

# 宇宙航空研究開発機構研究開発報告

## JAXA Research and Development Report

---

モンテカルロ法によるシステムの統計的評価

元田 敏和

2007年12月

宇宙航空研究開発機構  
Japan Aerospace Exploration Agency



# 目次

1 はじめに.....	2
2 モンテカルロ法によるシステム評価 .....	3
2.1 標本の発生とシステムの評価 .....	4
2.2 相関を持つ不確定パラメータの発生 .....	5
2.3 不確定パラメータについて .....	5
2.3.1 不確定パラメータの設定について .....	5
2.3.2 不確定パラメータの性質 .....	6
3 信頼区間.....	6
3.1 二項分布の信頼区間 .....	6
3.1.1 片側信頼区間.....	7
3.1.2 両側信頼区間.....	10
3.2 正規分布による近似 .....	12
3.2.1 片側信頼区間.....	13
3.2.2 両側信頼区間.....	15
3.2.3 近似誤差 .....	16
4 試行回数（標本数） .....	19
4.1 $n_f = 0$ の場合.....	19
4.2 正規分布近似による試行回数算出.....	20
4.3 自動終了判定.....	23
5 自動着陸システムへの適用例.....	25
5.1 小型自動着陸実験(ALFLEX) .....	25
5.2 不確定パラメータ .....	28
5.3 モンテカルロ評価 .....	31
5.3.1 評価基準 .....	31
5.3.2 試行回数の設定と評価結果 .....	31
5.3.3 自動終了判定.....	33
6 まとめ .....	35
参考文献 .....	35



# モンテカルロ法によるシステムの統計的評価\*

元田 敏和<sup>\*1</sup>

## Stochastic System Evaluation by Monte Carlo Approach\*

Toshikazu MOTODA<sup>\*1</sup>

### ABSTRACT

In the development of aerospace vehicles, pre-flight evaluation is essential because it is often uneasy to conduct flight test in a real environment. In spite of a lot of uncertain parameters in the real world, a developed aerospace vehicle is required to achieve its mission at the first flight. Monte Carlo simulation is a powerful tool for pre-flight evaluation, because those uncertain parameters can be incorporated and the non-linear system is evaluated directly. As computer power has increased, Monte Carlo simulation has become recognized as an effective and practical tool and has been used in aerospace projects all over the world. Since Monte Carlo approach statistically estimates a true value by using a sample test, stochastic concepts, such as confidence interval and a number of simulations, is necessary. This paper discusses Monte Carlo evaluation and those stochastic concepts. Finally, a practical example is shown to encourage the use of Monte Carlo approach.

**Keywords:** *System Evaluation, Flight Simulation, Monte Carlo Approach, Stochastic Estimation*

### 概 要

航空宇宙機の開発では実環境での飛行実験は容易でないことも多いため、飛行前の事前評価が非常に重要となる。ところが現実の飛行時には様々な不確定要因が存在し、そのような条件下においても期待される性能を発揮してミッションを達成することが求められる。モンテカルロ法は、非線形システムを直接評価でき、かつ、様々な不確定要因を考慮したシステム評価が可能な飛行前評価手段として活用できる。一方で多数回の飛行シミュレーションを実行する必要があるため、実用においては計算負荷が課題であった。ところが近年の計算機能力の大幅な向上によって、大量の計算が短時間で可能となっており、モンテカルロ法は飛行前の評価手段として国内外の航空宇宙機の開発に広く用いられるようになってきている。モンテカルロ法は真値を統計的に推定するためのものであり、信頼区間の概念や試行回数を選定などが重要となる。そこで本稿では、今後のモンテカルロ法の利用に資するための資料としてシステム評価方法と関連する統計的手法についてまとめ、実際の航空宇宙機開発における適用例を示す。

---

\* 2007年4月2日 受付 (Received 2 April, 2007)

\*1 総合技術研究本部 飛行システム技術開発センター (Flight Systems Technology Center, Institute of Aerospace Technology)

## 記号

$A$	相関係数行列 $\Sigma$ のコレスキー分解.	$\mathbf{z}$	被評価パラメータ・ベクトル.
$B_L(j)$	失敗確率 $P_L$ のときに失敗数が $j$ となる二項確率.	$\alpha$	危険率. $(1-\alpha)$ は信頼係数.
$B_U(j)$	失敗確率 $P_U$ のときに失敗数が $j$ となる二項確率	$\Delta P_L, \Delta P_U$	下側、上側の信頼区間幅.
$C_D$	抵抗係数.	$\Delta P_{nL}, \Delta P_{nU}$	正規分布近似による下側、上側の信頼区間幅.
$C_L$	揚力係数.	$\Delta P_{nL0}, \Delta P_{nU0}$	通常の正規分布近似による下側、上側の信頼区間幅.
$C_{L\alpha}$	迎角に対する揚力傾斜.	$\boldsymbol{\varepsilon}_i$	不確定パラメータ・ベクトル.
$C_{m\alpha}$	迎角に対するモーメント傾斜.	$\lambda$	$P'_{nL}$ を導出する際の補正係数.
$C_{m\delta\epsilon}$	エレベータ舵角に対するモーメント傾斜.	$\Sigma$	相関係数行列.
$E[ \ ]$	期待値.	$\sigma_U$	真 (母集団) の失敗確率が $P_U$ のときの、失敗の割合 $X/N$ の分散.
$f(X/N)$	平均 $m_U$ , 分散 $\sigma_U$ を持つ正規分布の確率密度関数.		
$g$	上側信頼限界導出のための関数.		
$I$	単位行列.		
$I_{yk}$	各試行の評価フラグ (1 : 成功, 0 : 失敗).		
$I_{zk}$	各被評価パラメータの評価フラグ (1 : 成功, 0 : 失敗).		
$K$	被評価パラメータ数.		
$L_k, U_k$	被評価パラメータの許容される下限値、上限値.		
$M$	不確定パラメータ数.		
$m_U$	真 (母集団) の失敗確率が $P_U$ のときの、失敗の割合 $X/N$ の平均値.		
$N$	モンテカルロ評価の試行回数.		
$N_{\max}$	許容可能な最大試行回数.		
$N_{req}$	試行回数の要求値.		
$N_{req-n}$	正規分布近似から算出した試行回数の要求値.		
$n_f$	モンテカルロ評価結果の失敗ケース数.		
$P_f$	真 (母集団) の失敗確率.		
$\hat{P}_f$	$P_f$ の推定値 (又は、標本の失敗確率).		
$P_L, P_U$	失敗確率の信頼限界. 下限値、及び上限値.		
$\hat{P}_{lf}, \hat{P}_{uf}$	下側、上側の正規分布近似による信頼限界導出のための $\hat{P}_f$ の補正值.		
$P_{nL}, P_{nU}$	正規分布近似による失敗確率の信頼限界. 下限値、及び上限値.		
$P_{nL0}, P_{nU0}$	通常の正規分布近似による失敗確率の信頼限界. 下限値、及び上限値.		
$P'_{nL}$	$P_{nL}$ の補正值.		
$\Pr[ \ ]$	発生確率.		
$P_{req}$	失敗確率の要求値.		
$P_{suc}$	ミッション達成確率.		
$p$	互いに相関を持つ不確定パラメータの数.		
$\mathbf{r}$	互いに独立な要素で構成される確率変数ベクトル.		
$V[ \ ]$	分散.		
$\mathbf{x}$	相関を含む要素を持つ確率変数ベクトル.		
$Z_\alpha$	標準正規分布の下側累積確率が $\alpha$ のときの値.		

## 1. はじめに

航空宇宙機の開発においては、実環境での飛行試験によってあらかじめシステムの動作を確認することが困難な場合が多い。ところが現実には図 1-1 に示すように、環境条件の変化、慣性特性・空力特性・アクチュエータなどの機体モデルの誤差、センサ計測誤差、初期条件の変動など、様々な不確定パラメータが存在する。このような条件下においても、新たに開発する航空宇宙機には与えられたミッションを達成することが求められる。したがって初フライト時に目的を達成することができる高信頼システム実現のためには、飛行前の事前評価が非常に重要となる。

モンテカルロ・シミュレーションは、様々な不確定パラメータを組み込んだ事前評価が可能であり、近年の計算機能力の大幅な向上に伴って国内外のプロジェクトにおいて広く利用されるようになってきている<sup>1-8)</sup>。モンテカルロ・シミュレーションは、様々な不確定パラメータを同時に、しかも各パラメータの大きさをランダムに発生させ、条件を変えながら多数回の飛行シミュレーションを繰り返すものであり、次の利点を持つ。

- ・ 非線形システムの直接評価が可能。
- ・ 不確定パラメータを現実に存在する物理量として指定することが可能。
- ・ 評価結果は、不確定パラメータの様々な組合せの影響を反映。
- ・ 設定した不確定パラメータのばらつきに応じたミッション達成確率や評価量の分布を取得。
- ・ 母集団特性の推定精度は不確定パラメータ数には依存せず。(実行するシミュレーションの試行回数に依存)

一方、モンテカルロ法のデメリットは、計算負荷が高く結果を得るまでに多くの時間を必要とすることである。しかし近年の目覚ましい計算機能力の向上により、計算

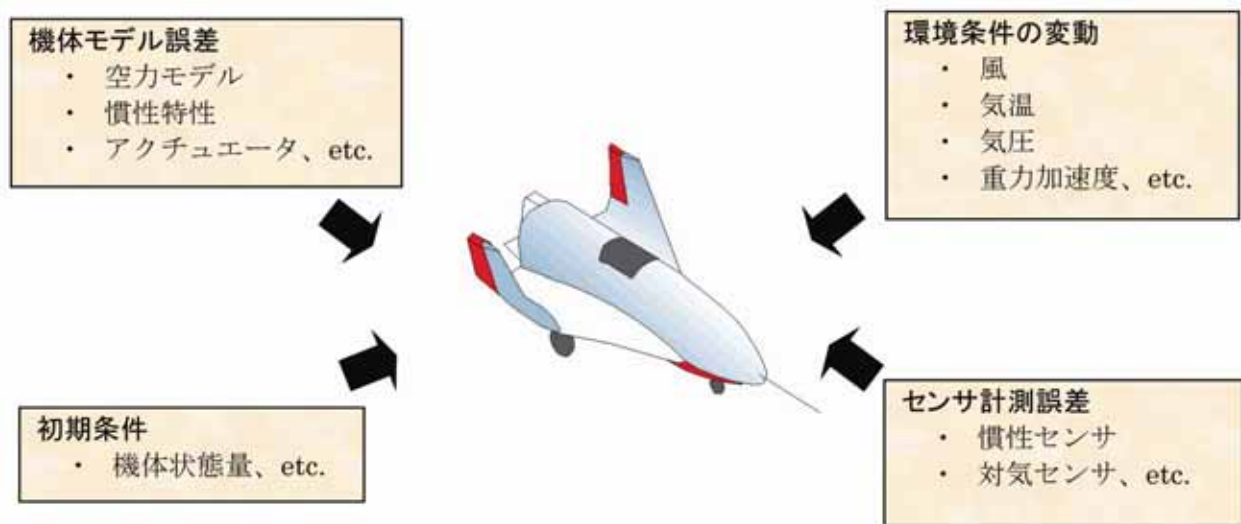


図 1-1 現存する不確定パラメータ

負荷の問題は緩和されつつある。また多数回の飛行シミュレーションを繰り返すものであるため、並列計算によって計算負荷の問題を緩和しようとする試みもある<sup>9-10)</sup>。

先に述べたようにモンテカルロ法はシステム評価法として優れた性質を持つが、通常開発現場においてはその評価結果を反映し、改善検討を必要とすることが多い。このためには、評価結果に大きな影響を及ぼす不確定パラメータを特定することが必要となる。システムの性能を劣化させる主要な原因が特定されて初めて改善検討が可能となるからである。ところがモンテカルロ評価では、多数の不確定パラメータを同時に、かつ、大きさをランダムに組み込んでいるため、主要な不確定パラメータを見つけることは必ずしも容易ではない。そこで有効なのが、不確定パラメータを個別に加えて、各不確定パラメータの影響を個別に調査する感度解析である<sup>6)</sup>。ただし、感度解析は個々の不確定パラメータの影響を独立に調査する手法であるため、2個以上の不確定パラメータの複合的な影響については解析不能である。このような場合にも主要な不確定パラメータを検出する手法が提案されている<sup>11-13)</sup>。

さらに制御系設計への応用として、モンテカルロ法で非線形システムを直接評価しながら制御パラメータを最適化する方法があり、これまでにいくつかの手法が提案されている<sup>9)</sup>、<sup>14-17)</sup>。これは非線形システムを直接最適化する方法であり、従来の線型モデルを主体とした最適化では不可能であったような性能を実現できる可能性を持つものである。

