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{RL}{S} \quad (14 a, b)$$

が得られる。以下、話を整理しやすくするために、この節においてのみ散逸 $\nu = 0$ としておく (後ほどまた散逸を取り入れる)。式 (14) は異常波に対する外部励起を伴う波動方程式であるが、波動の伝播特性は式中にあらわれる K の符号に依存する。イオン+電子の中性プラズマの場合には、

$$\frac{RL}{S} = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{LH}^2)(\omega^2 - \omega_{UH}^2)} \quad (15)$$

である。ここに電磁波のカットオフ角周波数 ω_R , ω_L は

$$\omega^2 \pm \Omega_e \omega - (\Omega_i \Omega_e + \Pi^2) = 0 \quad (16)$$

の2根 (両方とも正とする), $\Pi^2 = \Pi_e^2 + \Pi_i^2$ はプラズマ角周波数の2乗, 高域および低域混成角周波数は

$$\omega_{UH}^2 = \Pi^2 + \Omega_e^2 \quad ; \quad \frac{1}{\omega_{LH}^2} = \frac{1}{\Omega_i \Omega_e} + \frac{1}{\Omega_i^2 + \Pi_i^2} \quad (17 \text{ a, b})$$

により与えられる. 低域混成角周波数については $\Pi^2 \gg \Omega_e^2$ ならば $\omega_{LH} \sim (|\Omega_i \Omega_e|)^{1/2}$, $\Pi^2 \ll \Omega_e^2$ ならば $\omega_{LH} \sim \Omega_i$ であるから, これらの特性周波数の大小関係は

$$\omega_{LH} < \omega_L < \omega_{UH} < \omega_R \quad (18)$$

であり, したがって, 異常波の自由モードが存在する周波数範囲は

$$0 < \omega^2 < \omega_{LH}^2, \quad \omega_L^2 < \omega^2 < \omega_{UH}^2, \quad \omega_R^2 < \omega^2 \quad (19 \text{ a, b, c})$$

の各領域である.

円柱プラズマにおける異常波モード解 (ただし z 方向, ϕ 方向のモード数=0) は, 考慮する波動の角周波数 ω により定まる K の符号によって,

$$E_\phi = \sum_{\lambda} [c_\lambda J_1(\lambda r) + d_\lambda N_1(\lambda r)] \quad (0 < K = \lambda^2) \quad (20 \text{ a})$$

あるいは

$$E_\phi = \sum_{\lambda} [c_\kappa I_1(\kappa r) + d_\kappa K_1(\kappa r)] \quad (0 > K = -\kappa^2) \quad (20 \text{ b})$$

の形に書ける. 前者は波動伝播モードであり, 後者はエヴァネッセントである. 上式で, J_n , N_n は n 次のベッセル関数, I_n , K_n は n 次の変形されたベッセル関数, c_λ および d_λ は波動のスペクトルである. 中心軸 ($r=0$) において $N_n(r)$ と $K_n(r)$ は発散するため, 内部解としては使えない ($d_\lambda = d_\kappa = 0$) が, プラズマが存在する場合の外部解の構成要素としては考慮しておく必要がある. このように解をベッセル関数で簡単にあらわすことができるのは, 背景磁場および背景プラズマ密度ともに一定であると仮定しているためである. この仮定が成り立たない場合, 一般には K が位置の関数となり, 固有値方程式を数値的に解くことが必要となる.

2.4 真空領域の波動

真空領域では $S=P=R=L=1$, $D=0$ であるから, E_ϕ に対する方程式は

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) E_\phi = 0 \quad (21)$$

となる. この解は (20 a) で $\lambda = \omega/c$ と置いたものである.

