ランダウ減衰と電流駆動

上原　和也*1

Landau Damping and RF Current Drive

Kazuya UEHARA*1

Abstract

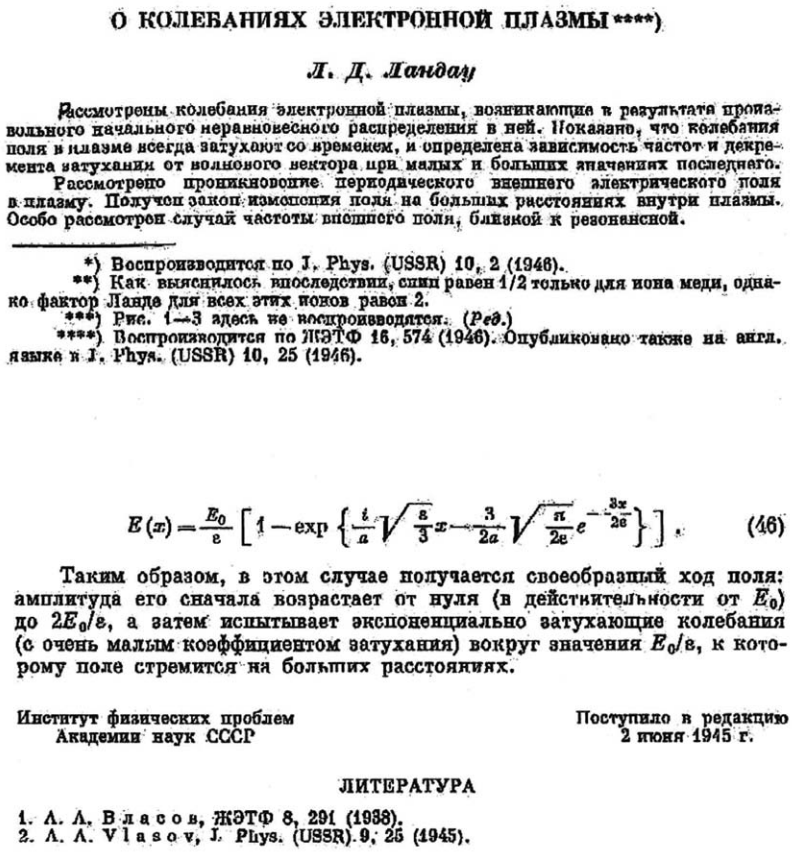
The current drive due to the rf travelling wave has been available to sustain the plasma current of tokamaks aiming the stational operation. Simple derivation of Landau damping and radio-frequency current drive is described on the standpoint of particle acceleration and deceleration by the rf potential, whereas the current drive is usually described by the quasi-linear theory. This picture is available to understand the physical picture of Landau damping and the current drive. This report starts from the original explanation of Landau damping and then describes the picture of the Landau damping due to the potential as well as the application to the current drive. Finally the new formation of the current drive theory is tried to given.

Keywords: Landau damping, radio-frequency current drive, particle trapping, physical picture