以上のように、モンテカルロ法は航空宇宙機の開発に利用され始めており、またその応用についての研究も進められているところである。モンテカルロ法は多数回の

シミュレーションを実行して、その評価結果を収集する方法であり、概念的にもわかりやすく適用も容易である。母集団特性を統計的に推定する手法であるため、できるだけ多数回のシミュレーションを実行すれば信頼性の高い結果が得られることも広く認知されている。一方で、母集団特性を表す値が存在する範囲や目的に照らして最低必要なシミュレーションの試行回数は、それぞれ「評価結果の精度」及び「計算負荷低減」の観点から重要である。ところが、実際の開発現場においてはそれらが必ずしも十分に考慮されてきたとは言い難い。

そこで本稿では、モンテカルロ法によるシステムの評価手法についてまとめ、統計的推定の概念と信頼区間の導出について述べる。また試行回数と信頼区間の関係について述べ、必要とされる試行回数について検討する。最後に 1996 年に実施された小型自動着陸実験(ALFLEX)を取り上げ、実際の航空宇宙システムへの適用例を示す。

## 2. モンテカルロ法によるシステム評価

モンテカルロ法<sup>18-20)</sup>は、乱数を用いて母集団から標本を無作為抽出し、抽出した標本から母集団特性を統計的に推定するための数値実験である。つまり数値的に標本調査を行うことであり、この関係を図 2-1 に示す。システムの真の(母集団の)特性の推定精度は、抽出される標本数、つまりシミュレーションの試行回数に依存するが、一方で不確定パラメータ数には依存しないという利点を持つ。

ここで、不確定パラメータのあらゆる組み合わせについて調査する場合について考えてみる。いま仮に不確定パラメータ数が 20 であり、各パラメータがそれぞれ「最

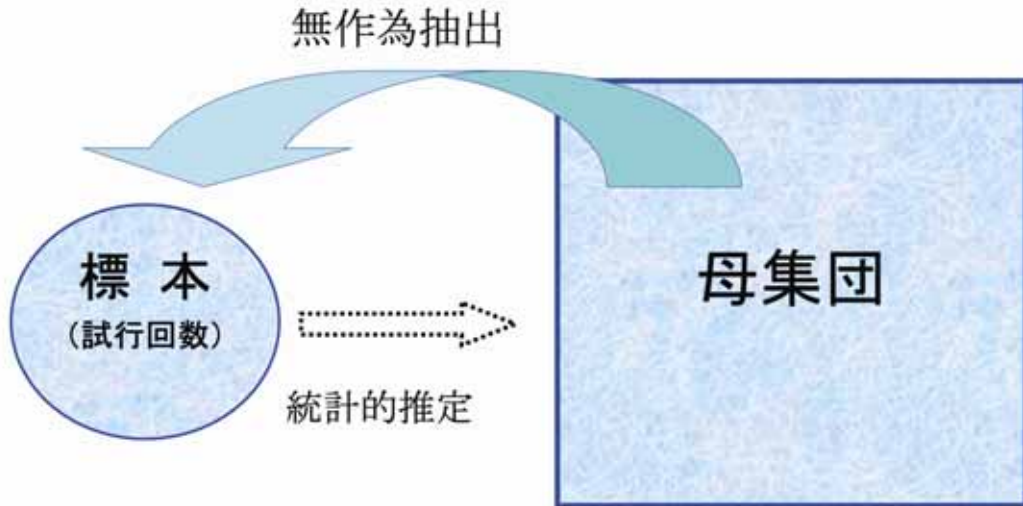


図 2-1 標本調査

小値、ノミナル、最大値」の3通りの値を取るものとする。このとき全てのパラメタの組み合わせの数は $3^{20} \approx 3.5 \times 10^9$ となってしまう、全てのケースについて飛行シミュレーション評価を実行するのは通常は困難である。さらに実際には、不確定パラメタの数はもっと多いのが通常であるし、また各パラメタの値を3通りに限定することにも無理がある。このように不確定パラメタ空間が大きくなると全数調査は非現実的であり、標本調査により母集団特性を推定するのが現実的である。各不確定パラメタを個々の発生確率に従って無作為抽出する限り、標本すなわち不確定パラメタの組み合わせは発生確率に応じて選定されるため、標本を用いて母集団特性を統計的に推定することが可能となる。したがって、不確定パラメタが増える程、モンテカルロ法の有効性・利便性は増す。

モンテカルロ法は標本調査による母集団特性の推定を目的とすることから、「母集団」と「標本」の概念を明確に区別して考えることが重要である。一般に、標本数を増やせば推定精度は上がるが、技術的検討のためには推定精度を定量的に表す必要があり、ここで「信頼区間」の概念が必要となる。モンテカルロ・シミュレーションの試行回数（標本数）を増やせば推定精度は上がり信頼区間を小さくできるが、それだけ計算負荷と時間的コストは増大する。必要以上の推定精度が得られたとしても、それは実用上あまり意味を持たないばかりか、逆に余計なコストがかかってしまうことになる。したがって実際の開発現場で適用する場合においては、所望の推定精度を得るために必要な試行回数についての知見が重要となる。

これらの信頼区間や試行回数等の母集団特性の推定に関わることについては改めて後に述べるが、ここでは標本調査としてのモンテカルロ法によるシステム評価法について具体的に述べる。まず 2.1 項で不確定パラメタの発生方法と、そのシステムの評価について述べる。不確定パラメタは必ずしも独立に存在するのではなく、互いに相関を持つものも含まれる。そこで 2.2 項では、相関を持つ不確定パラメタの発生方法について述べる。最後に 2.3 項で、不確定パラメタの設定の考え方とその性質について述べる。

## 2.1 標本の発生とシステムの評価

モンテカルロ法では、仮定した母集団に含まれる不確定パラメタの標本を乱数を用いて抽出し、抽出した不確定パラメタを含むシステムを評価する。ここでは、その方法について具体的に述べる。

モンテカルロ法によるシステム評価の流れを図 2-2 に示す。現実には、図 1-1 に示すような様々な不確定パラメタが存在する。まず、これら個々の不確定パラメタについて分布と変動範囲（分散など）を設定する。次に各不確定パラメタの値を、設定した分布に従ってランダムに発生させ、不確定パラメタ・ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ を生成する。不確定パラメタが $M$ 個であるとすれば、 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ は $M$ 次元ベクトルとなる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_M]^T \quad (2-1)$$



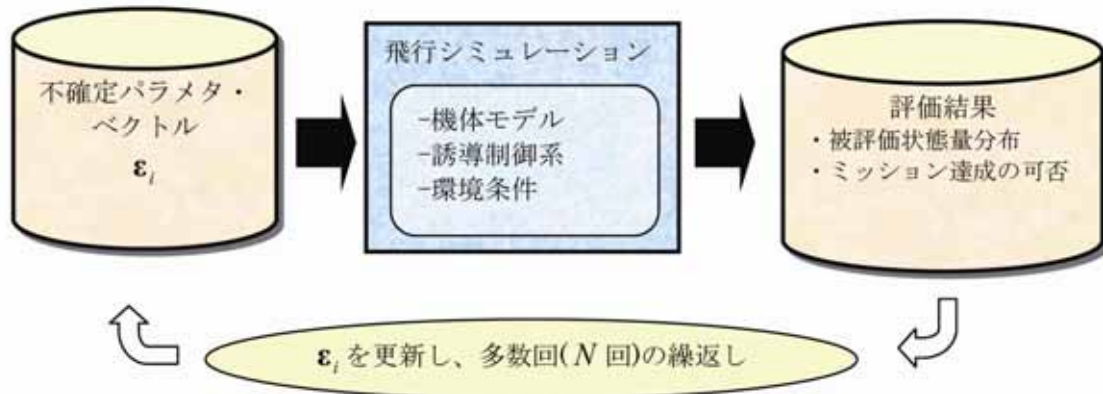


図 2-2 モンテカルロ法によるシステム評価

次に、 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  をノミナルの飛行運動モデルに加え、飛行シミュレーションを 1 回実行する。つまり、発生させた 1 組の不確定パラメータの組合わせ  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  に対して、数値実験を 1 回実行することになる。飛行シミュレーションモデルは、機体モデル、環境条件、初期条件、誘導制御系など、模擬すべき全てのモデルを含む。飛行シミュレーション終了後に、必要とする状態量などの被評価量を取り出して保存する。

この一連の試行を、 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  を更新しながら多数回実行する。 $N$  回の試行を実行すれば、各被評価状態量もそれぞれ  $N$  個得られることになる。したがって、各被評価量の度数分布（ヒストグラム）が得られ、その平均・分散などの統計量を算出することが可能となる。また、重要な評価指標はミッション達成確率である。何をもちいてミッション達成とするかは各システムに固有のものであるが、通常は複数の被評価パラメータの組合せで定義される。ここで、被評価パラメータ・ベクトルが  $K$  個のパラメータで構成されるとすれば、

$$\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_k \quad \cdots \quad z_K]^T \quad (2-2)$$

各被評価パラメータ  $z_k$  には、それぞれ許容される値や範囲が設定される。例えば、 $z_k$  について許容範囲が次式のように表されるとする。

$$L_k \leq z_k \leq U_k \quad (2-3)$$

$z_k$  に対応する評価フラグを  $I_{z_k}$  ( $k=1, \dots, K$ ) とし、各パラメータが許容範囲内であるとき 1 (成功)、それ以外するとき 0 (失敗) とする。

$$I_{z_k} = \begin{cases} 1: \text{成功} \\ 0: \text{失敗} \end{cases} \quad (2-4)$$

このようにして、全ての  $z_k$  ( $k=1, \dots, K$ ) が許容範囲を満たすときのみ、その試行については成功と判定する。一方、 $z_k$  が一つでも許容範囲を外れていれば、失敗である。このように定義すれば、各試行での成功/失敗の評価フラグ  $I_{y_i}$  は次式より得られる。

$$I_{y_i} = \prod_{k=1}^K \{I_{z_k}\} \quad (2-5)$$

よって  $N$  回試行した場合の、標本のミッション達成確率（成功確率） $P_{suc}$  は、

$$P_{suc} = \sum_{i=1}^N \{I_{y_i}\} / N \quad (2-6)$$

この確率は無作為抽出した  $N$  回の試行から得られる値であり、これから母集団の（真の）成功確率を推定する必要がある。母集団特性の推定については改めて 3 節で記す。

## 2.2 相関を持つ不確定パラメータの発生

不確定パラメータの中には、相互に相関を持つものも存在する。相関とは複数のパラメータの直線的関係の度合いを表すものであり、ここでは相関を持つ不確定パラメータの発生方法<sup>18)</sup>について述べる。平均 0、分散 1 に正規化された、互いに無相関の  $P$  次元確率変数ベクトルを  $\mathbf{r} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_p]^T$ 、相関をもつ確率変数を  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_p]^T$  とする。また、 $\mathbf{r}$  から  $\mathbf{x}$  への変換

行列を  $A$  とすれば、

$$\mathbf{x} = A \cdot \mathbf{r} \quad (2-7)$$

この変換行列  $A$  が得られれば、無相関の確率変数ベクトル  $\mathbf{r}$  から所望の相関を持つ確率変数ベクトル  $\mathbf{x}$  を生成することができる。  $\mathbf{x}$  の相関係数行列を  $\Sigma$  とすれば、

$$\begin{aligned} \Sigma &= E[\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T] \\ &= E[A\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T A^T] \\ &= A \cdot E[\mathbf{r}\mathbf{r}^T] \cdot A^T \\ &= A \cdot A^T \end{aligned} \quad (2-8)$$

式(2-8)において、  $\mathbf{r}$  は正規化された変数であるので、  $E[\mathbf{r}\mathbf{r}^T] = I$  である。以上より、相関係数  $\Sigma$  を持つような確率変数を生成するためには、コレスキー分解により式(2-8)を満たすような  $A$  を求めればよい。そうすれば、式(2-7)より相関を持つ確率変数ベクトル  $\mathbf{x}$  が得られる。

### 2.3 不確定パラメータについて

ここでは、不確定パラメータについて留意しておくべき事柄について述べる。一つは不確定パラメータ設定の考え方についてであり、もう一つは不確定パラメータの性質の違いについてである。

#### 2.3.1 不確定パラメータの設定について

モンテカルロ評価を実行する際に検討が必要なのが、個々の不確定パラメータの分布と変動範囲の大きさである。これについては、現実にはばらついていると考えられる範囲で設定するのが基本であり、地上試験、気象条件、センサの仕様等、得られる情報を元に妥当な分布と変動範囲を設定する。しかし、中には分布や変動範囲の情報が少ない不確定パラメータも存在する。そのような場合であっても存在することが確実な不確定パラメータであるならば、設計の前提条件として何らかの分布と変動範囲を設定すべきである。このようにすることにより、「設計の前提条件として設定した不確定パラメータ」に対する「システムの性能」を定量的に明らかにすることが可能となる。なお、情報の少ないパラメータの場合には、現実には殆ど発生しないと考えられる程度の、少し大きめの変動範囲を設定するのが適当である。

