

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

音響振動解析のための数値計算法に関する研究

高橋 孝, 村上 桂一, 青山 剛史, 相曽 秀昭

2008年2月

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

目 次

概 要	1
1. はじめに	2
2. 有限要素法による従来の解析手法	3
2.1 誤差	3
2.2 ランダム応答解析	4
2.3 単純形状のモデルを用いた検討	5
2.3.1 アルミボックスモデルのランダム応答	5
2.3.2 音場の違いについての検討	6
2.4 衛星の音響構造解析	6
2.4.1 簡易衛星モデルの構築	6
2.4.2 構造解析	7
3. 波動ベース法	8
3.1 問題定義	8
3.2 音響の支配方程式と変数展開式	9
3.3 構造の支配方程式と変数展開式	10
3.4 重み付き残差法による定式化	11
3.5 解析例	12
3.5.1 非凸領域の解析	12
3.5.2 構造振動による音の透過	13
3.5.3 非連成音響問題	14
3.5.4 搭載宇宙機の音響構造連成解析	14
4. おわりに	16
参考文献	17
Appendix A 一般的な WBM の定式化	19
A.1 凸部分領域への分解と境界条件	19
A.2 部分領域連続性条件の記述	19
A.3 構造変位展開	19
A.4 連成音響振動モデル	20
A.4.1 構造境界条件	20
A.4.2 音響の境界条件と連続性条件	21
A.4.3 波動モデルの組み立て	24
A.4.4 波動関数のスケーリング	24

音響振動解析のための数値計算法に関する研究*

高橋 孝^{*1}、村上 桂一^{*1}、青山 剛史^{*1}、相曽 秀昭^{*1}

Study on Numerical Prediction Approaches for Vibroacoustic Analysis*

Takashi TAKAHASHI^{*1}, Keiichi MURAKAMI^{*1}, Takashi AOYAMA^{*1} and Hideaki AISO^{*1}

ABSTRACT

Spacecraft are placed at the top of launch vehicles, and are excited with mechanical vibrations via interfaces between spacecraft and launch vehicles during launch. In addition to such mechanical vibrations, the spacecraft are also exposed to acoustic pressure with wide frequency range. Lightweight and large area structures, such as solar arrays and antenna dishes, and components with relatively high natural frequencies are sensitive to acoustic loads. We have studied on a series of numerical simulation techniques for searching main acoustic sources at lift-off, and analyzing acoustic wave propagation, transmission through fairing and spacecraft acoustic vibrations. This paper focuses on numerical prediction approaches for steady-state coupled interior vibro-acoustic problems, especially for spacecraft structural vibrations by acoustic loads with the wide frequency range acted during the lift-off. Numerical prediction of vibro-acoustic responses might enable us to cover the ground acoustic tests, and is therefore quite important to design and develop reliable spacecraft. For spacecraft vibro-acoustic simulations, there are deterministic prediction techniques such as finite element method (FEM) and boundary element method (BEM) applicable in the low frequency range, and statistical ones such as statistical energy analysis (SEA) in the high frequency range. However, there generally exists mid-frequency range where no mature numerical methods are applicable. In this paper, some FE analyses are firstly investigated using some simple models to check FE modeling techniques and responses by structural analysis with random acoustic loads. In addition, the simple primary structure with some stiffeners of a large spacecraft is modeled, and is used to solve the eigen value problem, and transient and steady-state analysis with random acoustic loads. Some results show that FEM is limited to be applied in low frequency range. Then, a novel deterministic prediction approach called the wave based method (WBM) is considered to be applied to vibro-acoustic analysis with higher frequency range. Using a 2-dimensional WBM code developed in this study, some coupled vibro-acoustic problems are solved to verify the code and to understand some fundamental features of WBM. Moreover, an uncoupled acoustic problem and a spacecraft vibro-acoustic problem inside a payload fairing are modeled, and solved using the WBM code and commercial FEM software. The results show that WBM is quite practical without using meshes, and has high potential for the vibro-acoustic analysis in the wide frequency range due to no numerical dispersion errors.

Keywords: coupled vibroacoustic analysis, finite element method, wave based method

概 要

打上げ時の宇宙機には、ロケットの間のインターフェイスを通じて機械振動が加わる。さらに、広い周波数成分をもつ音圧が宇宙機表面に加わるにより振動する。太陽電池パドルやアンテナなど軽量で大きな面積をもつ構造や、比較的高い固有振動数をもつコンポーネントは、音響荷重に影響されやすい。この音響振動の数値予測手法に着目すると、既存の解析手法としては、低周波側では有限要素法(FEM)等の決定論的手法、高周波側では統計的エネルギー法(SEA)等の確率統計的手法が適用されている。しかし、一般に両手法では信頼性の高い解析のできない中間周波数領域が存在することが知られている。そこで、本論文では、まず、低周波領域における解析に留まっている FEM の性質について議論するため、FEM の基本的なモデリング手法や解析手法等について整理し、単純なモデルのランダム応答解析を実施した。さらに、補強材を含む単純な衛星主構造モデルを用いて、FEM による衛星の音響振動解析を実施した。これらの解析結果から、数値分散誤差の影響や音響と構造の連成解析の重要性について明らかにした。次に、このような要素ベース手法の欠点を克服するために新たに提案された波動ベース法(WBM)について議論した。まず、本研究において開発した 2 次元 WBM 解析コードと商用 FEM ソフトウェアを用いて、いくつかの単純な音響構造連成解析と非連成音響解析を行い、WBM コードの検証を行うとともに基本的な WBM の性質を把握した。そして、この結果を踏まえて、フェアリング内の衛星の音響振動連成解析を実施した。以上の結果から、WBM の音響振動連成解析における高精度な決定論的性質が確かめられた。つまり、支配方程式を厳密に満たす波動関数の性質により数値分散誤差を伴わないことから、既存の解析手法で精度の高い解析ができない中間周波数領域を含む広い周波数領域における解析が可能であることが分かった。さらに、空間離散化(メッシュ)を必要としないため、モデル化が非常に容易で計算負荷の小さい実用的な手法であることが分かった。

* 平成 19 年 11 月 30 日受付 (Received 30 November, 2007)

*1 総合技術研究本部 計算科学研究グループ

(Computational Science Research Group, Institute of Aerospace Technology)

1. はじめに

ロケットの打ち上げ時には、ロケットの推進力や空力などによる比較的low周波な機械振動（通常、正弦波振動試験で 5～100 [Hz]を考慮）とランダムな機械振動（通常、ランダム振動試験で 20～2,000 [Hz]を考慮）がロケットとのインターフェイスを通じて搭載衛星に加わる（メカパス）。さらに、数 10,000 [Hz]以上に及ぶ広い周波数成分（通常、音響試験で 20～2,000 [Hz]を考慮）を有する音響荷重がフェアリングを透過して、衛星の外部表面に加わる（エアパス）。遷音速時にも境界層の剥離や衝撃波などによって音響振動が発生するが、通常、音圧レベル（Sound Pressure Level、以下、SPL）としては打ち上げ時のほうが大きい。このような衛星の打ち上げ環境を、模式的に図 1.1 に示す。

一般に、小型、軽量で剛性の高い衛星では、ランダム機械振動と音響振動は似たような応答になり（実際、ランダム振動試験を音響試験の代替にすることもある）、剛性の比較的低い大型衛星では、両者による応答が異なる傾向を示す。特に、固有振動数が数 100 [Hz]と高いセンサーやアクチュエータなどの衛星搭載機器や、軽量で大面積の二次構造（太陽電池パドル、アンテナ等）などには、音響振動が大きな影響を与える可能性がある^{1), 2)}。音響振動による不具合モードには、次の 3 つが考えられる。一つは、構造物のパネル、補強材、電気コネクタなどに音響疲労によるクラックが入る不具合。もう一つは、音響振動による摩擦に起因してベアリングなどが金属磨耗や変形をする不具合。最後に、電気部品に対する電氣的ノイズなどの不具合である。

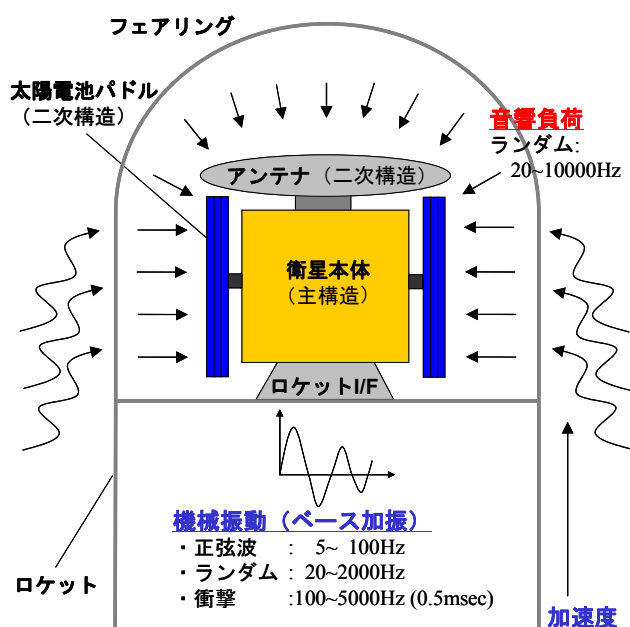


図 1.1 衛星の打ち上げ環境

そこで、我々はシミュレーションによる一連の事前予測があまり進められていない音響解析に注目し、ロケット打ち上げ時の音響発生メカニズムの解明から搭載衛星の音響加振に至る、以下の評価手法の確立を目指している。

- 音源解析：射場を含む打ち上げ時の主要音源を特定するため、予測される音源を個別に解析する手法の構築。
- 伝播解析：音源からフェアリングまでの音の伝播を解析し表面圧力変動履歴を評価する手法の構築。
- 透過解析：外部音圧レベルを入力とするフェアリングの透過解析手法の構築
- 振動解析：フェアリング内部（表面）の音圧レベルを入力とする衛星の音響構造振動解析手法の構築

本研究では、この内の(d)、つまり、フェアリング内に伝わった音波の影響による衛星の構造振動に注目しており、それについて検討した結果と課題について述べる。

従来、衛星の音響振動に関する解析には、統計的エネルギー解析（Statistical Energy Analysis、以下 SEA）³⁾が適用されてきた^{4,7)}。「フィル・エフェクト(fill effect)」、あるいは、「フィル・ファクター(fill factor)」と呼ばれるフェアリング内の局所的な SPL の変化に関する簡易評価式も、SEA の考え方に基づいて与えられている⁸⁾。実際、個々のモードの区別が難しく、物性値や材料寸法のばらつきに対して応答が非常に敏感になる高周波領域では、確率統計的な取り扱いが本質的となるために SEA が適している。しかしながら、SEA はあくまで統計的に大局的な応答レベルを把握するものであり、搭載機器配置などの局所的な影響を検討することは難しい。また、SEA では、その統計的な性質から、暗に高いモード密度を仮定しているため、空間的にも周波数的にもある程度大きな区間に分割しなければならず、解析結果もその区間における平均的な値が得られるだけである。さらに、その前提条件が崩れる低周波においては精度が劣るという特徴がある。

一方、100 [Hz]程度以下の低周波における構造解析では、有限要素法（Finite Element Method、以下 FEM）⁹⁾が現時点で殆ど唯一の解析手法として用いられてきている。現状、宇宙機の構造解析において、100 [Hz]以下程度の低周波領域における解析に適用されるほぼ唯一の手法である¹⁰⁾。宇宙機の音響振動解析においても、いくつかの単純な構造に対して適用されている^{11), 12)}。しかし、解析周波数が高くなると数値分散誤差(numerical dispersion error)が補間誤差(interpolation error)に比べて支配的となり、それを許容範囲内に収めるためには解析の自由度が爆発的に大きくなるという問題がある。

宇宙機の音響振動解析に限らず、自動車や航空機などの一般的な騒音解析においても、高周波側の手法（SEA など）と低周波側の手法（FEM など）のいずれの手法でも信頼性の高い解析のできない周波数領域（中間周波数領域 (mid-frequency range)）が存在すると指摘されている¹³⁾。そこで、既存のアプローチを高度化したり、新たな手法を提案したりして、この狭間を埋めるために多くの研究がなされてきているのが現状である。図 1.2 に、既存の音響振動解析手法により解析可能な周波数領域の比較と、対応する宇宙機の固有振動数を示す。宇宙機にとって重要な点は、図 1.2 の点線で示した中間周波数領域に、宇宙機の音響設計に

関してクリティカルな搭載機器の固有振動数が含まれることである。

本論文では、共振ピークなどの局所的な応答を解析できる決定論的な手法に注目し、搭載機器の固有振動数を含む少なくとも数 100 [Hz] 程度までの周波数領域に対応し、二次構造や機器レベルの局所的な応答解析まで行うことを目標とする。その第一段階として、FEM によるモデリングやランダム応答解析などの基本的な事柄の確認を行う。さらに、簡単な衛星主構造モデルや二次構造モデルを構築し、音響負荷による構造解析を実施して振動の様子を調べる。次に、FEM などの既存の手法の欠点を克服するために提案された波動ベース法 (Wave Based Method、以下 WBM) ¹³⁾ に着目する。そして、この手法を、解析周波数領域の広い宇宙機の 2 次元内部定常音響振動解析に適用することにより、モデル化の容易さや計算負荷などの性質、実用性について検討し、その結果について述べる。

2. 有限要素法による従来の解析手法

まず、FEM で解析を行う上で留意すべき点と、音響振動解析で必須となるランダム応答解析についてまとめる。

2.1 誤差

ガラーキン法に基づく FEM の近似精度は、補間誤差と数値分散誤差 (あるいは汚染誤差 (pollution error) と呼ばれる) に分けて考えることができる ^{14), 15)}。以下、それぞれの誤差について述べ、解析に必要な指標を考える。

補間誤差

補間誤差は、一般に単純な多項式形状関数を利用して応

答変数を近似して記述することから生じる。この補間誤差を許容範囲内に保つために、次の関係式が適用される ¹⁴⁾。

$$\theta \triangleq \left(\frac{\tilde{k}h}{p} \right)^p = C_{\text{int}} \quad (2.1)$$

ここで、 p は多項式形状関数の次数、 C_{int} は定数、 L を問題寸法、 $k(=2\pi f/c)$ を応答の波数、 f を周波数 [Hz]、 c を応答の伝播速度、 h を要素サイズとして、無次元量 $\tilde{k} = Lk$ 、 $\tilde{h} = h/L$ と定義する。この関係を 1 次要素 ($p=1$) に $C_{\text{int}} < 1$ として適用すると、

$$h < \frac{\lambda}{2\pi}, \quad f < \frac{c}{2\pi h} \quad (2.2)$$

のように、応答の波長 λ につき少なくとも $7(>2\pi)$ 個の要素に区切る必要がある。2 次要素 ($p=2$) では、

$$h < \frac{\lambda}{\pi}, \quad f < \frac{c}{2\pi h} \quad (2.3)$$

のように、応答の波長につき少なくとも $4(>\pi)$ 要素が必要となる。つまり、補間誤差に関しては、応答の波長につき一定の数の要素に分割することで許容範囲内に保つことができるという単純な指標が得られる。

数値分散誤差

数値分散誤差は、厳密で連続な支配方程式から得られる解と、離散化された数値的な支配方程式の解の波数が異なることで認識される誤差である。つまり、空間等を離散化するあらゆる数値解法には必ず存在する誤差の一つである。

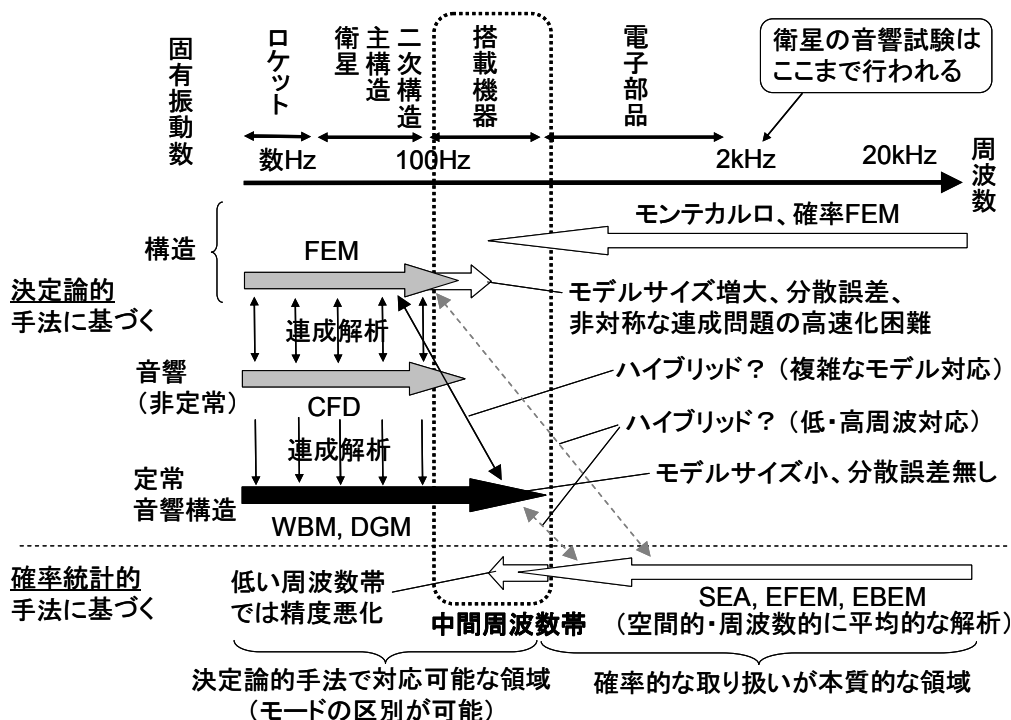


図 1.2 従来の音響振動解析と今後の方向性

一般に FEM による解析においては、低周波領域では補間誤差が、高周波領域では分散誤差が支配的となる。この分散誤差を許容範囲内に保つためには、次の関係式が適用される¹⁴⁾。

$$\tilde{k}\theta^2 = C_{\text{dis}} \quad (2.4)$$

ここで、 C_{dis} は定数である、 $C_{\text{dis}} < 1$ として 1 次と 2 次の要素にこの関係式を適用すると、

$$h < \sqrt{\frac{\lambda^3}{(2\pi)^3 L}}, \quad f < \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{h^2 L}} \quad (2.5)$$

$$h < 2\sqrt[4]{\frac{\lambda^5}{(2\pi)^5 L}}, \quad f < \frac{c}{2\pi} \sqrt[5]{\frac{2^4}{h^4 L}} \quad (2.6)$$

を得る。つまり、分散誤差は、補間誤差で用いられた単純な指標(2.1)では制御できないことが分かる¹⁵⁾。

以上より、FEM を用いて許容範囲内の精度で解を得るためには、式(2.1)だけでなく式(2.4)も考慮する必要がある、周波数が高くなるほど解析の次元が急激に大きくなってしまふ。

2.2 ランダム応答解析

衛星の設計段階では、次の Miles の式¹⁶⁾

$$E\{\ddot{x}(t)^2\} = \frac{\pi}{2} f_n Q W_{\text{iii}}(f_n) \quad (2.7-a)$$

あるいは、平方根をとって、

$$\ddot{x}_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} f_n Q W_{\text{iii}}(f_n)} \quad (2.7-b)$$