1. は じ め に

「ランダウ減衰―偉大な発見の半世紀―」[1] という論文が10年程前に出ているが，ランダウ減衰はランダウが無衝突中のプラズマの集団的な振動の減衰として60年以上前に導いたものである．ランダウ減衰の原著のロシア語論文（図1）では表題は”О К О Л Е Б А Н И Я Х З Л Е К Т Р О Н Н О Й П Л А З М Ы（オ　カリエバニヤ　エレクトノイ　プラズミ)”となっており，これは英訳すると“On the oscillation of the electron plasma”である．ランダウの所属はи н с т и т у т ф и з и ч е к и х п р о б л е м（インスティチュート　フィジチェキ　プロブレム，Institute of physical problem（物理問題研究所)）となっている．1945年の6月の受理となっているので，丁度日本では終戦の2ヶ月前に当る．皆が引用する論文は英語翻訳版のJ. Phys. USSRで，これでは発表は1946年である[2]．ランダウは若い頃コペンハーゲンのニールス・ボーアのところに留学している．当時はスターリンの時代で，ガモフに依ればランダウは熱心なトロッキスト寄りのマルクス主義者だったということである．ランダウはハリコフのウクライナ物理工学研究所にいた時にもプラズマの論文[3] を書いているが，この頃トロッキー派の組織に接触したかどで逮捕された．ソ連の物理学会の長老であったカピッツアーは「ランダウを失うことはソビエトの科学だけではなく世界の科学の目に留まり，衝撃を持って迎えられることは間違いありません」とスターリンに手紙を出しランダウの釈放に尽力している．ボーアも「並外れて有能なこの学者が人類の進歩にとって重要な科学研究に再び戻れるようにお願いするものです」とスターリンに訴えている．この甲斐あって釈放されたランダウはカピッツアが所長をしているモスクワの物理問題研究所にハリコフから理論部長として迎えられた．「ここは素晴らしい研究所だ」とランダウが言っているように，ランダウはここでノーベル賞の対象になる仕事やランダウ減衰の論文を書いた[4]．物理問題研究所は，現在（1987年以降）はカピッツアのノーベル賞受賞を記念して「カピッツア物理問題研

＊1　Japan Atomic Energy Agency



О КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ**)**

Л. Д. Ландау

Рассмотрены колебания электронной плазмы, возникающие в результате произвольного начального неравновесного распределения в ней. Показано, что колебания поля в плазме всегда затухают со временем, и определена зависимость частот и декремента затухания от волнового вектора при малых и больших значениях последнего.

Рассмотрено проникновение периодического внешнего электрического поля в плазму. Получен закон изменения поля на больших расстояниях внутри плазмы. Особо рассмотрен случай частоты внешнего поля, близкой к резонансной.

*) Воспроизводится по J. Phys. (USSR) 10, 2 (1946).

**) Как выяснилось впоследствии, спин равен 1/2 только для иона меди, однако фактор Ланде для всех этих ионов равен 2.

***) Рис. 1—3 здесь не воспроизводятся. (*Ред.*)

****) Воспроизводится по ЖЭТФ 16, 574 (1946). Опубликовано также на англ. языке в J. Phys. (USSR) 10, 25 (1946).

$$E(x)=\frac{E_0}{\varepsilon}\left[1-\exp\left\{\frac{i}{a}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}x-\frac{3}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}}e^{-\frac{3x}{2\varepsilon}}\right\}\right]. \qquad (46)$$

Таким образом, в этом случае получается своеобразный ход поля: амплитуда его сначала возрастает от нуля (в действительности от E_0) до $2E_0/\varepsilon$, а затем испытывает экспоненциально затухающие колебания (с очень малым коэффициентом затухания) вокруг значения E_0/ε, к которому поле стремится на больших расстояниях.

Институт физических проблем　　　　　　Поступило в редакцию
Академии наук СССР　　　　　　　　　　2 июня 1945 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Л. Власов, ЖЭТФ 8, 291 (1938).
2. A. A. Vlasov, J. Phys. (USSR) 9, 25 (1945).

図１　ランダウ減衰の原著論文の最初と最後ページ

究所」となっている．

本稿は，ランダウ減衰のオリジナルな解説からはじめて，ランダウ減衰のポテンシアルによる見方と電流駆動への応用を述べ，終わりにこの描像による電流駆動についての新しい定式化を試みたものである．

2. ランダウ減衰のレビュー

2.1　ランダウ減衰の原著論文

ランダウ減衰の原著論文では　静電波に対する１次元のブラソフ方程式とポアソンの式

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\vec{v}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}}+\frac{e}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}=0 \tag{1}$$

$$\varepsilon_0\nabla^2\varphi=e\int f_1 d\vec{v} \tag{2}$$

から出発して，プラズマ中の粒子間の衝突が無視出来るという条件の下でさえ振動が弱まって行く（減衰する）ことを示したものである．粒子の位置座標 r，速度 v，m は荷電粒子の質量，φ は静電ポテンシアル，e は電荷素量，ε_0 は真空の誘電率である．電場 E（= $-\partial\varphi/\partial r$）が存在すると分布関数 f は平衡状態の f_0 から微小の f_1 だけずれる（$f = f_0 + f_1$）．x 方向に振動している波数 k の波を考え，$f_1 = f_k e^{ikx}$，$\varphi = \varphi_k e^{ikx}$ と表し，摂動について線形近似を用いて，ラプラス変換とその逆変換を用いて φ_k については

$$\varphi_k=\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}\left\{\frac{e}{k\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}dv\frac{g}{\omega \quad kv}\right\} \tag{3}$$