ここで、もし変動範囲がわからないという理由で、分布や変動範囲を設定せずに解析してしまうとすれば、当該不確定パラメータの影響が評価結果に現れることはな

い。すなわち、不確定パラメータの存在自体は明白であるにも拘わらず、そのリスクを無視した解析を行うことになってしまう。不明確な点は認識した上で前提条件を設定し、その前提に対するシステムの成立性や性能を明らかにすることによって初めて、技術的な検討や議論が可能となる。

#### 2.3.2 不確定パラメータの性質

全ての不確定パラメータは、必ずしも実際に変動しているわけではなく、その性質から次の2つに分けられる。

- ・ 現実に変動するパラメータ
- ・ 常にある固定された値を持つが、真値が不明なため変動幅を考慮しているパラメータ

前者の例としてはセンサ誤差、環境条件の変動などがあり、後者の例としては慣性モーメント計測誤差、空力モデル誤差などがある。いずれの不確定パラメータについても開発におけるリスクであることには違いはなく、モンテカルロ評価結果を過大又は過小評価すべきではない。

ただし全ての不確定パラメータが現実に変動しているわけではないため、モンテカルロ評価結果として得られる被評価量のばらつきや成功確率などの推定値は、必ずしも現実と一致するわけではないということは認識しておく必要がある。仮に現実に存在するあらゆる不確定性が不確定パラメータとしてモデル化され組み込まれているとして、モンテカルロ評価の結果得られた失敗確率が1%だったとする。このとき100回の飛行実験を実際に実行した場合、現実には1回程度実験が失敗するということは意味しない。なぜなら、モンテカルロ評価とは異なり、実際には変動していない不確定パラメータが存在するからである。

### 3. 信頼区間

モンテカルロ評価により着目する状態量の分布や成功確率などが得られるが、これらは無作為抽出した  $N$  回の特性であって、母集団の特性ではない。従って、母集団特性を推定する必要がある。モンテカルロ評価結果として得られる状態量を「基準値を超える確率」や「ミッション達成確率」として表せば、これらは式(2-4)、(2-5)に示すように“1”又は“0”で表現でき、二項分布として取り扱うことができる。ここではモンテカルロ評価結果を二項分布として表した場合の、母集団特性の推定について述べる。

$N$  回の試行で得られるミッション達成確率などの評価量を、そのまま母集団の値とすれば必ず誤差を伴う。これに対して区間推定は、推定誤差の範囲を限定するも

のであり、母集団の値が存在する確率がある信頼係数  $(1-\alpha)$  以上と保証される信頼区間  $[P_L, P_U]$  を求める推定方法である。以下では信頼区間、及び信頼区間と試行回数との関係について述べる。

実際に設計が進んでモンテカルロ評価が有効となる段階では、システム要求を満足するような成功確率は1に近いことが多く、逆に失敗確率が小さな値となる。例えば失敗確率が小数点以下となる場合には、常に99%以上の数値をもつ成功確率よりも失敗確率で表すほうが数値的に取り扱いやすい。よって、以下本稿では成功確率の代わりに失敗確率を用いて議論を進める。まず二項分布の正確な信頼区間について述べ、次に計算が容易であり開発現場での実用性が高いと考えられる正規分布近似による信頼区間について述べる。

### 3.1 二項分布の信頼区間

いま、 $N$  回のモンテカルロ評価の結果、 $n_f$  回要求を満足しなかったとする。このとき、母集団の失敗確率の推定値  $\hat{P}_f$  は

$$\hat{P}_f = n_f / N \quad (3-1)$$

$\hat{P}_f$  は母集団の失敗確率としては誤差を持つため、一般には信頼係数  $(1-\alpha)$  となる信頼区間  $[P_L, P_U]$  を求める<sup>20-21)</sup>。システム評価における失敗確率に関しては、母集団の失敗確率が  $\hat{P}_f$  よりも大きくなる場合は問題だが、小さくなる場合には問題はない。よって、この場合に必要となるのは片側の片側信頼限界  $P_U$  のみであり、 $P_L$  を気にする必要はない。両側の信頼限界が必要か、片側でよいかは、対象とする問題によって決まる。片側の信頼限界のみを求めればよい場合は、同じ信頼係数  $(1-\alpha)$  とすれば、対象となる片側信頼区間幅  $\Delta P_U = P_U - \hat{P}_f$  は小さくなるので、推定誤差は小さくなる。以下では、まず片側信頼区間、次に両側信頼区間について順に述べる。

#### 3.1.1 片側信頼区間

片側信頼限界の場合は、信頼係数  $(1-\alpha)$  となる信頼区間  $[0, P_U]$  を求めればよい。これは母集団の失敗確率  $P_f$  が、 $P_U$  以下に存在する確率が  $(1-\alpha)$  であることを意味し、次式で表される。

$$\Pr[P_f \leq P_U] = 1 - \alpha \quad (3-2)$$

別の表現をすれば、母集団の(真の)失敗確率が  $P_U$  であるとき、無作為抽出した  $N$  回の試行の失敗確率が  $\hat{P}_f$  以下、つまり失敗数が  $n_f$  以下となる確率が  $\alpha$  ということである。この関係を図3-1に示す。二項分布は離散分布であるから図中の丸印の値を持つ。 $P_U$  が真の失敗確率であるとき、縦軸は  $N$  回の試行で失敗数が  $j$  となる場合の発生確率を表す。ここで、もし母集団の失敗確率が  $P_U$  よりも小さいとすると、グラフは左に移動するが  $\hat{P}_f$  の値はそのままであるので、「失敗確率が  $n_f/N$  よりも小さくなる確率」は  $\alpha$  よりも大きくなる。つまり危険率として  $\alpha$  では不十分になってしまう。よって危険率として  $\alpha$  を要求するならば、信頼区間の上限は最小でも  $P_U$  となる必要がある。

真の失敗確率が  $P_U$  である母集団から、 $N$  個を無作為抽出して失敗が  $j$  回発生する確率  $B_U(j)$  は、次の二項分布の式で表される。

$$B_U(j) = {}_N C_j \cdot (P_U)^j (1 - P_U)^{N-j} \quad (3-3)$$

失敗数  $j$  が  $n_f$  以下となる確率が  $\alpha$  となればよいから、

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_f} B_U(j) &= \alpha \\ \therefore \sum_{j=0}^{n_f} {}_N C_j \cdot (P_U)^j (1 - P_U)^{N-j} &= \alpha \end{aligned} \quad (3-4)$$

式(3-4)を満たすような  $P_U$  が、信頼係数  $(1-\alpha)$  としたときの上側信頼限界である。

上側信頼区間幅  $\Delta P_U$  は、実際に発生した失敗確率  $\hat{P}_f$  と試行回数  $N$  に依存する。この関係を  $\alpha = 0.05$  の場合について、図3-2(a)に示す。横軸に  $\hat{P}_f > 0.5$  の領域は示していないが、このときは成功確率  $(1 - \hat{P}_f)$  が0.5以下となり成功確率について図3-2と同様の結果が得られるので、 $\hat{P}_f \leq 0.5$  の範囲についてのみ示す。ここで、失敗数  $n_f$  は整数であるため  $\hat{P}_f$  は離散値である。また  $N$  の大きさによってグラフの長さが異なるが、これは各  $N$  において得られる  $\hat{P}_f$  の0以外の最小値、つまり  $n_f = 1$  における  $\hat{P}_f$  の値が異なるからである。例えば  $N = 100$  の場合は、 $\hat{P}_f = 1/100$  が図3-2(a)の横軸の最小値となる。なおグラフは対数スケールで表しているため、 $n_f = 0$ 、つまり  $\hat{P}_f = 0$  のときの値は、横軸上で左側無限遠となるために表示されていない。対数スケールで表すと  $\hat{P}_f$  が小さくなるにつれて信頼区間幅もおおよそ直線的に小さくなっていくことがわかる。これに対

して、信頼区間幅の  $\hat{P}_f$  に対する割合は逆に  $\hat{P}_f$  が小さくなるにつれて大きくなるのが図 3-2 (b) よりわかる。つまり  $\hat{P}_f$  が小さくなるにつれて  $\Delta P_U$  は小さくなるが、 $\hat{P}_f$  自体の値に対して  $\Delta P_U$  は相対的に大きくなる。また図 3-2 (a) より、試行回数  $N$  が大きいほど信頼区間幅は小さくなって推定精度が改善されることがわかる。

図 3-2 には示されていないが  $n_f = 0$ 、すなわち  $\hat{P}_f = 0$  のときの信頼区間も存在する。モンテカルロ評

価結果に失敗が 1 ケースも現れないとしても、それは必ずしも母集団の失敗確率が 0 であることを意味するものではない。母集団の失敗確率が 0 でなくても、たまたま  $N$  回の試行では失敗ケースが現れないこともあるからである。図 3-3 に  $\hat{P}_f = 0$  のときの試行回数  $N$  の変化に対する信頼区間幅を示す。  $\alpha = 0.05$  とした場合には、 $\hat{P}_f = 0$  のときの信頼区間幅はおおよそ  $N$  の逆数の 3 倍程度となることがわかる。

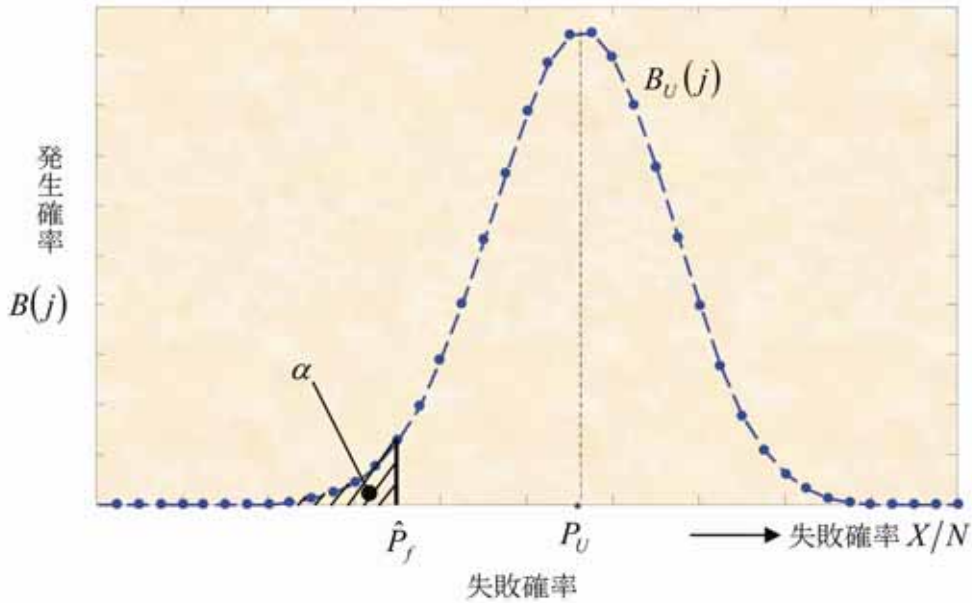


図 3-1 二項分布と上側信頼限界

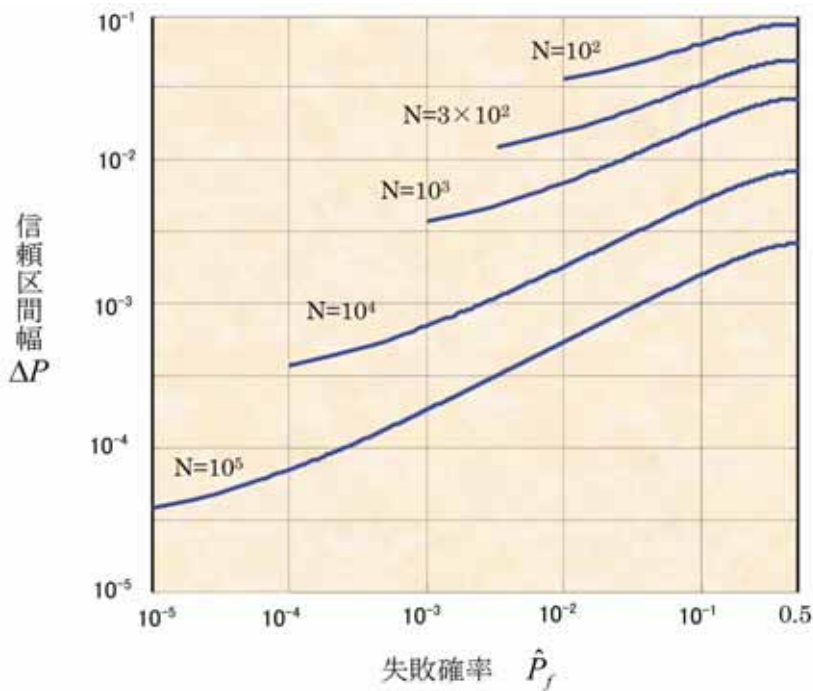


図 3-2 (a) 二項分布の信頼区間幅 ( $\alpha = 0.05$ , 片側)