を用いて、ランダム振動応答である加速度 RMS 値 \ddot{x}_{rms} を簡易的に概算することが多い。ちなみに、加速度パワースペクトル密度（以下、PSD）関数（ASD と呼ばれる） $W_{\text{iii}}(f_n)$ の単位が $[\text{g}^2/\text{Hz}]$ （ g は重力加速度）ならば、 \ddot{x}_{rms} の単位は $[\text{g}]$ となるので Grms と呼ばれる。ここで、 f_n は固有周波数、 $Q (= 1/(2\zeta))$ は増幅ファクター（あるいは、 Q 値）、 ζ は減衰比である。しかしながら、ここではより一般的な複雑な構造に対して、FEM を用いた音響振動解析の理論的な考察を行う。

実際の構造物を、FEM を用いて n 個の要素に離散化したときの運動方程式は、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.8)$$

の形式で書ける。ここで、 t は時間、 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 、 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ は、それぞれ質量行列、剛性行列、減衰行列、 $\mathbf{f}(t)$ 、 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ はカベクトル、変位ベクトルである。カベクトル $\mathbf{f}(t)$ の要素 $f_a(t)$ は、

$$f_a(t) = \int_{A_a} p_a(t) dA \approx p_a(t) A_a \quad (a=1, \dots, n) \quad (2.9)$$

と表せる（図 2.1 参照）。 A_a は節点 a に関連する面積であり、 $p_a(t)$ は A_a に働く圧力である。ただし、解析ツールによっては、式(2.9)に基づいて各要素に圧力を与えても、ツール内部では自動的に節点力に割り振られることになる。

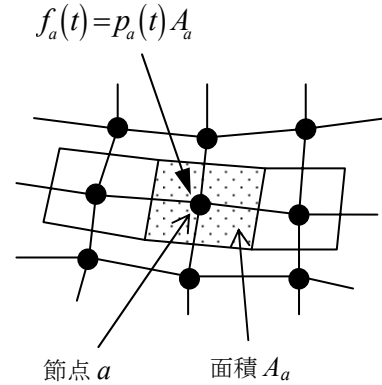


図 2.1 節点 a に関連付けられた面積 A_a と圧力 p_a

周波数応答解析には、式(2.8)そのものを直接フーリエ変換して解く直接法と、振動モードの重ね合わせを利用して解くモーダル法があるが、ここではモーダル法についての一般的な定式化について簡単に述べる。モード解析¹⁷⁾を用いると、運動方程式(2.7)は、次式のような非連成な 1 自由度系で表現できる。

$$\ddot{\xi}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\xi}_i(t) + \omega_i^2 \xi_i(t) = \psi_i(t) \quad (i=1, \dots, e) \quad (2.10)$$

ここで、 e は採用したモード数（一般に、 $e \ll n$ ）、 ζ_i は減衰比、 ω_i は i 次固有振動数、 $\psi_i(t) (\triangleq \Phi_i^T \mathbf{f}(t) / m_i)$ は一般化力、 $\Phi_i \in \mathbf{R}^n$ は i 次モード形状、 m_i は一般化質量（正規化されれば 1）、 \mathbf{T} は行列の転置を表す。周波数領域では、解析角周波数を ω として、

$$\Xi_i(\omega) = \frac{1}{\omega_i^2} H_i(\omega) \Psi_i(\omega) \quad (2.11)$$

と表せる。ここで、角周波数の関数 $\Xi_i(\omega)$ と $\Psi_i(\omega)$ は、それぞれ、時間の関数 $\xi_i(t)$ と $\psi_i(t)$ のフーリエ変換であり、 $H_i(\omega)$ は次式で定義される。

$$H_i(\omega) \triangleq \frac{\omega_i^2}{(\omega_i^2 - \omega^2) + 2j\zeta_i \omega_i \omega} \quad (2.12)$$

ただし、 $j = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。

一方、（定常）エルゴード過程における一般化力の相互 PSD 関数 $S_{\psi_i \psi_j}(\omega)$ は、

$$S_{\psi_i \psi_j}(\omega) = \frac{\Phi_i^T \mathbf{A} S_{\text{pp}}(\omega) \Phi_j}{m_i m_j} \quad (i, j=1, \dots, e) \quad (2.13)$$

と表せる。ここで、面積 A_a を対角成分とした対角行列を $\mathbf{A} \triangleq \langle A_a \rangle_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、第 (a, b) 要素が表面圧力の相互 PSD 関数

$S_{p_a p_b}(\omega)$ である行列を $\mathbf{S}_{pp}(\omega) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ とした。よって、モード座標の相互 PSD 関数は、式(2.11)、(2.13)より、

$$S_{\xi_i \xi_j}(\omega) = \frac{H_i(\omega) \Phi_i^T \mathbf{A} \mathbf{S}_{pp}(\omega) \mathbf{A} \Phi_j H_j^*(\omega)}{m_i m_j \omega_i^2 \omega_j^2} \quad (2.14-a)$$

と表せる。ここで、*は共役複素数を表す。このとき、第(i , j)要素が $S_{\xi_i \xi_j}(\omega)$ である行列 $\mathbf{S}_{\xi\xi}(\omega) \in \mathbf{R}^{e \times e}$ は、以下のように行列形式で書ける。

$$\mathbf{S}_{\xi\xi}(\omega) = \left\langle \frac{H_i(\omega)}{m_i \omega_i^2} \right\rangle_e \Phi^T \mathbf{A} \mathbf{S}_{pp}(\omega) \mathbf{A} \Phi \left\langle \frac{H_i^*(\omega)}{m_i \omega_i^2} \right\rangle_e \quad (2.14-b)$$

以上より、物理座標である変位、速度、加速度の相互 PSD 関数行列 $\mathbf{S}_{xx}(\omega)$ 、 $\mathbf{S}_{\dot{x}\dot{x}}(\omega)$ 、 $\mathbf{S}_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が、それぞれ、以下のように計算できる。

$$\mathbf{S}_{xx}(\omega) = \Phi \mathbf{S}_{\xi\xi}(\omega) \Phi^T \quad (2.15-a)$$

$$\mathbf{S}_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = \omega^2 \mathbf{S}_{xx}(\omega) \quad (2.15-b)$$

$$\mathbf{S}_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 \mathbf{S}_{xx}(\omega) \quad (2.15-c)$$

一般に、対称関数である(両側) PSD 関数 $S_{xx}(\omega)$ を周波数の正側のみで定義し、角周波数 ω [rad/sec]を周波数 f [Hz]に置き換えて定義した片側 PSD 関数 $W_{xx}(f)$ を用いることが実用上多い。このとき、 $W_{xx}(f) = 2S_{xx}(\omega)$ が成り立つ。

また、モーダル法では、十分な解析精度を得るためには出力の最大周波数の2倍程度の周波数まで考慮したモードと剰余ベクトル(residual vector)¹⁸⁾を考慮する必要がある。それでも、一般に直接法よりも解析次元が小さく抑えられるため、解析時間は速くなる。しかしながら、一般に直接法のほうが高い精度で解析できるので、これらを用途に応じて使い分ける必要がある。

2.3 単純形状のモデルを用いた検討

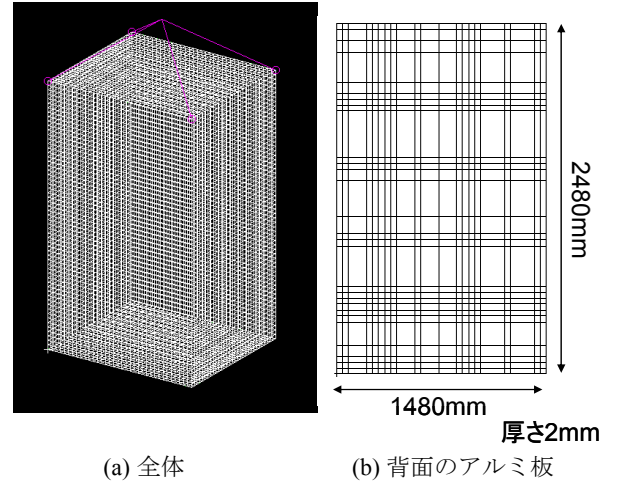
衛星の音響振動解析を実施する前に、まずいくつかの簡単なモデルを用いて FEM を用いたランダム応答解析を実施し、基本的な事項の確認や問題点について検討する。次章を含め、以下の FEM 解析は、解析結果の信頼性を考慮して MSC.Nastran¹⁹⁾を用いて実施し、モデル構築には、MSC.Patran²⁰⁾を使用した。

2.3.1 アルミボックスモデルのランダム応答

図 2.2(a)に示すような、天井から吊るされた 5052 アルミ板から構成される直方体²¹⁾を考える。音響振動に関するランダム応答解析を Nastran 等で行う場合には、図 2.3 に示すような SPL を構造表面圧力の PSD

$$W_p(f_c) \triangleq \frac{p(f_c)^2}{\Delta f(f_c)} \quad (2.16)$$

に変換したものを直接入力することになる。ここで、 $p(f_c)$ は中心周波数 f_c における音圧の RMS 値、 $\Delta f(f_c)$ は f_c における周波数バンド幅である。各板は異なる厚みをもっており、解析は全体モデル(図 2.2(a)) (シェル要素(CQuad4)、10,093 節点、10,090 要素、減衰比 0.05)を用いて行った。出力は、ボックス背面のアルミ板一枚(図 2.2(b)) (2,196 節点、2,100 要素)の加速度応答の RMS 値であり、その結果と実験値を図 2.4 に示す。実験値に比べて、全体として応答加速度が小さくなっていることが分かる。この理由については、次節で考察する。



(a) 全体 (b) 背面のアルミ板
図 2.2 アルミボックスのモデル

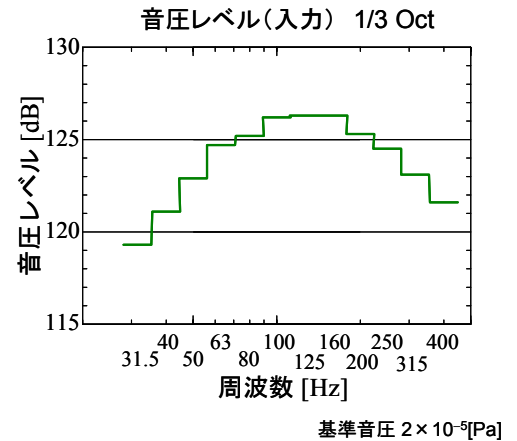


図 2.3 アルミボックスへの入力音圧レベル

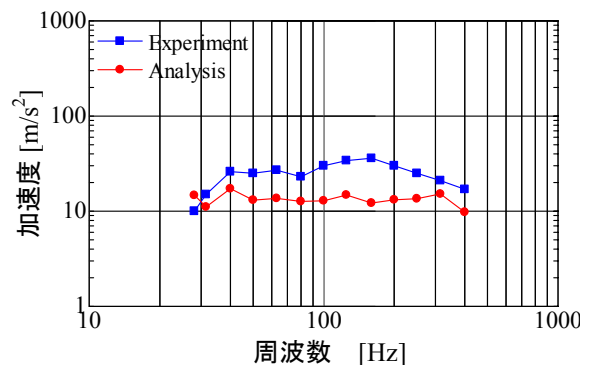


図 2.4 アルミボックスの板の解析値と実験値との比較

2.3.2 音場の違いについての検討

式(2.14)に含まれる表面圧力の相互 PSD 関数行列 $S_{pp}(\omega)$ は、

$$S_{pp}(\omega) = \frac{W_{pp}(f)}{2} = \frac{W_p(f)C_{pp}(f)}{2} \quad (2.17)$$

のように表わせる。ここで、関数 $W_p(f)$ は、圧力の参照 PSD 関数であり、通常、構造物の周辺音場の SPL から式(2.16)のように与えられる。行列 $C_{pp}(f) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ は、節点 a と b ($a, b=1, \dots, n$) における圧力 p_a, p_b 間の相関関数 (coherence function) $C_{p_a p_b}(f) \in [-1, 1]$ を第 (a, b) 要素とする行列であり、圧力場によって変わってくる。圧力場の例としては、以下があげられる。

- ・ 音圧場が完全にランダムなとき、異なる要素圧力間に相関がないので、 $C_{pp}(f)$ は単位行列となる。
- ・ 表面の寸法が波長の $1/4$ よりも小さければ、平面波のように扱えて、 $C_{p_a p_b}(f) \approx 1.0$ ($a, b=1, \dots, n$) である。
- ・ 拡散音場のとき、 $C_{p_a p_b}(f)$ は次式で表せる²²⁾。

$$C_{p_a p_b}(f) = \frac{\sin(k|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|)}{k|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} \quad (2.18)$$

ここで、 $|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|$ は節点 a, b 間の距離、 k は音の波数である。

前節の図 2.4 の解析結果は、実は、節点圧力間に全く相関のない完全にランダムな場合で解析していた。つまり、要素圧力の自己 PSD 関数のみを入力した解析を行っていた。実際の地上音響試験は、拡散音場に近い状況を模擬している（実際の打ち上げ時のフェアリング内は、後述するフィル・エフェクトのために比較的 low 周波の領域において不均一な音場だが、一般に、地上試験では安全側に均一で大きな音圧をかける）ので、全要素圧力間の相関を式(2.18)の関係式を用いて入力する必要がある。しかし、この場合、要素数の 2 乗のオーダー（正確には、要素数を n として $n(n+1)/2$ 個だが、要素間距離が同じものまで考慮すれば更に減らせる）の圧力 PSD の周波数テーブルを作成しなければならない。そこで、音場の種類を選択すれば、対応する圧力 PSD の周波数テーブルを自動的に出力するプログラムを作成して、ランダム応答解析の入力データ作成の効率化を図った。このプログラムへの入力は、Patran 等により作成された Nastran のバルク・データの節点と要素の情報と、図 2.3 に示されるような SPL である。

まずは、図 2.5 のようなさらに簡単なアルミ板モデル（シェル要素(CQuad4)、341 節点、300 要素、減衰比 0.05）を考え、音場の違いにより応答がどの程度違うかを確認した。ここで、片側表面圧力のノミナル値を 100 [Pa] として、参照圧力 PSD 関数 $W_p(f)$ を周波数に依存せず一定とした。この条件で、完全にランダムな音場と拡散音場の場合を解析して結果を比較する。

ランダム解析により、板の加速度 PSD を計算した結果を図 2.6 に示す。事前の固有値解析によりモード形状を確認し、全てのモードが少なからず生じると考えられる節点（節点番号 101：図 2.5 参照）を選んで、その場所における応答を示している。この結果、拡散音場では、想定されるモード（事前の固有値解析の結果、20 [Hz] までに 10 個の固有振動数が含まれていた）がほぼ全て応答ピークとして表れていることが確認できる。一方、完全にランダムな音場の応答では、固有振動数近傍において共振が確認できないモードが存在し、そのため拡散音場の場合に比べて応答が全体的に小さくなっていることが分かる。図 2.6 の結果も、この傾向により応答が小さく出たものと考えられる。全要素圧力がフル相関で相関関数行列 $C_{pp}(f)$ が全て同じ要素のときは、式(2.14-a)よりモード形状が非対称であれば応答が 0 になる²³⁾ ということは考えられるが、ランダムな音場（ $C_{pp}(f)$ が単位行列）で共振ピークが出ないモードが存在することについてはさらに検討を要する。

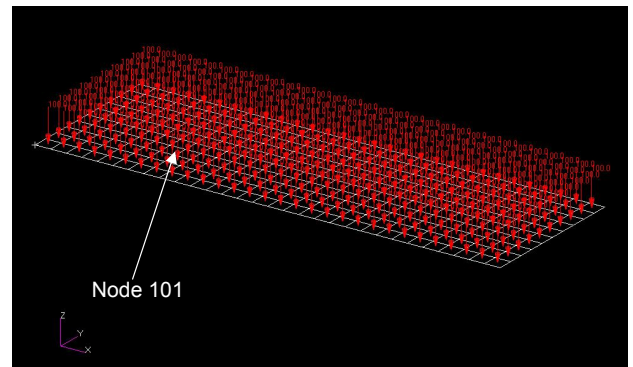


図 2.5 単純な板のモデル

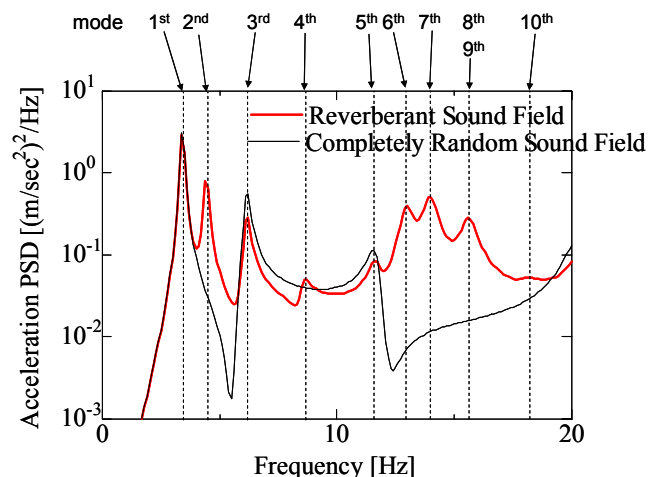


図 2.6 異なる音場を模擬したときの応答の違い

2.4 衛星の音響構造解析

2.4.1 簡易衛星モデルの構築

複雑な形状の衛星を解析する前段階として、軌道上 3t 級の大型衛星を想定して、図 2.7 に示すような主構造と内部スティフナ（補強材）から構成される簡易構造モデルを構築し、FEM で解析することを考える。比較のためアルミ平板のみのモデルとそれらをハニカム・サンドイッチに置き換

えたモデルの 2 種類を用意した。ただし、アルミ平板の場合は全体の質量がハニカムの場合と同等になるように質量密度を下げた。いずれもシェル要素の CQuad4 を使い、まずは 100 [Hz] 程度の音波を想定して要素数 4,652、節点数 4,605 とした。減衰比は、0.05 とした。