2.5 境界条件

それぞれの領域に於ける解を接続することにより, 系全体を満たす解が得られる. 接続のための境界条件としては, 境界に沿った閉回路を考え, この上での (5) の閉積分を考えることにより,

$$E_{\phi}^I = E_{\phi}^{II} \quad ; \quad E_z^I = E_z^{II} \quad (22 \text{ a, b})$$

が得られる。ただし I と II は接する 2 つの領域である。一方、境界を含む閉曲面を考え、この上での (6) の面積積分を考え

$$E_r^I = E_r^{II} \quad (23)$$

が得られる。これらの関係式が成り立つ前提は、境界面に局在した非常に大きな磁場変動がないことと、境界面に大きな電荷が存在しないことである (両方とも正しい)。一方、外部電流は「境界面に局在した電流」であり、 $\partial E_{\phi}/\partial r$ の境界条件に関与する。実際、外部電流を $\mathbf{j}_{ext} = (0, J_{ext}(t)\delta(r-a), 0)$ の形で与え、 $r=a$ の近傍で (13 b) の r 積分を行い、さらに (22 a) を用いると

$$\frac{\partial E_r^{II}}{\partial r} - \frac{\partial E_r^I}{\partial r} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial J_{ext}(t)}{\partial t} \quad (24)$$

を得る。ここで $J_{ext}(t)$ は単位軸方向長さあたりの電流 (単位は [電流]/[長さ])、 $\delta(r-a)$ はディラックのデルタ関数 (単位は 1 /[長さ])、 $J_{ext}(t)$ は外部電流密度 (単位は [電流]/[長さ]²) である。

2.6 方程式系のまとめと基本解

実際のヘリコンプラズマの場合、例えば背景磁場の大きさを 100 [G]、プラズマ密度を 10^{12} [1/cc]、イオン種をアルゴンとすると、プラズマ周波数と高域混成周波数は同じオーダーで $\Pi/2\pi \sim \omega_{UH}/2\pi \sim 10^{10}$ [1/s]、電子サイクロトロン周波数 $\Omega_e/2\pi \sim 3 \times 10^8$ [1/s]、イオンサイクロトロン周波数 $\Omega_i/2\pi \sim 4 \times 10^3$ [1/s]、低域混成周波数 $\omega_{LH}/2\pi \sim 10^6$ [1/s] である。したがって、外部電流の周波数領域として低域混成周波数以下から電子サイクロトロン周波数程度までを想定すると、これはプラズマ周波数・高域混成周波数よりも数オーダー小さく、スケール分離が成り立っている。この点を踏まえ、さらに前の節では無視した散逸効果を取り入れてあらためて (14 b) の K を書きなおすと以下の様になる。

$$K = \frac{\omega^2 RL}{c^2 S} \sim \frac{\omega_{LH}^2}{V_A^2} \frac{\omega((\omega + i\nu_i) + \mu(\omega + i\nu_e))}{\omega_{LH}^2 - (\omega + i\nu_i)(\omega + i\nu_e)} \quad (25)$$

ここで $\omega_{LH} \sim (|\Omega_e \Omega_i|)^{1/2}$ 、 $\mu = m_e/m_i$ は電子とイオンの質量比、また $V_A = c\omega_{LH}/\Pi$ はアルヴェン速度である。ここで用いたスケール分離は、変位電流を落とすことにより電磁波を除外することに対応している (したがって、フル粒子シミュレーションなどの電磁波を含む数値計算結果との比較の際には注意が必要である)。

散逸に関しては、典型的な値として電子と中性粒子との衝突周波数 $\nu_e \sim 10^6 - 10^7$ [1/s]、イオンと中性粒子との衝突周波数 $\nu_i \sim 10^4$ [1/s]、質量比 (アルゴンを仮定) $\mu \sim 1.3 \times 10^{-5}$ を考慮すると、電子と中性粒子との衝突が最も重要であることがわかる。したがって以下では $\nu = \nu_e$ と置き、散逸過程としてはこの効果のみを考えることにする。一般に K は複素数であるから、(20) にあらわれるベッセル関数の引数も複素数となり、数値解を求めるためには複素ベッセル関数を評価する必要がある。波動解とエヴァネッセント解の区別を K の実数部の正負により判断すると、 $|\omega| < \omega_{LH}$ が波動、 $|\omega| > \omega_{LH}$ がエヴァネッセント解であることがわかる。さらに ν が有限な場合には減衰効果が加わる。特に低周波極限 $\omega \rightarrow 0$ のもとでは

$$K \rightarrow \frac{\omega^2}{V_A^2} \quad (26)$$

となって、アルヴェン速度 V_A で伝播する磁気音波に帰着する (このような低周波波動の場合、軽い電子による波動伝播の減衰は (25) からわかるように $\mu\nu_e$ のオーダーとなり無視できる)。