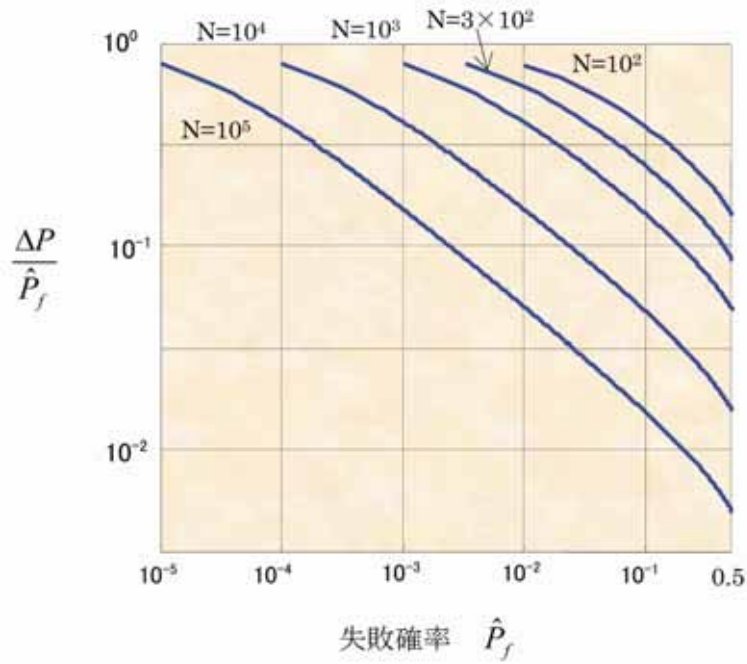


図 3-2 (b) 信頼区間幅の失敗確率に対する割合 ( $\alpha=0.05$ , 片側)

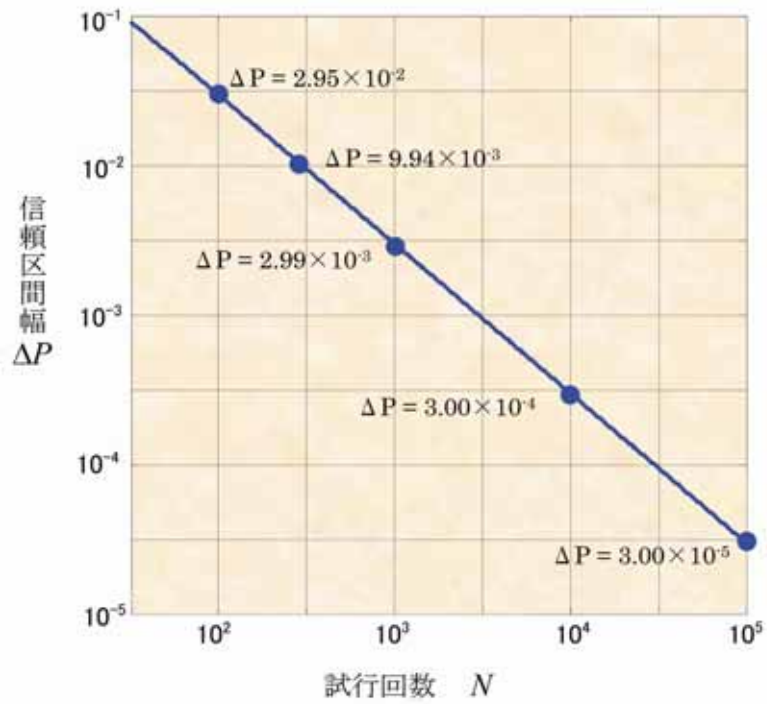


図 3-3  $\hat{P}_f = 0$  のときの信頼区間 ( $\alpha=0.05$ , 片側)

3.1.2 両側信頼区間

これまでではミッション達成確率について取り上げ、片側（上側）だけの信頼限界を求める手順について述べたが、両側の信頼限界が必要な場合について以下に述べる。両側の信頼限界を考慮すると、信頼係数を  $(1-\alpha)$  とするならば、これは母集団の失敗確率が信頼区間、つまり「下側信頼限界から上側信頼限界まで」に存在する確率を意味する。このとき、上側信頼限界  $P_U$  以上となる確率は  $\alpha/2$ 、また下側信頼限界以下となる確率も  $\alpha/2$  である。したがって、上側信頼限界を求めるための式(3-4)に対応する式は、次式となる。

$$\sum_{j=0}^{n_f} B_U(j) = \alpha/2$$

$$\sum_{j=0}^{n_f} {}_N C_j \cdot (P_U)^j (1-P_U)^{N-j} = \alpha/2$$

(3-5)

一方、下側信頼限界については、失敗数が実験値  $n_f$  以上となる確率が  $\alpha/2$  であるような母集団の失敗確率であるから、

$$\sum_{j=n_f}^N B_L(j) = \alpha/2$$

$$\sum_{j=n_f}^N {}_N C_j \cdot (P_L)^j (1-P_L)^{N-j} = \alpha/2$$

(3-6a)

通常は  $n_f \ll N$  であるため、式(3-6a)を次のように変形すると左辺の計算負荷が軽減される。

$$\sum_{j=0}^{n_f-1} {}_N C_j \cdot (P_L)^j (1-P_L)^{N-j} = 1-\alpha/2$$

(3-6b)

図 3-4 に、 $\hat{P}_f$  と  $P_L$ 、 $P_U$  との関係を示す。

次に上側と下側の信頼区間幅について述べる。正規分布ならば信頼区間幅は  $\hat{P}_f$  を中心に上下対称となるが、二項分布では非対称となる。上側信頼区間幅  $\Delta P_U$ 、下側信頼区間幅  $\Delta P_L$  をそれぞれ次のように定義する。

$$\Delta P_U = P_U - \hat{P}_f$$

$$\Delta P_L = \hat{P}_f - P_L$$

(3-7)

これらの  $\hat{P}_f$  に対する変化を図 3-5 に示す。図 3-5(a) の中心線より上側に  $\Delta P_U$ 、下側に  $\Delta P_L$  を示す。この結果より  $\hat{P}_f$  が小さくなるにつれて信頼区間幅も小さくなり、しかも  $\Delta P_L$  のほうが  $\Delta P_U$  と比べてより小さくなっていく。また、 $\Delta P_U$  及び  $\Delta P_L$  が殆ど 0 となる部分での違いを明らかにするため、縦軸を対数スケールで表したものが図 3-5(b) である。 $\hat{P}_f$  の値が小さくなるほど下側信頼区間幅  $\Delta P_L$  は急激に小さくなるが、これに対して上側信頼区間幅  $\Delta P_U$  はある程度まで小さくなった後にゆるやかな変化となっている。よって、 $\hat{P}_f$  が小さくなる程、 $\Delta P_L$  に比べて  $\Delta P_U$  のほうが相対的に大きくなっていく。

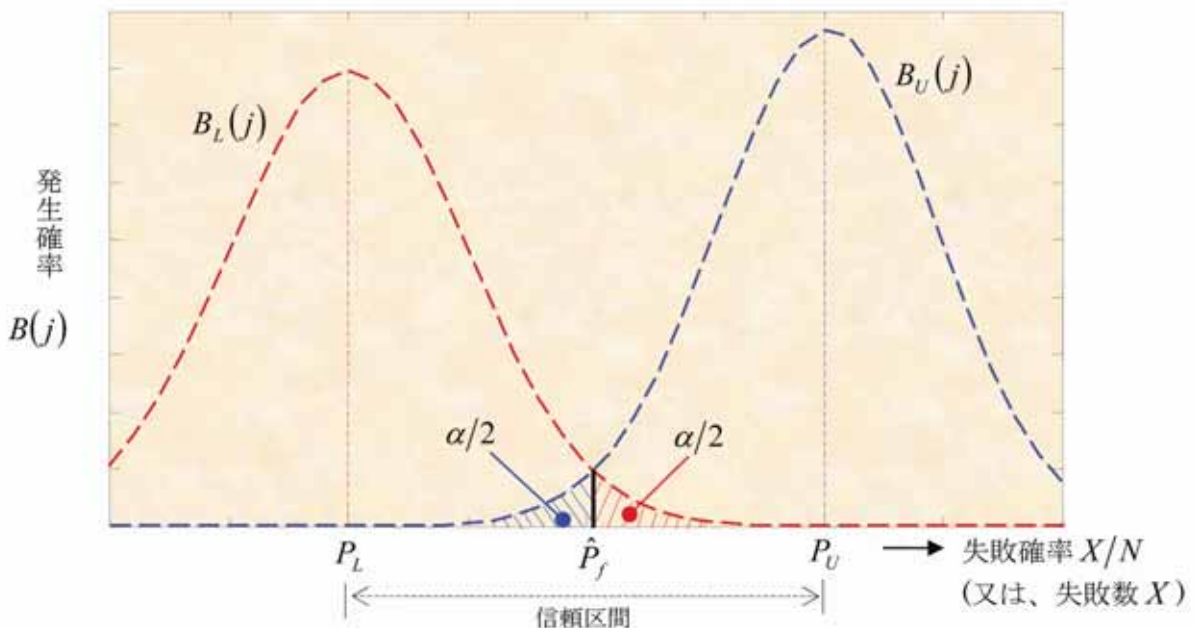


図 3-4 上側信頼限界と下側信頼限界

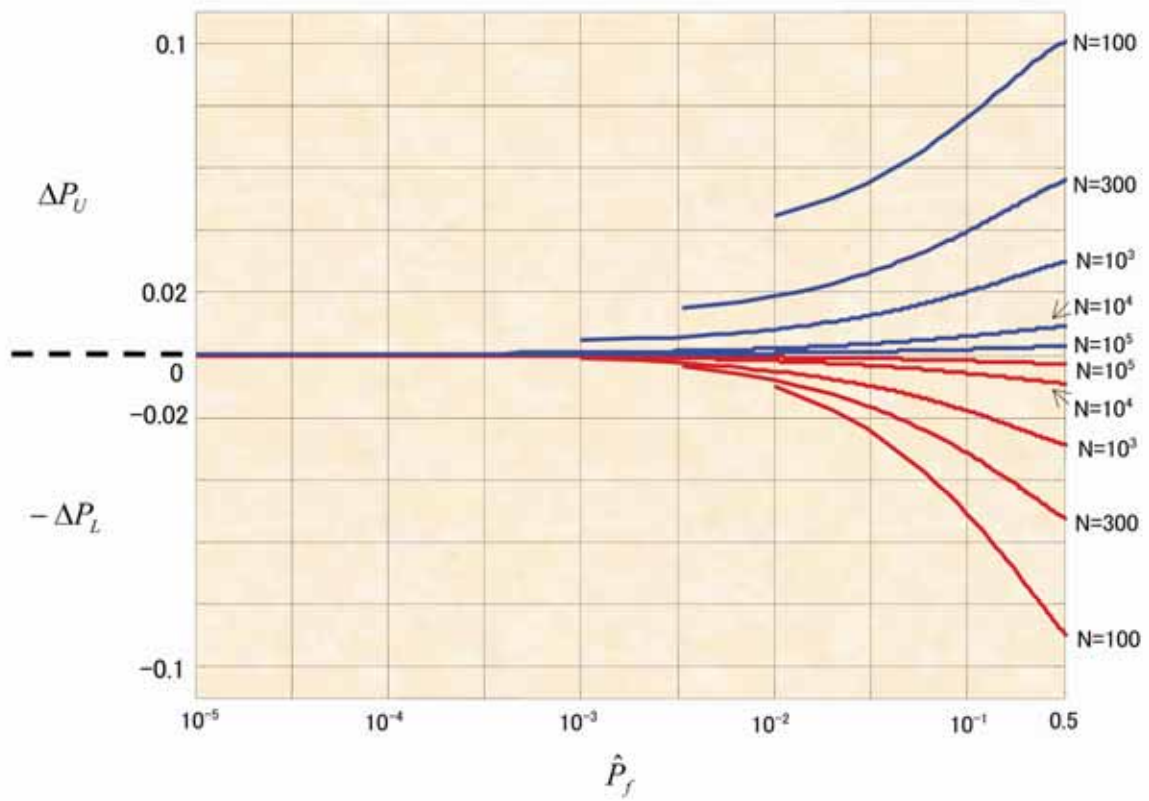


図 3-5(a) 上側, 下側の信頼区間幅 ( $\alpha=0.05$ )