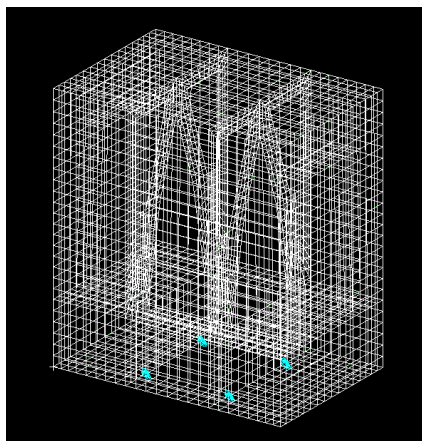


図 2.7 簡易衛星構造モデル

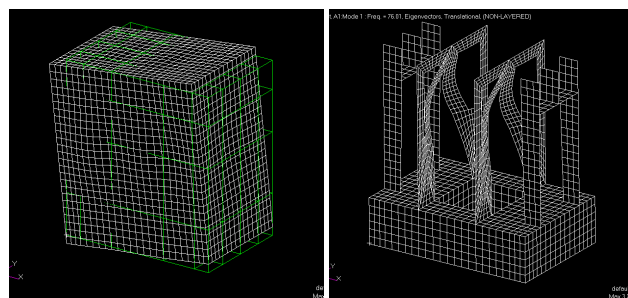
2.4.2 構造解析

簡易衛星構造モデルにおいて音響振動の応答を確認するために、固有値解析や外部表面圧力を入力とした静・動解析を実施した。

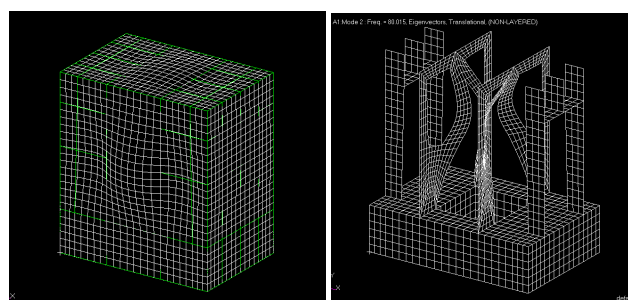
固有値解析では、図 2.8 に示すように簡易モデルの低次モードとして主構造全体よりもスティフナの局所的な揺れが顕著に現れた。また、スティフナを入れることにより剛性が大きくなることも確認できた。

一方、フェアリング内では、フェアリングと衛星との間の隙間の広さの違いにより音圧が局所的に不均一になることが知られている(フィル・エフェクト、あるいはフィル・ファクター)^{7), 8)}が、図 2.9 に示すように、簡単のため衛星の壁面ごとに変えた表面圧力(60~100 [Pa])を±5 [Pa]の振幅の正弦波(100 [Hz])として入力したときの過渡解析の結果として、ある時刻における衛星主構造外部表面と主構造内部についての変位と最大主応力を表示したものを、それぞれ、図 2.10(a)と(b)に示す。変位は分かり易いように拡大している。衛星全体が満遍なく揺れ、さらに、主構造内部の低次モードのスティフナの揺れが励起されていることが分かる。

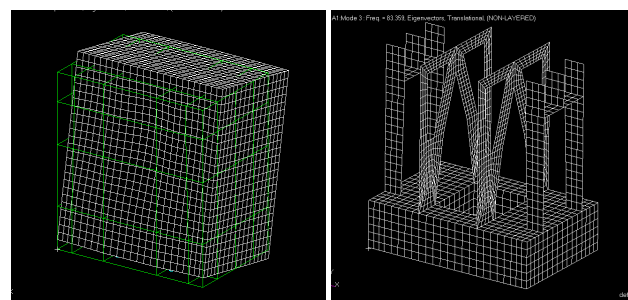
さらに、定常過程においてどの程度共振が起こっているかを評価するために、図 2.9 と同様な表面圧力を入力したときの衛星簡易モデルの周波数解析を実施した。その結果を図 2.11 に示す。観測点によって、当然、共振するモードと共振しないモードはあるが、事前の固有値解析結果から想定し得る固有振動数周辺で応答ピークが見られることが確認できる。一方、太陽電池パドルやアンテナなどの軽量で大きな面積を有する構造物への音響荷重の影響は、運動方程式右辺の力の効果として大きくなるため構造モデルを構築して検討することも重要である。フェアリング内部に収納するために畳まれた太陽電池パドルを含めた簡易衛星モデルを用いた場合の、過渡応答解析の結果を図 2.12 に示す。



(a) 1 次モード



(b) 2 次モード



(c) 3 次モード

図 2.8 簡易モデルのモード形状 (外部表面とその内部)

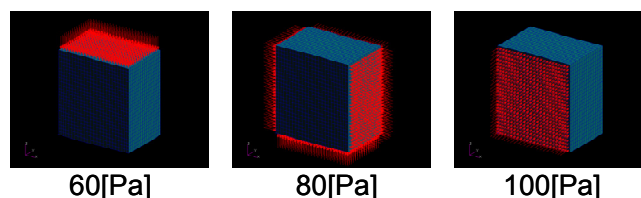
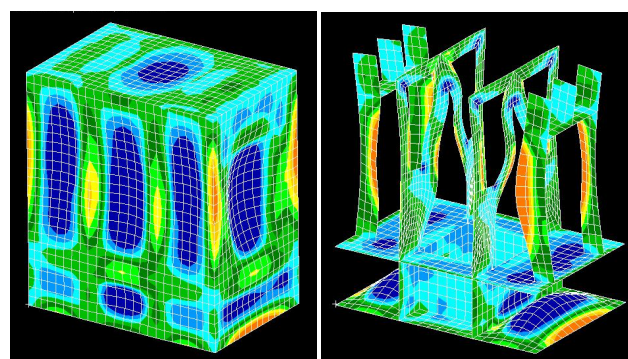


図 2.9 ランダム圧力の入力 (ノミナル)



(a) 衛星主構造外部表面 (b) 主構造内部

図 2.10 簡易モデルを用いた構造解析

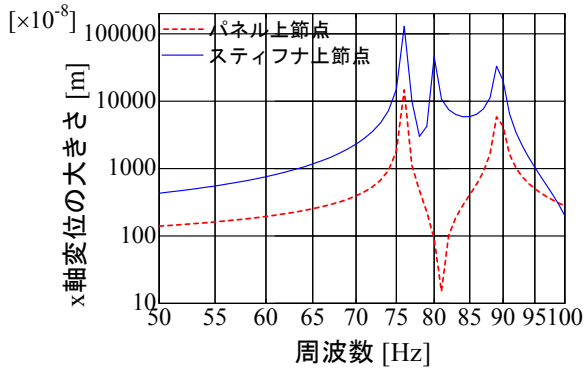


図 2.11 周波数応答解析の結果

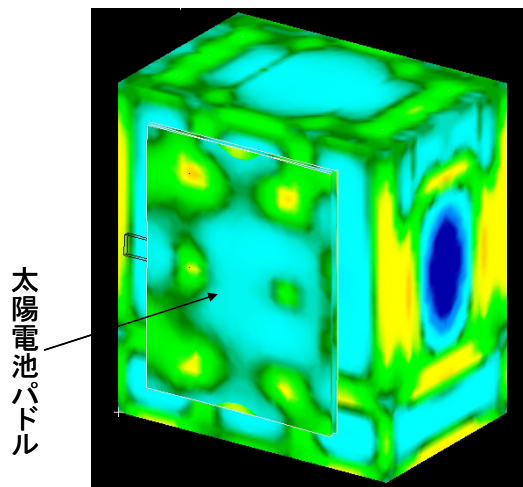


図 2.12 太陽電池パドルを含む衛星の音響振動解析

3. 波動ベース法

前節で述べたように、FEM などの既存の要素ベース解析手法は、低周波領域における解析に应用が制限されている。そこで本節では、この欠点を克服し、広い周波数領域に渡る詳細な解析を行うために新たに提案された WBM^{13, 24-26)}に焦点を当てる。WBM は、間接トレフツ法(indirect Trefftz method)²⁷⁾に基づく定常音響構造連成解析のための決定論的手法である。適当な波動関数を定義することにより、トレフツ法の実装時に生じる悪条件問題(ill-conditioned problem)を克服したブレークスルー的な手法である。この手法の注目すべき性質は、支配方程式を厳密に満たす波動関数で解を展開するために空間を離散化する必要がなく(メッシュが不要)、それに伴って、FEM 等による音響振動解析で問題となる数値分散誤差がないということである。したがって、広い解析周波数領域を含む音響振動を予測するためのポテンシャルが極めて高いと考えられる。図 3.1 に、既存の FEM や BEM と新たな手法である WBM の性質を比較する。

3.1 問題定義

本節では、WBM を用いた 2 次元内部定常音響振動問題について述べる。図 3.2 は、いくつか種類の境界に囲まれた流体から成る音響キャビティを示している。

まず、後述する WBM の波動関数の性質から、このキャビティ領域をいくつかの凸領域に分割する必要がある。定式化を簡単化するため、キャビティは、2 つの凸部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$)から構成されているものとする。各部分領域

	FEM	BEM	WBM
未知数の種類	一般的に、圧力	直接BEM: 圧力と法線方向速度 間接BEM: 単一層ポテンシャル・二重層ポテンシャル	波動関数の寄与分
モデルサイズ	大きい	中間	小さい
空間離散化	領域分割 周波数増加すると再構築が必要	境界の分割 周波数が増加すると再構築が必要	凸領域への分解 全周波数で固定
近似関数	単純な多項式(local) 厳密解でない	単純な多項式(local) 厳密解でない	波動関数(global) 厳密解(dispersion free)
微分変数の精度	精度低下	1次変数と同精度	1次変数と同精度
行列の性質	疎、帯構造、実数 周波数独立な部分行列 対称	密、複素数 周波数依存 非対称(直接BEM) 対称(間接BEM)	密、複素数 周波数依存 非対称 緩やかな悪条件
幾何形状の複雑さ	高い	高い	高くない
非有界領域のモデリング	インピーダンスBC: あまり良くない 無限要素: 良い	非常に良い	インピーダンスBC: あまり良くない
収束速度	遅い	中間	速い
計算負荷: モデル構築	低い	中間	高い
計算負荷: モデル解法	中間/高い	高い	低い

図 3.1 既存の解析手法と WBM の性質の比較 (定常問題)

$\Omega^{(\alpha)}$ は、 $L_x^{(\alpha)} \times L_y^{(\alpha)}$ の外接する矩形領域を有する。部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ の音響境界 $\Gamma_a^{(\alpha)}$ は、5種類の境界面から成る。つまり、 $\Gamma_a^{(\alpha)} = \Gamma_p^{(\alpha)} \cup \Gamma_v^{(\alpha)} \cup \Gamma_z^{(\alpha)} \cup \Gamma_s^{(\alpha)} \cup \Gamma_c^{(\alpha)}$ である。ここで、境界 $\Gamma_p^{(\alpha)}$ 、 $\Gamma_v^{(\alpha)}$ 、 $\Gamma_z^{(\alpha)}$ は、それぞれ、圧力、法線方向速度、法線方向インピーダンスの境界条件(boundary conditions、以下、BC)が課される境界面である。境界 $\Gamma_s^{(\alpha)}$ は、薄い平板を境界とする面であり、板の両端には固定や単純支持などのBCが課される。平板は、紙面に垂直に無限の長さをもつ幅 L_s ($s = 1, 2$)の平板であると仮定し、簡単のため、系に含まれる境界上の平板は各部分領域に1つずつあるとする。境界 $\Gamma_c^{(\alpha)}$ は、部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ と他の部分領域との間の境界面(いまの場合、 $\Gamma_c^{(1)} = \Gamma_c^{(1,2)} = \Gamma_c^{(2)} = \Gamma_c^{(2,1)}$ ；ただし、境界 $\Gamma_c^{(\alpha,\beta)}$ は、部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ と隣接する部分領域 $\Omega^{(\beta)}$ との間の境界面)であり、圧力と法線方向速度の両方の連続性条件が課される。さらに、外力 f_s を、境界 $\Gamma_s^{(\alpha)}$ 上の局所位置 x'_s に作用させ、外部点音源 $q^{(\alpha)}$ を、部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ 内の局所位置 $\mathbf{r}_q^{(\alpha)}$ に置く。簡単のため、平板に働く外力は各平板において1ヶ所だけであると、音源は各部分領域に1つずつ存在するとする。また、ここでは定常(周波数)解析を考えているので、両外部励振源は、角周波数 ω の時間調和関数であると仮定する。

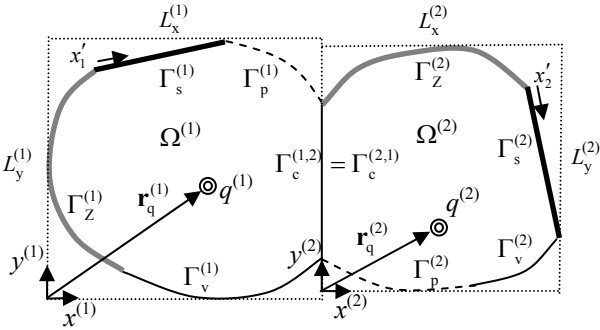


図 3.2 2次元内部音響振動連成モデル

3.2 音響の支配方程式と変数展開式

部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ の絶対位置 \mathbf{r} における定常音圧 $p^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ は、次式のヘルムホルツ方程式(Helmholtz equations)により支配される。

$$\nabla^2 p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) + k^2 p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -j\rho\omega q^{(\alpha)}\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q^{(\alpha)}) \quad (3.1)$$

ここで、 k は音響波数、 ρ は流体密度、 δ はディラックのデルタ関数である。WBMの定式化では、音圧 $p^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ を次式のように展開する。

$$p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \approx \hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \Phi_a^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)})^T \mathbf{p}_a^{(\alpha)} + \hat{p}_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}) \quad (3.2)$$

ここで、関数ベクトル $\Phi_a^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)})$ は方程式(3.1)の同次式を厳密に満たす音響波動関数(acoustic wave functions)から成るベクトルであり、 $\mathbf{r}^{(\alpha)} = [x^{(\alpha)} y^{(\alpha)}]^T$ は絶対位置 \mathbf{r} を部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ において定義された局所座標系からみたときの局所位置ベクトル、 $\mathbf{p}_a^{(\alpha)}$ は波動関数の寄与分を表す未知のベクトルを表す。この波動関数は、実装時には大きさを正規化するようにスケーリングされる。この操作が、悪条件問題を回避するために実用上重要となる。一方、関数 $\hat{p}_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)})$ は、方程式(3.1)の右辺の外部音源項を考慮したときの特解の1つであり、次式で与えられる。

$$\hat{p}_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}) = \frac{\rho_0 \omega}{4} Q^{(\alpha)} H_0^{(2)}(k \|\mathbf{r}^{(\alpha)} - \mathbf{r}_q^{(\alpha)}\|) \quad (3.3)$$

ここで、 $H_i^{(2)}(\bullet)$ は i 次の第2種ハンケル関数である。 $Q^{(\alpha)}$ は音源強さであり、次式で定義される。

$$Q^{(\alpha)} = \int_{\Omega^{(\alpha)}} q^{(\alpha)} d\Omega \quad (3.4)$$

また、ベクトル $\Phi_a^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)})$ の成分である各音響波動関数は次式のように定義される。

$$\begin{aligned} \phi_{ai}^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}) &= \begin{cases} \phi_{ari}^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}) = \cos(k_{xri}^{(\alpha)} x^{(\alpha)}) \exp(-jk_{yri}^{(\alpha)} y^{(\alpha)}) \\ \phi_{asi}^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}) = \exp(-jk_{xsi}^{(\alpha)} x^{(\alpha)}) \cos(k_{ysi}^{(\alpha)} y^{(\alpha)}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで、 $\exp(\bullet)$ は、自然対数の底 e の指数関数を表す。この波動関数が、方程式(3.1)の厳密解であるためには、

$$(k_{xri}^{(\alpha)})^2 + (k_{yri}^{(\alpha)})^2 = (k_{xsi}^{(\alpha)})^2 + (k_{ysi}^{(\alpha)})^2 = k^2 \quad (3.6)$$

であることが要求され、次の波数成分を選択することが提案されている。

$$(k_{xri}^{(\alpha)}, k_{yri}^{(\alpha)}) = \left(\frac{i_r^{(\alpha)} \pi}{L_x^{(\alpha)}}, \pm \sqrt{k^2 - (k_{xri}^{(\alpha)})^2} \right) \quad (3.7-a)$$

$$(k_{xsi}^{(\alpha)}, k_{ysi}^{(\alpha)}) = \left(\pm \sqrt{k^2 - (k_{ysi}^{(\alpha)})^2}, \frac{i_s^{(\alpha)} \pi}{L_y^{(\alpha)}} \right) \quad (3.7-b)$$

ここで、 $i_r^{(\alpha)}, i_s^{(\alpha)} = 0, 1, 2, \dots$ である。これらは、数値的な悪条件を緩和するために実装上は正規化され、さらに、物理的な波数や、図 3.2の点線で表される外接矩形領域のサイズに基づいて、有限次元に打ち切られる。この波動関数を用いた展開式が厳密解に収束するための十分条件は、全ての部分領域が凸であるということが示されている¹³⁾。

一方、流体速度ベクトル $\mathbf{v}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ は、次式で表される。

$$\mathbf{v}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\rho_0 \omega} \nabla^{(\alpha)} p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \approx \frac{j}{\rho_0 \omega} \nabla^{(\alpha)} \hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$$

$$= \frac{j}{\rho\omega} \left[\mathbf{B}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \mathbf{p}^{(\alpha)} + \nabla^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \right] \quad (3.8)$$

ここで、音響波動関数 $\phi^{(\alpha)}$ の勾配成分を集めた行列として定義される $\mathbf{B}^{(\alpha)}$ は、 $\nabla^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} & \frac{\partial}{\partial y^{(\alpha)}} \end{bmatrix}^T$ を勾配演算子ベクトルとして、以下のように定義される。

$$\mathbf{B}^{(\alpha)} = \nabla^{(\alpha)} \phi_a^{(\alpha)T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_{a1}^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} & \cdots & \frac{\partial \phi_{an_a}^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} \\ \frac{\partial \phi_{a1}^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} & \cdots & \frac{\partial \phi_{an_a}^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

一般に、FEM等の要素ベース解析手法では、解析結果として直接求まる圧力（主変数）を空間微分して得られる流体速度ベクトル（2次変数）は、微分により補間多項式の次数が下がるために精度も下がる。一方、WBMでは、式(3.8)から分かるように、支配方程式を厳密に満たす圧力（主変数）展開式を直接空間微分して得られる流体速度ベクトル（2次変数）には、精度低下はない。同様に、流体変位ベクトルもまた、式(3.8)を時間積分する（ $1/(j\omega)$ を掛ける）だけなので、精度低下はない。

3.3 構造の支配方程式と変数展開式

一方、境界 $\Gamma_s^{(\alpha)}$ に属する板の局所位置 \mathbf{x}'_s における定常法線方向変位 $w_s(\mathbf{x}'_s)$ は、次式の薄い平板の面外曲げの方程式であるキルヒホッフ方程式(Kirchhoff equations)により支配される。

$$\frac{d^4 w_s(\mathbf{x}'_s)}{dx_s'^4} - k_{bs}^4 w_s = \frac{f_s}{D_s} \delta(\mathbf{x}'_s, \mathbf{x}'_{fs}) + \frac{p^{(\alpha)}(\mathbf{r}_s)}{D_s} \quad (3.10)$$

ここで、 k_{bs} は構造波数、 D_s は曲げ剛性であり、 t_s を板厚、 ρ_s を密度、 E_s を弾性係数、 ν_s をポアソン比、 η_s を減衰係数として、それぞれ次のように定義される。

$$k_{bs} = \sqrt[4]{\frac{\rho_s t_s \omega^2}{D_s}} \quad (3.11)$$

$$D_s = \frac{E_s t_s^3 (1 + j\eta_s)}{12(1 - \nu_s^2)} \quad (3.12)$$

薄板の場合は、低周波数と中間周波数領域においてのみ音響振動連成効果が重要となる。この場合、板の曲げ運動におけるせん断変形と回転慣性力の効果が無視できるので、より一般的なミンドリン板理論の代わりにキルヒホッフ板理論が使える。また、板の面内振動は、一般に面外振動に比べて音響振動連成効果がみられないので無視できる。さらに、より一般的な分布力による励振は、離散的で直線的