ここに，$g = f_k$（v, t = 0）で，ε は誘電率である．この積分を実行する為に被積分関数を v, ω 表面で解析接続する．その上で $e^{-i\omega t}$ という因子に注目して ω の積分路を下平面に移動して Im（ω）- >- ∞ で被積分関数がゼロになることを使う．g は無限遠以外に特異点を持たないと仮定している．f_0 がマクスウェル分布とすると ε の零点は ω の下平面にしか存在しない．これを $\omega = \omega_k - i\gamma_k$ とすると，この特異点は φ_k に $e^{-i\omega_k t - \gamma_k t}$ という形の寄与を与えることになる．これは振動数 ω_k，減衰率 γ_k の減衰振動を表す．kx<<1 の場合は $\omega = \omega_p$ となってプラズマ振動になる．一般的には波の減衰振動で γ_k は次のようになる．

$$\gamma_k = \frac{\pi\omega_p^3}{2k^2N}\frac{df_0(v)}{dv}\bigg|_{v=\omega/k} \tag{4}$$

但し，$N = \int_{-\infty}^{\infty} f_0 dv$ は全粒子数．$\omega_p = (e^2N/e_0m)^{1/2}$ はプラズマ振動数である．

2.2　ランダウ減衰の物理的描像

このランダウ減衰の物理的描像については，Dawson，Jackson それに C-S Wu の論文がある[5～7]．粒子が有限温度の分布関数 f を持つ場合，粒子は波から運動エネルギーをもらい，逆に波は減衰して粒子にエネルギーを与える．波の電場を静電波の進行波 Ecos（kz-ωt）中の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = eE\cos(kz - \omega t) \tag{5}$$

零次の運動は右辺を零とおいて t = 0 で $v = v_0$ および $z = z_0$ という初期条件で得られる自由な流れの運動で $z = v_0t + z_0$．一次の運動はランダウ減衰が初期値問題であることを考慮して，上記の運動方程式を同じ初期条件で積分して，v_1 =（eE/mα[sin（kz_0 + αt)-sin（kz_0)]および

$$z_1 = \int_0^t v_1 dt = \frac{eE}{m\alpha}[-\frac{\cos(kz_0+\alpha t)-\cos(kz_0)}{\alpha} - t sin(kz_0)] \tag{6}$$

ここに，$\alpha = kv_0 - \omega$ である．$z = z_0 + v_0t + z_1$ を（5）式に代入して $kz_1 << 1$ として $\cos(kz_1)\sim 1$ および $\sin(kz_1)\sim kz_1$ の近似を使って，運動エネルギー $mv^2/2$ の時間変化を z_0 について平均すると

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\frac{mv^2}{2}) \right\rangle_{z_0} = \frac{e^2E^2\omega}{2mk}\frac{d}{dv}(\frac{sin(kv-\omega)t}{kv-\omega}) \tag{7}$$

分布関数 f を掛けて積分し，t → ∞ で右辺の括弧の中は δ 関数で表わされることを考慮すると

$$\int dvf(v)\left\langle \frac{d}{dt}(\frac{mv^2}{2}) \right\rangle = -\frac{e^2E^2}{2m}\frac{\pi\omega}{k^2}\frac{df(v)}{dv}\bigg|_{v=\omega/k} \tag{8}$$

df（v））/dv < 0 の時は波は減衰して粒子は運動エネルギーを波から受け取る．df（v））/dv > 0 の時は粒子は運動エネルギーを波に奪われ，波が励起，増幅される（逆ランダウ減衰）．