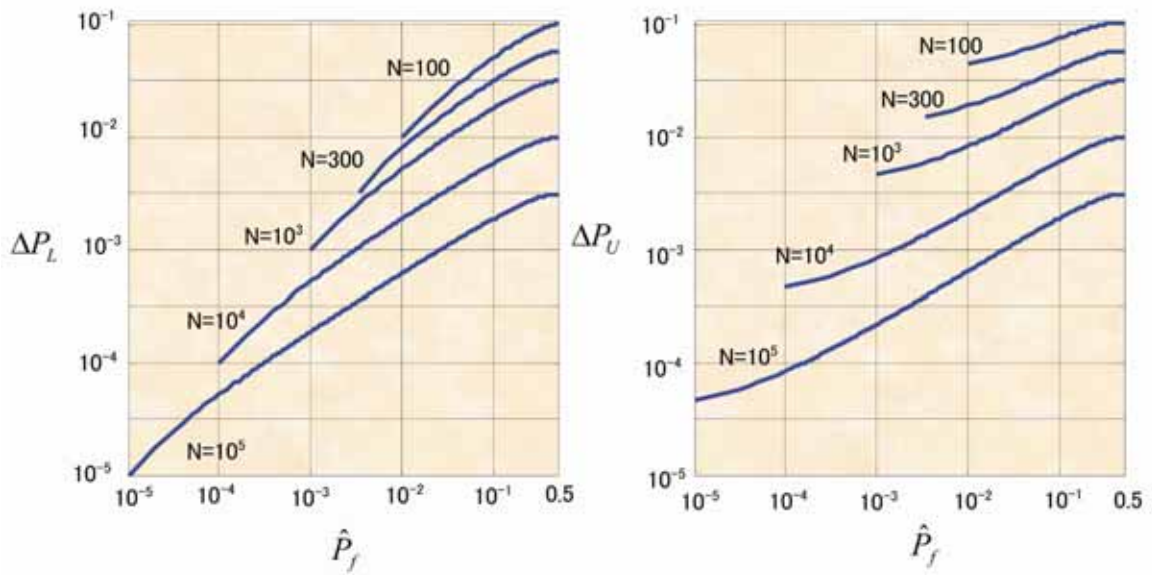


図 3-5(b) 上側, 下側の信頼区間幅 (対数スケール、 $\alpha=0.05$ )

3.2 正規分布による近似

式(3-4)~(3-6)により二項分布の信頼区間が得られるが、これらの式を解析的に解くことはできない。このため解を得るためには統計解析用のソフトウェアや最適化計算などを必要とする。そこで、容易に二項分布の信頼区間を算出する方法として、正規分布を利用した近似について次に述べる。

統計のテキストに通常記述してある正規分布近似による信頼区間の上限値  $P_{nU0}$  及び下限値  $P_{nL0}$  は、次式で表される<sup>21-22)</sup>。

$$\begin{aligned}
 P_{nU0} &= \hat{P}_f + \left| Z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{P}_f \cdot (1 - \hat{P}_f)} \right| / N \\
 P_{nL0} &= \hat{P}_f - \left| Z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{P}_f \cdot (1 - \hat{P}_f)} \right| / N
 \end{aligned}
 \tag{3-8}$$

ここで  $Z_{\alpha}$  は、平均 0、分散 1 の標準正規分布において図 3-1 の  $\hat{P}_f$  に対応する値を表し、下側累積確率  $\alpha$  が与えられれば統計表や統計ソフトを用いて容易に得られる。いくつかの  $\alpha$  に対する  $Z_{\alpha}$  の値を、表 3-1 に示す。式(3-8)が、二項分布の式(3-5)、(3-6)に対応する。先に述べたように二項分布の上側及び下側の信頼区間幅は非対称であるが、式(3-8)の近似式を用いて信頼区間を算出すると上側と下側の区間幅は対称となってしまう、上側及び下側の信頼区間幅をそれぞれ  $\Delta P_{nU0}$ 、 $\Delta P_{nL0}$  とすれば、次式

で表される。

$$\Delta P_{nU0} = \Delta P_{nL0} = \left| Z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{P}_f (1 - \hat{P}_f)} \right| / N
 \tag{3-9}$$

二項分布の信頼区間幅と、式(3-9)による正規分布近似から求めた信頼区間幅を比較したものが図 3-6 である。破線が正規分布近似による結果を表すが、 $\hat{P}_f$  が小さくなると共に近似誤差は  $\hat{P}_f$  に対して相対的に大きくなる。また、下側の信頼区間幅は大きめに、上側の信頼区間幅は小さめに推定されることがわかる。

次に図 3-7 に、正規分布近似による信頼区間幅の、二項分布の正確な信頼区間幅に対する割合を示す。この結果、 $\hat{P}_f$  が小さくなると共に誤差の割合は増大し、 $\alpha = 0.05$  の場合には上側の信頼区間幅は 2 倍程度、下側の信頼区間幅は 0.5 倍以下まで誤差が大きくなる。以上より特に  $\hat{P}_f$ 、つまり失敗数  $n_f$  が小さくなる場合に、近似誤差はかなり大きくなってしまふことがわかる。

しかし、失敗確率の推定を対象とするため  $\hat{P}_f$  が小さい値での精度が必要である。そこで以下ではより高い精度の正規分布による近似式を導出する。前節と同様に、まず片側信頼限界、次に両側信頼限界について順に述べる。

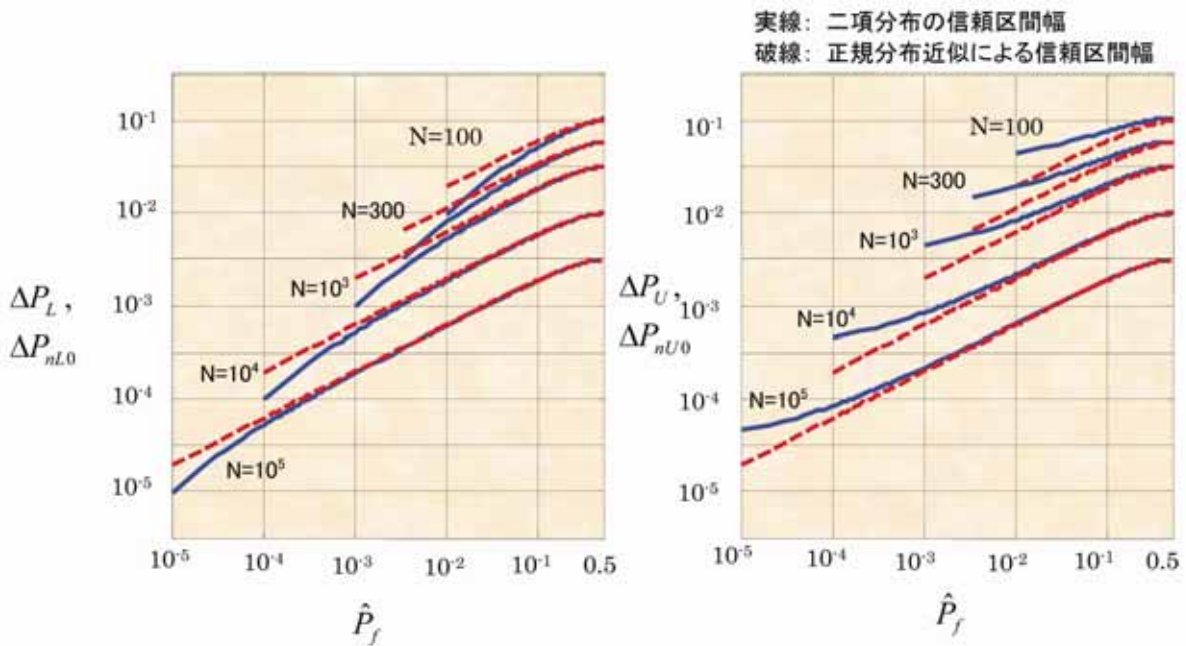


図 3-6 通常の正規分布近似による信頼区間幅 ( $\alpha=0.05$ )



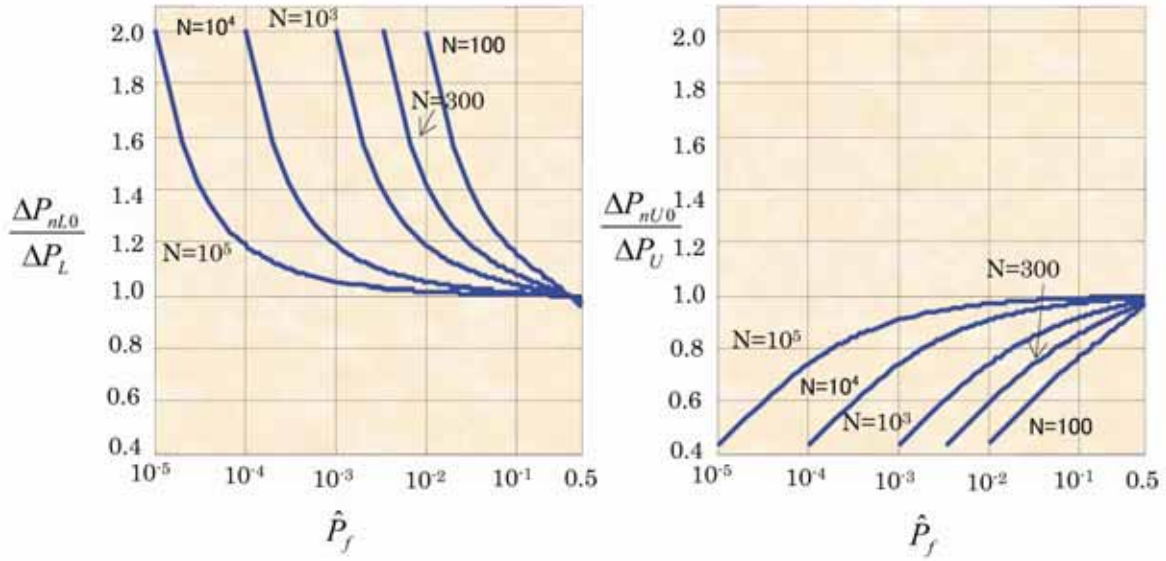


図 3-7 通常の正規分布近似による近似誤差 ( $\alpha=0.05$ )

表 3-1 標準正規分布の  $Z_\alpha$  値

$\alpha$ (片側)	$Z_\alpha$
0.1	-1.282
0.05	-1.645
0.0455	-1.690
0.025	-1.960
0.02275	-2.000
0.01	-2.326
0.005	-2.576
0.0027	-2.782
0.00135	-3.000

$$\begin{aligned}
 m_U &= E[X/N] \\
 &= \frac{1}{N} \cdot E[X] \\
 &= P_U
 \end{aligned}
 \tag{3-11}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_U^2 &= V[X/N] \\
 &= \frac{1}{N^2} \cdot V[X] \\
 &= P_U \cdot (1 - P_U) / N
 \end{aligned}
 \tag{3-12}$$

### 3.2.1 片側信頼区間

片側の片側信頼限界  $P_U$  は図 3-1 と式(3-4)で与えられた。これに対応する正規分布近似による片側信頼限界を求める。図 3-1 に示される分布は、真の失敗確率が  $P_U$  のときに  $N$  回の試行を実行したときに失敗確率が  $X/N$  となる二項確率分布を示している。ここで真の失敗確率が  $P_U$  のとき、二項分布における失敗数  $X$  の期待値と分散は次式で与えられる<sup>21-22</sup>。

$$\begin{aligned}
 E[X] &= N \cdot P_U \\
 V[X] &= N \cdot P_U \cdot (1 - P_U)
 \end{aligned}
 \tag{3-10}$$

よって、失敗確率  $X/N$  の平均  $m_U$  及び分散  $\sigma_U^2$  は次式となる。

平均が  $m_U$ 、分散が  $\sigma_U^2$  の正規分布が、式(3-3)の二項分布に対応する。正規分布の確率密度関数は、

$$f(X/N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_U} \exp\left\{-\frac{(X/N - m_U)^2}{2\sigma_U^2}\right\}
 \tag{3-13}$$

二項分布は離散分布でありグラフの縦軸が発生確率を表すが、これに対して正規分布は連続分布であり、式(3-13)の確率密度関数をグラフで表せば横軸の2点間で囲まれる部分の面積が発生確率を表す。