な力による励振の重ね合わせと考えられるから、このような力に制限している点も一般性を失っていない。

WBMの定式化では、板の定常法線方向変位 $w_s(\mathbf{x}'_s)$ を次式のように展開する。

$$w_s(\mathbf{x}'_s) \approx \hat{w}_s(\mathbf{x}'_s) = \boldsymbol{\Psi}_s(\mathbf{x}'_s)^T \mathbf{w}_s + \hat{w}_{fs}(\mathbf{x}'_s) + \hat{\mathbf{w}}_{as}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)^T \mathbf{p}_a^{(\alpha)} + \hat{w}_{qs}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s) \quad (3.13)$$

ここで、関数ベクトル $\boldsymbol{\Psi}_s(\mathbf{x}'_s)$ は、方程式(3.10)の同次式を厳密に満たす4つの構造波動関数(structural wave function)

$$\psi_{si}(\mathbf{x}'_s) = \exp(-j k_{bs} \mathbf{x}'_s) \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (3.14)$$

から成るベクトルである。式(3.14)の $i=1, 3$ を、それぞれ、 $\cos(k_{bs} \mathbf{x}'_s)$ と $\sin(k_{bs} \mathbf{x}'_s)$ に置き換えてもよい。この関数も、音響波動関数と同様に実装ではスケーリング（正規化）される。ベクトル \mathbf{w}_s は、式(3.14)の各波動関数の寄与分を表す。また、関数 $\hat{w}_{fs}(\mathbf{x}'_s)$ は、方程式(3.10)右辺の外力項を考慮したときの特解の1つであり、次式で定義される。

$$\hat{w}_{fs}(\mathbf{x}'_s) = -\frac{1}{4D_s k_{bs}^3} f_s \left[j \exp(-j k_{bs} |\mathbf{x}'_s - \mathbf{x}'_{fs}|) + \exp(-k_{bs} |\mathbf{x}'_s - \mathbf{x}'_{fs}|) \right] \quad (3.15)$$

関数ベクトル $\hat{\mathbf{w}}_{as}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)$ は、方程式(3.10)右辺の音圧項を考慮したとき、式(3.2)の音響波動関数を含む項の影響を含む特解

$$\hat{w}_{asi}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s) = -\frac{1}{4D_s k_{bs}^3} \times \int_0^{L_s} \phi_{ai}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_{ss}^{(\alpha)}(\xi)) \left[j \exp(-j k_{bs} |\mathbf{x}'_s - \xi|) + \exp(-k_{bs} |\mathbf{x}'_s - \xi|) \right] d\xi \quad (3.16)$$

を要素にもつベクトルである。ベクトル $\hat{\mathbf{w}}_{as}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)$ の各成分を数値積分することは計算負荷が大きいため、圧力荷重が音響波動関数(3.5)の線形和として表され、平板であるという仮定を利用できる場合には、解析解を利用して計算を高速化できる（式(A.6), (7-a,b), (8-a,b)）。さらに、関数 $\hat{w}_{qs}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)$ は、方程式(3.10)右辺の音圧項を考慮したとき、式(3.2)の音源項の影響を含む特解の1つであり、次式で定義される。

$$\hat{w}_{qs}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s) = -\frac{\rho_0 \omega}{16D_s k_{bs}^3} Q^{(\alpha)} \times \int_0^{L_s} H_0^{(2)}(k \|\mathbf{r}_{ss}^{(\alpha)}(\xi) - \mathbf{r}_q^{(\alpha)}\|) \left[j \exp(-j k_{bs} |\mathbf{x}'_s - \xi|) + \exp(-k_{bs} |\mathbf{x}'_s - \xi|) \right] d\xi \quad (3.17)$$

この積分は解析的に解けないが、関数 $\hat{\mathbf{w}}_{\text{qs}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)$ はスカラー量なので、ベクトル $\hat{\mathbf{w}}_{\text{as}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)$ の場合のように、各要素 (3.16) について数値積分する可能性のあるものに比べれば、数値計算負荷の問題は少ない。

以上の定義から、音圧の展開式(3.2)と板の法線方向変位の展開式(3.13)は、それぞれ、支配方程式(3.1)と(3.10)を厳密に満たすことが分かる。これは、WBM により得られる数値変数には数値分散誤差が含まれないということを表しており、広い周波数成分を有する音響振動応答を予測するために非常に重要な性質である。

3.4 重み付き残差法による定式化

変数の展開式(3.2)と(3.13)における未知数である、波動関数の寄与分を表す係数ベクトル $\mathbf{p}_a^{(\alpha)}$ と \mathbf{w}_s を決めるため、音響 BC に重み付き残差法(weighted residual method)を適用する。つまり、支配方程式は厳密に満たされるが、BC は積分の意味で近似的に満たされることになる。FEM におけるガラーキン法と同様にして、重み関数 $\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ を次式のように音響波動関数を用いて展開する。

$$\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\text{T}} \boldsymbol{\phi}_a^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}) = \boldsymbol{\phi}_a^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)})^{\text{T}} \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)} \quad (3.18)$$

関数 $\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ を用いれば、2 つの凸部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ に関する音響 BC に関する重み付き残差式が次のように導出できる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_v^{(\alpha)} d\Gamma + \int_{\Gamma_z^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_z^{(\alpha)} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_s^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_s^{(\alpha)} d\Gamma - \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\tilde{p}^{(\alpha)}) R_p^{(\alpha)} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_c^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_c^{(\alpha)} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで、関数 $R_v^{(\alpha)}$ 、 $R_z^{(\alpha)}$ 、 $R_s^{(\alpha)}$ 、 $R_p^{(\alpha)}$ 、 $R_c^{(\alpha)}$ は、BC の理論式と、式(3.2)および式(3.13)で展開した変数を用いたときの計算式との差として定義される残差誤差関数であり、

$\mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\bullet)$ は法線方向微分を表す $\frac{\partial \bullet}{\partial n^{(\alpha)}}$ を用いた速度演算子

$\mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\bullet) = \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \bullet}{\partial n^{(\alpha)}}$ である。部分領域 $\Omega^{(1)}$ と $\Omega^{(2)}$ のインタ

フェイス（以下、I/F）面においては、単純に圧力と法線方向速度の両方の連続性条件を課す直接連成手法が従来用いられてきたが、解析周波数が共鳴周波数と一致した場合に計算の収束速度が低下、あるいは発散するという問題があった。この問題を回避して計算の安定化と高速化を図るために、人工粘性を導入したインピーダンス連成手法²⁵⁾が提案されており、一般的にはこの手法を用いるべきである。次に、音響 BC の重み付き残差式である式(3.19)を未知係数ベクトル $\mathbf{p}_a^{(\alpha)}$ と \mathbf{w}_s に関して整理すると、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{as1}}^{(1)} & \mathbf{C}_{\text{as2}}^{(1)} & \mathbf{A}_a^{(1)} & \mathbf{C}_a^{(1,2)} \\ \mathbf{C}_{\text{as1}}^{(2)} & \mathbf{C}_{\text{as2}}^{(2)} & \mathbf{C}_a^{(2,1)} & \mathbf{A}_a^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \mathbf{p}_a^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a^{(1)} \\ \mathbf{f}_a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

のような形式の行列方程式を得る。各部分行列を得るためには数値積分を行う必要があり、この計算を効率的に行うことが WBM の計算負荷低減に大きく効いてくる。本論文では、FEM でも利用されているガウス-ルジャンドル積分法 (Gauss-Legendre quadrature)⁹⁾を用いている。WBM では、波動関数という大域的に定義された基底関数を利用するため、FEM に比べて多くの積分点を必要とする。そのため、任意の個数のガウス点に対応したルーチンを準備する必要がある。

一方、境界 $\Gamma_s^{(e)}$ の構造 BC として、次のような固定、単純支持、自由、対称条件などが課される。

$$w_s(0) = w_s(L_s) = \frac{dw_s(0)}{dx'_s} = \frac{dw_s(L_s)}{dx'_s} = 0 \quad (\text{固定}) \quad (3.21\text{-a})$$

$$w_s(0) = w_s(L_s) = \frac{d^2 w_s(0)}{dx_s'^2} = \frac{d^2 w_s(L_s)}{dx_s'^2} = 0 \quad (\text{単純支持}) \quad (3.21\text{-b})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_s(0)}{dx_s'^2} &= \frac{d^2 w_s(L_s)}{dx_s'^2} \\ &= \frac{d^3 w_s(0)}{dx_s'^3} = \frac{d^3 w_s(L_s)}{dx_s'^3} = 0 \quad (\text{自由}) \end{aligned} \quad (3.21\text{-c})$$

$$\frac{dw_s(0)}{dx'_s} = \frac{dw_s(L_s)}{dx'_s} = \frac{d^3 w_s(0)}{dx_s'^3} = \frac{d^3 w_s(L_s)}{dx_s'^3} = 0 \quad (\text{対称}) \quad (3.21\text{-d})$$

これらの式の 1 つに展開式(3.13)を代入することにより、未知係数ベクトル $\mathbf{p}_a^{(\alpha)}$ と \mathbf{w}_s に関する代数方程式が次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{s1}} & \mathbf{O} & \mathbf{C}_{\text{sa1}}^{(1)} & \mathbf{C}_{\text{sa1}}^{(2)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{\text{s2}} & \mathbf{C}_{\text{sa2}}^{(1)} & \mathbf{C}_{\text{sa2}}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \mathbf{p}_a^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{s1}} \\ \mathbf{f}_{\text{s2}} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

最後に、音響 BC から得られた代数方程式(3.20)と、構造 BC から得られた代数方程式(3.22)を組み合わせることにより、最終的に、WBM モデルが次式のような行列形式で書ける。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{O} & \mathbf{C}_{sa1}^{(1)} & \mathbf{C}_{sa1}^{(2)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{s2} & \mathbf{C}_{sa2}^{(1)} & \mathbf{C}_{sa2}^{(2)} \\ \mathbf{C}_{as1}^{(1)} & \mathbf{C}_{as2}^{(1)} & \mathbf{A}_a^{(1)} & \mathbf{C}_a^{(1,2)} \\ \mathbf{C}_{as1}^{(2)} & \mathbf{C}_{as2}^{(2)} & \mathbf{C}_a^{(2,1)} & \mathbf{A}_a^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \mathbf{p}_a^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{s1} \\ \mathbf{f}_{s2} \\ \mathbf{f}_a^{(1)} \\ \mathbf{f}_a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

この方程式には、部分領域間の連続性を表すためと、音響と構造の連成を表すための非対角行列が含まれていることが分かる。また、WBMにおける音響と構造との間の連成が、マトリクス連成であると解釈することもできる。ここでは、簡単のため部分領域を 2 つに制限して定式化を行ったが、より一般的な WBM モデルの導出については Appendix A に示す。

3.5 解析例

前節で述べた理論に基づき、2 次元 WBM 解析コードを MATLAB[®](28) で実装した。定式化を簡単化するために前節で用いた仮定を一般化することは単純であり、本コードは、基本的に Appendix A に示した汎用的な定式化に基づいて、任意の個数の平板や凸部分領域などに対応できるように汎用化している。

以下にいくつか数値解析例を示し、主に既存の FEM と WBM の解析結果を比較することにより WBM の特徴を明らかにする。

3.5.1 非凸領域の解析

前節で述べたように、WBM においては、非凸領域は複数の凸領域に分けなければならない。シミュレーション結果においてこの影響を調べるために、図 3.3 下図に示すような 2D 連成音響振動系を考える。

幅 1.5 [m]、高さ 1.0 [m] の音響キャビティは、空気（密度

$\rho = 1.225$ [kg/m³]、音速 $c = 340$ [m/s]) で満たされており、上面の薄いアルミニウム板（密度 $\rho_s = 2,790$ [kg/m³]、板厚 $t_s = 0.002$ [m]、ヤング率 $E_s = 70 \times 10^9$ [N/m²]、ポアソン比 $\nu_s = 0.3$ 、減衰比 $\eta_s = 0.0$ ）を除いて剛壁に囲まれており、内部にある 0.5 [m] の高さの剛壁により仕切られている。薄板は両端固定であり、板の局所位置 $x' = 0.5$ [m] において周波数 200 [Hz]、振幅 1 [N] の時間調和の外力により励振される。

ここでは、解析領域を次の 3 つのケースに分けて考えることにする。(a) 1 個の非凸領域、(b) 3 個の凸領域、(c) 4 個の凸領域である。ケース(b)は、文献 9) と同じモデルである。図 3.3 の上図は、構造境界上の構造と流体の法線方向変位を示したものであり、下図は音圧場をプロットしたコンター図である。

ケース(a)において用いられた波動関数と積分点の数は、それぞれ、394 個と 4,320 個である。図 3.3(a)に対応した上図のグラフを見ると、板両端の固定 BC（構造 BC）は満たされているものの、構造境界において流体の法線方向変位（音響 BC）が満たされていない。さらに、下図の音圧場も、仕切り板を境に連続してしまっており、物理的におかしいことが見て取れる。

一方、凸部分領域を用いたケース(b)と(c)からは、図 3.3(b),(c)から分かるように、同様な結果が得られることが確認できた。BC に関しても、対応する上図から精度良く満たされていることが分かる。この場合、音響 BC を満たすために、ケース(b)では、132 個の波動関数と 1,598 個の積分点、ケース(c)では、154 個の波動関数と 1,899 個の積分点を用いられている。つまり、ケース(b)は最小の個数の凸領域と BC を用いていることから、ケース(c)よりも計算効率が高い。さらに、ケース(b)の結果は、文献 9) で得られている結果と一致していることから、開発したコードが正確に実装されていることが確認できた。

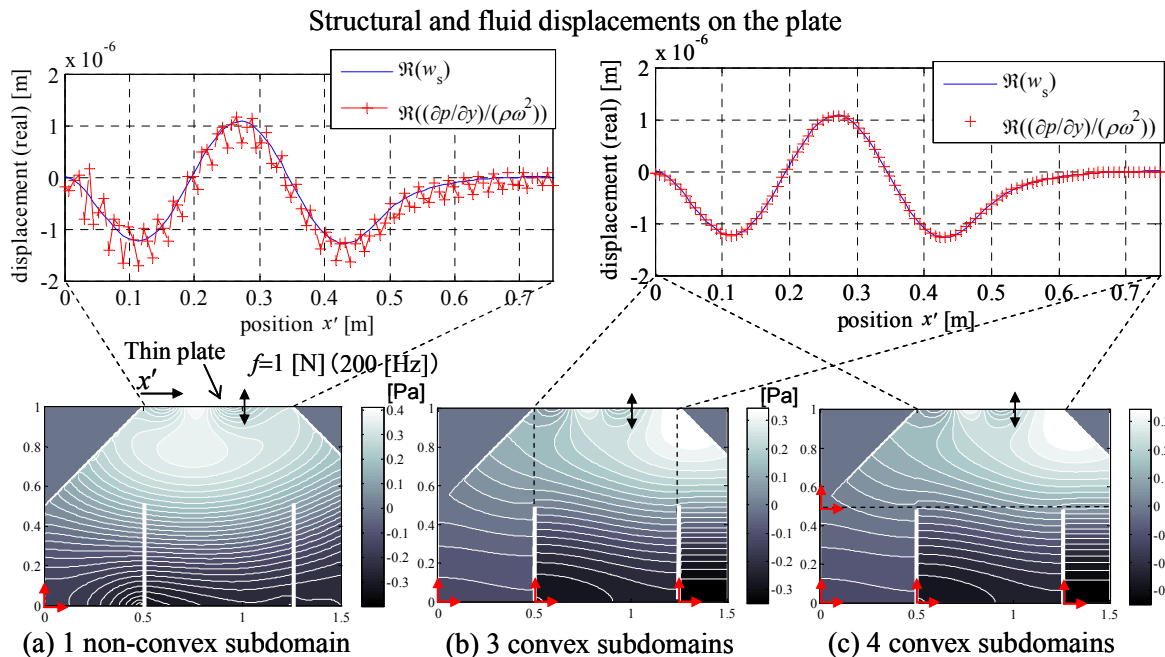


図 3.3 音圧場のコンター図（下図(a)-(c)）と上部の薄板上の構造（実線）と流体（十字）の法線方向変位

3.5.2 構造振動による音の透過

図 3.4 に示すモデルを、構造曲げによる音の透過を模擬するために用いる。このモデルにおいて、空気 (3.5.1 節と同じ物性値) で満たされた幅 2 [m]、高さ 1 [m] の音響キャビティが、真ん中で薄いアルミニウム板 (3.5.1 節と同じ物性値) により仕切られている。上下面は剛体壁であり、右端は空気の音響インピーダンスの BC が課されている。柔軟な板は、両端固定である。このキャビティは、左端において、振幅 100 [Pa]、周波数 200 [Hz] と 1,000 [Hz] の時間調和圧力 BC により励振される。このように、このモデルは、キャビティ-構造-キャビティタイプの連成問題である。これは、前の例で示したキャビティ-構造タイプの連成と定式化の上で異なる (Appendix A 参照)。つまり、板の両側の音圧と音源の影響が構造の応答に影響し、構造の両側の音響部分領域にこの共通の構造変位を構造 BC として課さなければな

らない。図 3.5 は、このモデルを用いたときの解析結果である。図 3.5 の左図は、板を挟んだ両側の部分領域における音圧場をプロットしたものである。一方、右側のグラフは、構造の変位とその両側の流体変位が一致して解かれていることを示しており、開発した WBM コードによりキャビティ-構造-キャビティタイプの連成問題がきちんと解けていることが分かる。

音響に関するほとんどの教科書では、一般に音の遮蔽効果を評価するために用いられる「質量則(mass law)」と呼ばれる単純な音響透過損失に関する予測モデルが扱われている。しかし、この法則やさらには板の曲げによるコインシデンス効果(coincidence effect)の説明においても、構造は無限に広いと仮定されている。この仮定は、現実とは必ずしも一致していないので、ここで示したようなシミュレーションにおいて正確な音響透過損失を得るためには、この仮