これらをふまえて、時間を $1/\omega_{LH}$ で、空間を $\Delta = V_A/\omega_{LH}$ でそれぞれ規格化し、新しい変数を $w = \omega/\omega_{LH}$ 、 $\tilde{w} = (\omega + i\nu)/\omega_{LH}$ 、 $\xi = r/\Delta$ 、 $\xi_0 = a/\Delta$ により定義すると、方程式系 (14)、(21)、(24) は以下のようにまとめることができる。

プラズマ内部 (領域 I) :

$$E'' + \frac{E'}{\xi} + \left(\frac{w^2}{1-w\tilde{w}} - \frac{1}{\xi^2} \right) E = 0 \quad (27)$$

この解のうち $r=0$ で非発散の条件を満たすのは, c, d を定数として

$$E = cJ_1(\lambda\xi) \quad \left(0 < \frac{w^2}{1-w\tilde{w}} = \lambda^2 \right) \quad (28 \text{ a})$$

$$E = dI_1(\kappa r) \quad \left(0 > \frac{w^2}{1-w\tilde{w}} = -\kappa^2 \right) \quad (28 \text{ b})$$

プラズマ外部 (領域 II) :

$$E'' + \frac{E'}{\xi} - \frac{E}{\xi^2} = 0 \quad (29)$$

この解のうち $\xi \rightarrow \infty$ で非発散の条件を満たすのは e を定数として,

$$E = \frac{e}{\xi} \quad (30)$$

接続条件: プラズマと真空の境界, $\xi_0 = a/\Delta$ にて,

$$[E] = 0 \quad ; \quad [E'] = f \quad (31 \text{ a, b})$$

ただし, ' は ξ による微分を示す. また記述を簡潔にするために, $f = -4\pi i w \omega_{LH}^2 J_{ex}(w) / c^2 V_A$ および $E = E\phi$ とおいた.

各領域および接続条件を満たす解:

上のすべてを満たす解は, $Re(w^2/1-w\tilde{w}) > 0$ のとき, $\lambda^2 = w^2/(1-w\tilde{w})$ として,

$$E^I(\xi) = \frac{f J_1(\lambda\xi)}{\lambda J_0(\lambda\xi_0)} \quad ; \quad E^{II}(\xi) = \frac{f J_1(\lambda\xi_0)}{\lambda J_0(\lambda\xi_0)} \frac{\xi_0}{\xi} \quad (32 \text{ a, b})$$

また $Re(w^2/1-w\tilde{w}) < 0$ のとき, $\kappa^2 = w^2/(w\tilde{w}-1)$ として,

$$E^I(\xi) = \frac{f I_1(\kappa\xi)}{\kappa I_0(\kappa\xi_0)} \quad ; \quad E^{II}(\xi) = \frac{f I_1(\kappa\xi_0)}{\kappa I_0(\kappa\xi_0)} \frac{\xi_0}{\xi} \quad (33 \text{ a, b})$$

である. 散逸 $\nu=0$ の場合に対して, これらの解の様子を図 2 に示す. 外部励起の大きさは $f=1$ として与えている.

なお無散逸 ($\nu=0$) で, 外部電流による励起も無い ($f=0$) ときには, $J_0(\lambda\xi_0)=0$ を満たす λ を用いた (32) が離散固有モード解として存在する. 変形されたベッセル関数 $I_0(\kappa\xi_0)$ には零点はないため, 同様の解は (33) に対しては存在しない. 後述するように, 外部電流が離散固有モードの一つと共鳴条件を満たす場合, 大振幅のプラズマ内部電流が誘起され得る. 散逸があるとき ($\nu \neq 0$) には固有モードは厳密には存在しないが, 散逸が小さければ離散固有モードに「近い」解が, 固有モードと同様の役割を果たす.