ここで、二項分布と対応する正規分布の比較が視覚的に容易となるように、グラフの縦軸を二項分布に合わせて表示する。式(3-13)の確率密度関数では  $1/N$  間隔幅の面積が対応する発生確率を表す。その間隔幅  $1/N$  で確率

密度が一定であると考えれば、間隔幅  $1/N$  を乗じると縦軸が発生確率を表すことになる。縦軸が発生確率相当となる関数  $F(X/N)$  は次式となる。

$$\begin{aligned} F(X/N) &= f(X/N) \cdot \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_U} \exp\left\{-\frac{(X/N - m_U)^2}{2\sigma_U^2}\right\} / N \end{aligned} \quad (3-14)$$

式(3-14)と二項分布の式(3-3)を重ね書きしたものが、図 3-8 である。

二項分布の上側信頼限界の算出では、図 3-1 に示すように  $\hat{P}_f$  以下となる確率が  $\alpha$  となるように  $P_U$  を決定し、式(3-4)より求めた。これに対して正規分布は連続分布であるため、式(3-4)に対応する式は積分となる。また、二項分布は横軸の  $1/N$  間隔毎の一点に確率が集中していると考えてよいが、正規分布では対応する確率はその点の前後  $1/N$  の幅に分散しているとみなすことができる。したがって上側信頼限界の算出において、二項分布では  $\hat{P}_f$  以下となる確率を用いたが、正規分布近似では  $1/N$  幅の半分だけ補正し、次式で表される  $\hat{P}_{uf}$  を  $\hat{P}_f$  の代わりに用いる。

$$\hat{P}_{uf} = \frac{n_f + 1/2}{N} \quad (3-15)$$

正規分布近似では、 $\hat{P}_{uf}$  以下となる確率が  $\alpha$  となるような  $P_U$  を求める。  $Z_\alpha$  と  $\hat{P}_{uf}$  の関係は、次式となる。

$$Z_\alpha = \frac{\hat{P}_{uf} - m_U}{\sigma_U} \quad (3-16)$$

式(3-11)、(3-12)から明らかなように  $m_U$ 、 $\sigma_U$  は上限値

$P_U$  で表されるが、 $P_U$  は未知数であり、ここで求めようとしている値である。正規分布近似により求める上限値という意味で、 $P_U$  と区別して  $P_{nU}$  と表記すれば、式(3-16)は次式のように書き表せる。

$$Z_\alpha = \frac{\hat{P}_{uf} - P_{nU}}{\sqrt{P_{nU}(1 - P_{nU})}/N} \quad (3-17)$$

式(3-17)を展開して整理すれば、

$$\begin{aligned} a_U \cdot P_{nU}^2 + b_U \cdot P_{nU} + c_U &= 0 \\ a_U &= 1 + Z_\alpha^2 / N \\ b_U &= -\left(2 \cdot \frac{n_f + 1/2}{N} + Z_\alpha^2 / N\right) \\ c_U &= \left(\frac{n_f + 1/2}{N}\right)^2 \end{aligned} \quad (3-18)$$

これを解いて、

$$P_{nU} = \frac{-b_U + \sqrt{b_U^2 - 4 \cdot a_U \cdot c_U}}{2 \cdot a_U} \quad (3-19)$$

式(3-18)からは2つの解が得られるが、これらの解はそれぞれ図 3-4 の  $P_L$  及び  $P_U$  に対応するものである。ここでは上側信頼限界を求めるので大きい方の値をとり、式(3-19)が解となる。注意すべきは、式(3-18)の小さい方の解を下側信頼限界の値としてはならないことである。なぜなら、上側信頼限界を求めるために  $\hat{P}_f$  を式(3-15)の  $\hat{P}_{uf}$  のように補正しているためである。

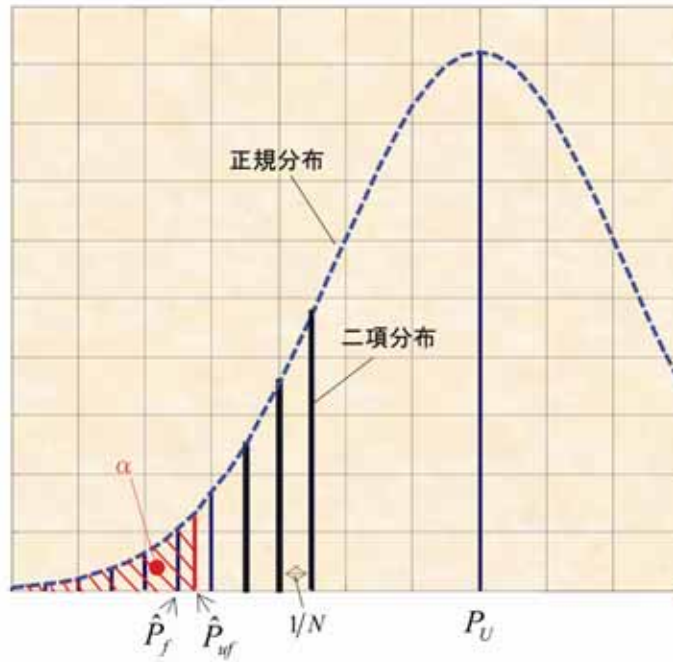


図 3-8 二項分布と正規分布

### 3.2.2 両側信頼区間

二項分布において両側信頼限界を求める式は、式(3-5)、(3-6)であり、信頼限界を図示したものが図 3-4 である。上側信頼限界  $P_{nU}$  については基本的に上記の手順で計算すればよいが、 $Z_\alpha$  の代わりに  $Z_{\alpha/2}$  を用いる必要がある。下側信頼限界  $P_{nL}$  を求める場合にも同様であるが、正規分布の上側累積確率を求める必要があるため、式(3-15)の代わりに次の補正值を用いる必要がある。

$$\hat{P}_{uf} = \frac{n_f - 1/2}{N} \quad (3-20)$$

以上より、両側信頼限界を求めるための式(3-17)に対応するものが、それぞれ次式となる。

$$Z_{\alpha/2} = \frac{\hat{P}_{uf} - P_{nU}}{\sqrt{P_{nU}(1 - P_{nU})/N}} \quad (3-21a)$$

$$-Z_{\alpha/2} = \frac{\hat{P}_{lf} - P_{nL}}{\sqrt{P_{nL}(1 - P_{nL})/N}} \quad (3-21b)$$

式(3-21a)については式(3-17)と同様であり、次式より  $P_{nU}$  が求められる。

$$P_{nU} = \frac{-b_U + \sqrt{b_U^2 - 4 \cdot a_U \cdot c_U}}{2 \cdot a_U}$$

$$a_U = 1 + Z_{\alpha/2}^2 / N$$

$$b_U = -\left(2 \cdot \frac{n_f + 1/2}{N} + Z_{\alpha/2}^2 / N\right)$$

$$c_U = \left(\frac{n_f + 1/2}{N}\right)^2$$

(3-22a)

$P_{nL}$  については、式(3-21b)に式(3-20)を代入して求める。下側信頼限界の場合は2つの解のうち小さい方を採用して、次式より  $P_{nL}$  を得る。

$$P_{nL} = \frac{-b_L - \sqrt{b_L^2 - 4 \cdot a_L \cdot c_L}}{2 \cdot a_L}$$

$$a_L = 1 + Z_{\alpha/2}^2 / N$$

$$b_L = -\left(2 \cdot \frac{n_f - 1/2}{N} + Z_{\alpha/2}^2 / N\right)$$

$$c_L = \left(\frac{n_f - 1/2}{N}\right)^2$$

(3-22b)

以上より、正規分布近似による信頼区間は式(3-22)から得られる。これらの式から明らかなように、正規分布近似を用いれば特別なソフトも最適化計算も必要なく、容易に二項分布の信頼区間を求めることができる。

### 3.2.3 近似誤差

正規分布近似による式(3-22)を利用すれば計算が容易である反面、近似誤差が問題となる。よって、次に近似誤差について考察する。式(3-7)と同様に、正規分布近似による上側および下側の信頼区間幅をそれぞれ  $\Delta P_{nU}$ 、 $\Delta P_{nL}$  として、次式で定義する。

$$\begin{aligned}\Delta P_{nU} &= P_{nU} - \hat{P}_f \\ \Delta P_{nL} &= \hat{P}_f - P_{nL}\end{aligned}\quad (3-23)$$

近似による信頼区間幅を正確な信頼区間幅と比較したものを、 $\alpha = 0.05$  の場合について図 3-9 に示す。この図は通常の正規分布近似による結果の図 3-6 に対応するものである。図 3-6 と比較すると、今回導出した近似値  $\Delta P_{nU}$ 、 $\Delta P_{nL}$  は、共に正確な二項分布の値と良く一致しており、近似精度はかなり改善されていることがわかる。近似による下側の信頼区間幅  $\Delta P_{nL}$  はやや小さめとなる。これに対して  $\Delta P_{nU}$  はやや大きめとなり、 $\hat{P}_f$  が小さいほど、つまり失敗数  $n_f$  が小さいほど、 $\Delta P_{nL}$  よりも近似誤差は大きくなることわかる。

正規分布近似による信頼区間幅を、正確な信頼区間幅に対する割合で表示したのが図 3-10 であり、これは通常の正規分布近似の場合の図 3-7 に対応する。近似による上側の区間幅  $\Delta P_{nU}$  はやや大きめとなり、 $\alpha = 0.05$  のときは最大で 1.2 倍程度となることがわかる。また  $\hat{P}_f$  が小さい程、つまり  $n_f$  が小さいほど、 $\Delta P_{nU}$  の近似誤差は大きくなる。これに対して下側の区間幅  $\Delta P_{nL}$  は、 $\Delta P_L$  よりも小さくなり、 $\alpha = 0.05$  のとき近似誤差は最大でも 0.9 倍程度である。上側の信頼区間幅  $\Delta P_{nU}$  とは異なり、 $\hat{P}_f$  が小さくなるにつれて近似誤差は一旦大きくなるが、さらに  $\hat{P}_f$  が小さくなると今後は逆に近似誤差は

小さくなっていく。

図 3-10 の横軸は対数スケールであるため  $\hat{P}_f = 0$  の場合は示されていないので、別に示す。 $\hat{P}_f = 0$  の場合は、これ以上小さな確率は存在しないため必ず下側信頼限界は 0 となる。よって、上側の信頼区間についてのみ考えればよい。図 3-11 (a)、図 3-11 (b) に  $\hat{P}_f = 0$  のときの上側信頼区間幅とその正確な信頼区間幅に対する割合を、それぞれ示す。図 3-11 (b) より、 $N$  が小さいときには正規分布近似による近似誤差は小さく、 $N$  が大きくなるにつれて近似誤差も大きくなるが、やがて一定値に落ち着き、 $\alpha = 0.05$  の場合は  $\Delta P_U$  の 1.43 倍程度となる。図 3-10 から  $\hat{P}_f$  が 0 以外のときでは最大 1.2 倍程度の近似誤差であったが、 $\hat{P}_f = 0$  まで考慮すれば 1.4 倍強の近似誤差があることになる。

以上より、正規分布近似による信頼区間の誤差についてまとめると、

- ・ 上側信頼区間幅の近似誤差のほうが下側信頼区間幅のそれよりも大きくなる。
- ・  $N$  が大きくなるにつれて上側信頼区間幅の近似誤差の割合  $\Delta P_{nU} / \Delta P_U$  はある程度まで大きくなるが、その後一定値に落ち着く。
- ・ 下側信頼区間幅の誤差の割合  $\Delta P_{nL} / \Delta P_L$  は、 $\hat{P}_f$  が小さくなるにつれて大きくなるが、さらに  $\hat{P}_f$  が小さくなると再び近似誤差は小さくなる。

以上のように正規分布近似は誤差を持つため、それを考慮した上で利用する必要がある。失敗確率を推定する場合に関しては上側信頼限界が必要となるが、正規分布近似を用いると正確な信頼区間幅よりも少し大きめに推定される。このため、解析としては安全側となる。したがって、もし正規分布近似による上側信頼限界が設計要求に対して問題なければ、二項分布の正確な信頼限界は問題ないといえる。