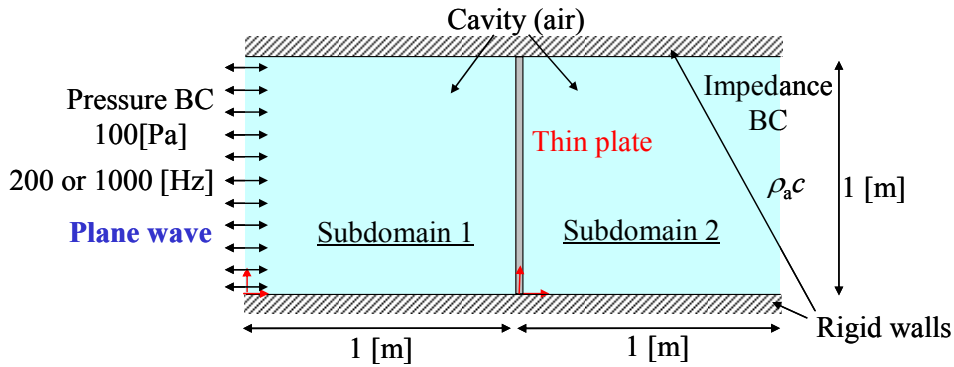


図 3.4 音響透過解析のためのモデル

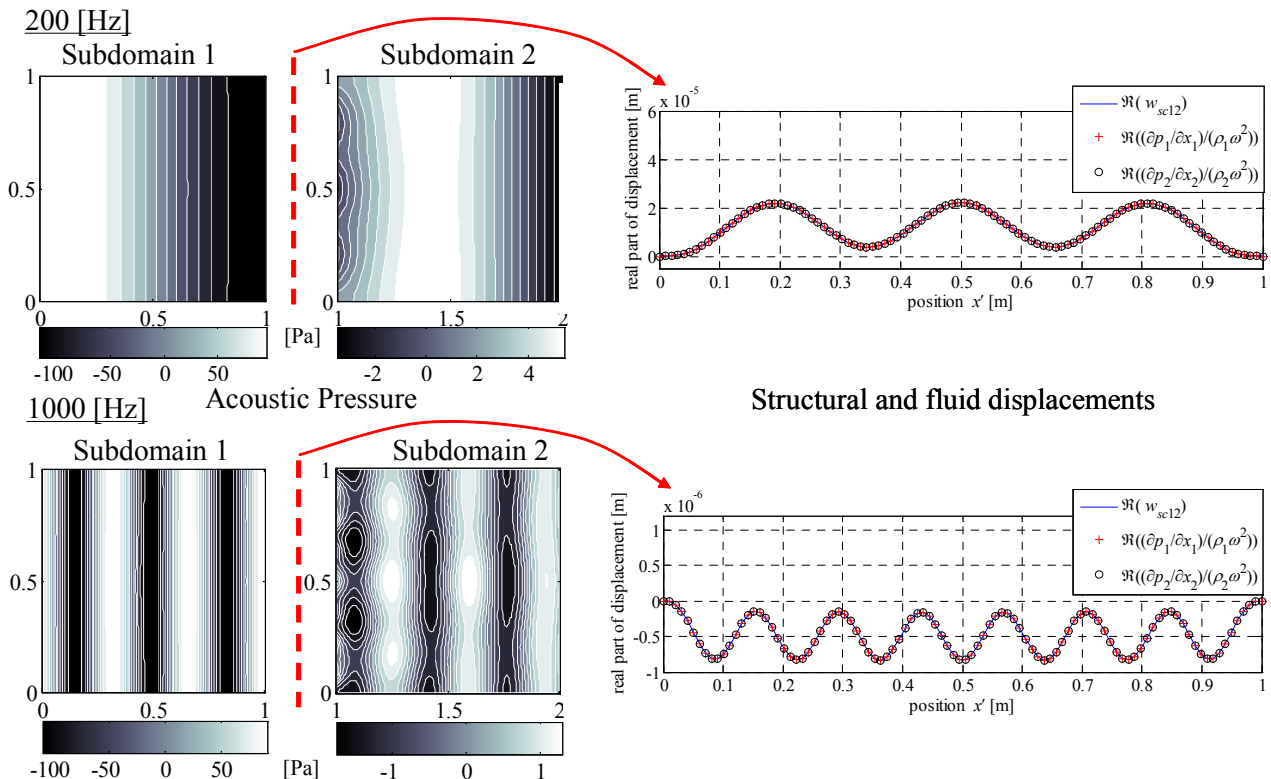


図 3.5 板の両側の音圧場のコンター図 (左図) と、板 (実線) とその両側の流体 (十字 (部分領域 1) と円 (部分領域 2)) の法線方向変位 (右図)

定を用いるべきではない。

3.5.3 非連成音響問題

図 3.6 に示すような簡単な 2 次元凸領域の音響キャビティを考える。キャビティは空気 (3.5.1 節と同じ物性値) で満たされており、構造要素を含まないで非連成音響問題として扱うことができる。左端の面に 1 [Pa] の圧力 BC を課し、その他の面は剛体壁とする。

この問題を FEM で解くためには、問題領域をメッシュに分割する必要がある。FEM には、主に補間誤差と数値分散誤差が含まれるので、これらを許容範囲内に収めるようにメッシュを切ることにする。まず、低周波領域において支配的な補間誤差を許容範囲内に収めるためには、式(2.1)を満たす必要がある。さらに、高い周波数領域において支配的となる数値分散誤差を許容範囲内に収めるためには、式(2.4)を満たす必要がある。 $C_{\text{int}} = C_{\text{dis}} = 1$ として、解析周波数 800 [Hz] まで上記の誤差を許容範囲に保つように 1 次矩形要素でメッシュを切る。式(2.1)を用いて補間誤差を許容範囲内に保つようにメッシュを切ったモデルが図 3.6(a) (粗 FE モデル: 326 節点、291 要素) であり、式(2.4)を用いて数値分散誤差を許容範囲内に収めるようにメッシュを切ったモデルが図 3.6(b) (精 FE モデル: 7,870 節点、7,706 要素) である。数値分散誤差を許容範囲に収めるための式(2.4)からは、補間誤差の場合のような、応答波長の少なくとも何分の 1 のサイズでメッシュを切ればよいという単純な指標が得られない¹⁵⁾ことに注意したい。FEM の解析には、ANSYS²⁹⁾を用いた。

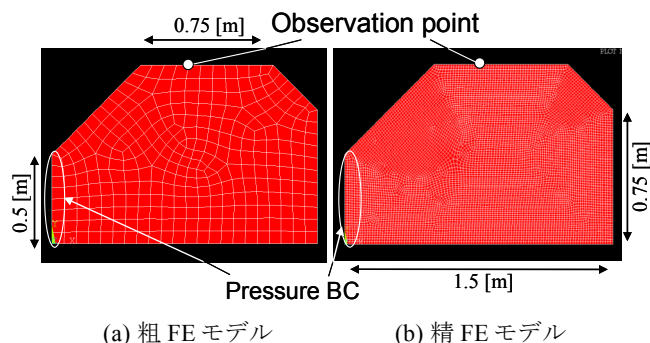


図 3.6 2次元非連成音響問題の FE モデル

一方、WBM では、問題領域を凸領域に分割するだけでよいので、この問題に関しては領域分割を必要としない。式(3.23) (ここでは構造に関する部分を除いた式を考える) に含まれる部分行列を得るために数値積分するので、そのために境界上の任意の点 (積分点) で BC と法線ベクトルが定義できるような幾何情報が用意できればよい。

以上より、この問題を WBM と FEM を用いて解き、図 3.6 に示した観測点における圧力スペクトルを周波数領域で比較した結果が図 3.7 である。周波数の低い領域では、WBM と精粗の両 FE モデルの結果はほぼ一致しているが、周波数が高くなると、粗 FE モデルを用いて得られた共鳴ピークの周波数が高周波側へずれている。粗 FE モデルは、数

値分散誤差を考慮していないので、この共鳴周波数のずれが数値分散誤差の影響であることが分かる。FEM では、このような共鳴周波数のずれを生じなくするために数値分散誤差を許容範囲内に収める必要があり、それによってメッシュが非常に細くなり、解析自由度が爆発的に大きくなってしまう。3 次元解析では、問題はさらに深刻である。

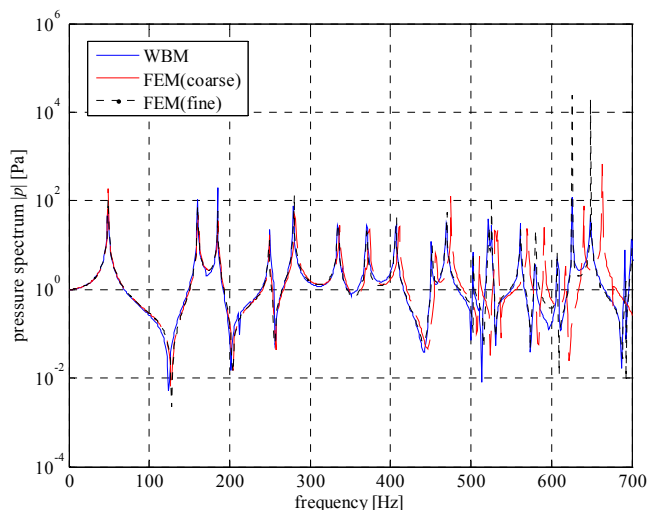


図 3.7 FEM と WBM による圧力スペクトルの比較

3.5.4 搭載宇宙機の音響構造連成解析

宇宙機の音響振動解析における構造と音響の連成の影響を調べるために、図 3.8 に示すような単純な剛体宇宙機モデル (Case A) と、柔軟宇宙機モデル (Case B) を構築する。フェアリング内は空気 (3.5.1 節と同じ物性値) で満たされているものとする。また、Case B のモデルは、5 つの両端固定の平板 (減衰比 $\eta_s = 0.05$ 以外は、3.5.1 節と同じ物性値) から構成される。図 3.9 に示す SPL は、実際には、ロケット打上げ時のフェアリング内を拡散音場と仮定したときのデータであり、地上音響試験で用いられるものであるが、本数値解析例では、簡単のためこのデータをフェアリング内壁の圧力 BC として用いた。

作成した WBM 解析コードを図 3.8 のモデルに適用したときの定常音響振動解析 (周波数解析) の結果を図 3.10 と図 3.11 に示す。図 3.10 は、励振周波数が 20 [Hz] と 1,000 [Hz] のときの Case A と Case B のフェアリング内音場を比較したものである。明らかに音場が構造振動に影響しており、WBM により音響振動連成問題が解けていることを示している。また、図 3.11 は、地上音響試験において通常最終的な出力として用いられる宇宙機の構造応答の加速度 PSD¹⁰⁾を、2,000 [Hz] まで 1 [Hz] 刻みで計算した結果を示している。WBM の決定論的な性質により、SEA では得られない共振ピークが広い周波数領域に渡って計算できていることが分かる。

次に、同じ問題を FEM を用いて解くことを考える。前節の非連成音響問題と同様に、補間誤差と数値分散誤差を許容範囲内に収めるように、最大解析周波数を 500 [Hz] に設定して、それぞれ、粗 FE モデル (12,832 要素、13,301 節点) と精 FE モデル (167,361 要素、170,141 節点) を構

築した。図 3.12 に粗 FE モデルを示す。FEM と WBM の解析結果を比較するために、図 3.12 に示すような宇宙機構造上の観測点における構造の加速度 PSD を計算した結果を図 3.13 に示す。計算は 1 [Hz] 刻みで行っている。

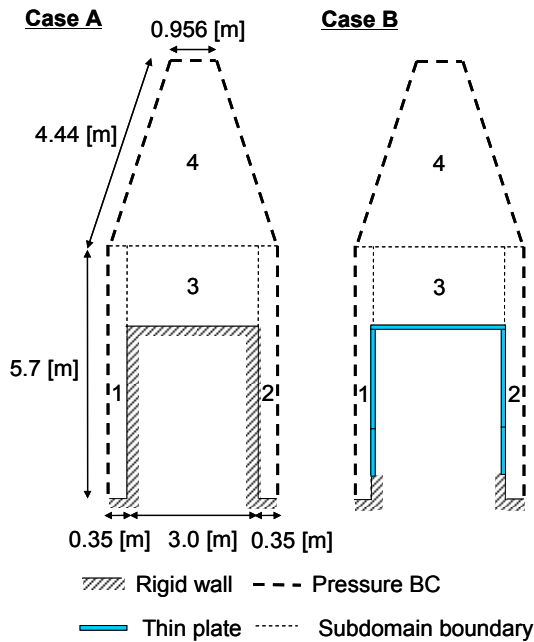


図 3.8 フェアリング内宇宙機の音響振動解析モデル
(モデル内部の数字は部分領域番号)

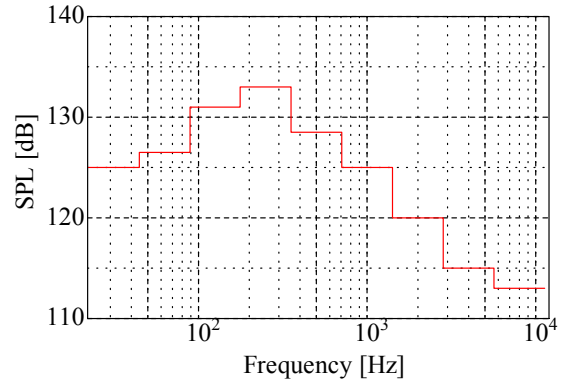


図 3.9 入力音圧レベル

FE モデルでは、解析ツール(ANSYS)の制約上、構造をソリッド要素でモデル化しているのに対して、WBM では平板の面外曲げのみを考慮している。そのため、精 FE モデルと WBM の結果が完全に一致しているわけではないが、前節の非連成音響問題と同様に、粗 FE モデルを用いて得られた共鳴ピークの周波数が、高い周波数ほど高周波側へずれる傾向が現れている。

また、WB モデル (WBM に基づいて作成した解析モデル) の解析自由度 (波動関数の数) は周波数依存で、周波数が高くなるほど多くの自由度が必要となる。この問題の場合、解析周波数領域の最大周波数である 500 [Hz] において最大で 1,040 個の音響波動関数、20 個の構造波動関数、

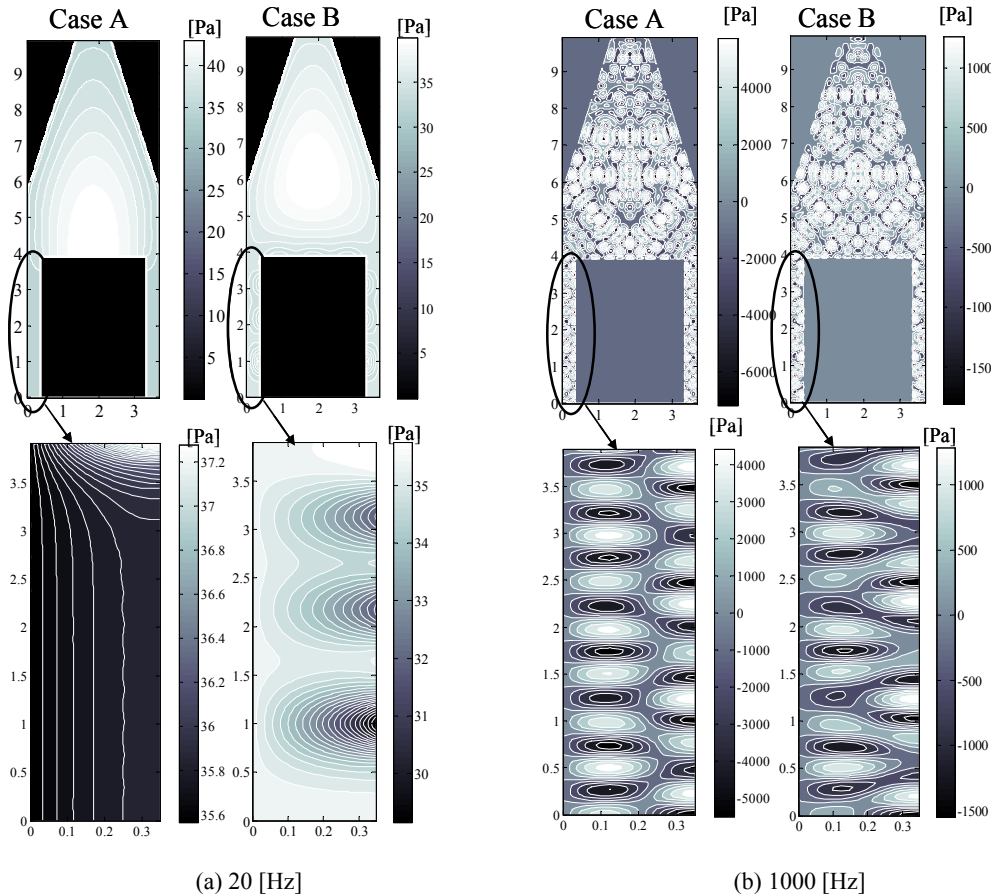


図 3.10 フェアリング内の音圧場(Case A と B).

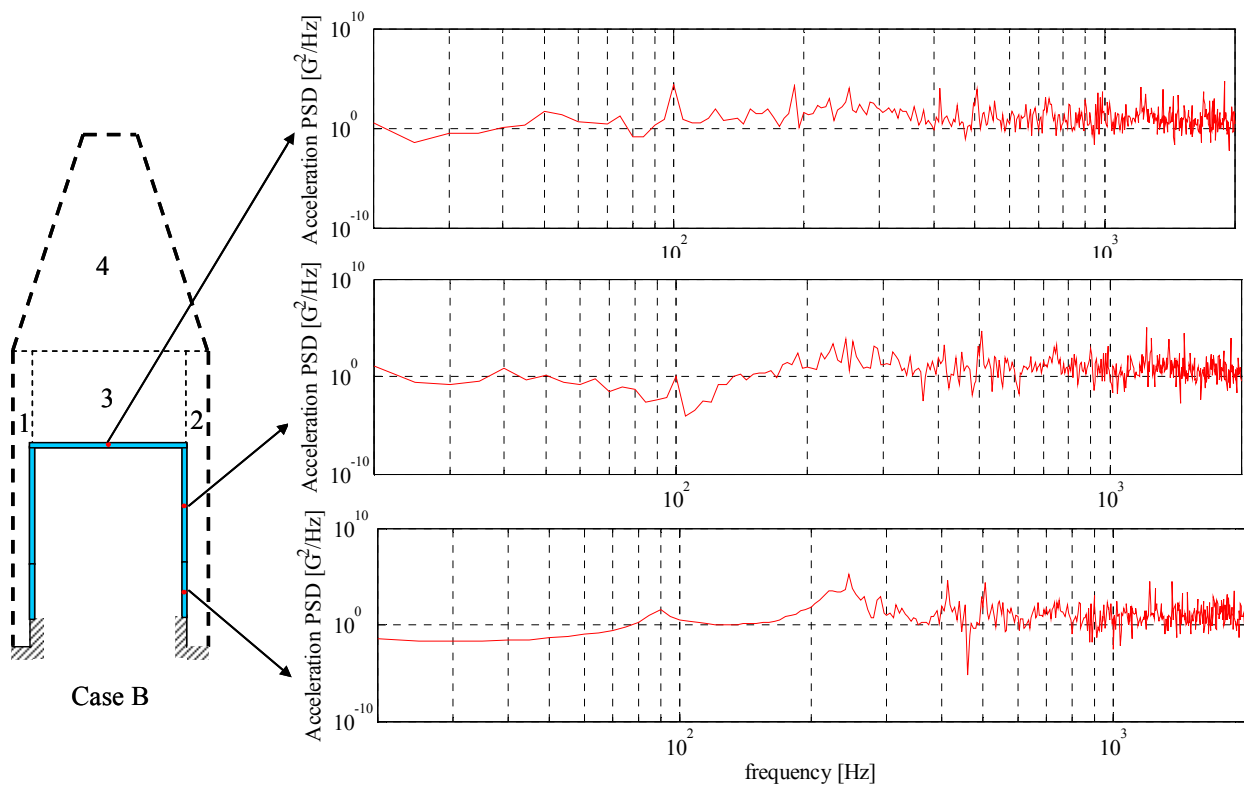


図 3.11 構造の加速度パワースペクトル密度関数

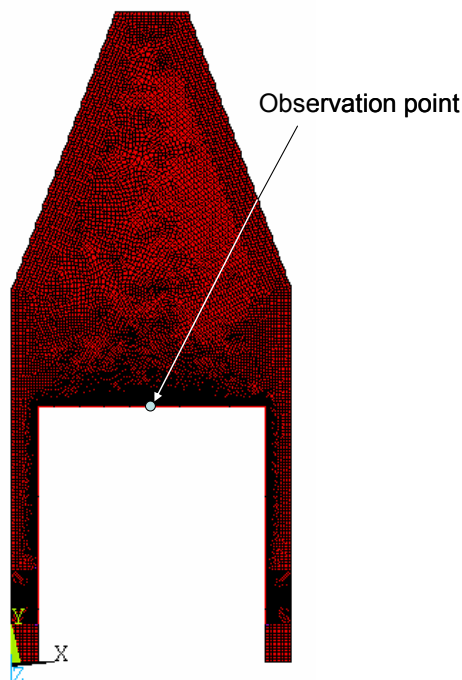


図 3.12 フェアリング内宇宙機音響振動解析のための粗 FE モデル

3,642 個の積分点を必要とした。これらの数は周波数が低くなるほど少なくなる。一方、FE モデルの解析自由度（節点における未知数の数）は、最大解析周波数（ここでは 500 [Hz]）に合わせて作成したメッシュを共通して用いるため

