

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

Adjoint感度解析を用いた勾配法による空力形状最適設計

雷 忠, 牧野 好和, 岩宮 敏幸

2008年2月

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

Adjoint感度解析を用いた勾配法による空力形状最適設計*

雷 忠^{*1}, 牧野 好和^{*1}, 岩宮 敏幸^{*2}

Aerodynamic Shape Design using Gradient-Based Optimization with Adjoint Sensitivity Analysis*

Zhong LEI^{*1}, Yoshikazu MAKINO^{*1} and Toshiyuki IWAMIYA^{*2}

ABSTRACT

This paper describes an optimization design technology and some applications of CFD-based aerodynamic shape optimization conducted in JAXA's supersonic research program. To improve aerodynamic performance of a supersonic transport, an aerodynamic design tool, which combines a three-dimensional Euler CFD code with a gradient-based optimization technique, is developed. In order to reduce computational cost, a continuous adjoint sensitivity analysis is used to calculate the gradients of an objective function with respect to design variables in each design cycle. The developed shape optimization tool is validated for some design problems. It is shown that this tool can greatly reduce the computation time in aerodynamic shape design to maximize or minimize the objective function.

Keywords: *Aerodynamics, Design, Optimization, Gradient Method, Adjoint, CFD, SST*

概 要

本論文は、JAXAの超音速機研究プログラムにおける形状最適設計ツールの開発と、CFD解析をベースとしたいくつかの空力形状最適設計への適用例について述べる。超音速機の空力性能改善のため、3次元Euler CFD解析コードを勾配法による最適化ツールに組み込んだ空力最適設計ツールを開発した。設計変数に対する目的関数の勾配を効率的に計算して最適設計サイクルにかかる計算コストを低減するため、Adjoint法（随伴法）を利用した感度解析が適用された。開発された形状最適化ツールは空力形状設計問題に適用され、設計目的に対する最適な形状を短時間で設計することができた。

キーワード: 空気力学、設計、最適化、勾配法、Adjoint法、CFD、超音速輸送機

記号			
A	対流項ヤコビアン係数行列	l	2次元物体或いは3次元軸対象物体表面格子の長さ
B	境界	n	法線方向
C_D	抗力係数	p	圧力
C_p	圧力係数	q	流れ物理変数
c	音速	R	ヤコビアン行列の固有ベクトル行列
D	積分空間	S	一般座標系変換行列
E, F, G	流束ベクトル	s	設計空間での探索方向ベクトル
e	全エネルギー	t	時間
H	形状基本関数	U, V, W	一般座標系における反変速度
J	座標系変換ヤコビアン	u, v, w	物理速度
		\mathcal{D}	設計変数ベクトル

* 平成 19 年 12 月 4 日受付 (Received 4 December, 2007)

*1 航空プログラムグループ 超音速機チーム (Supersonic Transport Team, Aviation Program Group)

*2 情報システム部 (Information Systems Department)

\mathcal{G}	設計変数に対する目的関数の勾配
\mathcal{I}	目的関数
\mathcal{L}	Lagrangean関数
\mathcal{M}	物体表面における目的関数成分
\mathcal{P}	流れ空間における目的関数成分
\mathcal{R}	等式制約条件、(流れ支配方程式など)
α	一様流に対する迎角
Δ	差分
δ	変分
ρ	物理密度
κ	ペナルティ係数
Λ	固有値行列
λ	設計空間での探索ステップ幅
ψ	co-state変数ベクトル、或いはLagrangean乗数
ϕ	境界でのco-state変数ベクトル
ξ, η, ζ	物体適合一般座標系

添え字

$[\cdot]^T$	転置行列
$[\cdot]_{in}$	流入境界
$[\cdot]_{out}$	流出境界
$[\cdot]_{slip}$	滑り物体表面
$[\cdot]_0$	初期値
$[\cdot]^{-1}$	逆行列
$[\cdot]_{\infty}$	一様流値

1. はじめに

次世代の超音速旅客機 (SST: Supersonic Transport) の国際共同開発に向けて、宇宙航空研究開発機構 (JAXA: Japan Aerospace Exploration Agency) は旧航空宇宙技術研究所 (NAL: National Aerospace Laboratory) の時代から小型超音速実験機 (NEXST: National Experimental Supersonic Transport) プロジェクト¹⁾を進めてきた。この計画では、線形理論と風洞実験に頼らざるを得なかったConcordeを代表とする第1世代SST開発時の設計手法とは異なり、近年急速に発達したCFD設計技術と高性能の計算機を駆使した機体形状設計技術の開発と、小型超音速実験機 (NEXST-1) を用いた飛行実証を行うことを目標とした。NEXST-1の空力設計においては超音速巡航時の揚抗比の向上に主眼を置き、高い空力性能の実現をめざした。主翼前縁部近くにおいて遷移を起こして全面乱流となる場合は、全機空気抵抗に占める摩擦抵抗の割合が大きいことがよく知られる。このプロジェクトでは、摩擦抵抗を低減させるために、CFD (Computational Fluid Dynamics) 解析をベースとした逆問題解法を独自に開発して、大後退角を有するアロー翼の遷移を遅らせるのに適した圧力分布を実現する自然層流翼の設計を行なった。

空力設計において、従来から用いられている線形理論に基づく設計手法は、その簡便性により概念設計段階では大変有効なツールとなる。しかし、線形理論による空力設計においては流れの詳細、例えば設計の重要な指針となる翼面荷重分布等の推算において、Euler解析やNavier Stokes (NS) 解析とは結果がかなり異なるケースがあり、より信頼性の高い航空機の設計には不十分であると思われる。近年、アルゴリズムの進歩と計算機の高速化に伴い、Euler解析やNS解析等のCFD解析と最適化手法を組み合わせることにより、形状の最適設計が可能となった。CFD解析を用いることで非線形効果を導入することができるため、設計当初から非線形性を考慮した設計が可能となり、従来にない設計形状の出現が期待される。また、この最適設計手法は従来の風洞試験を中心とする手法に対して、設計サイクルに要する時間、経費を大幅に短縮、削減することが可能な技術である。

非線形設計手法は、航空機の巡航時と離着陸時の空力性能を向上させるために、盛んに行われてきており、最適化手法としては勾配法、遺伝的アルゴリズム、逆問題設計などがよく用いられている。これらの内、勾配法は目的関数の最小化或いは最大化の問題を解くときに、設計変数に対する目的関数の勾配を利用して、最適点に進んでいく手法である。通常、勾配を求めるには、設計変数の数に比例した回数の目的関数評価が必要となるため、設計変数の数が多くなると、目的関数評価に必要となるCFD解析自体の計算時間が非常に長くなってしまい実用的でないことが多い。そこで、Jamesonら²⁾³⁾は変分法に基づくAdjoint法 (随伴法) を利用してこの問題を解決する手法を提唱し、効率的な空力最適化設計法を確立した。Adjoint法では、流れの支配方程式を拘束条件として目的関数の変分を求めることにより導出されるAdjoint方程式を解くことで、1度に全ての設計変数に対する目的関数の勾配を求めることができる。これによって、計算時間を大幅に短縮して、短時間に空力設計を行うことが可能になる。

本論文は、NEXST計画における空力設計技術開発の一環として開発したCFD空力最適設計ツールの解説と、その適用例について述べる。第2章で勾配法をベースとした最適化手法について述べ、第3章ではAdjoint法を用いた感度解析手法の定式化について解説し、最適化手順を示す。第4章ではAdjoint方程式を解析する離散化手法について述べ、第5章ではCFD解析、Adjoint解析、最適化手法を組み合わせた非線形空力設計ツールを具体的に空力最適設計問題に適用し、本設計ツールの有効性を示す。

2. 最適化手法

本設計手法は Euler 方程式を支配方程式とする CFD 解析と、勾配法をベースとした最適化手法とを組み合わせたものである。最適化における感度解析には Adjoint 法を利用することで効率を向上させており、流れの非線形性を考慮した Euler CFD 解析によって目的関数を評価することでその信頼性を高めている。従来の線形理論に基づく設計手法に比べ、大きな設計空間でもより高い精度の詳細設計を行うことを可能とする手法である。

流体力学における最適化問題は、流れ場の支配方程式を満たす CFD 解析の精度範囲で求められた目的関数を最小（或いは最大）にするような設計変数を求めることである。本論文中で扱う最適化問題を次のように定式化する。

【問題】:

①. 目的関数の定義

抗力、揚力、揚抗比、目標圧力分布との差など

$$\mathcal{I}(q, \mathcal{D}) = \int_B \mathcal{M}(q, \mathcal{D}) dB + \int_D \mathcal{P}(q, \mathcal{D}) dD \quad (2.1)$$

②. 制約条件

等式制約: $\mathcal{R}(q, \mathcal{D}) = 0$ 、流れの支配方程式 (Navier-Stokes, Euler など)

不等式制約: $l_k \geq 0 (k=1, 2, \dots, K)$

③. 目標

制約条件を満たす。

目的関数を最小（最大）化する、 $\text{Min } \mathcal{I}(q, \mathcal{D})$ 。

ここでは、 $\mathcal{I}(q, \mathcal{D})$ は目的関数または評価関数、 q は流れの物理量 (ρ, U, e)、 \mathcal{D} は形状パラメーターに代表される設計変数である。

昨今、勾配法や、焼き鈍し法や、遺伝的アルゴリズムや、ニューラルネットワークなど、様々な最適化手法が考案されているが、最も代表的な方法が勾配法 (gradient method) と言える。勾配法においては、設計変数 \mathcal{D} の空間内の 1 点 $\mathcal{D} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ において、目的関数 $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ に対する勾配ベクトル $\nabla \mathcal{I}(\mathcal{D})$ を次のように定義する。

$$\nabla \mathcal{I}(\mathcal{D}) = \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial x_n} \right)^T \quad (2.2)$$

図1に示すようにこの勾配ベクトル $\nabla \mathcal{I}(\mathcal{D})$ は、関数 $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ の表す曲面上の点 \mathcal{D} をとおり、その曲面に接する方向を向く。設計変数に対する目的関数の勾配に基づいて、探索方向 \vec{s} は少なくとも現在位置から $f(\vec{x})$ の値が減少する方向に選ばなくてはならない。定められる方向にどれだけ進めばよいかというステップ幅 λ を決めれば次の探索点が定義される。

$$\mathcal{D}^{k+1} = \mathcal{D}^k + \lambda \vec{s} \quad (2.3)$$

これは直線探索アルゴリズム (line search algorithm) という。 k は試行回数を表す。

図2には、勾配法に基づく最適設計手法のフローチャートを示す。本研究で用いた勾配法は、効率的な勾配法として知られている準ニュートン法 (quasi-Newton method) である⁴⁾。この方法では、局所最小値を求めるのに必要となる設計変数に対する目的関数の二階微分 (Hessian matrix) を直接計算する代わりに、Davidon-Fletcher-Powell (DFP) 法で近似している。1回の設計サイクルは、各設計変数に対する目的関数の勾配 $\nabla \mathcal{I}(\mathcal{D})$ を求める感度解析プロセスと、求められた勾配に基づいて目的関数が減少する方向へ探索し局所最小値を求める直線探索プロセスの2段階からなる。このアルゴリズムは非常に速く最大或いは最小値に収束する利点があるが、初期値の近傍にある最大或いは最小値に対してのみ収束が保証される局所的な最適法である。大域的な最適解の探索ができないが、初期形状を適切に設定すれば効果的に良い形状を探索することが可能であるため、航空機の詳細設計に十分に適用できると考えられる。