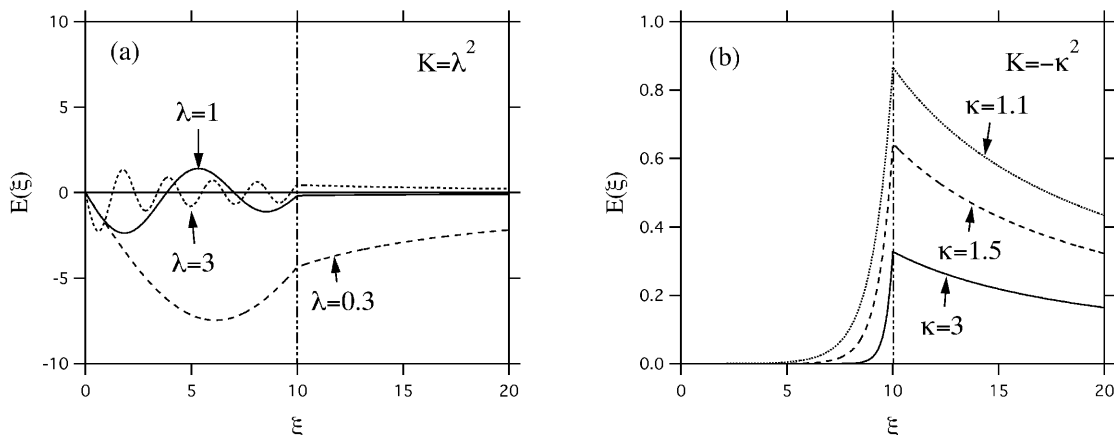


図2 外部電流により励起される周方向電場 E を、低域混成長 $\Delta = V_A/\omega_{LH}$ により規格化された半径 $\xi = r/\Delta$ の関数として、いくつかの K の値に対して示す。ここに V_A はアルヴェン速度、 ω_{LH} は低域混成角周波数、 K は一般化された径方向波数の2乗で(25)により定義されている。外部アンテナは $\xi_0 = a/\Delta = 10$ に置かれ (a はプラズマ半径)、励起の強さは $f = -4\pi i w \omega_{LH}^2 J_{ext}(w)/c^2 V_A = 1$ とする。(a) は $K = \lambda^2 > 0$ 、すなわち伝播性波動の場合で、 $\lambda = 0.3, 1, 3$ が低域混成周波数で規格化された周波数 $w = 0.287, 0.707, 0.948$ に対応し、(b) は $K = -\kappa^2 < 0$ 、つまりエヴァネッセント解の場合であり、 $\kappa = 1.1, 1.5, 3$ が $w = 2.40, 1.34, 1.06$ に対応する。

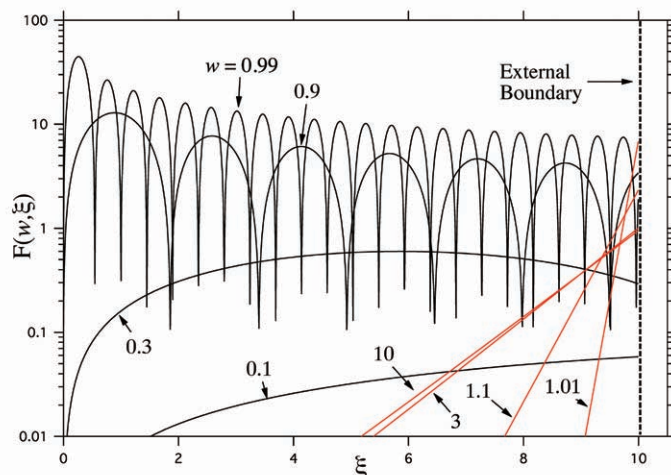


図3 応答関数 $F(w, \xi)$ の絶対値を規格化された周波数 $w = \omega/\omega_{LH}$ をパラメータとした位置 $\xi = r/\Delta$ の関数として示す。ここで ω_{LH} は低域混成角周波数、 $\Delta = V_A/\omega_{LH}$ は低域混成長、 V_A はアルヴェン速度であり、アンテナ位置は $\xi_0 = 10$ である。伝播性波動 ($|w| < 1$, 黒で示す) はプラズマ内部まで情報が伝わるが、エヴァネッセント ($|w| > 1$, 赤で示す) の場合には励起はアンテナ近傍に限られる。