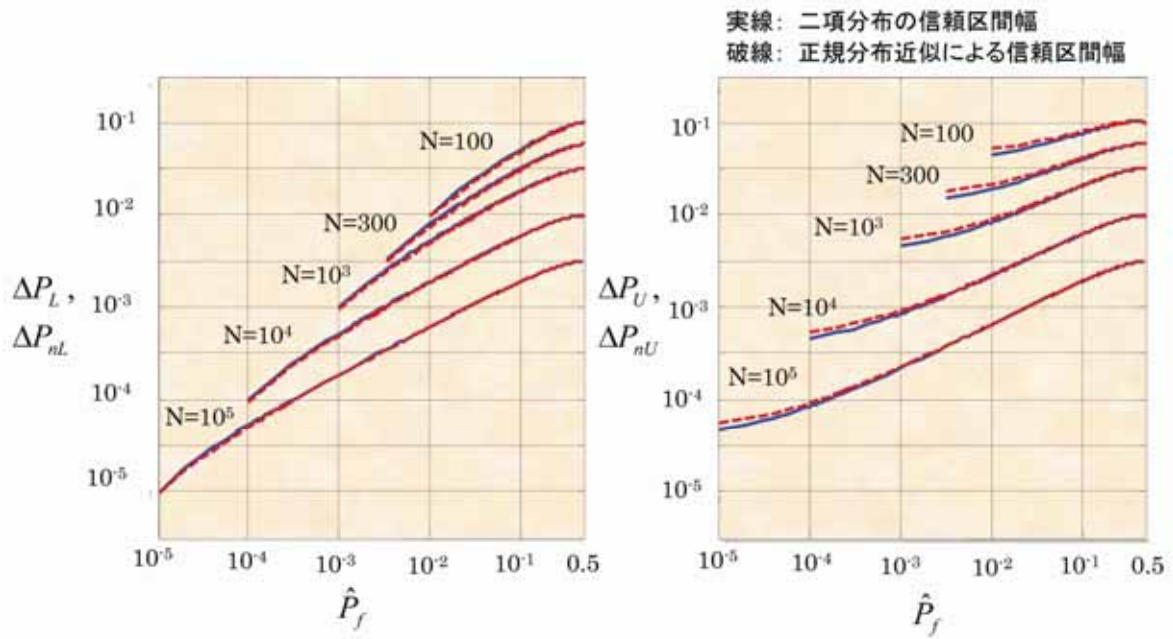


図 3-9 正規分布近似による信頼区間幅 ( $\alpha=0.05$ )

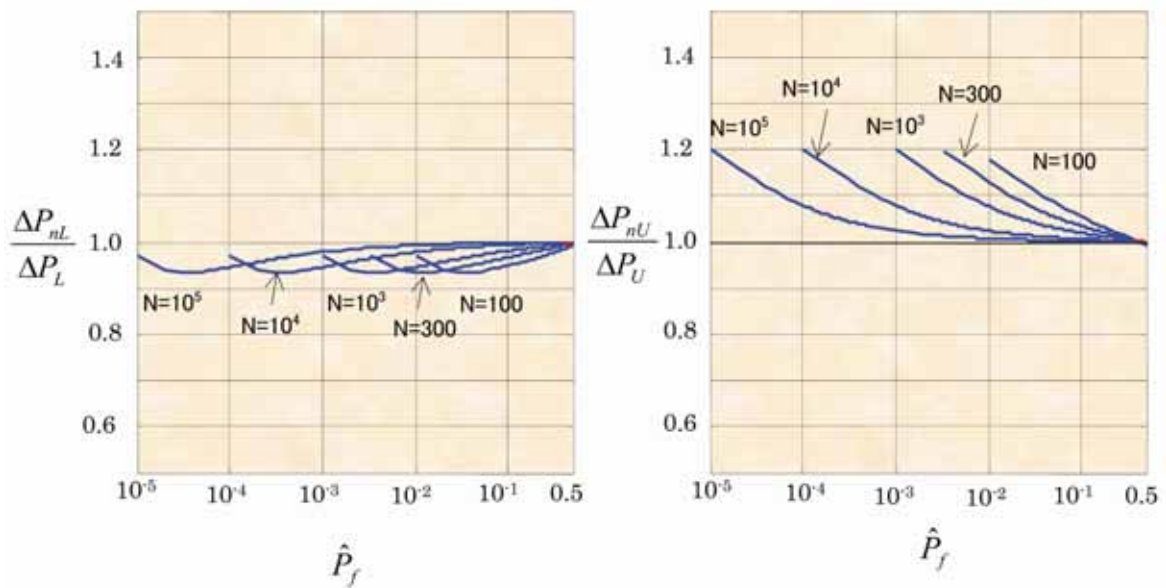


図 3-10 正規分布近似による近似誤差の大きさ ( $\alpha = 0.05$ )

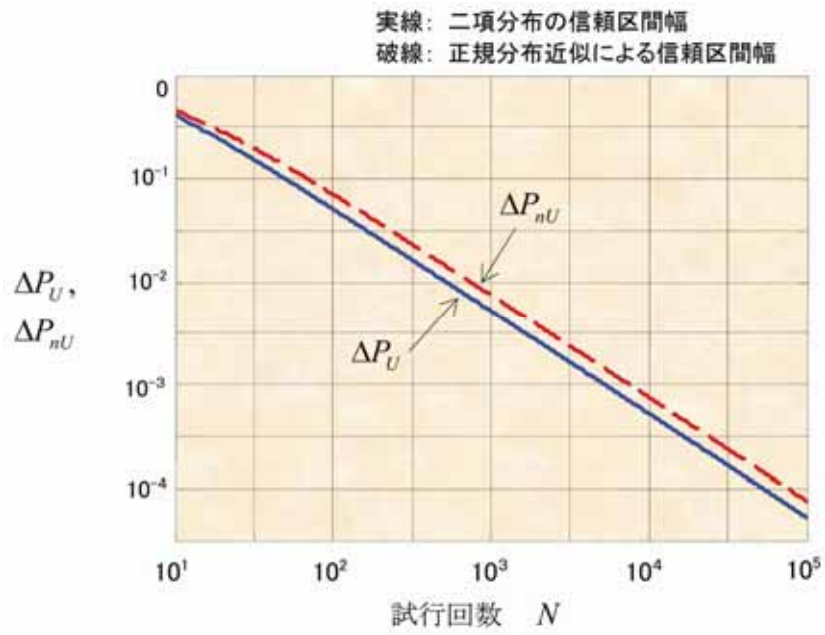


図 3-11(a)  $\hat{P}_f = 0$  のときの上側信頼区間 ( $\alpha = 0.05$ )

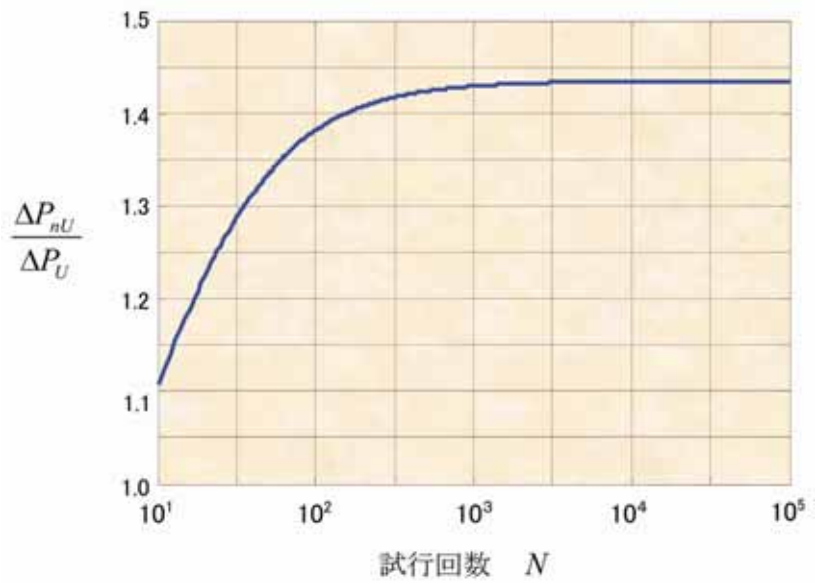


図 3-11(b)  $\hat{P}_f = 0$  のときの近似誤差の大きさ ( $\alpha = 0.05$ )

#### 4. 試行回数（標本数）

試行回数  $N$  はモンテカルロ評価を実行する時には必ず必要であるが、これまでに述べたように  $N$  の値によって信頼区間幅も異なってくる。推定精度の高い結果を得るためには  $N$  を大きくすればよいが、すると計算時間が増大して作業効率が悪化する。したがって  $N$  の設定は、母集団特性の推定精度と作業効率の観点から重要である。一般に、失敗確率  $P_f$  が小さくなると共に試行回数  $N$  は増やさなければならない。なぜなら  $P_f$  が小さくなると、失敗ケースを全く検出できない可能性が出てくるからである。例えば、 $P_f = 1/100$  のときに  $N = 10$  回の試行しかなかったとすれば、この試行で失敗ケースが現れる回数は平均でも  $10 \cdot 1/100 = 0.1$  となり、1回も失敗ケースを検出できない可能性が極めて高い。ところが、 $N = 1000$  の試行を行えば平均的に 10 回の失敗ケースが現れることになる。検出できる最小の確率は  $1/N$  であり、それより小さい確率は測定できない。よって、必要な試行回数  $N$  は失敗確率  $P_f$  に依存する。

また式(3-4)から明らかなように、信頼区間は  $N$  と  $P_f$ （又は、失敗数  $n_f$ ）の双方に依存し、次式の関係がある。

$$P_U = g(N, n_f) \quad (4-1)$$

このため、信頼区間も考慮すると、必要とされる  $N$  を求めるのはさらに複雑である。 $P_U$  が要求値  $P_{req}$  よりも小さくなると、母集団の失敗確率は  $P_{req}$  以下であるといえる。よって試行回数として理想的なのは、 $P_U$  が要求値  $P_{req}$  以下となるために必要な最小の回数とすることである。ところが、 $P_U$  はモンテカルロ評価の実行後に初めて明らかになるものであり、事前に  $P_U$  が  $P_{req}$  以下となるような試行回数を求めることはできない。また、そもそもシステムが要求を満たせない可能性もある。

ここで事前に  $n_f$  を定めれば式(4-1)は  $N$  と  $P_U$  との関係で表され、要求される失敗確率として  $P_U$  を指定すれば  $N$  が求められる。しかし式(3-4)の形からわかるように、 $n_f$  を定めても  $N$  を解析的に求めることはできない。そこで以下では、まず比較的容易に求められる  $n_f = 0$  の場合に必要とされる試行回数について考え、次に正規分布近似を利用した方法について述べる。

#### 4.1 $n_f = 0$ の場合

式(3-4)において  $n_f = 0$  とし、そのときに必要とされる試行回数を  $N_{req}$  とすれば、

$$(1 - P_U)^{N_{req}} = \alpha$$

$$\therefore N_{req} = \frac{\log(\alpha)}{\log(1 - P_U)} \quad (4-2)$$

危険率  $\alpha$  はあらかじめ設定する定数である。ここで  $0 \leq P_U \leq 1$  であり、 $P_U$  が大きいほど  $N_{req}$  は小さくなる。よって、 $P_U$  が要求値  $P_{req}$  以下となるときの  $N_{req}$  の最小値は、 $P_U = P_{req}$  のときに得られる。つまり、式(4-2)において  $P_U$  を  $P_{req}$  に置き換えて  $N_{req}$  を求め、 $N_{req}$  回の試行で失敗ケースが 1 回も現れなければ信頼区間の上限は要求値  $P_{req}$  以下となる。なお、式(4-2)により算出される  $N_{req}$  は必ずしも整数ではないため、小数点以下は切り上げて整数とする。危険率や信頼区間と関連づけた説明ではないが、文献 1)においても結果として式(4-2)と同じ形の式が示されている。

次に  $\alpha$  が 0.05 と 0.01 の場合について、 $P_{req}$  ( $= P_U$ ) と  $N_{req}$  の関係を図 4-1 に示す。縦軸、横軸ともに対数スケールであるが、このスケール上ではほぼ直線の関係があることがわかる。つまり母集団の失敗確率の要求が 1/10 だけ厳しくなれば、必要な試行回数は約 10 倍となる。また、図中にマークした点の数値データを表 4-1 に示す。例えば、[4]のケースでは要求される失敗確率が 1/100 以下である。このとき、危険率 0.05 とすれば 299 回、危険率 0.01 とすれば 459 回の試行で、一度も失敗ケースが現れなければ母集団は要求される失敗確率 1/100 以下を満足する。ここで表 4-1 の中で、 $P_{req} = 2.7 \times 10^{-3}$  は正規分布の場合に  $\pm 3\sigma$  値の外側に相当する確率であり、 $P_{req} = 4.55 \times 10^{-2}$  は同様に  $\pm 2\sigma$  値の外側に相当する確率である。

表 4-1 に示す試行回数を設定すれば、失敗ケースが一度も現れない限り、モンテカルロ評価結果は母集団に対して設定された要求確率  $P_{req}$  を満足する。この意味で、表 4-1 は試行回数の一つの目安となる。