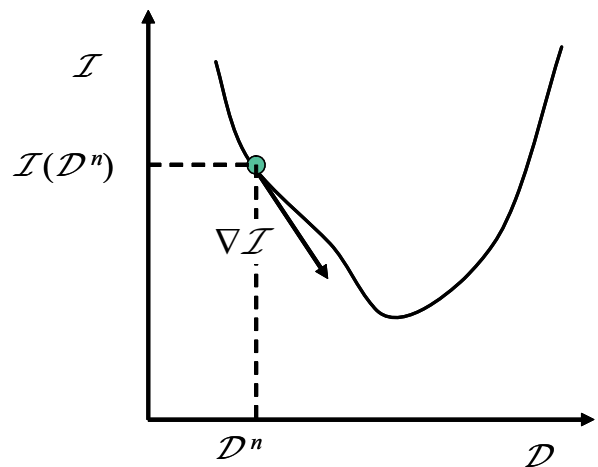


図1. 勾配ベクトル

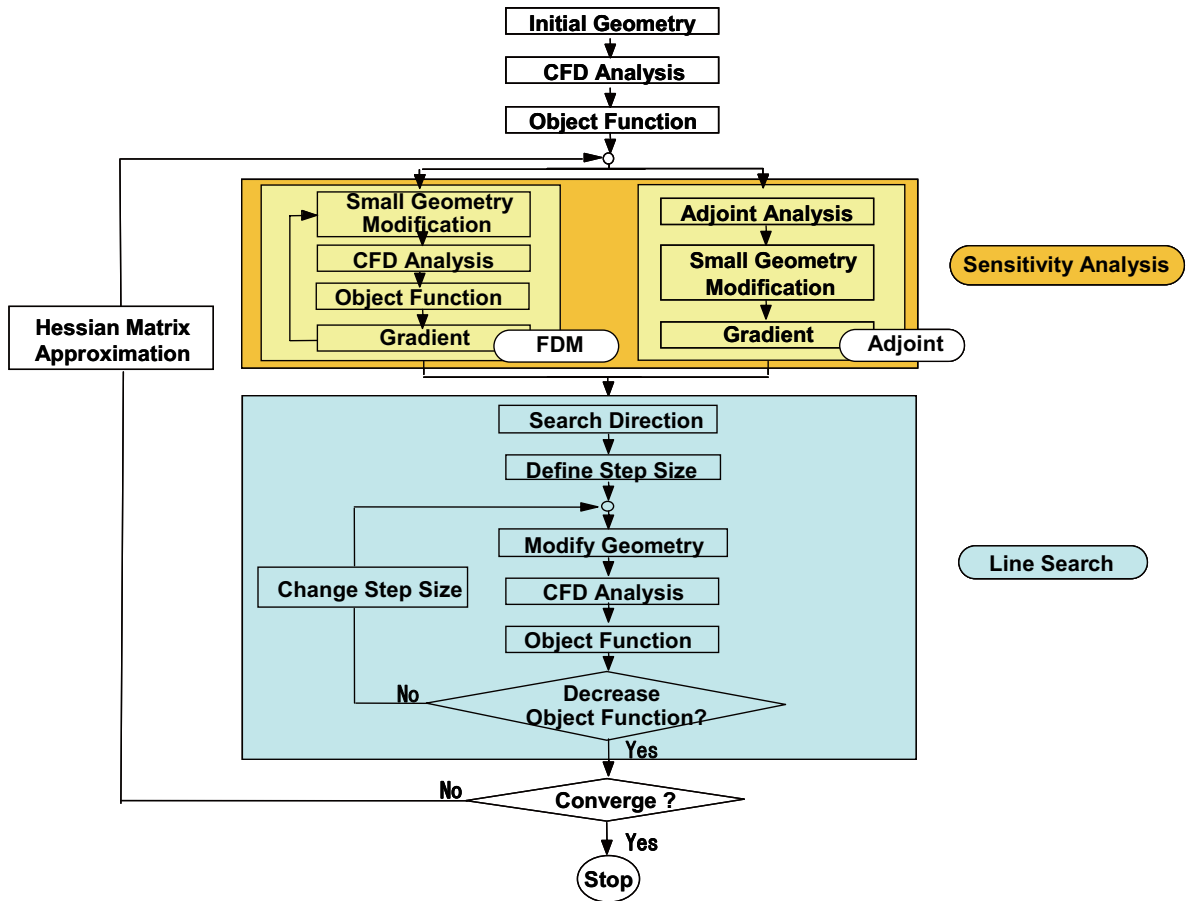


図 2. 準ニュートン法による空力形状最適設計のフローチャート

3. Adjoint 法による感度解析手法

最適化問題において、各種の独立変数が個別に単位の大きさだけ変化したときの目的関数の変化の大きさが感度と呼ばれる。感度を求めることを感度解析と呼称する。勾配法は、この感度に基づいて目的関数に大きな影響を与える変数を優先して変化させて、最適化問題の収束を加速させる手法である。感度解析手法にはいくつかの方法があり、直接差分法は現在の評価点における数値解析結果を基準として、全ての設計変数に微小な摂動を与えた数値解析を実際に行い、両者の目的関数の差分から下記の式により直接的に感度を評価するものである。

$$g \approx \frac{\delta I}{\delta D} = \frac{I(D + \delta D) - I(D)}{\delta D} \quad (3.1)$$

この手法は上記の式のような片側差分を行う最低のケースでも基準点と設計変数の個数n分、すなわち(n+1)回のCFD解析が必要であるため、設計変数が多くなると効率が悪くなり、特に、非線形解析を用いる場合には非現実的に計算コストが大きくなるため、3次元航空機の機体形状設計のように1回のCFD解析にかかる計算コストが大

き最適化問題では設計変数の個数（設計空間の大きさ）に制約が加えられてしまう。さらに、感度解析の精度を上げようと中心差分を用いると2倍の計算時間がかかることとなる。

一方、Adjoint法を利用すると、設計変数の個数に関わらず、流れの数値シミュレーションを1回実行する程度のCPU時間で全ての設計変数に対する目的関数の勾配が1度に得られる。これはAdjoint法の最大のメリットであり、この手法により非線形空力解析を用いる最適空力設計が可能となる。ここでは、非粘性圧縮性Euler方程式に基づいた機体の最適空力設計における、Adjoint法を用いた感度解析法について述べる。

3.1 基礎理論

流れの支配方程式を以下の式で表す。

$$\mathcal{R}(q, D) \equiv 0 \quad (3.2)$$

ここで、流れ変数 q を設計変数 D で陽的に

$$q = q(D) \quad (3.3)$$

と表し、目的関数 \mathcal{I} に代入する。

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(q, \mathcal{D}) = \mathcal{I}(q(\mathcal{D}), \mathcal{D}) \quad (3.4)$$

この目的関数の設計変数に対する感度は

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\mathcal{D}} = \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q + \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} \frac{\partial q}{\partial \mathcal{D}} \quad (3.5)$$

と表され、この情報を利用して最小点を求めるのが勾配

法である。ここで、 $\left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_{\mathcal{D}}$ は \mathcal{D} を固定したときに \mathcal{I} の q

に関する感度、 $\left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q$ は q を固定したときに \mathcal{I} の \mathcal{D} に関

する感度を表す。この目的関数の感度を求めることができれば、目的関数の最小化には種々な勾配法を適用することが可能である。感度は目的関数の設計変数の変化に関する勾配であるから、差分の考え方によって近似的に求めることができる。すなわち、 $\mathcal{D} + \Delta \mathcal{D}$ に対する流れの方程式を解いて $q + \Delta q$ を求め、 $\frac{\Delta q}{\Delta \mathcal{D}}$ によって、感度を近似する方法である。しかし、設計変数毎に流れの方程式を解く必要があり、設計変数の数に比例する計算コストがかかるため、感度を効率よく求めることが必要である。

このため、Lagrange乗数法を導入して、目的関数の代わりにLagrange関数の最大或いは最小値問題にして、目的関数の設計変数に対する感度を求めることにしてみる。

流れ変数と設計変数の変分 δq と $\delta \mathcal{D}$ に起因する流れ支配方程式(式3.2) \mathcal{R} の変分をとると、

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(q, \mathcal{D}, \psi) &= \nabla_q \mathcal{L} \cdot \delta q + \nabla_{\mathcal{D}} \mathcal{L} \cdot \delta \mathcal{D} - \delta \psi^T \cdot \mathcal{R}(q, \mathcal{D}) \\ &= \left(\left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} - \psi^T \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} \right) \delta q + \left(\left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q - \psi^T \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q \right) \delta \mathcal{D} - \delta \psi^T \mathcal{R}(q, \mathcal{D}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

従って、 \mathcal{L} の停留点では

$$\nabla \mathcal{L}(q, \mathcal{D}, \psi) = 0 \quad (3.10)$$

即ち、

$$\delta \mathcal{R} = \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} \delta q + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q \delta \mathcal{D} = \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} \frac{\partial q}{\partial \mathcal{D}} \delta \mathcal{D} + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q \delta \mathcal{D} = 0 \quad (3.6)$$

になる関係があることを導く。これより導かれる

$$\frac{\partial q}{\partial \mathcal{D}} = - \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q$$

を式(3.5)に代入して、

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\mathcal{D}} = \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q - \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q \quad (3.7)$$

から感度を求められる。この目的関数 \mathcal{I} の設計変数 \mathcal{D} に対する勾配に基づいて勾配法を適用すると、目的関数に対する最適な設計変数が求められる。

式(3.7)右辺の第一項は流れ変数 q を固定したとき設計変数に対する変微分であるため、流れ支配方程式を解く必要がなく、代数的に求められる。しかし、第二項では流れ変数 q に対する変微分が直接に求められない。そこで、拘束条件付きの最小化問題によく適用されるLagrange乗数法を導入して、拘束条件なしの変分原理に帰着させることによって、この問題を解決する。すなわち、第2章に述べた流体力学の最適化問題に流れ支配方程式を等式拘束条件として、Lagrange乗数 ψ を導入し、本来の目的関数 \mathcal{I} と組み合わせたLagrangian関数 \mathcal{L} を

$$\mathcal{L}(q, \mathcal{D}, \psi) = \mathcal{I}(q, \mathcal{D}) - \psi^T \mathcal{R}(q, \mathcal{D}) \quad (3.8)$$

(この場合は、関数空間から実数空間への線形写像は内積で表現されるため、 $\psi^T \mathcal{R}(q, \mathcal{D})$ は関数の内積と考えている。) とすれば、 \mathcal{L} の変分は次の式になる。

$$\nabla_{\mathcal{D}} \mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q - \psi^T \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q = 0 \quad (3.11)$$

$$\nabla_q \mathcal{L} = \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} - \psi^T \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} = 0 \quad (3.12)$$

$$\mathcal{R}(q, \mathcal{D}) = 0 \quad (3.13)$$

を満たす。式(3.11)～(3.13)はLagrangean関数 \mathcal{L} が最大(小)値となる必要条件である。或いは目的関数 \mathcal{I} の最適点における必要条件である。

式(3.13)は流体方程式そのものであり、式(3.11)を ψ^T について解き、式(3.12)に代入すると

$$\left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q = \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q \quad (3.14)$$