3. 解析結果と議論

3.1 応答関数

ある外部電流 J_{exp} を周方向に与えたときに、プラズマ内部でどのような内部電流密度 j_ϕ が生じるかを評価しよう。先にも触れたように J_{exp} は単位軸方向長さあたりの外部電流だから、特徴的長さとして $\Delta = V_A/\omega_{LH}$ を用いて、

$$j_\phi(w, \xi) = F(w, \xi) \frac{J_{exp}(w)}{\Delta} \quad (34)$$

と置くことにより，無次元量である応答関数 $F(w, \xi)$ を定義できる．伝播領域では (32 a) より

$$E_\phi(w, \xi) = -\frac{J_1(\lambda\xi)}{\lambda J_0(\lambda\xi_0)} \frac{4\pi i\omega J_{ext}(w)}{c^2 \Delta} \quad (35)$$

であり，一方 (13 a) よりプラズマ中では

$$E_r(w, \xi) = \frac{iD}{S} E_\phi(w, \xi) \quad (36)$$

だから，これらを (9) に代入すると，

$$j_\phi(w, \xi) = -\frac{w^2}{1-w^2} \frac{J_1(\lambda\xi)}{\lambda J_0(\lambda\xi_0)} \frac{J_{ext}(w)}{\Delta} = -\frac{\lambda J_1(\lambda\xi)}{J_0(\lambda\xi_0)} \frac{J_{ext}(w)}{\Delta} \quad (37 a)$$

が得られる．同様に，エヴァネッセント領域では

$$j_\phi(w, \xi) = -\frac{\kappa I_1(\kappa\xi)}{I_0(\kappa\xi_0)} \frac{J_{ext}(w)}{\Delta} \quad (37 b)$$

である．図3に $\nu=0$ の場合についての応答関数

$$F(w, \xi) = -\frac{\lambda J_1(\lambda\xi)}{J_0(\lambda\xi_0)} (|w| < 1) \quad ; \quad -\frac{\kappa I_1(\kappa\xi)}{I_0(\kappa\xi_0)} (|w| > 1) \quad (38 a, b)$$

の例を示す．散逸が無い場合なので， $w < 1$ と $w > 1$ がそれぞれ伝播とエヴァネッセントに対応する．伝播性の場合には w が比較的大きい (1に近い) と，波数も大きく (r 方向の「波長」が短く)，例えば $w = 0.9, 0.99$ のときには r 方向に多数回振動しながらプラズマ中心領域にまで波動が伝わっていることがわかる．同じ伝播性でも低周波数 ($w = 0.1, 0.3$) の場合には，境界条件の影響を大きく受けるようになる．エヴァネッセントの場合には，励起は外部境界近傍に限られる．さきに定義した $\kappa = (w^2/(w\tilde{w}-1))^{1/2}$ (の実数部分) は浸透スケール (スキン長) の逆数に対応するが，これは $w \sim 1$ で発散，また $w \rightarrow \infty$ で1に収束する．つまり， $\omega \sim \omega_{LH}$ では内部電流励起はアンテナのごく近傍のみに限られ， $\omega \gg \omega_{LH}$ では励起スケールは低域混成スケール ($= \Delta = V_A/\omega_{LH}$) 程度になることがわかる．

3.2 電流増幅率

これまで見てきたように，外部電流によって励起されるプラズマ電流 $j_\phi(w, \xi)$ は，径方向の座標 ξ の関数として求めることができる．その関数形は外部電流の角周波数 $w = \omega/\omega_{LH}$ の値によって大きく異なり，プラズマ電流励起が境界付近に集中して起こる場合，プラズマ中心近くまで励起される場合など，さまざまである．そこで電気推進に利用できる内部電流の一つの目安として，総プラズマ電流の径方向の積分値をとり，これを外部電流により規格化した以下の量を考える．

$$R(w) = \frac{\Delta}{J_{ext}(w)} \int_0^{\xi_0} j_\phi(w, \xi) d\xi \quad (39)$$

式 (37) を使えばこの積分は容易に実行出来て，結果は

$$R(w) = 1 - \frac{1}{J_0(\lambda\xi_0)} \quad ; \quad \lambda^2 = \frac{w^2}{1-w\tilde{w}} \quad (40)$$