このようにランダウ減衰は粒子群がプラズマ波からエネルギーを奪い加熱される物理機構であるが，プラズマ波は同時に運動量を持っている．ランダウ減衰ではこの運動量も電子群に奪われていることになる．プラズマ波が進行波になっておればこの電子群は電流を形成することになる．

3. ポテンシアルによる加速と減速としてのランダウ減衰

3.1 ポテンシアルによる加速と減速

ランダウはブラソフ方程式から分布関数を積分する際の留数の問題として導いたがその物理的描像はわかりにくい．ここでは波のポテンシアルによる粒子の加速と減速という立場から記述する[8]．粒子の軌道は殆ど変わらないとして，ポテンシアルの寿命は波の減衰よりもずっと長い状態であるとする．プラズマ波の電位を $\phi = \phi_0 \cos(kz - \omega t)$ とする．プラズマ波と共に動く系で見る為に，波の位相速度を $\omega/k = V$ とし，$z' = z - Vt$ の変換をする．$dz'/dt = v'$, $dz/dt = v$ とおき，時間微分して $v' = v - V$．この系でプラズマ波の電位をみると $\phi = \phi_0 \cos kz'$ となり静電場と考えられる（図2）．$\phi = 0$ の時の粒子の速さを v_0' とすればエネルギー保存則により

$$e\phi + \frac{mv'^2}{2} = \frac{mv_0'^2}{2} \tag{9}$$

$v_c = (2e\phi/m)^{1/2}$ とおくと $(mv'^2)/2 = m(v_0'^2 - v_c^2)/2$．$v'_0 < v_c$ の粒子はプラズマ波が作る電位の山を越えられない．これらの粒子は電位の壁で反射され，速度は v' から $-v'$ になる．実験室系では v は $-(v-V)+V$ になる．従って速度には $\Delta v = -2(v-V) = -2v'$ の変化がある．粒子の運動エネルギー T の変化 ΔT は $\Delta T = mV\Delta v = -2mVv'$．$v'$ が正即ち $v > V$ のもの（波の位相速度より速い粒子）は ΔT が負で，粒子はプラズマ波にエネルギーを与えて減速される．$v < V$ のもの（波の位相速度より遅い粒子）はその反対で加速される．単位時間に粒子が波から得るエネルギーの時間変化率 dT/dt（= P ：粒子の吸収パワー）はこれに粒子の個数 N, v'，分布関数 f とそれに，反射回数 $|v'|/L$ をかけて $-v_c$ から v_c まで v' で積分する．即ち

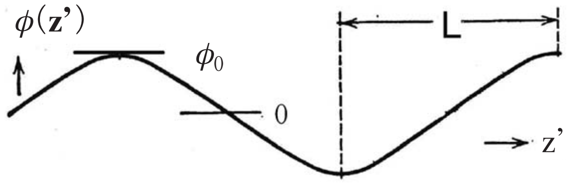


図2 波の位相速度で動く座標系で見たポテンシアル $\phi(z')$

$$P = \frac{dT}{dt} = \int_{-v_c}^{v_c} \Delta T N v' f(v) \frac{|v'|}{L} dv' = -2mVN \int_{-v_c}^{v_c} v' f(V+v') \frac{|v'|}{L} dv' = -2mVNs \tag{10}$$

ここでは，L は半波長の程度の長さと考えておく．上式の一部の項を $s = \int_{-v_c}^{v_c} v' f(V+v') |v'| / L dv'$ で定義した．積分 s の中の分布関数 f を位相速度 V の周りで展開して，$f(V+v') = f(V) + v'f'(V)$ とする．s の積分の１項の $\int_{-v_c}^{v_c} v'|v'| dv'$ は披積分関数が v' の奇関数だから０になる．s の積分の第２項は $\int_{-v_c}^{v_c} v'^2 |v'| dv' = 2\int_0^{v_c} |v'|^3 dv' = v_c^4/2$ となるのでこれを考慮すると $s = v_c^4 f'(V)/2L = 2e^2\phi_0^2 f'(V)/m^2 L$ となる．プラズマ波のエネルギー W_w は電場のエネルギー $W_E = \langle E_z^2 \rangle / 2\varepsilon_0 = \varepsilon_0 k^2 \phi_0^2/2$ と粒子の運動エネルギー W_T との和になる．W_T は

$$W_T = \frac{1}{2} Nm \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} Nm \left\langle \left(\frac{eE_z}{m\omega}\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (k\phi_0)^2$$