を得るので、その際に、式(3.7)よりLagrangean関数 \mathcal{L} が目的関数 \mathcal{I} の拘束条件を満たした停留点であり、設計変数 \mathcal{D} が最適な解であることが分かる。

いま、式(3.11)および式(3.13)が成り立つような (q, \mathcal{D}, ψ) の組に対して、Lagrangeanの変分を考えると

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \left(\left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q - \psi^T \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q \right) \delta \mathcal{D} \\ &= \left(\left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q - \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}}^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q \right) \delta \mathcal{D} \end{aligned} \quad (3.15)$$

となるが、 $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathcal{D}}$ は拘束条件付きの目的関数 \mathcal{I} の感度そのものを表すものである。

Jamesonらはこのように感度を求める手法をAdjoint法と呼ぶ。以上を考慮すると次のような感度解析の手法が得られる。

[Adjoint法による感度解析]

- ① 設計変数 \mathcal{D} に対して流れ支配方程式(3.13)
$$\mathcal{R}(q, \mathcal{D}) = 0$$
を解く。
- ② Adjoint方程式(3.11)

$$\left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}} = \psi^T \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} \right]_{\mathcal{D}}$$

をLagrange乗数 ψ について解く。 ψ は以下co-state変数と呼ぶ。

- ③ 感度

$$\mathcal{G} = \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathcal{D}} \right]_{q, \psi} = \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q - \psi^T \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{D}} \right]_q \quad (3.16)$$

を求める。

流れ支配方程式(3.2)が常に満たすため、Lagrangean関数 \mathcal{L} は目的関数 \mathcal{I} に等しい。式(3.16)を書き換えると、

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{I} = \mathcal{G} \delta \mathcal{D} \quad (3.17)$$

目的関数の変分は感度ベクトルと設計変数ベクトルの変分との内積だけとなる。

目的関数の最小化問題を解くときに、設計変数に対して目的関数が勾配の最も急な方向に進んで行くと最適解に最も早く到達することができると考えられる。勾配法的一种である最急降下法では目的関数を反復的に減少させるために、設計変数の変化量を感度に比例させて次のように定義する。

$$\delta \mathcal{D} = -\lambda \mathcal{G} \quad (3.18)$$

即ち、第 $k+1$ ステップにおける設計変数ベクトル \mathcal{D}^{k+1} が勾配ベクトルの逆方向に沿って基準ステップ幅 λ だけ進むことである。変化成分 $\delta \mathcal{D}^{k+1}$ が式(3.19)によって求められる。

$$\mathcal{D}^{k+1} = \mathcal{D}^k - \lambda^k \mathcal{G}^k \quad (3.19)$$

基準ステップ幅 λ が大きすぎると反復過程は大きく振動して収束しないし、小さすぎると収束までに時間がかかる。従って、式(3.19)によって第 $k+1$ ステップにおける設計変数 \mathcal{D}^{k+1} の変化成分 $\delta \mathcal{D}^{k+1}$ (3.18)を求める際に、収束状態になるように基準ステップ幅 λ を適宜に探索する必要がある。例えば、第2章に述べた直線探索アルゴリズムなどを適用し、ステップ幅を決める。

[Adjoint法による感度解析の特性]

- ① 設計変数の個数に依存しない感度解析手法である。
- ② 流れの計算を一回実行する程度のCPU時間で、全ての設計変数に対する目的関数の勾配が得られる。
- ③ 逆問題設計へ適用する場合、目的関数を実現できる解が存在しなくても、最も近い解が得られる。

3.2 Adjoint方程式の導出

流れの支配方程式や目的関数によって、Adjoint方程式の形式は変わるが、基本的に導出過程は同じである。ここでは、非粘性圧縮性Euler方程式を例として導出してみる。

構造格子でよく使われる一般座標系 $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ における定常非粘性圧縮性Euler方程式は

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.20)$$

あるいは、

$$\frac{\partial F_j}{\partial \xi_j} = 0 \quad (3.21)$$

$$S_{jk} = J^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}, \quad \det(S) = J^{-2} \quad (3.26)$$

を用いて

と書かれる。ただし、

$$Q = J^{-1}q = J^{-1} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{Bmatrix},$$

$$F_j = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho U_j \\ \rho u_1 U_j + \xi_{j,x_1} p \\ \rho u_2 U_j + \xi_{j,x_2} p \\ \rho u_3 U_j + \xi_{j,x_3} p \\ (e+p)U_j \end{Bmatrix}, \quad (j=1,2,3)$$

(3.22)

で F_j はフラックス（流束）ベクトルと呼ばれる。また、 J は直交座標系 $(x,y,z)=(x_1,x_2,x_3)$ から一般座標系への変換

行列 $\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\right)_{j,k=1,2,3}$ の行列式

$$J = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

(3.23)

である。また、 U_j は反変速度

$$U_j = u_k \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \quad (3.24)$$

である。流束ベクトル F_j は直交座標系における流束ベクトル f_k

$$f_k = [f_{k\alpha}]_{\alpha=0,1,2,3,4} = \begin{Bmatrix} f_{k0} \\ f_{k1} \\ f_{k2} \\ f_{k3} \\ f_{k4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + \delta_{1k} p \\ \rho u_2 u_k + \delta_{2k} p \\ \rho u_3 u_k + \delta_{3k} p \\ (e+p)u_k \end{Bmatrix}, \quad (k=1,2,3)$$

(3.25)

および変換行列

$$F_j = S_{jk} f_k \quad (3.27)$$

と表すことができる。通常、設計変数は形状変形を通じて流れを変化させる場合が多い。この場合、定常Euler方程式の変分は

$$\delta \left(\frac{\partial F_j}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (S_{jk} \delta f_k + \delta S_{jk} f_k) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(S_{jk} \frac{\partial f_k}{\partial q} \delta q + \frac{\partial S_{jk}}{\partial \mathcal{D}} \delta \mathcal{D} f_k \right) \quad (3.28)$$

となる。

設計変数は変換行列を通じて流れ場に影響すると考えて、以下、 \mathcal{D} のかわりに $S(\mathcal{D}, x)=S_{jk}$ で議論する。

目的関数は以下のように表す。

$$\mathcal{I} = \int_B \mathcal{M}(q, S) dB + \int_D \mathcal{P}(q, S) dD \quad (3.29)$$

ここで、 D は領域内部を、 B は領域の境界を表す。最適化設計はこの目的関数を最小になる（或いはゼロに近い）条件を満たすような形状を探す。

このとき、目的関数(3.29)の変分は次のようになる、

$$\delta \mathcal{I} = \int_B \delta \mathcal{M}(q, S) dB + \int_D \delta \mathcal{P}(q, S) dD \quad (3.30)$$

ここで、

$$\delta \mathcal{M}(q, S) = \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q} \right]_S \delta q + \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S} \right]_q \delta S = [\mathcal{M}]_I \delta q + [\mathcal{M}]_{II} \delta S \quad (3.31)$$

$$\delta \mathcal{P}(q, S) = \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \right]_S \delta q + \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} \right]_q \delta S = [\mathcal{P}]_I \delta q + [\mathcal{P}]_{II} \delta S \quad (3.32)$$

co-stateベクトル ψ をEuler方程式(3.21)の両辺に乗じて、式(3.30)から引くとLagrangianの変分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \int_B ([\mathcal{M}]_I \delta q + [\mathcal{M}]_{II} \delta S) dB + \int_D ([\mathcal{P}]_I \delta q + [\mathcal{P}]_{II} \delta S) dD \\ & - \int_D \psi^T \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \delta F_j \right) dD \end{aligned} \quad \int_D \left(\frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_j} f_k + \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S_{jk}} \right]_q \right) \delta S_{jk} dD \quad (3.38)$$

$$(3.33)$$

δF_j の全微分は、

$$\delta F_j = \delta [F_j]_I + \delta [F_j]_{II} = S_{jk} \frac{\partial f_k}{\partial q} \delta q + \delta S_{jk} f_k = A_j \delta q + \delta S_{jk} f_k \quad \text{in 空間 } D \quad (3.34)$$

であり、以降部分積分等により変形して変分 δq 、 δS および $\delta \psi$ の係数を調べるわけである。ここで、

$$A_j = \frac{\partial F_j}{\partial q} = S_{jk} \frac{\partial f_k}{\partial q} \quad (3.35)$$

はヤコビアン係数行列と呼ばれる。

Euler方程式を解くためには境界条件が必要であるが、上の議論には境界条件に関する拘束条件が含まれていないことに注意する必要がある。すなわち、境界条件と対応する co-state ベクトル ψ と境界条件による目的関数への寄与を Lagrangean に追加して考える必要がある。

式(3.34)の最後の項にガウスの発散定理と流れ支配方程式(3.21)を適用すると、次のように変形することができる。

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \int_D \left(\frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_j} A_j + \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \right]_S \right) \delta q dD - \int_B \left(\psi^T n_j A_j - \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q} \right]_S \right) \delta q dB \\ & + \int_D \left(\frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_j} f_k + \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S_{jk}} \right]_q \right) \delta S_{jk} dD - \int_B \left(\psi^T n_j f_k - \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S_{jk}} \right]_q \right) \delta S_{jk} dB \end{aligned} \quad (3.36)$$

領域内部 D では δq は自由にとれるので、 $\delta\mathcal{L}$ を δq に無関係に求めるために、次のように ψ を選ぶ。

$$A_j^T \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} + \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \right]_S^T = 0 \quad \text{in } D \quad (3.37)$$

この式が領域 D で要請される Adjoint 方程式である。ここで、 A_j^T は流れ支配方程式対流項のヤコビアン式(3.35)の転置行列である。

また、この部分からの目的関数に対する感度への寄与は

となる。

3.3 Adjoint方程式の境界条件

領域境界 B では流れの支配方程式（ここでは Euler 方程式）の境界条件が Adjoint 方程式の境界条件と密接に関係することになる。いま、領域 D の境界 B が流入境界 B_{in} 、流出境界 B_{out} 、滑り境界 B_{slip} から構成されているとする。（すなわち、 $B = B_{in} + B_{out} + B_{slip}$ とする。）以下に超音速の場合において、それぞれの境界について考えてみる。

3.3.1 流入境界 B_{in} : $q = q_{in}$ on B_{in}

この場合、Lagrangean \mathcal{L} に

$$- \int_{B_{in}} \phi (q - q_{in}) dB \quad (3.39)$$

が追加され、その変分 $\delta\mathcal{L}$ には

$$- \int_{B_{in}} [\phi \delta q + \delta \phi (q - q_{in})] dB \quad (3.40)$$

が追加される。従って、境界条件は

$$\psi^T n_j A_j - \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial q} \right]_S = \phi, \quad \text{on } B_{in} \quad (3.41)$$

となるが、超音速の場合は $\delta q = 0$ とするため、 ψ が無条件となる。よって ψ を実際に解く必要はなく、内部点から外挿で求めれば良い。その時、流入境界からの感度への寄与は

$$- \int_{B_{in}} \left(\psi^T n_j f_k - \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial S_{jk}} \right]_q \right) \delta S_{jk} dB \quad (3.42)$$

となる。

3.3.2 流出境界 B_{out} : 無条件

この場合、Lagrangean \mathcal{L} に追加されるものはない。従って、境界条件は

$$\psi^T n_j A_j - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{out}}{\partial q} \right]_S = 0, \quad \text{on } B_{out} \quad (3.43)$$