に、周波数に依存せずに一定である（一定でなくするためには、周波数ごとにアダプティブにメッシュを更新する必要がある）。特に数値分散誤差を考慮した場合の解析自由度は、WB モデルの最大自由度よりも桁違いに大きい。実際、Intel Xeon 3.20 [GHz] の CPU を 1 個とメモリ 2 [GB] を搭載した計算機を利用して、WB モデルを用いた場合、500 [Hz] において計算時間が最大で約 2 分程度かかり、それより小さな周波数では数秒から数 10 秒で計算できる。それに対して、精 FE モデルを用いた場合、解析する全ての周波数においてそれぞれ約 5 分程度かかってしまう。したがって、トータルの解析時間は、解析する周波数のケース数（解析する周波数の範囲とその間の周波数分解能）に依存して非常に大きな差となる。3 次元解析になれば、その差はさらに大きくなると予想できる。

4. おわりに

まず、ロケットに搭載された衛星の音響振動解析を FEM を利用して実施するため、単純な形状のモデルをいくつか用いて、ランダム応答解析やモデリングに関する基本的な事柄の確認、及び問題点について検討した。このとき、表面の要素圧力間の相関を考えることで音場の種類を区別し、応答の違いについて検討した。要素圧力間の相関により音場を模擬するやり方では、各要素圧力を独立したサブケースとして定義しなければならず、さらに、圧力 PSD の入力データも膨大になることから、計算資源や計算時間の点で問題があり、現状では単純なモデルの解析に留まる。ただし、音場の種類により応答が大きく変わることは確認できたので、フェアリング内部の音場まで解析対象として構造との連成解析を実施する必要があることが分かった。

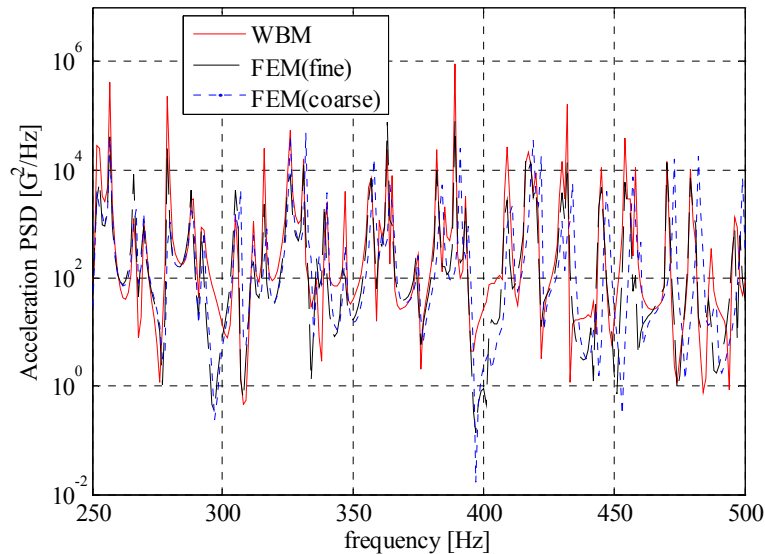


図 3.13 FEM と WBM による構造の加速度 PSD の比較

次に、複雑な形状をもつ衛星の音響振動解析の第 1 段階として、主構造の簡易構造モデルを構築し、FEM を用いて表面圧力を入力とした静・動解析を実施した。過渡解析では、表面圧力による衛星主構造の内部スティフナを含めた全体的な揺れが確認できた。

一方で、FEM の応用が低周波領域における解析に限られていることから、その代替手法として期待できる WBM に注目し、2 次元内部音響振動連成問題へ適用するための理論的な側面について説明した。また、開発した 2 次元 WBM 解析コードを検証するため、簡単な非凸形状の連成音響振動問題と、板の曲げによる音響透過問題を解析した。さらに、単一のキャビティ領域をもつ非連成音響問題を解析し、WBM と FEM の結果を比較することにより、WBM の基本的な性質や実用性についても検討した。さらにこの検討を踏まえて、搭載宇宙機の 2 次元音響振動解析を両手法を用いて実施した。以上の結果から、WBM の音響振動連成解析における決定論的な性質が確かめられ、数値分散誤差を伴わない性質から、既存の解析手法で精度の高い解析ができない中間周波数領域を含む広い周波数領域における解析が可能であることが分かった。さらに、空間離散化（メッシュ）を必要としないため、モデル化が非常に容易で計算負荷の小さい実用的な手法であることが分かった。

フェアリングの中に衛星を搭載した状態で地上音響試験ができるのが理想的ではあるが、外部音場を反響室で模擬するのは性能上非常に困難であるので、その代替として数値シミュレーションを利用した効率的で正確な検討が進められるべき問題である。したがって、今後は、WBM コードを 3 次元解析へ拡張すると共に、外部問題や複雑形状への対応を検討することによって、より現実的な音響振動連成問題を解析する予定である。

参考文献

- 1) Sarafin, P. T., and Larson, J. R., *Spacecraft Structures and Mechanisms – From Concept to Launch*, Kluwer Academic, 1995.
- 2) Fortescue, P., Stark, J., and Swinerd, G., *Spacecraft Systems Engineering (3rd ed.)*, Wiley, 2003.
- 3) Lyon, R. H., and De Jong, R. G., *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, Butterworth-Heinemann, New York, 1995.
- 4) Xiang, S., Zhang, J., and Wang, Z., Development of the DFH-3 satellite vibro-acoustic environment by SEA method, 50th International Astronautical Congress, Amsterdam, Netherlands, IAF-99-1.2.09, 1999.
- 5) Wang, M. E., Modeling of acoustic environment of Node 1 of International Space Station by statistical energy analysis, 29th International Conference on Environmental Systems, Denver, Colorado 12-15 July 1999, 1999-01-2197.
- 6) 吉田, 小泉, 音響加振下における多層ハニカムパネルの振動応答, 機論 C, Vol.58, No.545, pp.25-29, 1992.
- 7) 小金井, 安藤, 施, 萩原, 衛星打上げ時の音響振動解析, 機論 C, Vol.71, No.708, pp.2485-2491, 2005.
- 8) Payload vibroacoustic test criteria, NASA Technical Standard, NASA-STD-7001, 1996.
- 9) Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z., and Nithiarasu, P., *The Finite Element Method – The three volume set (6th ed.)*, Butterworth-Heinemann, 2005.
- 10) Wijk, J., *Mechanical vibrations in spacecraft design*, Springer, 2004.
- 11) Dupuis, P. E., Vibroacoustic test prediction dedicated to flat structures, AIAA-98-2306, 1998.
- 12) Grosveld, F. W., Buehrle, R. D., and Robinson, J. H., Structural and acoustic numerical modeling of a curved composite honeycomb panel, AIAA-2001-2277, 2001.
- 13) Desmet, W., *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*, Ph.D. dissertation, K.U. Leuven, 1998.
- 14) Ihlenburg, F. and Babuska, I., Finite Element Solution of the Helmholtz Equation with High Wave Number Part I: The h-version of the FEM, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.30, pp.9-37, 1995.
- 15) Bouillard, Ph. and Ihlenburg, F., Error Estimation and Adaptivity for the Finite Element Method in Acoustics: 2D and 3D Applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.176, pp.147-163, 1999.
- 16) Miles, W. J., On structural fatigue under random loading, *J. of Aeronautical Sciences*, pp.753-762, November 1954.
- 17) モード解析ハンドブック編集委員会編, モード解析ハンドブック, コロナ社, 1999.
- 18) Rose, T., Using Residual Vectors in MSC/NASTRAN Dynamic Analysis to Improve Accuracy, MSC World User's Conference, 1991.

- 19) Komzsik, L., *MSC.Nastran 2001 Numerical Methods User guide*, MSC Software, 2002.
- 20) <http://www.mscsoftware.co.jp/products/patran/>
- 21) 安藤, 村上, 内川, 大野, 三枝, 腰越, SEA による音響振動応答解析と実験の比較, 第 42 回構造強度に関する講演会講演集, 1B11, 2000.
- 22) Cook, K. R., Waterhouse, V. R., Berendt, D. R., Edelman, S., and Thompson Jr., C. M., Measurement of correlation coefficients in reverberant sound fields, *J. of Acoustical Society of America*, Vol.27, pp.1071-1077, 1955.
- 23) 吉田, 仲尾次, 音響加振を受ける衛星搭載望遠鏡の振動応答解析 (第 1 報, 低周波数帯の解析), 機論 C, Vol.70, No.697, pp.2587-2593, 2004.
- 24) Van Hal, B., *Automation and performance optimization of the wave based method for interior structural-acoustic problems*, Ph.D. dissertation, K.U. Leuven, 2004.
- 25) Pluymers, B., *Wave based modelling methods for steady-state vibro-acoustics*, Ph.D. dissertation, K.U. Leuven, 2006.
- 26) Vanmaele, C., *Development of a wave based prediction technique for the efficient analysis of low- and mid-frequency structural vibrations*, Ph.D. dissertation, K.U. Leuven, 2007.
- 27) 神谷, 北, トレフツ法入門, コロナ社, 2000.
- 28) <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- 29) <http://www.ansys.com/>

Appendix A 一般的な WBM の定式化

任意の個数の凸部分領域に対応した 2D 内部音響構造連成問題に対する WBM の一般的な定式化を示す。

A.1 凸部分領域への分解と境界条件

WB 近似が厳密解へ収束するための十分条件は、問題領域が凸であることである。有界な音響問題領域 Ω は凸でないかもしれないので、重なり合わない n_Ω 個の凸部分領域に分けられたとする。

このとき、 α 番目の凸な有界音響部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ の境界を $\Gamma^{(\alpha)}$ と書くことにすると、これは、

$$\Gamma^{(\alpha)} = \Gamma_v^{(\alpha)} \cup \Gamma_z^{(\alpha)} \cup \Gamma_p^{(\alpha)} \cup \Gamma_s^{(\alpha)} \cup \Gamma_c^{(\alpha)} \quad (\text{A.1})$$

と表せる。ここで、境界 $\Gamma_v^{(\alpha)} (= \Gamma_v \cap \Gamma^{(\alpha)})$ は、法線方向速度 BC が適用される部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ の境界部分、境界 $\Gamma_z^{(\alpha)} (= \Gamma_z \cap \Gamma^{(\alpha)})$ は、法線方向インピーダンス BC が適用される部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ の境界部分、境界 $\Gamma_p^{(\alpha)} (= \Gamma_p \cap \Gamma^{(\alpha)})$ は、圧力 BC が適用される部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ の境界部分、 $\Gamma_s^{(\alpha)} (= \Gamma_s \cap \Gamma^{(\alpha)})$ は、流体-板連成 I/F に属する部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ の境界部分である。 $\Gamma_c^{(\alpha, \beta)} (= \Gamma_c^{(\beta, \alpha)} = \Gamma^{(\alpha)} \cap \Gamma^{(\beta)})$ は、部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ と部分領域 $\Omega^{(\beta)}$ の共通 I/F を表し、部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ が含まれる全ての部分領域 I/F の集合を、 $\Gamma_c^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \Gamma_c^{(\alpha, \beta)}$ と書く。この I/F 上に適用する必要がある連続性条件は、次節で議論する。

A.2 部分領域連続性条件の記述

音響部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ と $\Omega^{(\beta)}$ の間の音響 I/F $\Gamma_c^{(\alpha, \beta)}$ ($\forall \alpha, \forall \beta, \alpha \neq \beta$)には、 $\mathbf{r} \in \Gamma_c^{(\alpha, \beta)}$ において、以下の 2 つの連続性条件を課さなければならない。

$$p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = p^{(\beta)}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.2-a})$$

$$\mathcal{L}_v^{(\alpha)}(p^{(\alpha)}(\mathbf{r})) = -\mathcal{L}_v^{(\beta)}(p^{(\beta)}(\mathbf{r})) \quad (\text{A.2-b})$$

WBM では、2 つの部分領域を連成させるために、ラグランジュ未定乗数のような補助変数を導入することなく、考慮する部分領域の音響変数に連続性条件(A.2-a)と(A.2-b)を適用させる直接連成アプローチを採用している。問題を適切(well-posed)にするために、各部分領域に 1 つの連続性条件を課す。このような連続性条件を課す手法は、圧力-速度連成(pressure-velocity coupling)手法と呼ばれる。以下では便宜的に、 $\alpha > \beta$ のとき圧力 BC を、 $\alpha < \beta$ のとき法線速度 BC を課すことにする。

一方、 $\mathbf{r} \in \Gamma_c^{(\alpha, \beta)}$ において、これと等価な連続性条件が以下のように定義できる。

$$\mathcal{L}_{\text{eq}+}^{(\alpha)}(p^{(\alpha)}(\mathbf{r})) = \mathcal{L}_{\text{eq}-}^{(\beta)}(p^{(\beta)}(\mathbf{r})) \quad (\text{A.3-a})$$

$$\mathcal{L}_{\text{eq}+}^{(\beta)}(p^{(\beta)}(\mathbf{r})) = \mathcal{L}_{\text{eq}-}^{(\alpha)}(p^{(\alpha)}(\mathbf{r})) \quad (\text{A.3-b})$$

ここで、等価法線方向速度演算子を次のように定義した。

$$\mathcal{L}_{\text{eq}+}^{(\alpha)}(\bullet) = \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \bullet}{\partial n^{(\alpha)}} - \frac{1}{\bar{Z}_c} \bullet \quad (\text{A.4-a})$$

$$\mathcal{L}_{\text{eq}-}^{(\alpha)}(\bullet) = -\frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \bullet}{\partial n^{(\alpha)}} - \frac{1}{\bar{Z}_c} \bullet \quad (\text{A.4-b})$$

スカラー \bar{Z}_c はインピーダンス連成因子である。この連続性条件により、 \bar{Z}_c を通じて人工的な粘性が導入されるので、従来の圧力-速度連成手法を用いるよりは、特に非減衰系の共鳴周波数近辺の解析において安定な定式化となる。インピーダンス連成因子 \bar{Z}_c として流体の音響インピーダンス ρc を選ぶと、収束速度に関して適当であることが示されている。この場合も問題を適切に設定するため、各部分領域に 1 つの連続性条件を課す。このような連続性条件を課すやり方を、インピーダンス連成(impedance coupling)手法と呼ぶ。

A.3 構造変位展開

WB 圧力展開式(3.2)に基づき、平板の定常法線方向変位 $w_s(\mathbf{x}'_s)$ を、解の展開式 $\hat{w}_s(\mathbf{x}'_s)$ として次式のように表す($s = 1, \dots, n_s$)。

$$\begin{aligned} w_s(\mathbf{x}'_s) &\simeq \hat{w}_s(\mathbf{x}'_s) \\ &= \boldsymbol{\Psi}_s(\mathbf{x}'_s)^T \mathbf{w}_s + \hat{\mathbf{w}}_{\text{fs}}(\mathbf{x}'_s) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \left(\zeta_s^{(\alpha)} \right)^2 \left(\hat{\mathbf{w}}_{\text{as}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)^T \mathbf{p}_a^{(\alpha)} + \hat{\mathbf{w}}_{\text{qs}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ここでは、3.5.2 節でみられるようなキャビティ-構造-キャビティタイプの連成を表現するために、スカラー $\zeta_s^{(\alpha)}$ を導入している。つまり、 $\Gamma_{\text{ss}}^{(\alpha)} = \emptyset$ のとき $\zeta_s^{(\alpha)} = 0$ 、 $\Gamma_{\text{ss}}^{(\alpha)} \neq \emptyset$ のとき $\zeta_s^{(\alpha)} = \mathbf{n}^{(\alpha)T} \mathbf{n}_{\text{ss}}$ である。 $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ は部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ の境界における単位法線ベクトルであり、 $\Omega^{(\alpha)}$ の外向きに定義される。また、 \mathbf{n}_{ss} は構造の法線ベクトルであり、キャビティの外向きに定義される。つまり、 $\Gamma_{\text{ss}}^{(\alpha)}$ がキャビティの内側ならば $\zeta_s^{(\alpha)} = +1$ 、外側ならば $\zeta_s^{(\alpha)} = -1$ 、それ以外ならば $\zeta_s^{(\alpha)} = 0$ である。

このとき、 $\hat{\mathbf{w}}_{\text{as}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)$ の各成分を数値積分することは計算負荷が大きいので、圧力荷重が音響波動関数(3.5)の線形和として表され、平板であるという仮定を利用できる場合には、次のような解析解を利用して計算を高速化できる。まず、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}_{\text{as}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)^T \mathbf{p}_a^{(\alpha)} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{\text{ars}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s) \\ \hat{\mathbf{w}}_{\text{ass}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\text{ar}}^{(\alpha)} \\ \mathbf{p}_{\text{as}}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{w}}_{\text{ars}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)^T \mathbf{p}_{\text{ar}}^{(\alpha)} + \hat{\mathbf{w}}_{\text{ass}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}'_s)^T \mathbf{p}_{\text{as}}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