となる。この関数 $R(w)$ は、与えた外部電流がプラズマ内部にどのくらいの総電流を周方向に励起できるか、つまり電流増幅率（電流励起効率）に対応する重要な無次元量である。

図4に、3種類の散逸率に対する $R(w)$ の $w = \omega/\omega_{LH}$ 依存性を示す。プラズマ半径は $\xi_0 = a/\Delta = 10$ で固定し、衝突周波数は (a) $\nu/\omega_{LH} = 0.1$, (b) $\nu/\omega_{LH} = 1$, (c) $\nu/\omega_{LH} = 10$ である。実線、点線、破線はそれぞれ $Re(R)$, $Im(R)$, $|R|$ である。

まず散逸が大きい場合 (c) を見てみよう。励起周波数 w が大きい領域では、励起はエヴァネッセントであり、基本的には外部電流と等量の総プラズマ電流が境界近くに励起される。したがって $w > 1$ では $R(w) \sim 1$ である。これは、散逸の大きさによらず、(a)–(c) の全てに共通する性質である（縦軸のスケールが異なることに注意）。一方 $w < 1$ でも1に近い周波数では、散逸が小さければ励起は伝播性となる領域であるが、 $\nu/\omega = 1$ のためにやはり境界近傍にローカライズした減衰波形となるため、 $w > 1$ の場合と同様に $R \sim 1$ となっている。 $w \sim 1$ 付近で $|R|$ が1を超えることについては後述する。さらに励起周波数を低くしていくと、励起は伝播性となるが、同時に境界条件に拘束されるため大振幅電流が励起されにくく、 $w \rightarrow 0$ の極限で $R \rightarrow 0$ となる。この傾向も ν の値によらず (a)–(c) の全てに見られる。

次に散逸が $\nu/\omega_{LH} = 1$ の場合 (b) を見よう。高周波数 ($w > 1$) で $R \sim 1$, 低周波数 ($w < 0.03$) で $R \sim 0$ であるのは (c) と同様であるが、その中間領域 ($w \sim 0.3$) に大きな R のピークがあるのが特徴的である。これは、プラズマ内部の自由モードに外部励起が共鳴することにより生じている。これを理解するために、図2に戻って解がどのように構成されるかを考えよう。伝播性励起の場合 (図2 (a)) でも、エヴァネッセント励起 (図2(b)) の場合でも、プラズマ領域の解 (内部解) と真空領域の解 (外部解) とを接続することにより、全体の解が構成された (式 (32))。さらに境界条件として、プラズマ境界で与えられた外部電流と整合するものが選ばれる必要がある。これは、内部解と外部解の「境界における傾きの差」がちょうど外部電流になっている、ということに対応していた (式 (31b))。伝播性励起の場合、境界における内部解の傾きは、径方向の「波長」ひいては励起周波数に強く依存するから、もしもある励起周波数のときに内部解と外部解の傾きの差が非常に小さいとすると、境界条件を満足するために解全体を非常に大振幅にしなければならない。これが、外部励起とプラズマの自由モードとの共鳴である。このような共鳴は、径方向の波数が複数あることに対応して本来ならば無数にあるはずだが、散逸がある場合には共鳴に対するいわゆる Q 値が有限となりひとつひとつの共鳴が鈍る（ピーク幅が有限となる）ため、互いに近い位置にあるピークは重なり、いくつかの卓越した共鳴のみが現れることになる。

散逸が小さい場合 (a) には、基本的な物理は上で議論したものと同様だが、共鳴の際の電流比 R が非常に大きく、また、それぞれの共鳴に対する Q 値も小さく共鳴幅が狭いため、いくつかの共鳴が互いに重なることなく現れている。逆に散逸の大きな (c) では、 $w \sim 1$ 付近で共鳴は生じているがピークは鋭くなく、また R の値も1を若干超える程度にとどまっている。