となり、流出境界からの感度への寄与は

$$- \int_{B_{out}} \left(\psi^T n_j f_k - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{out}}{\partial S_{jk}} \right]_q \right) \delta S_{jk} dB \quad (3.44)$$

となる。

3.3.3 滑り条件 B_{slip} : $n_j U_j = 0$

この場合、Lagrangean \mathcal{L} に

$$- \int_{B_{slip}} \phi(n_j \rho U_j) dB = - \int_{B_{slip}} \phi(n_j q_k S_{jk}) dB \quad (3.45)$$

が追加され、その変分 $\delta \mathcal{L}$ には

$$- \int_{B_{slip}} (\phi n_j S_{jk}) \delta q_k dB - \int_{B_{slip}} (\phi n_j q_k) \delta S_{jk} dB - \int_{B_{slip}} (n_j q_k S_{jk}) \delta \phi dB \quad (3.46)$$

の3項が追加される。従って境界条件は、

$$\psi^T n_j S_{jk} \frac{\partial f_k}{\partial q} - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{slip}}{\partial q} \right]_S - \phi n_j S_{jk} = 0, \quad \text{on } B_{slip} \quad (3.47)$$

となる。見方を少し変えてみよう。流束ベクトルを反変速度ベクトルに比例する部分と圧力に比例する部分の和で表す。すなわち、

$$F_j = \hat{F}_j + F_j^P$$

$$\hat{F}_j = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho U_j \\ \rho u_1 U_j \\ \rho u_2 U_j \\ \rho u_3 U_j \\ (e+p) U_j \end{Bmatrix} = S_{jk} \hat{f}_k \quad (3.48)$$

$$F_j^P = J^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi_{j,x_1} P \\ \xi_{j,x_2} P \\ \xi_{j,x_3} P \\ 0 \end{Bmatrix} = S_{jk} f_k^P$$

このとき、流れの滑り条件は

$$n_j \hat{F}_j = n_j S_{jk} \hat{f}_k = 0 \quad (3.49)$$

と表すことができる。この場合、Lagrangean \mathcal{L} に

$$- \int_{B_{slip}} \phi^T (n_j \hat{F}_j) dB = - \int_{B_{slip}} \phi^T (n_j S_{jk} \hat{f}_k) dB \quad (3.50)$$

が追加され、その変分 $\delta \mathcal{L}$ には

$$- \int_{B_{slip}} \phi^T \left(n_j S_{jk} \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q} \right) \delta q dB - \int_{B_{slip}} (\phi^T n_j \hat{f}_k) \delta S_{jk} dB - \int_{B_{slip}} \delta \phi^T (n_j S_{jk} \hat{f}_k) dB \quad (3.51)$$

の3項が追加されるが、流れの滑り条件(3.49)より第3項が消える。第1と第2の項を式(3.36)に加えると境界条件と目的関数の感度への寄与になる。従って、境界条件は

$$\psi^T n_j S_{jk} \frac{\partial f_k}{\partial q} - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{slip}}{\partial q} \right]_S - \phi^T n_j S_{jk} \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q} = 0, \quad \text{on } B_{slip} \quad (3.52)$$

となるが、ここで $\psi = \phi$ とすれば、

$$\psi^T n_j S_{jk} \frac{\partial f_k^P}{\partial q} - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{slip}}{\partial q} \right]_S = 0, \quad \text{on } B_{slip} \quad (3.53)$$

となる。このとき、滑り境界から感度への寄与は

$$- \int_{B_{slip}} \left(\psi^T n_j f_k - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{slip}}{\partial S_{jk}} \right]_q \right) \delta S_{jk} dB - \int_{B_{slip}} (\psi^T n_j \hat{f}_k) \delta S_{jk} dB \quad (3.54)$$

と表される。さらに、流れ変数として原始変数 $(\rho, \rho u, p)$ をとれば、

$$\begin{cases} \psi^T n_j S_{jk} \frac{\partial f_k^P}{\partial p} = n_j S_{jk} \psi_k, & (q = p) \\ \psi^T n_j S_{jk} \frac{\partial f_k^P}{\partial q} = 0, & (q \neq p) \end{cases} \quad (3.55)$$

となるので、境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} n_j S_{jk} \psi_k - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{slip}}{\partial p} \right]_s = 0, & (q = p) \\ \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{slip}}{\partial q} \right]_s = 0, & (q \neq p) \end{cases} \quad (3.56)$$

$$A_j^T \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} + \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \right]_s^T = 0 \quad \text{in } D \quad (3.57)$$

境界条件

無条件、計算領域内部から ψ を外挿する, on B_{in}

$$\psi^T n_j A_j - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{out}}{\partial q} \right]_s = 0, \quad \text{on } B_{out} \quad (3.58)$$

3.4 Adjoint法による感度解析のまとめ

以上をまとめると、超音速において流入と流出と物体表面滑り条件だけを満たす場合には、Adjoint法による感度解析は次のようになる。

$$\psi^T n_j S_{jk} \frac{\partial f_k^P}{\partial q} - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{slip}}{\partial q} \right]_s = 0, \quad \text{on } B_{slip} \quad (3.59)$$

Adjoint方程式

感度

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \int_D \left(\frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_j} f_k + \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathcal{S}_{jk}} \right]_q \right) \delta \mathcal{S}_{jk} dD \\ &\quad - \int_{B_{in}} \left(\psi^T n_j f_k - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{in}}{\partial \mathcal{S}_{jk}} \right]_q \right) \delta \mathcal{S}_{jk} dB - \int_{B_{out}} \left(\psi^T n_j f_k - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{out}}{\partial \mathcal{S}_{jk}} \right]_q \right) \delta \mathcal{S}_{jk} dB \\ &\quad - \int_{B_{slip}} \left(\psi^T n_j f_k - \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{slip}}{\partial \mathcal{S}_{jk}} \right]_q \right) \delta \mathcal{S}_{jk} dB - \int_{B_{slip}} (\phi^T n_j \hat{f}_k) \delta \mathcal{S}_{jk} dB \\ \text{or} &= - \int_D \psi^T \frac{\partial}{\partial \xi_j} (f_k \delta \mathcal{S}_{jk}) dD + \int_D \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathcal{S}_{jk}} \right]_q \delta \mathcal{S}_{jk} dD \\ &\quad + \int_{B_{in}} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{in}}{\partial \mathcal{S}_{jk}} \right]_q \delta \mathcal{S}_{jk} dB + \int_{B_{out}} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{out}}{\partial \mathcal{S}_{jk}} \right]_q \delta \mathcal{S}_{jk} dB \\ &\quad + \int_{B_{slip}} \left[\frac{\partial \mathcal{M}_{slip}}{\partial \mathcal{S}_{jk}} \right]_q \delta \mathcal{S}_{jk} dB - \int_{B_{slip}} (\psi^T n_j \hat{f}_k) \delta \mathcal{S}_{jk} dB \end{aligned} \quad (3.60)$$

亜音速流れ、或いはほかの種類の境界条件も同じように導出でき、Adjoint方程式及びその境界条件と目的関数の感度への寄与が追加される。

3.5 形状変更

設計対象となる機体形状の修正においては、形状の連続性を考慮して、Bezier 曲線或いは B-spline 曲線などの表現法を用いた修正法や、胴体や翼型等を表現するのに適した複数の形状基本関数の線形結合による修正法などを用いることが多い。最適化においては、これらの形状修正量を定義する設計変数（曲線の制御点や線形結合の係数等）を求め、元の形状に付加することにより新しい形状が生成される。形状修正に必要な制御点分布及び設

計変数の数は解くべき設計問題に対して事前に適切に設定する。

一例として形状基本関数による形状修正を採用した場合には、最適化手法によって決定される形状の修正量は、形状基本関数 $H_k(x)$ の線形結合として、次のように表現される。

$$\Delta s = \sum_{k=1}^K \mathcal{D}_k H_k(x) \quad (3.54)$$

K は用いた基本関数の数である。感度解析と勾配法によって設計変数である線形結合の係数を求めて新しい形状

を決定するプロセスを繰り返し、最終的に設計目的を満たす設計変数 \mathcal{D}_k が求められる。実際に CFD 解析をベースとする最適設計においては、設計変数に従った形状の変形に伴い、物体表面の計算格子を修正する必要性が生じる。また、計算領域の内部格子も表面格子の移動に従って格子座標の修正を行う必要がある。構造格子の場合には、格子線に沿って内部格子の座標を線形的に移動できるが、形状不連続点や極度の凹面、あるいは機体要素結合部などの付近では、格子点を容易に移動できない場合があり、楕円型偏微分方程式による空間格子の平滑化を行う必要がある。

3.6 最適化設計手順

本論文では、最適化手法にquasi-Newton法を用いる。その最適化設計手順は以下の通りである。

- ① 初期形状と設計変数の初期値 (\mathcal{D}_0) を与える。
- ② 計算格子の生成：計算効率を向上させるために、代数法により格子を生成する。
- ③ 流れ解析：流れ支配方程式から流れ変数 (ρ, U, e) を求めて、目的関数 \mathcal{I} を評価する。

- ④ 感度解析：Adjoint方程式からco-state変数 (ψ) を求める。
- ⑤ 勾配計算：設計変数に微小摂動を与えて、設計変数に対する目的関数の勾配 (\mathcal{G}) を計算する。勾配の大きさにより目的関数 \mathcal{I} が収束したかを評価する。収束すれば最適設計が終了し、設計変数と流れ解析結果を出力する。
- ⑥ 最適化ルーチン：quasi-Newton法より近似ヘッシアン行列を求め、得られた勾配で設計変数 (\mathcal{D}) の変化方向を探索する。
- ⑦ 形状修正：制約条件を満たした形状修正量を計算して新しい形状に更新する。ステップ②に戻る。

図2には、勾配法による最適化設計のフローチャートを示す。

Adjoint法に基づく勾配法のアルゴリズムの擬似コードは以下の通りである。

Give the initial shape and design variables \mathcal{D}_0	! Start with an initial shape
Evaluate the initial cost function \mathcal{I}_0	
Compute the initial sensitivity derivatives \mathcal{G}_0	! Initialize the Hessian and the search direction
For $n=1,2,3, \dots$, do:	! Main loop over design circle
Evaluate the step size λ along p direction	! Line search
Compute the flow field (ρ, u, e)	! CFD computation
Estimate the cost function \mathcal{I}	
Revise the design variable $\mathcal{D}^n = \mathcal{D}^{n+1} + \lambda p$	
Update the shape and change grids (x, y, z)	! Shape and grid change
Check the convergence.	
Solve the co-state vector ψ	! Adjoint computation
Compute the sensitivity derivatives \mathcal{G}	
Evaluate the new Hessian	! Quasi-Newton algorithm
and update the search direction p .	
End do	
Output the optimized shape.	