ここで，$\omega = \omega_p$ $(= (e^2N/\varepsilon_0 m)^{1/2})$ とすると $W_W = W_E + W_T = \varepsilon_0 (k\phi_0)^2$ となり $T + W_w = 0$ から，$dT/dt = -dW_w/dt$ で

$$\frac{dW_w}{dt} = 2mVNs \tag{11}$$

$dW_w/dt = \gamma W_w$ とおけば，γ は波の減衰率で $V = \omega/k$ に注意して，$\gamma = 2mVNs/\varepsilon_0 (k\phi_0)^2 = 4e^2\omega N f'(V)/\varepsilon_0 m L k^3$ が得られる．$kL = 8/\pi$ と，とれば良く知られたランダウ減衰の減衰率

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega\omega_p^2}{k^2} f'\left(\frac{\omega}{k}\right) \tag{12}$$

が得られる．

3.2　ランダウ減衰による電流駆動

核融合研究は米ソ冷戦のさなかスターリン体制下のソ連が先陣を切った．これは水爆の開発と連動していて，水爆の父と言われるサハロフが関与している．水爆は良く知られているように核分裂のエネルギーで核融合を瞬間的に起こした爆弾である．平和裏に持続的に（太陽程はゆっくりではなく）核融合を起こさせる為には磁場で高温プラズマを閉じ込める事が必要である．磁場中でプラズマを閉じ込める基本は磁力線を閉じることと，極小磁場を使うことである．サハロフは磁力線を閉じる方法としてトーラスを考えた．トーラス装置のポロイダル方向に巻いたコイルによるトロイダル磁場だけでは，プラズマが不安定なのでトーラス方向に電流を流してできるポロイダル磁場との併用で磁気面を作り，プラズマを閉じ込めるアイデアをタムと共に示した．サハロフはポロイダル磁場を得る方法として電磁誘導でプラズマ中に電流を流してポロイダル磁場を得る方法とコイルをプラズマの周囲に置いて，このコイルに流す電流でポロイダル磁場を作るアイデアを同時に出している[9]．前者はトカマク系に後者がヘリカル（ステラレータ）系に繋がる．トカマク系の電磁誘導では電流は間欠的にしか流れないので，トカマク炉の運転はパルス運転にしかならない．そこで電磁波（高周波）の運動量を電子に与えて，集団的に電子を加速して連続的に電流を流すのが電流駆動である．こうすれば電磁波を連続的に入射させて定常的に電流を流す事が出来る．電磁波はプラズマ中で静電波となり，波の位相速度付近の電子のみが加速される．これを共鳴粒子と言う．波を進行波にするには位相差型導波管等で電磁波の位相をずらして行う．この方法は日本のトカマク JFT–2 で低域混成波を用いて初めて電流を流すことに成功し[10]，その後 JT–60 では 3.25 MA の電流を流した[11]．定常運転としては 3 時間 6 分 32 秒のトカマク運転を九州大学の超伝導トカマク TRIAM-1 M が達成している[12]．

3.3　ポテンシアル加速による電流駆動の理論

プラズマ波はエネルギーのみならず，運動量ももっている．波が進行波となると連続的に電子に一方向の力（または運動量）を与えて電流を駆動することが可能になる．ステイックスはプラズマ波 Ecos(kz - ωt) がランダウ減衰で粒子を加速する時の，粒子が受ける平均的な力は

$$F=\left\langle \frac{d}{dt}(mv)\right\rangle_{z_0}=-\frac{\pi e^2E^2}{2mk}f'(\frac{\omega}{k}) \tag{13}$$