の形式に分けて考える。関数ベクトル $\hat{\mathbf{w}}_{\text{ars}}^{(\alpha)}(x'_s)$ の各成分 $\hat{w}_{\text{arsi}}^{(\alpha)}(x'_s)$ は、 $\mathbf{r}_s^{(\alpha)}(x'_s) = \begin{bmatrix} x_{s0s}^{(\alpha)} + x'_s \cos \alpha_s^{(\alpha)} & y_{s0s}^{(\alpha)} + x'_s \sin \alpha_s^{(\alpha)} \end{bmatrix}^T$ ($\alpha_s^{(\alpha)}$ は部分領域の局所座標系における板の傾斜角、 $\begin{bmatrix} x_{s0s}^{(\alpha)} & y_{s0s}^{(\alpha)} \end{bmatrix}^T$ を局所座標系からみた板先端の位置ベクトル) として、

$$\hat{w}_{\text{arsi}}^{(\alpha)}(x'_s) = \left\{ \left(B_{\text{rsi}}^{(\alpha)} - k_{\text{bs}}^4 \right) \times \cos \left[k_{\text{xri}}^{(\alpha)} \left(x_{s0s}^{(\alpha)} + x'_s \cos \alpha_s^{(\alpha)} \right) \right] - \bar{B}_{\text{rsi}}^{(\alpha)} \sin \left[k_{\text{xri}}^{(\alpha)} \left(x_{s0s}^{(\alpha)} + x'_s \cos \alpha_s^{(\alpha)} \right) \right] \right\} \times \frac{\exp \left[-jk_{\text{yri}}^{(\alpha)} \left(y_{s0s}^{(\alpha)} + x'_s \sin \alpha_s^{(\alpha)} \right) \right]}{D_s \left[\left(B_{\text{rsi}}^{(\alpha)} - k_{\text{bs}}^4 \right)^2 + \left(\bar{B}_{\text{rsi}}^{(\alpha)} \right)^2 \right]} \quad (\text{A.7-a})$$

で表され、関数ベクトル $\hat{\mathbf{w}}_{\text{ass}}^{(\alpha)}(x'_s)$ の各成分 $\hat{w}_{\text{asssi}}^{(\alpha)}(x'_s)$ は、次式で表せる。

$$\hat{w}_{\text{asssi}}^{(\alpha)}(x'_s) = \left\{ \left(B_{\text{ssi}}^{(\alpha)} - k_{\text{bs}}^4 \right) \times \cos \left[k_{\text{ysi}}^{(\alpha)} \left(y_{s0s}^{(\alpha)} + x'_s \sin \alpha_s^{(\alpha)} \right) \right] - \bar{B}_{\text{ssi}}^{(\alpha)} \sin \left[k_{\text{ysi}}^{(\alpha)} \left(y_{s0s}^{(\alpha)} + x'_s \sin \alpha_s^{(\alpha)} \right) \right] \right\} \times \frac{\exp \left[-jk_{\text{xsi}}^{(\alpha)} \left(x_{s0s}^{(\alpha)} + x'_s \cos \alpha_s^{(\alpha)} \right) \right]}{D_s \left[\left(B_{\text{ssi}}^{(\alpha)} - k_{\text{bs}}^4 \right)^2 + \left(\bar{B}_{\text{ssi}}^{(\alpha)} \right)^2 \right]} \quad (\text{A.7-b})$$

ここで、係数 $B_{\text{lsi}}^{(\alpha)}$ 、 $\bar{B}_{\text{lsi}}^{(\alpha)}$ ($l = \text{r}, \text{s}$) は、以下で定義される。

$$B_{\text{lsi}}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \left[\left(k_{\text{xli}}^{(\alpha)} \cos \alpha_s^{(\alpha)} + k_{\text{yli}}^{(\alpha)} \sin \alpha_s^{(\alpha)} \right)^4 + \left(-k_{\text{xli}}^{(\alpha)} \cos \alpha_s^{(\alpha)} + k_{\text{yli}}^{(\alpha)} \sin \alpha_s^{(\alpha)} \right)^4 \right] \quad (\text{A.8-a})$$

$$\bar{B}_{\text{lsi}}^{(\alpha)} = \frac{j}{2} \left[\left(-k_{\text{xli}}^{(\alpha)} \cos \alpha_s^{(\alpha)} + k_{\text{yli}}^{(\alpha)} \sin \alpha_s^{(\alpha)} \right)^4 - \left(k_{\text{xli}}^{(\alpha)} \cos \alpha_s^{(\alpha)} + k_{\text{yli}}^{(\alpha)} \sin \alpha_s^{(\alpha)} \right)^4 \right] \quad (\text{A.8-b})$$

ただし、 $\left(B_{\text{lsi}}^{(\alpha)} - k_{\text{bs}}^4 \right)^2 + \left(\bar{B}_{\text{lsi}}^{(\alpha)} \right)^2 \approx 0$ の場合は、数値積分を用いる元の式(3.14)を使用しなければならない。

A.4 連成音響振動モデル

圧力の展開式(3.2)と変位の展開式(A.5)は、未知の波動関数寄与係数の値に係らず、それぞれ、ヘルムホルツ方程式(3.1)と板の運動方程式(3.10)を常に厳密に満たすことが分かった。次に、これら寄与係数が、単に構造 BC、音響 BC、連続性条件により決まることを示す。

A.4.1 構造境界条件

まず、構造 BC について考える。構造板の BC は端の位置で特定され、展開式を用いて厳密に課される。例えば、両端固定の場合の構造 BC(3.21-a)に式(A.5)を適用すると、次のような行列方程式が得られる。

$$\left[\mathbf{A}_{\text{ss}} \mid \mathbf{C}_{\text{sas}}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{C}_{\text{sas}}^{(n_\Omega)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_a^{(n_\Omega)} \end{bmatrix} = \mathbf{f}_{\text{ss}} \quad (\text{A.9})$$

ここで、以下の行列を定義した。

$$\mathbf{A}_{\text{ss}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_s(0) & \boldsymbol{\Psi}_s(L_s) & \frac{d\boldsymbol{\Psi}_s(0)}{dx'_s} & \frac{d\boldsymbol{\Psi}_s(L_s)}{dx'_s} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.10-a})$$

$$\mathbf{C}_{\text{sas}}^{(\alpha)} = \left(\zeta_s^{(\alpha)} \right)^2 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{\text{as}}^{(\alpha)}(0) & \hat{\mathbf{w}}_{\text{as}}^{(\alpha)}(L_s) \\ \frac{d\hat{\mathbf{w}}_{\text{as}}^{(\alpha)}(0)}{dx'_s} & \frac{d\hat{\mathbf{w}}_{\text{as}}^{(\alpha)}(L_s)}{dx'_s} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.10-b})$$

$$\mathbf{f}_{\text{fs}} = - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{\text{fs}}(0) & \hat{\mathbf{w}}_{\text{fs}}(L_s) \\ \frac{d\hat{\mathbf{w}}_{\text{fs}}(0)}{dx'_s} & \frac{d\hat{\mathbf{w}}_{\text{fs}}(L_s)}{dx'_s} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.10-c})$$

$$\mathbf{f}_{\text{qs}} = - \sum_{\alpha=1}^{n_\Omega} \left(\zeta_s^{(\alpha)} \right)^2 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_{\text{qs}}^{(\alpha)}(0) & \hat{\mathbf{w}}_{\text{qs}}^{(\alpha)}(L_s) \\ \frac{d\hat{\mathbf{w}}_{\text{qs}}^{(\alpha)}(0)}{dx'_s} & \frac{d\hat{\mathbf{w}}_{\text{qs}}^{(\alpha)}(L_s)}{dx'_s} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.10-d})$$

$$\mathbf{f}_{\text{ss}} = \mathbf{f}_{\text{fs}} + \mathbf{f}_{\text{qs}} \quad (\text{A.10-e})$$

式(A.10-b)に $\zeta_s^{(\alpha)}$ が掛かっていることから、板と直接接する部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ の波動関数に関連した部分行列 $\mathbf{C}_{\text{sas}}^{(\alpha)}$ だけが非零であることに注意したい。

式(A.9)を n_s 個の平板についてまとめると、構造 BC に関する部分のみの $n_{\text{WBM}} (\equiv 4n_s + n_a)$ 個の未知数を含む $4n_s$ 次の代数連立方程式となる。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A}_{\text{s1}} & & 0 & \mathbf{C}_{\text{sa1}}^{(1)} & \dots & \mathbf{C}_{\text{sa1}}^{(n_\Omega)} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mathbf{A}_{\text{sn}_s} & \mathbf{C}_{\text{san}_s}^{(1)} & \dots & \mathbf{C}_{\text{san}_s}^{(n_\Omega)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_a^{(n_\Omega)} \end{bmatrix} = \mathbf{f}_s \quad (\text{A.11})$$

これは、さらに簡潔に次式のように書ける。

$$\left[\mathbf{A}_s \quad \mathbf{C}_{\text{sa}} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \mathbf{f}_s \quad (\text{A.12})$$

ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{A}_{sn_s} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13-a})$$

$$\mathbf{C}_{sa} = [\mathbf{C}_{sa1}^T \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{san_s}^T]^T \quad (\text{A.13-b})$$

$$\mathbf{C}_{sas} = [\mathbf{C}_{sas}^{(1)} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{sas}^{(n_\Omega)}] \quad (s = 1, \dots, n_s) \quad (\text{A.13-c})$$

$$\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{n_s}^T]^T \quad (\text{A.13-d})$$

$$\mathbf{p}_a = [\mathbf{p}_a^{(1)T} \quad \cdots \quad \mathbf{p}_a^{(n_\Omega)T}]^T \quad (\text{A.13-e})$$

$$\mathbf{f}_s = [\mathbf{f}_{s1}^T \quad \cdots \quad \mathbf{f}_{sn_s}^T]^T \quad (\text{A.13-f})$$

A.4.2 音響の境界条件と連続性条件

次に音響 BC について考える。音響問題領域 Ω を n_Ω 個の有界音響部分領域 $\Omega^{(\alpha)}$ に分けることにより、問題の音響 BC に加えて、部分領域 I/F $\Gamma_c^{(\alpha, \beta)}$ に沿う連続性条件(A.3-a), (A.3-b)、あるいは、I/F $\Gamma_{cp}^{(\alpha, \beta)}$ と $\Gamma_{cv}^{(\alpha, \beta)}$ に沿う連続性条件(A.2-a), (A.2-b)を考慮する必要がある。これらを満たすことにより、未知の波動関数寄与係数が決まることになる。

音響 BC と連続性条件の両者は、境界に沿って連続的に定義されるが、有限サイズの予測モデルのみが数値実装できるので、各部分領域に対して BC と連続性条件を、重み付き残差式に変換する。まず、残差誤差関数を、次のように定義する。

$$R_v^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) - \bar{v}_n(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in \Gamma_v^{(\alpha)}) \quad (\text{A.14-a})$$

$$R_z^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) - \frac{\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})}{\bar{Z}_n(\mathbf{r})} \quad (\mathbf{r} \in \Gamma_z^{(\alpha)}) \quad (\text{A.14-b})$$

$$R_p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) - \bar{p}(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in \Gamma_p^{(\alpha)}) \quad (\text{A.14-c})$$

$$\begin{aligned} R_s^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \sum_{s=1}^{n_s} R_{ss}^{(\alpha)}(\mathbf{r}(x'_s)) \\ &= \sum_{s=1}^{n_s} [\mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}(x'_s))) - \mathbf{n}_{ss}^T \mathbf{n}^{(\alpha)} \mathbf{j} \omega \hat{w}_{ns}(x'_s)] \\ &= \sum_{s=1}^{n_s} [\mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}(x'_s))) - \zeta_s^{(\alpha)} \mathbf{j} \omega \hat{w}_{ns}(x'_s)] \\ &\quad \left(\mathbf{r} \in \Gamma_s^{(\alpha)} = \bigcup_{s=1}^{n_s} \Gamma_{ss}^{(\alpha)} \right) \quad (\text{A.14-d}) \end{aligned}$$

凸部分領域間の連続性条件は、インピーダンス連成手法では、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} R_{cz}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} R_{cz}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} [\mathcal{L}_{eq+}^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) - \mathcal{L}_{eq-}^{(\beta)}(\hat{p}^{(\beta)}(\mathbf{r}))] \end{aligned}$$

$$\left(\mathbf{r} \in \Gamma_{cz}^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \Gamma_{cz}^{(\alpha, \beta)} \right) \quad (\text{A.14-e})$$

一方、圧力-速度連成手法では、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} R_{cp}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} R_{cp}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} (\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) - \hat{p}^{(\beta)}(\mathbf{r})) \\ &\quad \left(\mathbf{r} \in \Gamma_{cp}^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \Gamma_{cp}^{(\alpha, \beta)} \right) \quad (\text{A.14-f}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{cv}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} R_{cv}^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} [\mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\hat{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) + \mathcal{L}_v^{(\beta)}(\hat{p}^{(\beta)}(\mathbf{r}))] \\ &\quad \left(\mathbf{r} \in \Gamma_{cv}^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \Gamma_{cv}^{(\alpha, \beta)} \right) \quad (\text{A.14-g}) \end{aligned}$$

同様な誤差関数が、 n_Ω 個の音響部分領域に対して導出される。このとき、重み付き残差式は、導入した誤差関数を利用してインピーダンス連成手法では、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_v^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma + \int_{\Gamma_z^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_z^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) R_p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_s^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_s^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_{cz}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_{cz}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma = 0 \quad (\text{A.15-a}) \end{aligned}$$

一方、圧力-速度連成手法では、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_v^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma + \int_{\Gamma_z^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_z^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) R_p^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_s^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_s^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha)}} \mathcal{L}_v^{(\alpha)}(\tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r})) R_{cp}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_{cv}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) R_{cv}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) d\Gamma = 0 \quad (\text{A.15-b}) \end{aligned}$$

ここで、FEM で用いられるガラーキン法のように、重み関数 $\tilde{p}^{(\alpha)}$ を式(3.18)のように選ぶ。以降では、例えば、波動関数ベクトル $\boldsymbol{\phi}_a^{(\alpha)}$ は、局所位置ベクトル $\mathbf{r}^{(\alpha)}$ で定義されることが明らかであるので、ベクトルの位置依存性を表記から除くことにする。

まず、圧力展開式(3.2)と構造変位展開式(A.5)、及び、重み関数展開式(3.18)を、重み付き残差式(A.15-a)あるいは(A.15-b)の左辺第1項に代入すると、

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_v^{(\alpha)} d\Gamma &= \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\top} \times \\
&\int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left\{ \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial}{\partial n^{(\alpha)}} (\phi_a^{(\alpha)\top} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} + \hat{p}_q^{(\alpha)}) - \bar{v}_n \right\} d\Gamma \\
&= \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\top} \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left\{ \frac{j}{\rho\omega} \left(\frac{\partial \phi_a^{(\alpha)\top}}{\partial n^{(\alpha)}} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} + \frac{\partial \hat{p}_q^{(\alpha)}}{\partial n^{(\alpha)}} \right) - \bar{v}_n \right\} d\Gamma \\
&= \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\top} \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left\{ \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} (\nabla^{(\alpha)} \phi_a^{(\alpha)\top} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} \right. \\
&\quad \left. + \nabla^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\alpha)}) - \bar{v}_n \right\} d\Gamma \\
&= \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\top} \left\{ \left(\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \mathbf{B}^{(\alpha)} d\Gamma \right) \mathbf{p}_a^{(\alpha)} \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega_v^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left(\bar{v}_n - \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \nabla^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\alpha)} \right) d\Gamma \right\} \\
&= \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\top} (\mathbf{A}_v^{(\alpha)} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} - \mathbf{f}_v^{(\alpha)}) \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

を得る。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_v^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \mathbf{B}^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A.17-a})$$

$$\mathbf{f}_v^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_v^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left(\bar{v}_n - \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \nabla^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\alpha)} \right) d\Gamma \quad (\text{A.17-b})$$

同様に、式(A.15-a)あるいは(A.15-b)の左辺第2項は、

$$\int_{\Gamma_z^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_z^{(\alpha)} d\Gamma = \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\top} (\mathbf{A}_z^{(\alpha)} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} - \mathbf{f}_z^{(\alpha)}) \quad (\text{A.18})$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_z^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_z^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left(\frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \mathbf{B}^{(\alpha)} - \frac{1}{\bar{Z}_n} \phi_a^{(\alpha)\top} \right) d\Gamma \quad (\text{A.19-a})$$

$$\mathbf{f}_z^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_z^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left(\frac{\hat{p}_q^{(\alpha)}}{\bar{Z}_n} - \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \nabla^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\alpha)} \right) d\Gamma \quad (\text{A.19-b})$$

また、式(A.15-a)あるいは(A.15-b)の左辺第3項は、

$$-\int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \mathcal{L}_v^{(\alpha)} (\tilde{p}^{(\alpha)}) R_p^{(\alpha)} d\Gamma = \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\top} (\mathbf{A}_p^{(\alpha)} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} - \mathbf{f}_p^{(\alpha)}) \quad (\text{A.20})$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_p^{(\alpha)} = -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \mathbf{B}^{(\alpha)\top} \mathbf{n}^{(\alpha)} \phi_a^{(\alpha)\top} d\Gamma \quad (\text{A.21-a})$$

$$\mathbf{f}_p^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_p^{(\alpha)}} \mathbf{B}^{(\alpha)\top} \mathbf{n}^{(\alpha)} (\hat{p}_q^{(\alpha)} - \bar{p}) d\Gamma \quad (\text{A.21-b})$$

さらに、式(A.15-a)あるいは(A.15-b)の左辺第4項は、

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_s^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_s^{(\alpha)} d\Gamma &= \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\top} \left[\sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{C}_{\text{ass}}^{(\alpha)} \mathbf{w}_{ns} + (\mathbf{A}_s^{(\alpha)} + \mathbf{G}_s^{(\alpha)}) \mathbf{p}_a^{(\alpha)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{G}_{sc}^{(\alpha, \beta)} \mathbf{p}_a^{(\beta)} - \mathbf{f}_s^{(\alpha)} - \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{f}_{sc}^{(\alpha, \beta)} \right] \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{C}_{\text{ass}}^{(\alpha)} = -\zeta_s^{(\alpha)} j\omega \int_{\Gamma_{ss}^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \Psi_s^\top d\Gamma \quad (\text{A.23-a})$$

$$\mathbf{A}_s^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \sum_{s=1}^{n_s} \left(\zeta_s^{(\alpha)} \int_{\Gamma_{ss}^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \mathbf{n}_s^\top \mathbf{B}^{(\alpha)} d\Gamma \right) \quad (\text{A.23-b})$$

$$\mathbf{G}_s^{(\alpha)} = -j\omega \sum_{s=1}^{n_s} \left(\zeta_s^{(\alpha)} \int_{\Gamma_{ss}^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \hat{\mathbf{w}}_{\text{nas}}^{(\alpha)\top} d\Gamma \right) \quad (\text{A.23-c})$$

$$\mathbf{G}_{sc}^{(\alpha, \beta)} = -j\omega \sum_{s=1}^{n_s} \left(\zeta_s^{(\alpha)} (\zeta_s^{(\beta)})^2 \int_{\Gamma_{ss}^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \hat{\mathbf{w}}_{\text{nas}}^{(\beta)\top} d\Gamma \right) \quad (\beta \neq \alpha) \quad (\text{A.23-d})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_s^{(\alpha)} &= j \sum_{s=1}^{n_s} \zeta_s^{(\alpha)} \int_{\Gamma_{ss}^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left\{ \omega (\hat{\mathbf{w}}_{\text{ns}}^{(\alpha)} + \hat{\mathbf{w}}_{\text{nqs}}^{(\alpha)}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho\omega} \mathbf{n}_s^\top \nabla^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\alpha)} \right\} d\Gamma \quad (\text{A.23-e})
\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_{sc}^{(\alpha, \beta)} = j\omega \sum_{s=1}^{n_s} \zeta_s^{(\alpha)} (\zeta_s^{(\beta)})^2 \int_{\Gamma_{ss}^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \hat{\mathbf{w}}_{\text{nqs}}^{(\beta)} d\Gamma \quad (\beta \neq \alpha) \quad (\text{A.23-f})$$