4. Adjoint 方程式の数値解析

流れ場の支配方程式を満たす解が得られれば、それに基づいたAdjoint偏微分方程式の解を求めることができる。実際にAdjoint方程式を数値的に解くには、差分法や有限体積法のような流れ場の支配方程式を解くと同様の手法が用いられる。本論文では、流れ場の支配方程式であるEuler方程式が差分法によって解かれるので、Adjoint方程式もそれに従って差分法で解くことにする。

4.1 時間積分

本研究で扱う最適化問題は定常の流れ場を対象とした設計問題であるため、Adjoint方程式もEuler方程式と同様に定常であるが、Adjoint方程式に非定常の時間項を導入することにより、定常Euler方程式を解く際に用いた方法を有効に利用することができ、時間 $t \rightarrow \infty$ の漸近収束解になれば、それを定常解とみなすことができる。

Adjoint方程式においては、Euler方程式の流入条件境界がco-state変数の流出条件境界に、流出条件境界がco-state変数の流入条件境界になるため、流れ場の特性線に沿って反対方向へ特性量を伝播することになる。言い換えれば非定常時間項が負になることに相当するため、例えば超音速流れ場においては全てのAdjoint特性線は流れの上流方向を向いているから、流れの下流境界においてco-state変数 $\psi = \text{constant}$ を境界値として与えることによりAdjoint方程式を正しく解くことができる。

時間項を導入したAdjoint方程式は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - J^{-1} A_j^T \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} - J^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \right]_S^T = 0 \quad \text{in 空間} D \quad (4.1)$$

或いは、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = J^{-1} A_j^T \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} + J^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \right]_S^T = RHS \quad (4.2)$$

と表される。以下にAdjoint方程式の時間積分法について述べる。

4.1.1 陽解法のEuler法

最もシンプルな時間積分法として以下のEuler法が考えられる。

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \Delta t \cdot RHS^n \quad (4.3)$$

4.1.2 Runge-Kutta 法

上記Euler法よりも安定性条件の制約が緩やかな手法として、下記に示す様な m 階のRunge-Kutta法が考えられる。

$$\begin{aligned} \psi^{n+1,0} &= \psi^n \\ \psi^{n+1,k} &= \psi^{n,k} + \alpha_k \Delta t \cdot RHS^{n+1,k} \\ \psi^{n+1} &= \psi^{n+1,m} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$m=4$ 階の場合には下記係数が用いられる。

$$\alpha_1 = 1/3, \quad \alpha_2 = 4/15, \quad \alpha_3 = 5/9, \quad \alpha_4 = 1$$

4.1.3 陰的近似因子LU-ADI 法

Adjoint方程式(4.1)にEuler前進差分式を適用すると、

$$\begin{aligned} \psi^{n+1} &= \psi^n + \Delta t \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{n+1} + O(\Delta t^2) \\ &= \psi^n + \Delta t J^{-1} A_j^T \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial \xi_j} + J^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \right]_S^T \\ &= \psi^n + \Delta t J^{-1} A_j^T \frac{\partial \Delta \psi^n}{\partial \xi_j} + \Delta t J^{-1} A_j^T \frac{\partial \psi^n}{\partial \xi_j} + J^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \right]_S^T \end{aligned} \quad (4.5)$$

となり、デルタ形式では、

$$\begin{aligned} \left(I - \Delta t J^{-1} A_j^T \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \Delta \psi^n &= \Delta t J^{-1} A_j^T \frac{\partial \psi^n}{\partial \xi_j} + \Delta t J^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q} \right]_S^T \\ &= \Delta t RHS^n \end{aligned} \quad (4.6)$$

と書ける。多次元の場合は、さらに、この式を近似的に

$$\begin{aligned} \left(I - \Delta t J^{-1} A^T \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(I - \Delta t J^{-1} B^T \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(I - \Delta t J^{-1} C^T \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \Delta \psi^n \\ = \Delta t RHS^n \end{aligned} \quad (4.7)$$

と書き換えることができる。ここで、ヤコビアン係数行列

$$A_j^T = \left[R_{\xi_j}^{-1} \right]^T \Lambda_{\xi} \left[R_{\xi_j} \right]^T \quad (4.8)$$

を式(4.7)に代入して、対角化法と近似因子化法を適用する。さらに固有値 Λ の正負に応じて風上差分と風下差分を適用すると、左辺第一項は次の形になる。

$$\begin{aligned} \left(I - \Delta x J^{-1} A^T \frac{\partial}{\partial \xi} \right) &= \left[R_{\xi}^{-1} \right]^T \left(I - \Delta x J^{-1} \Lambda_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left[R_{\xi} \right]^T \\ &= \left[R_{\xi}^{-1} \right]^T \left(I + \Delta x J^{-1} \frac{\Lambda_{\xi} + |\Lambda_{\xi}|}{2} \Delta^+ \right) \left(I - \Delta x J^{-1} \frac{\Lambda_{\xi} - |\Lambda_{\xi}|}{2} \Delta^- \right) \left[R_{\xi} \right]^T \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.1.4 局所的な時間ステップ

定常問題であるAdjoint方程式は収束解を得ることが目的であるから、収束途中の解は物理的に意味がない。すなわち定常な流れ場を解く場合と同様、非定常項は物理的に正しい時間変化にならなくても、定常な解に収束すれば良いことになる。そこで計算収束性の観点から、Adjoint方程式においても流れ場のEuler方程式の場合と同じ局所時間刻み法を使うことにより収束を加速させる。局所時間刻みは次の式により各格子点において定義する。

$$\Delta t = \min \left(\frac{\Delta l_{ref}}{|U| + c\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}}, \frac{\Delta l_{ref}}{|V| + c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}}, \frac{\Delta l_{ref}}{|W| + c\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}} \right) \quad (4.10)$$

ここで U_j は反変速度である。計算格子は物体近傍では細かく遠方では粗いので、格子点ごとにそのサイズに合わせた安定条件が許容する最大の Δt を使うことで収束を早めることができる。

4.2 対流項の離散化

Adjoint方程式は線形な双曲型偏微分方程式であるため、初期値と境界に非線形的な条件がないのであれば、解析空間内に圧縮性流れ場における衝撃波のようなステップ関数状の不連続解が発生しにくい。しかしながら、Adjoint方程式の係数行列 A_j が流れ変数 q_j から構成されているため、流れ場の不連続面とco-state変数 ψ の特性線が時間上或いは空間上で交わることによりステップ関数状の不連続面が発生する場合がある。その様なケースにおいても、離散化における人工粘性によって、数値計算上の安定性を保ち、不連続面を連続関数とした弱解を求めることができる。また、Euler方程式に用いられたTVDスキームなどを使えば、高精度の解を求めることも可能となる。一方、Adjoint方程式は保存形で表れないため、Euler方程式に比べて、不連続面で安定性が悪いという問題もある。

Co-state変数 ψ の特性速度は流れの特性速度と反対方向になるため、流れ場における対流項の解析に風上差分を用いるのであれば、Adjoint方程式の対流項には風下差分を適用すべきであろう。さらに、Euler方程式の対流項の離散化と同様に制限関数 (limiter) を導入することにより、離散化による数値不安定性を抑えることができる。

Adjoint方程式の対流項を次のように書き換える。

$$A_j^T \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} = \left[R_{\xi_j}^{-1} \right]^T \Lambda_{\xi_j} \left[R_{\xi_j} \right]^T \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} \quad (4.11)$$

その風下差分をとると、

$$\lambda_j \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j} = \frac{\lambda_j - |\lambda_j|}{2} \left(\psi_{j+\frac{1}{2}}^L - \psi_{j-\frac{1}{2}}^L \right) + \frac{\lambda_j + |\lambda_j|}{2} \left(\psi_{j+\frac{1}{2}}^R - \psi_{j-\frac{1}{2}}^R \right) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \psi_{j+\frac{1}{2}}^L &= \psi_j + \frac{1-\kappa}{4} \tilde{\Delta} \psi_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1+\kappa}{4} \tilde{\Delta} \psi_{j+\frac{1}{2}} \\ \psi_{j+\frac{1}{2}}^R &= \psi_{j+1} - \frac{1-\kappa}{4} \tilde{\Delta} \psi_{j+\frac{3}{2}} + \frac{1+\kappa}{4} \tilde{\Delta} \psi_{j+\frac{1}{2}} \\ \tilde{\Delta} \psi_{j+\frac{1}{2}} &= \min \text{mod} \left(\Delta \psi_{j+\frac{1}{2}}, \omega \Delta \psi_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ \tilde{\Delta} \psi_{j+\frac{1}{2}} &= \min \text{mod} \left(\Delta \psi_{j+\frac{1}{2}}, \omega \Delta \psi_{j+\frac{3}{2}} \right) \\ \Delta \psi_{j+\frac{1}{2}} &= \psi_{j+1} - \psi_{j-1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

となり、minmod制限関数は次のように定義される。

$$\min \text{mod}(x, \omega y) = \text{sgn}(x) \cdot \max \left\{ 0, \min \left[|x|, \omega y \text{sgn}(x) \right] \right\} \quad (4.14)$$

ただし、

$$1 \leq \omega \leq \frac{3-\eta}{1-\eta}, \quad \text{with } \eta \neq 1$$

である。 κ は結合のパラメーターで、選び方によって次のようになる。

- $\kappa = -1$ 、上流差分、2次精度
- $\kappa = 0$ 、Fromm's スキーム、2次精度
- $\kappa = 1/3$ 、upwind biased スキーム、3次精度

$\kappa = 1/2$ 、QUICKスキーム、2次精度

$\kappa = 1$ 、中心差分、2次精度

4.3 境界条件

超音速非粘性流れにおいては、Adjoint方程式に次の境界条件が適用される。

壁面境界におけるco-state 変数ベクトル ψ は、壁面に垂直な成分のみが目的関数に応じて定められ、他の成分は内部領域から外挿で定める。

流入境界では流れ変数が不変、即ち δq がゼロであるため、 ψ が無条件であり、内部領域から数値的に外挿で定める。

流出境界で超音速の場合は、流れ変数が上流側に影響を及ぼさないため、感度 δZ に寄与しない。逆に ψ はゼロとならなければならない。 $\psi=0$ 。

この様に流れの支配方程式とは反対に、物理流入境界がAdjoint方程式にとっては流出境界となり、物理流出境界がAdjoint方程式にとっては流入境界となる。

5. 最適化の適用

ここでは前節までに解説した、流れの非線形性を考慮したEuler解析を用いて目的関数を評価し、Adjoint法を利用して効率的に感度解析を行うことで目的関数の勾配を求めて、勾配法により目的関数を最小化する空力最適設計法の適用例を示す。さらに、文献【5,6,7】に、JAXA小型超音速実験機において実例としてAera-Ruled胴体やナセル形状や主翼ワープなどの設計にもAdjoint法が適用された。

5.1 2次元翼型の逆問題設計への適用

空力逆問題とは、与えられた目標圧力分布や速度分布を実現するような形状を求めることである。ここで試行した例は、超音速 ($M_\infty=2$) の流れ場におかれた2次元翼型の表面上に与えられた目標圧力分布を実現する翼型を探す逆問題設計である。初期形状として翼型NACA0012を用い、設計手法の検証であるため目標とする翼型をNACA4412として、NACA4412のEuler解析により得られた表面圧力分布を目標圧力分布として与えて、NACA0012からNACA4412への逆問題設計を行い、得られた設計形状とNACA4412との比較を行うことにする。

目的関数を現形状の圧力分布 p と与えられた目標圧力分布 p_d との差の2乗積分として、次のように定義する。

$$\mathcal{I} = \int_B \mathcal{M} ds = \frac{1}{2} \int_B (p - p_d)^2 dl \quad (5.1)$$

この式の変分をとると、

$$\delta \mathcal{I} = \int_B (p - p_d) \delta p \cdot dl + \frac{1}{2} \int_B (p - p_d)^2 (\delta dl) \quad (5.2)$$

となる。2次元Adjoint方程式は、

$$\frac{\partial \psi^T}{\partial \xi} J^{-1} A + \frac{\partial \psi^T}{\partial \eta} J^{-1} B = 0 \quad \text{in 空間} D \quad (5.3)$$