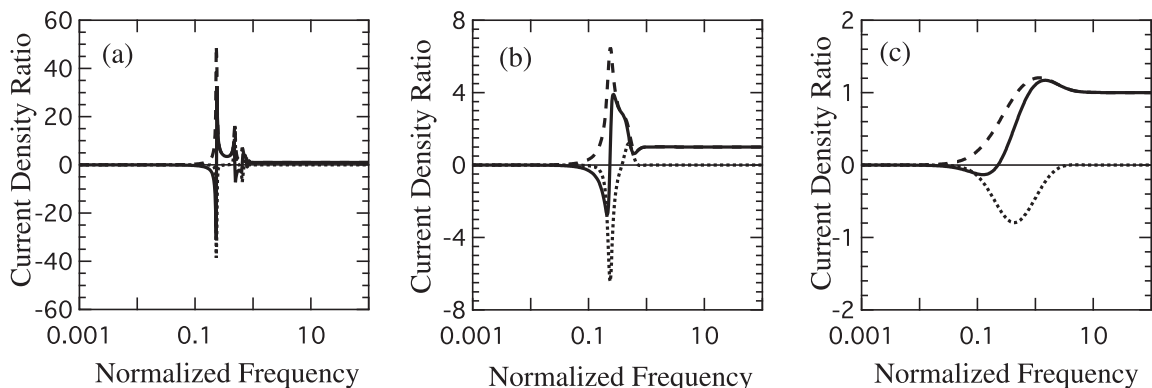


図4 電流増幅率、つまりプラズマ内部の総電流と外部電流との比 $R(w)$ を外部励起周波数 $w = \omega/\omega_{LH}$ の関数として示す。プラズマ半径は $\xi_0 = a/\Delta = 10$ であり、また ω_{LH} は低域混成角周波数、 $\Delta = V_A/\omega_{LH}$ は低域混成長、 V_A はアルヴェン速度である。衝突周波数は (a) $\nu/\omega_{LH} = 0.1$, (b) $\nu/\omega_{LH} = 1$, (c) $\nu/\omega_{LH} = 10$ である。実線、点線、破線がそれぞれ $Re(R)$, $Im(R)$, $|R|$ を表している。

4. ま と め

本稿では無電極電気推進機関への応用を念頭に、時間変動する外部電磁場を外部から加えられた際の円柱プラズマの挙

動を理論的に検討した。プラズマはコールドプラズマ流体として扱えると仮定し、またプラズマ、デバイスともに無限長の円柱状で軸対称、衝突項は線形摩擦で近似、プラズマ応答は外部電磁場に対して線形の範囲のみを考える等、物理的な議論が明確かつ容易になるように、単純化した系を扱った。さらに、外部電流は周方向のみに成分を持ち、 $m = k = 0$ モードの励起を考えた。プラズマ内部電流は外部電流に対する線形応答として捉え、応答関数および電流増幅率をそれぞれ (34) および (39) により定義して、それらの具体的な数値例を示した。なお、プラズマ源としては特にヘリコンプラズマを念頭に置いたが、考えたモデルは一般的なものであり、ECR プラズマ等、他のプラズマ源に対しても適用可能である。しかし、高密度で安定したプラズマ供給が可能なヘリコンプラズマは、無電極電気推進に非常に適していると考えられる。

重要な無次元パラメータは、低域混成周波数で規格化した外部励起周波数 $w = \omega/\omega_{LH}$ 、同じく規格化した衝突周波数 ν/ω_{LH} 、そして低域混成特性長 ($\Delta = V_A/\omega_{LH}$, V_A はアルヴェン速度) で規格化したプラズマ半径 $\xi_0 = a/\Delta$ である。プラズマ内部に励起される電流分布はこれらの3つの無次元パラメータの組み合わせにより定性的に明確に決定される (伝播性・短波長, 伝播性・長波長, エヴァネッセント)。また電流増幅率、つまりプラズマ内の総電流と外部電流との比 $R(w)$ は電気推進に利用できるパワーを評価するための重要なパラメータであるが、この値もやはり、先の3つのパラメータにより評価されることを示した。特に、散逸が小さく、かつ外部励起がプラズマ内自由モードと共鳴する場合には、 R は著しく大きい値を取り得る。一方、散逸が大きい場合には電流増幅率は小さくなり、外部アンテナに供給される電力の相当部分がプラズマ加熱に費やされ、加速効率の低下につながる懸念される。