一方、部分領域間の連続性条件に関してインピーダンス連成手法を採用した場合、式(A.15-a)の左辺第5項は、

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{cz}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_{cz}^{(\alpha)} d\Gamma &= \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)\top} \left(\mathbf{A}_{cz}^{(\alpha)} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{C}_{cz}^{(\alpha, \beta)} \mathbf{p}_a^{(\beta)} \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{f}_{cz}^{(\alpha)} - \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{f}_{cz}^{(\alpha, \beta)} \right) \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_{cz}^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_{cz}^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left(\frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \mathbf{B}^{(\alpha)} - \frac{1}{\bar{Z}_c} \phi_a^{(\alpha)\top} \right) d\Gamma \quad (\text{A.25-a})$$

$$\mathbf{C}_{cz}^{(\alpha, \beta)} = \int_{\Gamma_{cz}^{(\alpha, \beta)}} \phi_a^{(\alpha)} \left(\frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\beta)\top} \mathbf{B}^{(\beta)} + \frac{1}{\bar{Z}_c} \phi_a^{(\beta)\top} \right) d\Gamma \quad (\beta \neq \alpha) \quad (\text{A.25-b})$$

$$\mathbf{f}_{cz}^{(\alpha)} = \int_{\Gamma_{cz}^{(\alpha)}} \phi_a^{(\alpha)} \left(\frac{\hat{p}_q^{(\alpha)}}{\bar{Z}_c} - \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\alpha)\top} \nabla^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\alpha)} \right) d\Gamma \quad (\text{A.25-c})$$

$$\mathbf{f}_{cz}^{(\alpha, \beta)} = -\int_{\Gamma_{cz}^{(\alpha, \beta)}} \phi_a^{(\alpha)} \left(\frac{\hat{p}_q^{(\beta)}}{\bar{Z}_c} + \frac{j}{\rho\omega} \mathbf{n}^{(\beta)\top} \nabla^{(\beta)} \hat{p}_q^{(\beta)} \right) d\Gamma \quad (\beta \neq \alpha) \quad (\text{A.25-d})$$

また、圧力-速度連成手法を採用した場合は、重み付き残差式(A.15-b)を用いる。まず、式(A.15-b)の左辺第5項から、

$$\begin{aligned} & -\int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha)}} \mathcal{L}_v^{(\alpha)} \left(\tilde{p}^{(\alpha)} \right) R_{cp}^{(\alpha)} d\Gamma \\ & = \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)T} \left(\mathbf{A}_{cp}^{(\alpha)} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{C}_{cp}^{(\alpha, \beta)} \mathbf{p}_a^{(\beta)} \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{f}_{cp}^{(\alpha)} - \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{f}_{cp}^{(\alpha, \beta)} \right) \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

を得る。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_{cp}^{(\alpha)} = -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha)}} \mathbf{B}^{(\alpha)T} \mathbf{n}^{(\alpha)} \boldsymbol{\phi}_a^{(\alpha)T} d\Gamma \quad (\text{A.27-a})$$

$$\mathbf{C}_{cp}^{(\alpha, \beta)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha, \beta)}} \mathbf{B}^{(\alpha)T} \mathbf{n}^{(\alpha)} \boldsymbol{\phi}_a^{(\beta)T} d\Gamma \quad (\alpha \neq \beta) \quad (\text{A.27-b})$$

$$\mathbf{f}_{cp}^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha)}} \mathbf{B}^{(\alpha)T} \mathbf{n}^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A.27-c})$$

$$\mathbf{f}_{cp}^{(\alpha, \beta)} = -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{cp}^{(\alpha, \beta)}} \mathbf{B}^{(\alpha)T} \mathbf{n}^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\beta)} d\Gamma \quad (\alpha \neq \beta) \quad (\text{A.27-d})$$

最後に、式(A.15-b)の左辺第6項から、

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{cv}^{(\alpha)}} \tilde{p}^{(\alpha)} R_{cv}^{(\alpha)} d\Gamma = \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)T} \left(\mathbf{A}_{cv}^{(\alpha)} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{C}_{cv}^{(\alpha, \beta)} \mathbf{p}_a^{(\beta)} \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{f}_{cv}^{(\alpha)} - \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{f}_{cv}^{(\alpha, \beta)} \right) \quad (\text{A.28}) \end{aligned}$$

となる。ここで、以下を定義した。

$$\mathbf{A}_{cv}^{(\alpha)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{cv}^{(\alpha)}} \boldsymbol{\phi}_a^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(\alpha)T} \mathbf{B}^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A.29-a})$$

$$\mathbf{C}_{cv}^{(\alpha, \beta)} = \frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{cv}^{(\alpha, \beta)}} \boldsymbol{\phi}_a^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(\beta)T} \mathbf{B}^{(\beta)} d\Gamma \quad (\alpha \neq \beta) \quad (\text{A.29-b})$$

$$\mathbf{f}_{cv}^{(\alpha)} = -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{cv}^{(\alpha)}} \boldsymbol{\phi}_a^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(\alpha)T} \nabla^{(\alpha)} \hat{p}_q^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\text{A.29-c})$$

$$\mathbf{f}_{cv}^{(\alpha, \beta)} = -\frac{j}{\rho\omega} \int_{\Gamma_{cv}^{(\alpha, \beta)}} \boldsymbol{\phi}_a^{(\alpha)} \mathbf{n}^{(\beta)T} \nabla^{(\beta)} \hat{p}_q^{(\beta)} d\Gamma \quad (\alpha \neq \beta) \quad (\text{A.29-d})$$

以上をまとめると、次の形式の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)T} \left(\mathbf{C}_{as1}^{(\alpha)} \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{C}_{asn_s}^{(\alpha)} \mathbf{w}_{n_s} \right. \\ & \quad + \mathbf{C}_a^{(\alpha, 1)} \mathbf{p}_a^{(1)} + \cdots + \mathbf{C}_a^{(\alpha, \alpha-1)} \mathbf{p}_a^{(\alpha-1)} + \mathbf{A}_a^{(\alpha)} \mathbf{p}_a^{(\alpha)} \\ & \quad + \mathbf{C}_a^{(\alpha, \alpha+1)} \mathbf{p}_a^{(\alpha+1)} + \cdots + \mathbf{C}_a^{(\alpha, n_\Omega+1)} \mathbf{p}_a^{(n_\Omega+1)} \\ & \quad - \mathbf{f}_c^{(\alpha, 1)} - \cdots - \mathbf{f}_c^{(\alpha, \alpha-1)} \\ & \quad \left. - \mathbf{f}_a^{(\alpha)} - \mathbf{f}_c^{(\alpha, \alpha+1)} - \cdots - \mathbf{f}_c^{(\alpha, n_\Omega+1)} \right) = 0 \quad (\text{A.30}) \end{aligned}$$

ここで、行列 $\mathbf{A}_a^{(\alpha)}$ は、インピーダンス連成手法では、

$$\mathbf{A}_a^{(\alpha)} = \mathbf{A}_v^{(\alpha)} + \mathbf{A}_Z^{(\alpha)} + \mathbf{A}_p^{(\alpha)} + \mathbf{A}_s^{(\alpha)} + \mathbf{A}_{cz}^{(\alpha)} + \mathbf{G}_s^{(\alpha)} \quad (\text{A.31-a})$$

であり、圧力-速度連成手法では、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_a^{(\alpha)} &= \mathbf{A}_v^{(\alpha)} + \mathbf{A}_Z^{(\alpha)} + \mathbf{A}_p^{(\alpha)} + \mathbf{A}_s^{(\alpha)} \\ & \quad + \mathbf{A}_{cp}^{(\alpha)} + \mathbf{A}_{cv}^{(\alpha)} + \mathbf{G}_s^{(\alpha)} \quad (\text{A.31-b}) \end{aligned}$$

と定義される。ただし、行列 $\mathbf{A}_v^{(\alpha)}$, $\mathbf{A}_Z^{(\alpha)}$, $\mathbf{A}_p^{(\alpha)}$, $\mathbf{A}_s^{(\alpha)}$, $\mathbf{A}_{cz}^{(\alpha)}$, $\mathbf{A}_{cp}^{(\alpha)}$, $\mathbf{A}_{cv}^{(\alpha)}$ は対称行列、 $\mathbf{G}_s^{(\alpha)}$ は非対称行列である。実装では、これら対称行列の性質を利用して計算の高速化が可能となる。

また、行列 $\mathbf{C}_a^{(\alpha, \beta)}$ は、インピーダンス連成手法では次のように定義される。

$$\mathbf{C}_a^{(\alpha, \beta)} = \mathbf{C}_{cz}^{(\alpha, \beta)} + \mathbf{G}_{sc}^{(\alpha, \beta)} \quad (\text{A.32-a})$$

一方、圧力-速度連成手法では、以下のように定義される。

$$\mathbf{C}_a^{(\alpha, \beta)} = \begin{cases} \mathbf{C}_{cp}^{(\alpha, \beta)} + \mathbf{G}_{sc}^{(\alpha, \beta)} & (\alpha > \beta) \\ \mathbf{C}_{cv}^{(\alpha, \beta)} + \mathbf{G}_{sc}^{(\alpha, \beta)} & (\alpha < \beta) \end{cases} \quad (\text{A.32-b})$$

また、ベクトル $\mathbf{f}_a^{(\alpha)}$ は、インピーダンス連成手法では、

$$\mathbf{f}_a^{(\alpha)} = \mathbf{f}_v^{(\alpha)} + \mathbf{f}_Z^{(\alpha)} + \mathbf{f}_p^{(\alpha)} + \mathbf{f}_s^{(\alpha)} + \mathbf{f}_{cz}^{(\alpha)} \quad (\text{A.33-a})$$

と定義され、圧力-速度連成手法では、次式で定義される。

$$\mathbf{f}_a^{(\alpha)} = \mathbf{f}_v^{(\alpha)} + \mathbf{f}_Z^{(\alpha)} + \mathbf{f}_p^{(\alpha)} + \mathbf{f}_s^{(\alpha)} + \mathbf{f}_{cp}^{(\alpha)} + \mathbf{f}_{cv}^{(\alpha)} \quad (\text{A.33-b})$$

さらに、ベクトル $\mathbf{f}_c^{(\alpha, \beta)}$ は、インピーダンス連成手法では、次のように表せる。

$$\mathbf{f}_c^{(\alpha, \beta)} = \mathbf{f}_{cz}^{(\alpha, \beta)} + \mathbf{f}_{sc}^{(\alpha, \beta)} \quad (\text{A.34-a})$$

また、圧力-速度連成手法では、以下のように書ける。

$$\mathbf{f}_c^{(\alpha, \beta)} = \begin{cases} \mathbf{f}_{cp}^{(\alpha, \beta)} + \mathbf{f}_{sc}^{(\alpha, \beta)} & (\alpha > \beta) \\ \mathbf{f}_{cv}^{(\alpha, \beta)} + \mathbf{f}_{sc}^{(\alpha, \beta)} & (\alpha < \beta) \end{cases} \quad (\text{A.34-b})$$

ところで、重み付き残差式(A.15-a, b), (A.30)は、任意の重み関数 $\tilde{p}^{(\alpha)}$ あるいは $\tilde{\mathbf{p}}_a^{(\alpha)}$ に対して成り立つので、式(A.30)の括弧内は0でなければならない。これにより、 n_{WBM} 個の未知波動関数寄与ベクトルに関する $n_a^{(\alpha)}$ 次の線形連立方程式が得られる。

$$\left[\mathbf{C}_{as}^{(\alpha)} \mid \mathbf{C}_a^{(\alpha, 1)} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_a^{(\alpha, \alpha-1)} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^{(\alpha)} & \mathbf{C}_a^{(\alpha, \alpha+1)} & \dots & \mathbf{C}_a^{(\alpha, n_\Omega)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_a^{(\alpha-1)} \\ \mathbf{p}_a^{(\alpha)} \\ \mathbf{p}_a^{(\alpha+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_a^{(n_\Omega)} \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{(\alpha)} \quad (\text{A.35})$$

ここで、

$$\mathbf{C}_{as}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{as1}^{(\alpha)} & \dots & \mathbf{C}_{asn_s}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36-a})$$

$$\mathbf{b}^{(\alpha)} = \mathbf{f}_a^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_\Omega} \mathbf{f}_c^{(\alpha, \beta)} \quad (\text{A.36-b})$$

である。このような行列方程式が、各部分領域に対して得られる。したがって、 n_Ω 個の系を組み合わせると、 n_{WBM} 個の未知の波動関数寄与ベクトルに関する n_a 次の連立線形方程式から成る音響 WB モデルが得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{as}^{(1)} & \mathbf{A}_a^{(1)} & \mathbf{C}_a^{(1,2)} & \dots & \mathbf{C}_a^{(1, n_\Omega)} \\ \mathbf{C}_{as}^{(2)} & \mathbf{C}_a^{(2,1)} & \mathbf{A}_a^{(2)} & \dots & \mathbf{C}_a^{(2, n_\Omega)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{as}^{(n_\Omega)} & \mathbf{C}_a^{(n_\Omega, 1)} & \mathbf{C}_a^{(n_\Omega, 2)} & \dots & \mathbf{A}_a^{(n_\Omega)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \mathbf{p}_a^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_a^{(n_\Omega)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(n_\Omega)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

この音響 WB 行列方程式(A.37)は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{as} & \mathbf{A}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (\text{A.38})$$

のように簡潔な形式で書ける。ここで、以下を用いた。

$$\mathbf{C}_{as} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{as}^{(1)T} & \mathbf{C}_{as}^{(2)T} & \dots & \mathbf{C}_{as}^{(n_\Omega)T} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.39-a})$$

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^{(1)} & \mathbf{C}_a^{(1,2)} & \dots & \mathbf{C}_a^{(1, n_\Omega)} \\ \mathbf{C}_a^{(2,1)} & \mathbf{A}_a^{(2)} & \dots & \mathbf{C}_a^{(2, n_\Omega)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_a^{(n_\Omega, 1)} & \mathbf{C}_a^{(n_\Omega, 2)} & \dots & \mathbf{A}_a^{(n_\Omega)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.39-b})$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(1)T} & \mathbf{b}^{(2)T} & \dots & \mathbf{b}^{(n_\Omega)T} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.39-c})$$

A.4.3 波動モデルの組み立て

最終的に、構造 BC(A.12)と音響 BC と連続性条件から得られる形式(A.38)を組み合わせると、 n_{WBM} 個の未知波動関数寄与ベクトル \mathbf{w} と \mathbf{p}_a に関する行列方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{C}_{sa} \\ \mathbf{C}_{as} & \mathbf{A}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

FEM と対照的に、WBM においては、その成分が複素数で、周波数独立な部分行列に分けることのできない密な行列をもつ行列方程式となる。これは、BEM の場合と同様である。しかしながら、WBM の大きな利点は、連立代数方程式の次元が、FEM や BEM などの要素ベース手法と比べて非常に小さく抑えられることである。このような速い収束性により、WBM は、動的な応答計算に対して計算要求の小さい方法となるため、中間周波数領域を含む広い周波数領域を含んだ問題が解析できるのである。

A.4.4 波動関数のスケールリング

WB モデルを数値的に精度良く解くためには、連立方程式(A.40)の悪条件を緩和する必要がある。そのためには、全ての波動関数が、考慮する音響振動系の音響部分領域において、1 よりも小さな振幅をもつことが重要となる。

ところで、音響波動関数の集合(3.5)には、波数の定義(3.7-a,b)から、2 つの異なるタイプの波動関数が含まれている。最初のタイプの波動関数は、 x 、 y 両方向の波数成分が実数である。これは、この波動関数の振幅が 1 より大きくならないことを意味している。2 番目のタイプの波動関数については、1 方向の波数成分が実数で、他の方向の波数成分が複素数である。このタイプの波動関数では、振幅が複素数の波数成分に関連する方向に減衰し、それらは 1 よりも大きくなることもある。さらに、1 方向で実数の波数成分が大きくなるにつれて、他の方向の振幅が大きく減衰する。

したがって、WB モデルの実装時には、波動関数の振幅を 1 より小さくするようなスケールリング係数 $f_{xsi}^{(\alpha)}$ と $f_{yri}^{(\alpha)}$ を波動関数の定義式に導入する必要がある。つまり、音響（部分）領域の外接矩形領域が、 $x^{(\alpha)} \in [0, L_x^{(\alpha)}]$ 、 $y^{(\alpha)} \in [0, L_y^{(\alpha)}]$ で定義されているとき、次の波動関数スケールリングを導入する。

$$\phi_{ari}^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}) = \cos(k_{xri}^{(\alpha)} x^{(\alpha)}) \times \exp \left[-jk_{yri}^{(\alpha)} \left(y^{(\alpha)} - f_{yri}^{(\alpha)} L_y^{(\alpha)} \right) \right] \quad (\text{A.41-a})$$

$$\phi_{asi}^{(\alpha)}(\mathbf{r}^{(\alpha)}) = \exp \left[-jk_{xsi}^{(\alpha)} \left(x^{(\alpha)} - f_{xsi}^{(\alpha)} L_x^{(\alpha)} \right) \right] \times \cos(k_{ysi}^{(\alpha)} y^{(\alpha)}) \quad (\text{A.41-b})$$

ここで、以下を用いた。

$$f_{xsi}^{(\alpha)} = \begin{cases} 1 & \text{Im}(k_{xsi}^{(\alpha)}) > 0 \\ 0 & \text{Im}(k_{xsi}^{(\alpha)}) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.42-a})$$

$$f_{yri}^{(\alpha)} = \begin{cases} 1 & \text{Im}(k_{yri}^{(\alpha)}) > 0 \\ 0 & \text{Im}(k_{yri}^{(\alpha)}) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.42-b})$$

ただし、 $\text{Im}(\bullet)$ は複素数の虚部を表す。

同様にして、式(3.14)で定義された構造波動関数を、次のようにスケーリングする ($x'_s \in [0, L_s]$)。

$$\psi_{si}(x'_s) = \exp[-j^i k_{bs}(x'_s - f_{si} L_s)] \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (\text{A.43})$$

ここで、スケーリング係数 f_{s2} は1に等しく、係数 f_{s1} 、 f_{s3} 、 f_{s4} は0である。

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-07-012

発行 平成 20年 2月 29日

編集・発行 宇宙航空研究開発機構

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町 7-44-1

URL: <http://www.jaxa.jp/>

印刷・製本 弘久写真工業(株)

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記にお願いいたします。

宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター

〒305-8505 茨城県つくば市千現 2-1-1

TEL: 029-868-2079 FAX: 029-868-2956

© 2008 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等加工することを禁じます。