と表され、その境界条件は次のように与えられる。

- 壁面条件：壁面における co-state 変数は、垂直な成分が下記の通り目的関数に関連して定義され、他の成分は内部領域から数値的に外挿で定める。

$$\begin{aligned} \eta_x \psi_2 + \eta_y \psi_3 &= -n_\eta \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \cdot (p - p_d), \\ \text{on 境界 } n_\xi &= 0, n_\eta = 1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

- 流入条件： δq がゼロであるため ψ は無条件となり、内部領域から数値的に外挿で定める。
- 流出条件： δZ をゼロとするために、 ψ がゼロにならなければならない。 $\psi=0$ 。

Adjoint 方程式及びその境界条件から co-state 変数を求めると、目的関数の変分は流れ物理量と co-state 変数から次の式に表される。

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{I} &= \frac{1}{2} \oint \left((p - p_d)^2 \delta \left(\frac{1}{J} \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \right) \right) d\xi \\ &\quad - \int_B \psi^T \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left\{ \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ H \end{array} \right\} u_k \delta \left(J^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) + p \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \delta \left(J^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial x} \right) \\ \delta \left(J^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \right) \\ 0 \end{array} \right\} dD \\ &\quad - \oint \psi^T \left\{ \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ H \end{array} \right\} u_k \delta \left(J^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) d\xi \end{aligned} \quad (5.5)$$

後は設計変数に基づく形状微小変動によって計算格子のメトリックの変分から目的関数の勾配を求め、その勾配に従って新しい形状を求める。このようにして、design cycleを収束するまで繰り返す。

翼キャンバー形状は図3に示されるような、Hicks-Henneにより提案された4つの基本形状関数の線形結合で表すこととし、線形結合の係数4個を設計変数とす

る。求められたキャンバー形状にNACA0012の翼厚分布を加えて翼型を定義する。

まずは、Adjoint法と直接差分法による勾配の比較を行う。図4(a)に初期形状についての勾配を示すが、この結果から両者が良く一致していることが分かる。図4(b)には目的関数の収束履歴を示す。この図において、横軸はCFD解析の回数、縦軸は目的関数を表す。Adjoint法では目的関数の設計変数に対する勾配が1回のCFD計算（と1回のAdjoint解析）で得られるため、Adjoint法は直接差分法に対して $1/(4-1)=1/3$ のCFD解析回数で同等な収束解に到達していることが分かる。ただし、この図にはAdjoint解析にかかる計算コストは現れていないため、それを考慮すると計算コスト低減効果は小さくなるが、設計変数が増える実用問題においてはAdjoint解析にかかる計算コストは相対的に小さくなり、直接差分法に対する優位性が高まる。図5(a)には図4(c)と同じ収束履歴をデザインサイクルで整理した図を示すが、約10回のデザインサイクルで目的関数が初期値の0.3%にまで収束していることが分かる。本テスト問題においてはその10デザインサイクル中に、12回のCFD計算と10回のAdjoint法計算が実施された。図5(b)には設計変数の収束履歴を示すが、6回のデザインサイクルで設計変数はほぼ収束していることが分かる。通常、逆問題設計においては最適化プロセス開始時に現状圧力分布と目標圧力分布の差が最大であり、目的関数の感度も高くなるため設計変数の変化も大きくなるが、その後修正された形状が目標形状に近づき感度が鈍くなってくるにつれて設計変数の変動も小さくなり、目標形状へ収束していく。図6に初期翼型と逆問題設計で求められた設計翼型周りの圧力分布を、図7(a)と(b)と(c)に設計結果としてそれぞれ翼形状、キャンバーライン及び表面圧力分布を示す。設計最終形状及び表面圧力分布は目標であるNACA4412によく一致しているが、小さい差も見られる。完全に一致させることができなかった理由としては、用いた基本関数が目標形状と初期形状との差分を完全には表現できないことが挙げられる。

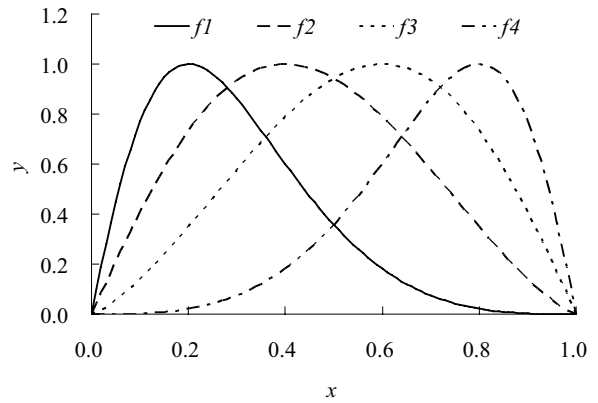
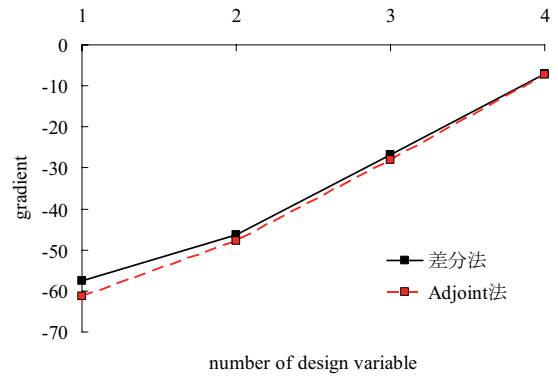
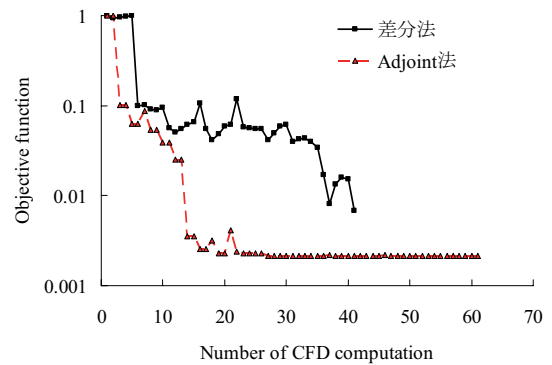


図3. 2次元翼型設計に適用した形状基本関数

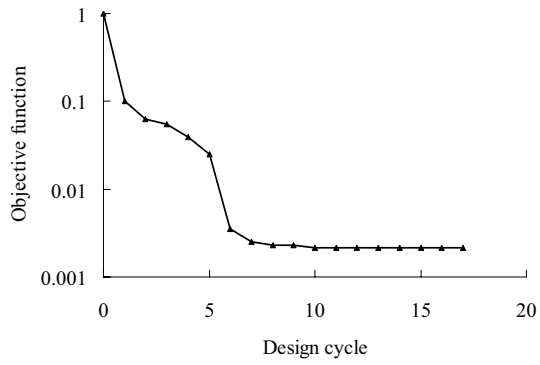


(a) 勾配

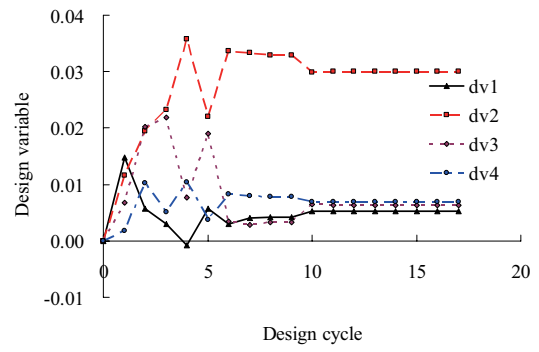


(b) 最適化過程の収束履歴

図4. 2次元翼型逆問題：直接差分法と adjoint 法の比較

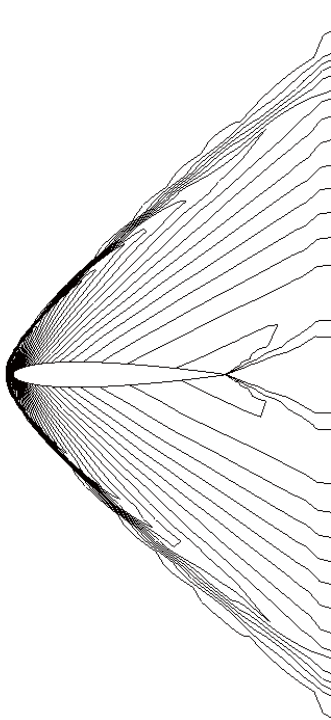


(a) 目的関数の収束履歴

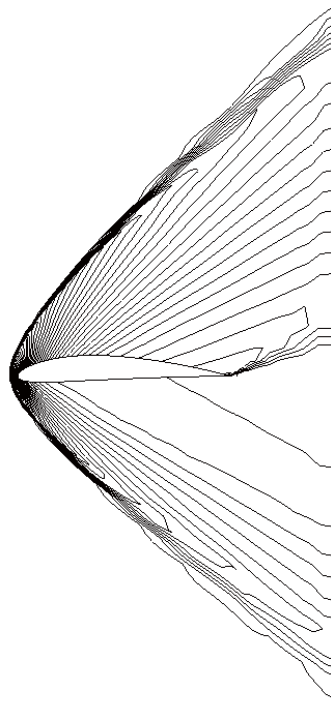


(b) 設計変数の収束履歴

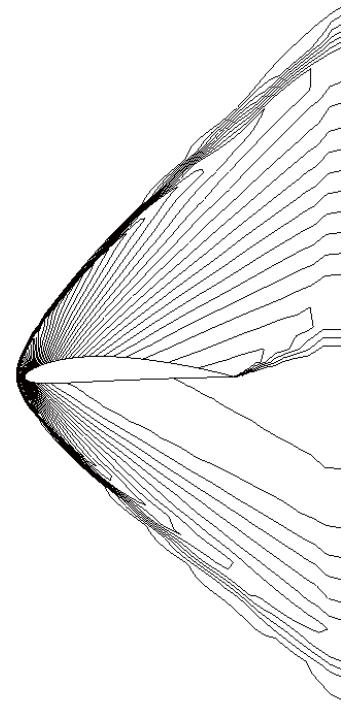
図 5. 2次元翼型逆問題の最適化収束履歴



(a) 初期翼型 NACA0012

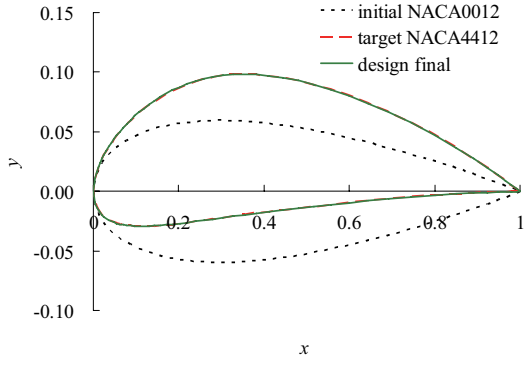


(b) ターゲット翼型 NACA4412

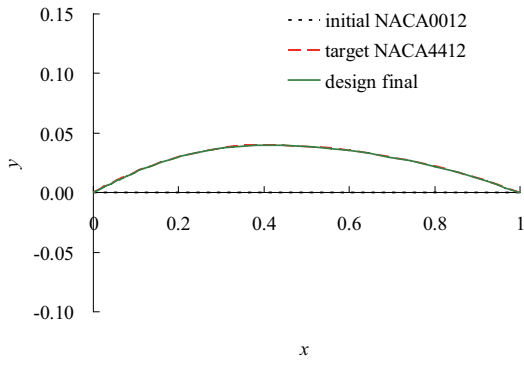


(c) 逆問題設計翼型

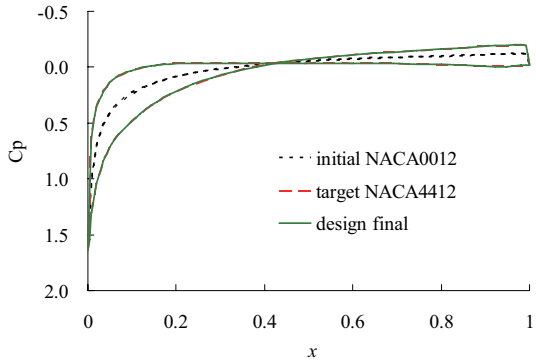
図 6. 2次元翼型逆問題：翼型周りの流れ圧力等高線



(a) 翼型の形状



(b) キャンバーライン



(c) 表面圧力分布

図7. 2次元翼型逆問題の計算結果

5.2 3次元軸対称物体の抗力最小化設計への適用

続いて3次元のテスト問題として、主流マッハ数2.0の超音速流れ中に迎角が 0° でおかれた軸対称物体の圧力抗力を最小化する問題を考える。初期形状としては図8に示す様な円柱の前後端がogiveとなっている軸対称物体を定義し、その半径分布を7点で制御されるBezier曲線により修正する。両端の制御点はゼロで固定とするため設計変数としては5点の半径方向座標を用いる。圧力抗力最小化設計の極限は物体が消滅することであり、それを