であるとしている[13]．この式は運動量の時間変化になっている．前節の議論を用いると，電子に働く力 F は $F = m\Delta v/\Delta t = -2mv'|v'|/L$. これは運動量の時間変化 $\Delta(mv)/\Delta t$ でもあり，前節と同じように N と f とを掛けて積分すると単位時間に粒子が波から得る運動量の時間変化 P’が得られる．

$$P'=\int_{-v_c}^{v_c}-2mNv'f(V+v)\frac{|v'|}{L}dv'=-2mNs=-\frac{\omega_p^2\phi_0^2}{8k}f'(\frac{\omega}{k}) \tag{14}$$

力と考える場合の式は，等価的に粒子に電場 $=E_{eq}=F/\text{-}e=2mv'|v'|/eL$ がかかるものと考えられる．この電場 E_{eq} により粒子は加速され，衝突とバランスして電流 $J_{current}=eNv=\sigma E_{eq}$ を形成する．但し，σ はプラズマの電気電気伝導度で $\sigma=e^2N\tau/m$. $\tau(=1/\nu)$ は衝突間の時間，ただし波と粒子の相互作用の時間がこれより短い場合はその時間を用いる．これに分布関数を掛けて前節と同じように積分すると電流駆動で流れる電流が得られる．

$$J_{current}=\int_{-v_c}^{v_c}\sigma E_{eq}f(V+v')dv'=2e\tau Ns=\frac{\gamma e\tau k^3\phi_0^2}{4\pi m\omega}=-\frac{e\omega_p^2(k\phi_0)^2}{8mk\nu}f'(\frac{\omega}{k}) \tag{15}$$

但し，σ は速度に依存しないとした[14]．尚，(13) 式の F の式に粒子数 N を掛ければ $E_0=k\phi_0$ だから P’の式に一致し，この F は $F = eE_{eff}$ とおけるので σ/e を掛ければ $J_{current}$ の式が得られ，電流駆動の式になる．駆動電流 $J_{current}$ をパワー P で割るとよく知られた電流駆動の効率

$$\frac{J_{current}}{P} = \frac{e}{mv}\frac{k}{\omega} \tag{16}$$

が求まる．

3.4 物理的描像による電流駆動の理論

図3はF.F. Chenの教科書Introduction to plasma physicsで説明されているランダウ減衰の描像である[15]．この図のenergyという言葉をmomentumに置き換えれば電流駆動になる．ランダウ減衰では共鳴粒子は高周波を直流的に感ずる．この電場で電子が加速される．この電場をドーソンの描像に基づいて求める．第1節で行なった議論を運動量について行なえば良い．粒子の運動量の時間変化をz_0について平均すると

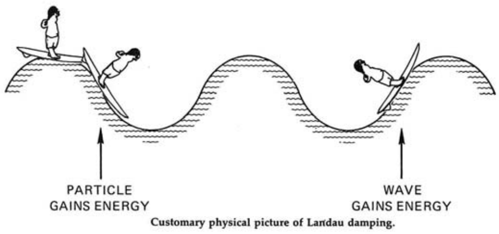


図3 この描像でenergyをmomentumにすれば電流駆動になる

$$\left\langle \frac{d}{dt}(mv) \right\rangle_{z_0} = k\frac{e^2E^2}{2m}\left(-\frac{\sin\alpha t}{\alpha^2} + \frac{t\cos\alpha t}{\alpha}\right) \tag{17}$$

右辺の括弧の中は$t \to \infty$の極限でデルタ関数δの微分になる．この式を$\langle d(mv)/dt \rangle_{z0} = eE_{eff}$とおくと$E_{eff}$は

$$E_{eff} = k\frac{eE_0^2\pi}{2m}\delta'(\alpha) \tag{18}$$

と表すことが出来る．これはランダウ減衰に於いて共鳴粒子が直流的に感じる電場を表わしている．運動方程式はν_{ei}を衝突周波数として，$mdv/dt = eE_{eff} - mv\nu_{ei}$となり，定常状態（$d/dt = 0$）では

$$v = \frac{eE_{eff}}{m\nu_{ei}} \tag{19}$$

よく知られているように電流密度は$j = -e\int_{-\infty}^{\infty} vf(v)dv$で与えられるからこの式のvの項に上式を代入すると

$$j = \frac{ek\omega_p E_0^2}{8m\nu_{ei}}\left\{\left.\frac{df(v)}{dv}\right|_{v=\omega/k} + 3\left.\frac{f(v)}{v}\right|_{v=\omega/k}\right\} \tag{20}$$