本稿で議論したプラズマ内電流は、全て交流 ($\omega \neq 0$) であることに注意が必要である。外部励起の大きさ f は ω に比例するため、直流 ($\omega = 0$) に対する応答関数は厳密にゼロである。したがって、励起されるプラズマ電流から「定常的な」推進力を取り出すためには、何らかの非線形過程が含まれる必要がある。例えば、実際には磁場に径方向成分 (B_r) があることを利用し、これと励起されたプラズマ内部電流の周方向成分 (j_ϕ) との作用により軸方向のローレンツ力を得ることは可能であるが、この時間積分は (交流のため) 常にゼロとなり、推進力の直流成分は残らない。したがって、ローレンツ力がもたらすプラズマ流に対し、例えば密度フラックスは方向に依存しないが運動量フラックスは非対称となるようなデバイス設計をすることにより、 $\omega = 0$ 成分を取り出す必要がある。

このような方法の開発を前提として、現実的なパラメータのもとでの推進力を概算してみよう。軸方向の長さ L の間に N 回コイルが巻かれた外部アンテナを考え、これに電流 I_{ext} を流すものとする (したがって外部電流密度は $J_{ext} = I_{ext}N/L$ である)。本稿ではこれまで考えてこなかったが、背景磁場に径方向の成分 $B_r(r)$ があるとすれば、推進力 F として、励起される周方向プラズマ内電流 $j_\phi(r)$ による z 方向へのローレンツ力の積分

$$F = L \int_0^a j_\phi(r) B_r(r) 2\pi r dr \quad (41)$$

を考えることができる。平均的な径方向磁場強度を、やや変則的ではあるが

$$\bar{B}_r = \frac{\int_0^a j_\phi(r) B_r(r) r dr}{\int_0^a j_\phi(r) a dr} \quad (42)$$

により定義し、さらに (39) を用いれば

$$F = R(w) \bar{B}_r S L \left(\frac{2NI_{ext}}{aL} \right) \quad (43)$$

と書ける。ここに $S = \pi a^2$ は円柱プラズマの断面積である。

現実的なパラメータとして、プラズマ半径 $a = 10^{-1}$ [m], 軸方向長さ $L = 10^{-1}$ [m], 平均的な径方向磁場強度 $\bar{B}_r = 100$ [G], 外部電流 $I_{ext} = 1$ [A], 巻き数 $N = 10$, 電流増幅率 $R(w) = 1$ とすれば、 $F = 60$ [mN] が得られる。したがって、上で議論した推進機関には十分な大きさの推進力が潜在している。具体的にいかにして交流出力から直流出力を得るかは、外部電磁場によるプラズマ励起の問題と並び、非常に基本的かつ重要な問題であり、今後の研究進展が期待される。

参 考 文 献

- [1] 栗木恭一, 荒川義博編, 電気推進ロケット入門, 東京大学出版会, 2003.
- [2] K. Toki, S. Shinohara, T. Tanikawa, I. Funaki, and K. P. Shamrai, Preliminary investigation of helicon plasma source for electric propulsion applications, *Proc. 28 th Int'l Electric Prop Conf.*, Toulouse (CNES, Paris, 2003), IEPC Paper No. 03-1168 (2003).
- [3] K. Toki, S. Shinohara, T. Tanikawa, T. Hada, I. Funaki, K. P. Shamrai, Y. Tanaka, and A. Yamaguchi, *Plasma acceleration in a compact helicon source using RF antennae*, *J. Plasma Fusion Res. Ser.*, Vol. 8, pp. 25–30 (2009).
- [4] 都木恭一郎他, 2008 年度宇宙関連プラズマ研究会講演集 (本冊子), 2009.
- [5] S. Shinohara, T. Hada, T. Motomura, K. Tanaka, T. Tanikawa, K. Toki, Y. Tanaka, and K. P. Shamrai, *Development of high-density helicon plasma sources and their applications*, *Phys. of Plasmas*, vol. 16, No. 5, pp. 057104–057104–10 (2009).
- [6] S. Shinohara and Y. Kawai, *Skin depth of electromagnetic waves in plasma with magnetic field and collisions*, *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 35, no. 6 A, p. L 725–L 728 (1996).
- [7] T. H. Stix, *Waves in Plasmas*, Chapter 1, American Institute of Physics, (1992).