避けるため初期形状の体積を維持するという拘束条件を与えることにする。本テスト問題における目的関数は以下の通り。

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{B}} \mathcal{M} dl = \frac{1}{C_{D0}} \frac{1}{S_{ref}} \int_{\mathcal{B}_{wall}} C_p (S_x \cos \alpha + S_y \sin \alpha) dl + \kappa \left(\frac{V - V_0}{V_0} \right)^2 \quad (5.6)$$

ここで、 κ は体積を拘束するpenalty関数の定数である。

Adjoint方程式及び境界条件は2次元逆問題ケースと同じように導出する。本ケースにおける目的関数の変分は流れ物理量とco-state変数から次の式に表される。

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{I} &= \frac{1}{C_{D0}} \frac{1}{S_{ref}} \int_{j=1} C_p (\delta S_x \cos \alpha + \delta S_y \sin \alpha) d\xi + 2\kappa \frac{(V - V_0)}{V_0^2} \int \pi \delta (r^2 x_\xi) d\xi \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}} \psi^T \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial E_j}{\partial \mathcal{S}} \delta \mathcal{S} \right) \right] dD \\ &= \frac{1}{C_{D0}} \frac{1}{S_{ref}} \int_{j=1} C_p (\delta S_x \cos \alpha + \delta S_y \sin \alpha) d\xi + 2\kappa \frac{(V - V_0)}{V_0^2} \int \pi \delta (r^2 x_\xi) d\xi \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}} \psi^T \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ H \end{array} \right\} u_k \delta \left(J^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) + p^* \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \delta \left(J^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial x} \right) \\ \delta \left(J^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \right) \\ \delta \left(J^{-1} \frac{\partial \xi_j}{\partial z} \right) \\ 0 \end{array} \right\} dD \\ &\quad - \int_{j=1} \psi^T \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ H \end{array} \right\} u_k \delta \left(J^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) d\xi \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここでは、物体表面が $\eta=1$ である。下付き文字“0”は初期形状を意味する。

Adjoint偏微分方程式の境界条件は次のように与えられる。

- 壁面条件：壁面における co-state 変数は、垂直な成分が下記の通り目的関数に関連して定義され、他の成分は内部領域から数値的に外挿で定める。

$$\eta_x \psi_2 + \eta_y \psi_3 + \eta_z \psi_4 = \frac{n_\eta J}{0.5 \rho M_\infty^2 S_{ref}} (S_x \cos \alpha + S_y \sin \alpha) \quad (5.8)$$

- 流入条件： δq がゼロであるため ψ は無条件と

なり、内部領域から数値的に外挿で定める。

- 流出条件： δZ をゼロとするために、 ψ がゼロにならなければならない。 $\psi=0$ 。

図9に直接差分法とAdjoint法で求められた勾配の比較を示すが、両者はほぼ一致していることが分かる。最適化の収束履歴を図10に示す。この図において、横軸はCFD解析の回数、縦軸は目的関数と軸対称物体の圧力抗力及び体積を示している。本ケースでは5個の設計変数を用いているためCFD回数で比較すると、Adjoint法は直接差分法に比べて $1/(5-1)=1/4$ のCFD解析回数ですむ。1回目のデザインサイクルにおいては圧力抗力を低減するために軸対称物体の体積が減少し抗力値が小さくなっているが、その後体積penaltyが機能して初期体積を保持しながら抗力が低減していく様子が見られ、最終的には図11に示す様に、軸対称物体が線形理論により導かれる最小抗力物体であるSears-Haack bodyに収束していることが分かる。

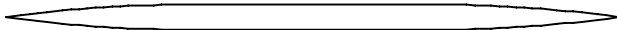


図 8. 軸対称物体の初期形状

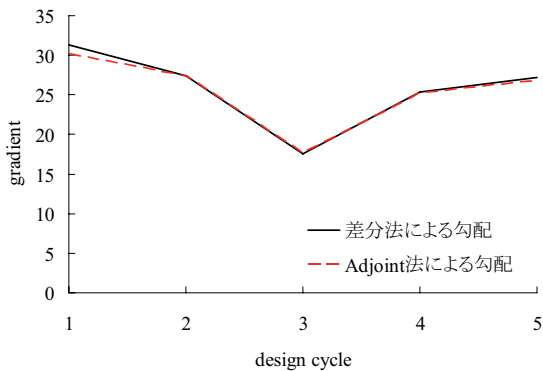


図 9. 軸対称物体の抗力最小化：差分法と Adjoint 法による勾配の比較

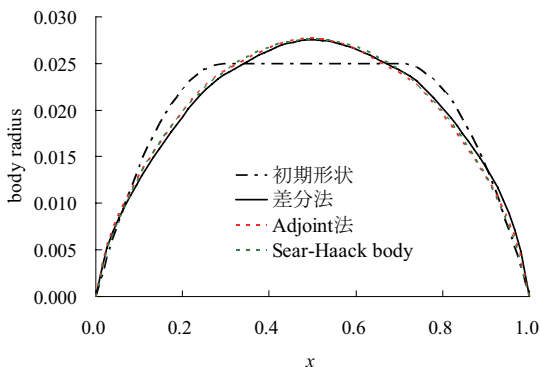
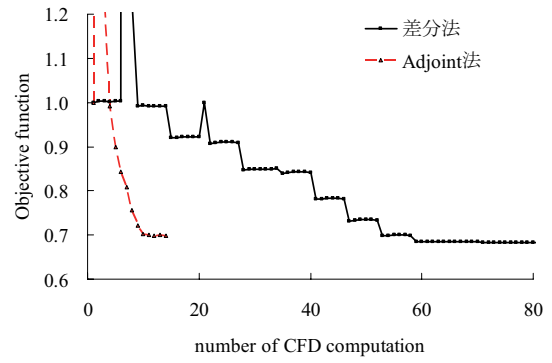
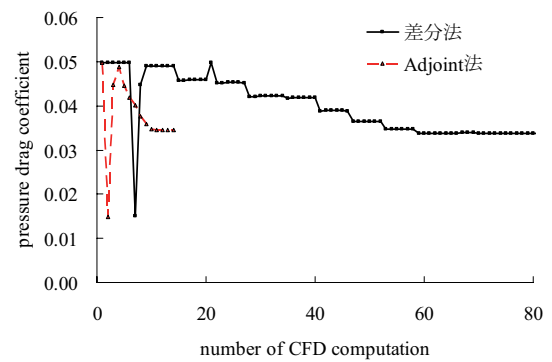


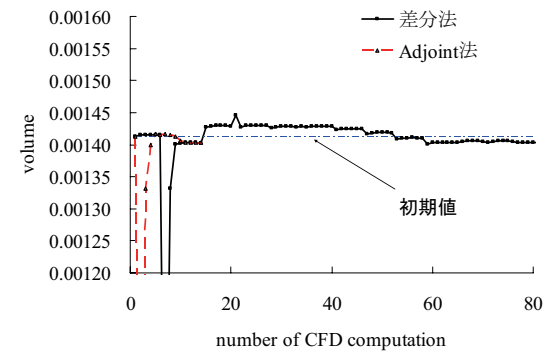
図 11. 軸対称物体半径分布の比較



(a) 目的関数



(b) 圧力抵抗係数



(c) 体積

図 10. 軸対称物体抗力最小化問題の収束履歴

5.3 翼干渉を考慮した軸対称物体形状の抗力最小化設計への適用

実際のSSTの空力形状最適化を行うためには、より複雑な形状でも対応する必要があるため、本最適設計手法に重合格子法⁸⁾を適用した。重合格子法は、機体の各要素毎に独立した格子を生成し、それらを重ね合わせてデータの補間を行うことにより効率的に複雑形状のCFD解析を可能とする手法である。空力最適設計においては、設計変数によって形状修正が必要な格子だけを修正すれば良いので、格子生成の時間が短縮する利点がある。

テストケースとして前節の軸対称物体抗力最小化問題を拡張し、図12に示す様に主流マッハ数2.0の超音速流れに迎角0°でおかれた主翼と、主翼の下方にエンジンナセルを模擬した1対の軸対称物体の抗力を最小化する問題を設定する。図12には、主翼と軸対称物体にそれぞれ生成された重合計算格子も示されている。主翼の平面形としては小型超音速ロケット実験機の形状を採用して主翼形状は固定とし、主翼下方に配置された軸対称物体の半径分布を4個の設計変数で制御されるBezier曲線で修正する。本ケースにおいては軸対称物体の初期形状としては単体で圧力抗力最小であるSears-Haack bodyを採用し、主翼や軸対称物体同士の干渉抗力を最小化することを目的とした。やはり初期形状の体積を維持する拘束条件を加えて、目的関数を次のように定義した。

$$\mathcal{I} = C_{D,wing} + C_{D,nacelle} + \kappa \left(\frac{V - V_0}{V_0} \right)_{nacelle}^2 \quad (5.9)$$

Adjoint方程式及び境界条件は前節の抗力最小化問題と同様であるが、重合格子法においてはco-state変数も流れ保存量と同じようにデータ補間を行ってAdjoint解析を行う。また、本ケースでは軸対称物体のみが形状修正されるので、感度解析における格子修正は軸対称物体周りの格子だけであり、目的関数の変分(5.7)式も軸対称物体周りの格子のみから求められる。Adjoint偏微分方程式の境界条件も前節と同様であるが、 $y=0$ の対称面における境界条件は次のように与える。

- 対称面条件：中心面 $y=0$ においてco-state変数ベクトルが対称となる。

重合格子法を用いた本ケースにおいても、図13に示すように直接差分法とAdjoint法による勾配はよく一致することが分かる。図14にAdjoint法による最適設計の収束履歴を示す。約12回のデザインサイクルでほぼ収束し、最適形状は初期形状に対して抗力が約4%低減されている。単体で抗力最小であるSears-Haack bodyに比べて、主翼下方に配置された1対の軸対称物体の最適形状