という電流駆動の式が得られる．エネルギーを与える場合が電子加熱であり，運動量を与える場合が電流駆動である[16]．

電流駆動では電子を高周波で加速しているがイオンの加速も可能である．宇宙推進用のイオンエンジンでは静電的にイオンを加速しているが，このランダウ減衰の機構でイオンに運動量を高周波で与えて加速出来れば便利である．エネルギーを与えるイオン加熱の実験はイオン音波を用いてなされている[17]が，運動量を与える実験はまだなされたことはない．

謝　　　辞

本稿は筆者の東京教育大大学院時代の恩師である小島昌治先生の講義ノート等を参考にして論文としてまとめたものである．

References

1） D. D. Ryutov, Plasma Phys. Contr. Fusion 41（1999）A 1
2） L. D. Landau, J. Phys., UUSR, 10（1946）25
3） L. D. Landau, Phys Z. Sowjet, 10（1936）154．この論文ではフォッカー・プランク方程式の衝突項にあたるクーロン衝突積分項が導びかれている．

4） 佐々木力，山本義隆，物理学者ランダウ（みすず書房，東京，2005 年）

5） J. Dawson, Phys. Fluids, 4（1961）869

6） J. D. Jackson, Plasma Phys. 1（1960）71

7） Ching-Sheng Wu, Phys. Rev. 127（1962）1419

8） ポテンシアルが大きくなると所謂捕捉粒子の効果が出てくるが，ここでは粒子の軌道が殆ど変わらない範囲で起こる線形効果の場合に限っている．

9） A. Sakharov, Memoirs（Knopf, New York, 1990）p. 139．サハロフはタム（後にチェレンコフ放射の研究でノーベル物理学賞を受賞）がトカマクでは磁気面の構造（磁気島）の乱れがデスラプションを起こし過大な熱が放出されるという懸念を既に行なっていたとしている．ランダウもサハロフと共に核兵器の開発に駆り出されたが，ランダウはこれを非常に嫌がっていたとされている．

10） T. Yamamoto *et al*., Phys. Rev. Lett. 45（1980）716

11） K. Uehara, JAERI-M 87-211

12） H. Zushi *et al*., Nucl Fusion 39（1999）2127

13） T. H. Stix, The Theory of Plasma Waves（McGraw-hill, New York, 1962）p. 155

14） 完全電離プラズマでは σ が速度 v の 3 乗に比例する．即ち $\sigma = e^2N\tau/m$ で $\tau \text{-}> \tau v^3/V^3$ とおくと（15）式は

$$
\begin{aligned}
J_{current} &= \int_{-v_c}^{v_c} \frac{e^2N}{m}\tau\frac{v^3}{V^3}\frac{2mNv'|v'|}{eL} f(V+v')dv' \\
&= \frac{\pi keN\tau}{4}\int_{-v_c}^{v_c} f(V+v')(\frac{V+v'}{V})v'|v'|dv' \\
&= \frac{\pi keN\tau}{4}\int_{-v_c}^{v_c} \{f(V)+v' f(V)\}(1+\frac{3v'}{V})v'|v'|dv' \\
&= \frac{\pi keN\tau}{4}\{3\frac{f(V)}{V}+f'(V)\}\frac{1}{2}(\frac{2e\phi_0}{m})^2 \\
&= \frac{ek\omega_p^2}{8m}\tau\phi_0^2\{f'(V)+3\frac{f(V)}{V}\}
\end{aligned}
$$

となり（20）式と一致する

15） F. F. Chen, Introduction to Plasma Physics（Plenum Press, NewYork and London, 1974）p. 219

16） K. Uehara, Phys. Fluids B 3（1991）2601

17） J. H. Malmberg and C. B. Wharton Phys. Rev. Lett. 17（1966）175 & K. Yamagiwa *et al*., J. Phys. Soc. Jpn. 40（1976）1157