は、先端が細く後端が太くなっているのが分かる。それは図15に示す下面と側面の圧力分布に見られる様に、軸対称物体先端から発生する衝撃波を弱めることにより、その衝撃波が反対の軸対称物体前方や主翼下面に当たって干渉抗力を生み出すのを抑える効果があるためであると考えられる。

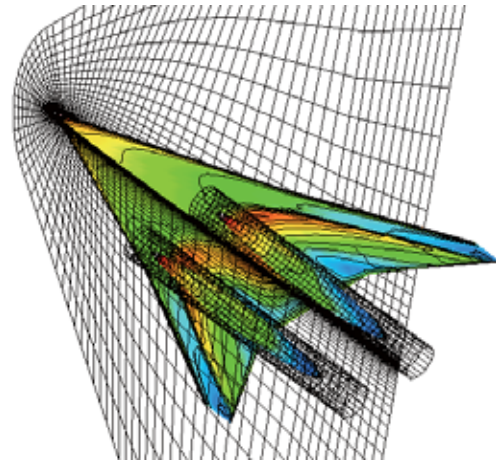


図12. 翼と軸対称物体の干渉問題：重合格子と表面圧力分布

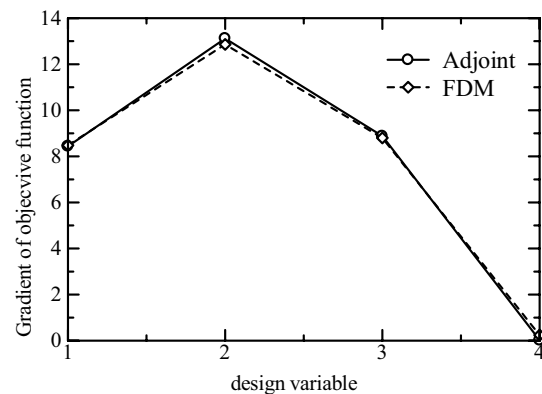
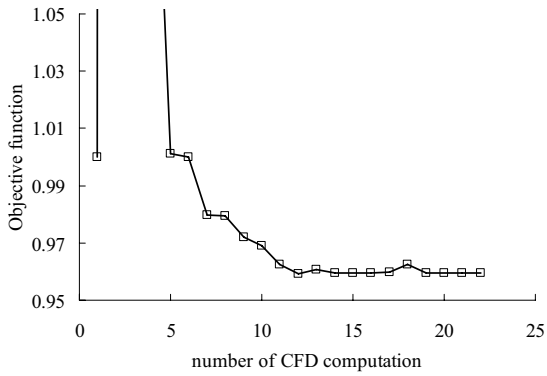
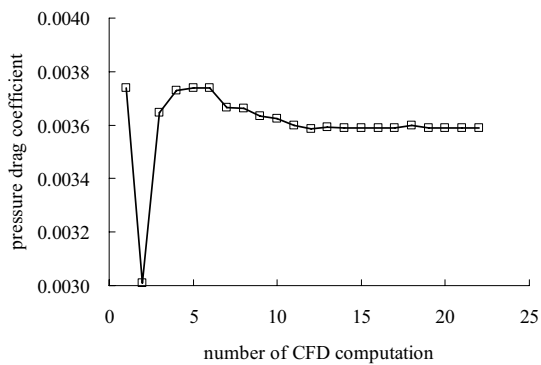


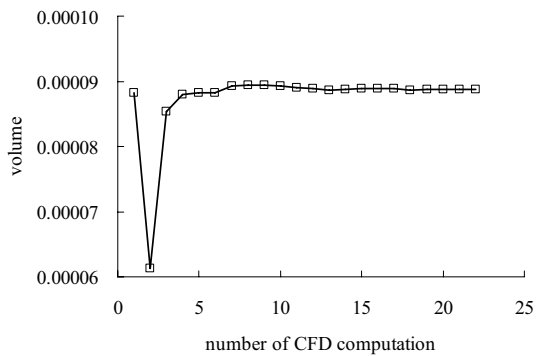
図13. 翼と軸対称の干渉問題：差分法とAdjoint法による勾配の比較



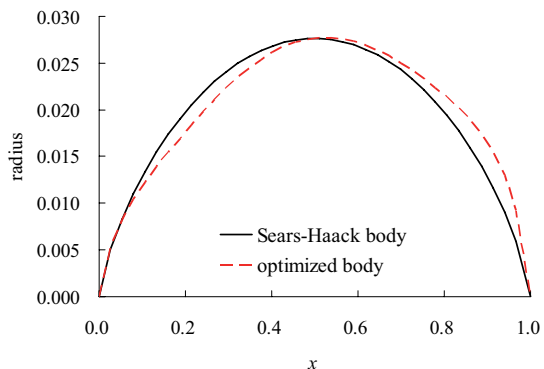
(a) 目的関数の収束履歴



(b) 圧力抵抗係数の収束履歴

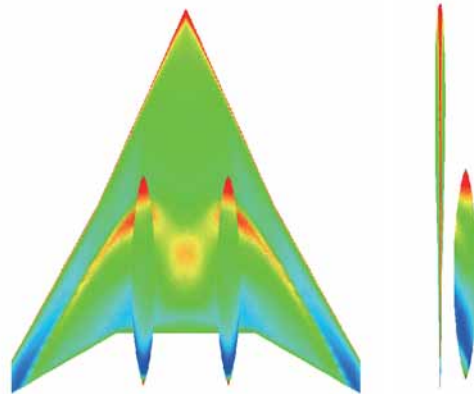


(c) 軸対称物体体積の収束履歴

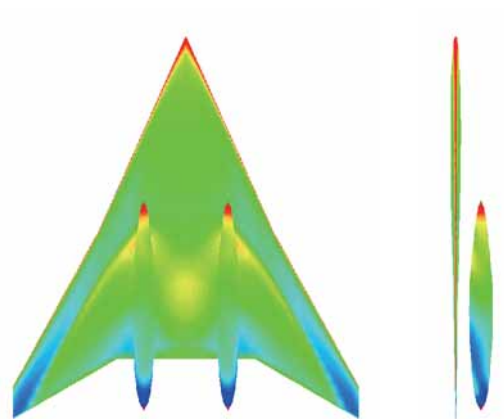


(d) 軸対称物体形状半径分布

図 14. 翼と軸対称物体の干渉問題



(a) 初期形状



(b) 最適形状

図 15. 初期形状と最適形状の表面圧力分布の比較前後

6. まとめ

次世代超音速輸送機の空力最適設計のために、CFD 解析と最適化手法とを組み合わせた非線形空力最適設計法を開発した。Adjoint 法（随伴法）を用いて設計変数に対する目的関数の感度解析を効率的に行うことで、最適な形状を短時間で提案する高度な空力設計技術が確立された。開発された最適化ツールを実際の設計問題に適用することにより、本手法の効率性と有効性を示した。本設計ツールの利点としては、

- 1) CFD 解析を勾配法に組み込んだプログラムにより、コンピュータが自動的に最適設計を実行し、最終的な空力最適形状が提供される。
- 2) 非線形を考慮した CFD 解析により、信頼性の高い航空機の空力設計が可能となる。
- 3) 重合格子法の利用により、複雑な航空機形状にも対応した最適設計を可能とする。
- 4) Adjoint 感度解析により計算コストの大幅な削減が可能となり、短期間で空力性能を改善した形状を設計することが可能となる。

等が挙げられる。

Adjoint 感度解析に関しては、本論文においてその定式化と偏微分方程式の解法の検討を行うとともに、Adjoint 法によって得られる目的関数の感度を直接差分法と比較することにより Adjoint 法の検証を行った。Adjoint 感度解析の特徴としては、

- 1) 感度解析が設計関数の個数に依存しないという利点を持つ。CFD 解析を一度実行する程度の計算時間で全ての設計変数に対する目的関数の勾配が得られるので、直接差分法に比べ計算時間を大幅に短縮できる。特に設計変数の個数が多い複雑な設計問題に対して非常に有効な手法である。
- 2) Adjoint 方程式は線形偏微分方程式であり、流れの支配方程式に適用した離散化手法と同様の手法で解析することができる。ただし境界条件に関し、Adjoint 方程式は Euler 方程式に対して特性線の向きが逆になる（流れの特性線に沿って反対方向に固有値一定で情報が伝播する）ため、流れの流入境界において流出条件を、流出境界において流入条件を与える必要がある。従って、対流項を風下差分で離散化しなければならない。時間積分には、流れ支配方程式と同様に陰解法や局所時間刻みも適用できる。
- 3) Adjoint 方程式の定式化においては、目的関数や拘束条件が定式化に含まれるため、具体的な設計問題に応じて計算プログラムを修正する必要がある。様々な設計に対して最適設計ツールを開発するのがやや煩雑である。
- 4) 勾配法という最適化手法は初期形状近傍における最適設計の効率は非常に良いが、多峰性を有する設計空間において大域的に最適解を探索することはできない。しかし、ある程度まで従来の設計手法で空力設計された形状を初期形状に選び、それよりも良い解を探索することにより、実際の航空機の空力設計においては十分に意義を持つものと考えられる。その際に、Adjoint 法が非常に有効な最適化設計手法である。

等が挙げられる。空力非線形を考慮した CFD 解析と、Adjoint 感度解析により効率を高めた勾配法を組み合わせた最適設計法は、今後、次世代超音速旅客機を初め、旅客機の開発に役立つものと考えられる。

参考文献

- 1) Sakata, K.: Supersonic research program in NAL, Japan; 1st Int. CFD Workshop for Super-Sonic Transport Design, Tokyo (1998) p.1-4
- 2) Jameson, A.: Optimum aerodynamic design using CFD and control theory; AIAA paper 95-1729 (1995)
- 3) Reuther, J.: Aerodynamic shape optimization using control Theory; Ph.D. Dissertation, Univ. California, Davis, CA, (1996)
- 4) Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P.: Numerical recipes in FORTRAN; Second edition, Cambridge University Press, p.418-423.
- 5) Makino, Y., Iwamiya, T. and Lei, Z.: Fuselage Shape Optimization of a Wing-Body Configuration with Nacelles," Journal of Aircraft Vol.40, No.2, March-April 2003, pp297-302.
- 6) Lei, Z., Makino, Y. and Yoshida, K.: Warp Design of a Supersonic Wing Using a Nonlinear Optimization Method, the 42nd Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, AIAA paper 2004-0216, Reno, NV, Jan. 2004.
- 7) Lei, Z. and Yoshikazu Makino, Y.: CFD-Based Aerodynamic Shape Optimization for the Japanese Experimental Supersonic Transport, the 24th Congress of the International Council of the Aeronautic Sciences, ICAS-2004-4.3.3, Yokohama, Japan, Aug.29-Sept.3, 2004.
- 8) Benek, J.A., Buning, P.G. and Steger, J.L.: A 3-D chimera grid embedding technique; AIAA paper 85-1523 (1985)

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-07-049

発行 平成 20 年 2 月 29 日

編集・発行 宇宙航空研究開発機構

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町 7-44-1

URL : <http://www.jaxa.jp/>

印刷・製本 (有) ノースアイランド

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記をお願いいたします。

宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター

〒305-8505 茨城県つくば市千現 2-1-1

TEL : 029-868-2079 FAX : 029-868-2956

© 2008 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。