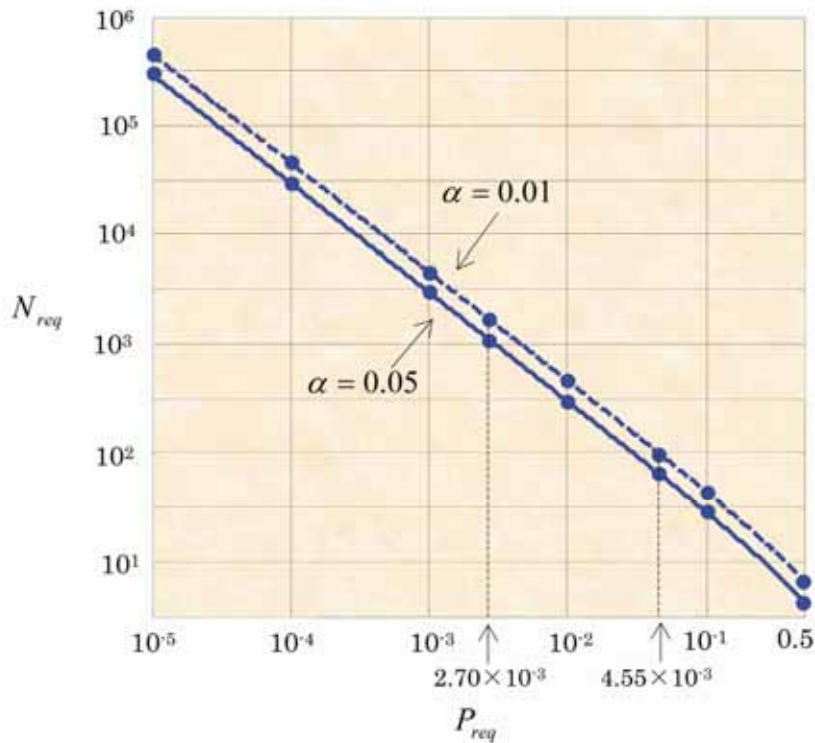


図 4-1  $n_f = 0$  の場合に要求を満たす試行回数  $N$

表 4-1  $n_f = 0$  のときに要求確率を満足する試行回数

No.	$P_{req}$	$N_{req}$ ( $\alpha = 0.05$ )	$N_{req}$ ( $\alpha = 0.01$ )	備考
[1]	0.5	5	7	
[2]	0.1	29	44	
[3]	$4.55 \times 10^{-2}$	65	99	2 $\sigma$ 確率相当
[4]	$10^{-2}$	299	459	
[5]	$2.70 \times 10^{-3}$	1,109	1,704	3 $\sigma$ 確率相当
[6]	$10^{-3}$	2,995	4,603	
[7]	$10^{-4}$	29,956	46,050	
[8]	$10^{-5}$	299,571	460,515	

#### 4.2 正規分布近似による試行回数算出

表 4-1 の試行回数を実施すれば、失敗ケースが現れない限り要求を満足することができる。しかし、母集団が要求を満たしているシステムであったとしても、たまたま表 4-1 に示す試行回数内で失敗ケースが現れることも起こりうる。その場合は  $n_f \neq 0$  となるが、その際に必要とされる試行回数について次に考察する。

$n_f \neq 0$  の場合には、式(3-4)から直接  $N$  を解析的に求めることはできない。しかし  $n_f \neq 0$  であっても、正規分布近似の式(3-17)を変形して  $N$  を求めることは比較的容易である。そこで、正規分布近似を用いて  $n_f \neq 0$  の場合に必要とされる試行回数を求める。

$P_{nU}$  の代わりに  $P_{req}$  を用い、正規分布近似により求め

る試行回数を  $N_{req-n}$  とすると、式(3-17)は次のように表せる。

$$Z_\alpha = \frac{\left( \frac{n_f + 1/2}{N_{req-n}} \right) - P_{req}}{\sqrt{P_{req}(1 - P_{req})}/N_{req-n}} \tag{4-3}$$

$N_{req-n}$  について整理すれば、

$$a_n \cdot N_{req-n}^2 + b_n \cdot N_{req-n} + c_n = 0$$



$$\begin{aligned}
 a_n &= P_{req}^2 \\
 b_n &= -P_{req} \left\{ (1 - P_{req}) Z_\alpha^2 + 2n_f + 1 \right\} \\
 c_n &= (n_f + 1/2)^2
 \end{aligned}
 \tag{4-4}$$

$N_{req-n}$  について式(4-4)を解くと大小2つの解が得られるが、小さい方の解は  $P_{req}$  が信頼区間の下限に対応する場合の解なので、ここでは採用しない。よって、信頼区間の上限が  $P_{req}$  となるような試行回数は、式(4-4)の大きい方の解として次式より得られる。

$$N_{req-n} = \frac{-b_n + \sqrt{b_n^2 - 4 \cdot a_n \cdot c_n}}{2 \cdot a_n}
 \tag{4-5}$$

失敗数  $n_f$  を設定すれば、信頼区間の上限が  $P_{req}$  以下となるような最小の試行回数  $N_{req-n}$  が得られる。

まず  $n_f = 0$  の場合について、式(4-2)から得られる正確な値  $N_{req}$  と、式(4-5)の近似から算出した  $N_{req-n}$  を比較する。図 4-2 に  $\alpha = 0.05$  の場合の、 $N_{req-n}$  と  $N_{req}$  の比較、およびこれらの比  $N_{req-n}/N_{req}$  を、失敗確率の要求値  $P_{req}$  に対して示す。この結果、近似値  $N_{req-n}$  のほう

がやや大きめとなることがわかる。 $N_{req-n}$  の大きさは  $N_{req}$  の約 1.2 倍であり、 $P_{req}$  が 1/100 よりも大きくなると  $N_{req}$  に近づく。また  $N_{req-n}/N_{req}$  の値は、危険率  $\alpha$  の値によって変わってくる。正規分布近似による試行回数  $N_{req-n}$  は  $N_{req}$  よりも大きいいため、要求値  $P_{req}$  に対して試行回数が不足することはない。

次に  $\alpha = 0.05$  の場合について、いくつかの  $n_f$  の値に対して  $P_{req}$  と  $N_{req-n}$  の関係を求めた結果を図 4-3 に示す。図中にマークした点の数値データを表 4-2 (a) に示す。また、 $\alpha = 0.01$  の場合の数値データを表 4-2 (b) に示す。比較のため図 4-3 には  $n_f = 0$  のときの  $N_{req-n}$  を破線で示した。これは図 4-2 の左図に実線で示した曲線と同じものである。表 4-2 (a) の  $\alpha = 0.05$  の場合は、 $n_f = 0$  のときの  $N_{req-n}$  と比較すると、 $P_{req}$  が 1/100 では  $n_f = 1$  で約 1.5 倍、 $n_f = 2$  で約 1.9 倍、 $n_f = 5$  で約 3 倍、 $n_f = 10$  で約 4.8 倍の試行回数を必要とする。 $\alpha = 0.01$  では少しこの倍率は下がるが、いずれにしても許容する  $n_f$  の値を大きくすれば、それだけ多くの試行回数が必要になる。試行回数を多くすればそれだけ結果の信頼性も高くなるが、一方で計算負荷は大きくなるため、許容される計算負荷を考慮して試行回数を決定する必要がある。

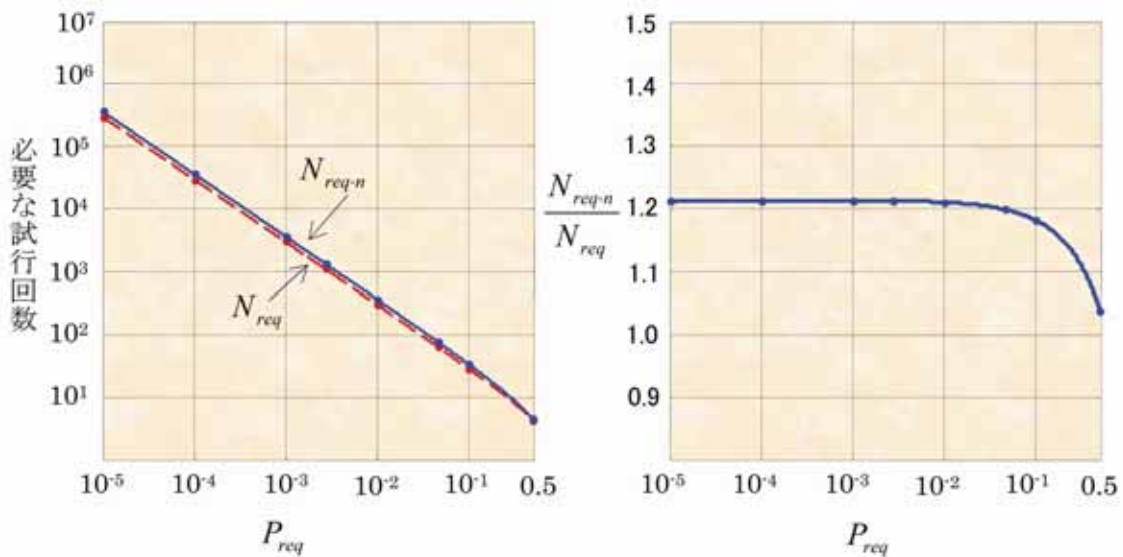


図 4-2  $n_f = 0$  のときの近似誤差 ( $\alpha = 0.05$ , 片側)

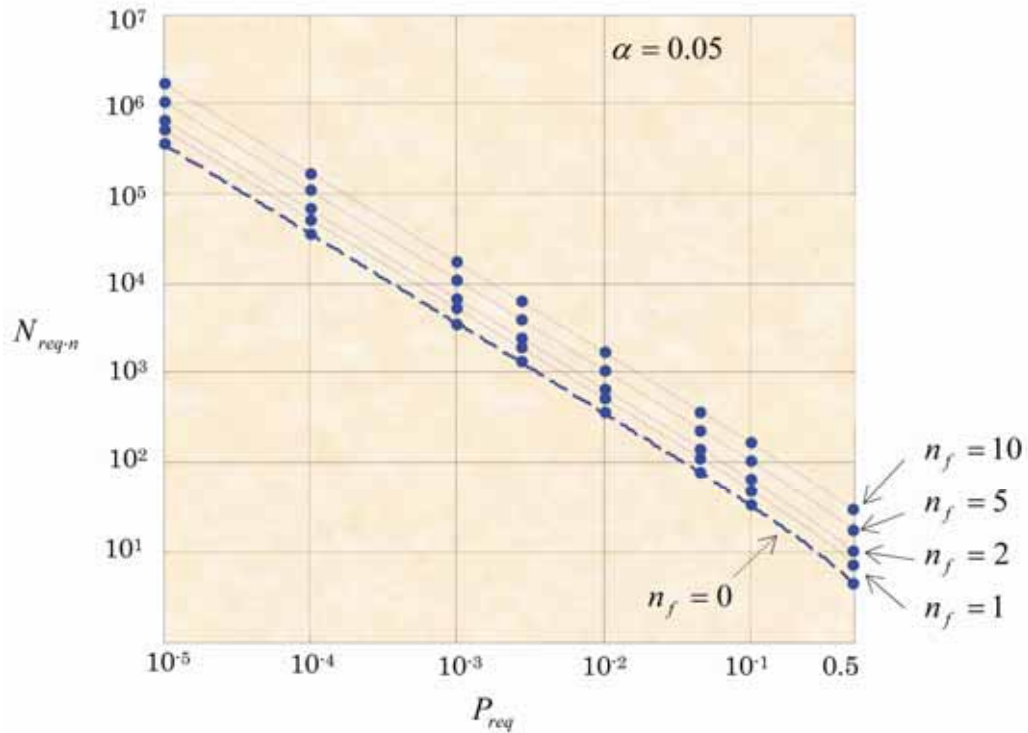


図 4-3 正規分布近似より算出した試行回数

表 4-2 (a) 正規分布近似により得られる必要な試行回数 ( $\alpha = 0.05$ , 片側)

No.	$P_{req}$	$N_{req-n}$ ( $n_f = 0$ )	$N_{req-n}$ ( $n_f = 1$ )	$N_{req-n}$ ( $n_f = 2$ )	$N_{req-n}$ ( $n_f = 5$ )	$N_{req-n}$ ( $n_f = 10$ )
[1]	0.5	5	8	11	18	31
[2]	0.1	34	50	65	106	170
[3]	$4.55 \times 10^{-2}$	78	114	146	237	378
[4]	$10^{-2}$	361	525	676	1,091	1,731
[5]	$2.70 \times 10^{-3}$	1,345	1,953	2,510	4,049	6,423
[6]	$10^{-3}$	3,635	5,277	6,782	10,937	17,348
[7]	$10^{-4}$	36,366	52,791	67,840	109,403	173,513
[8]	$10^{-5}$	363,678	527,933	678,427	1,094,059	1,735,166

表 4-2 (b) 正規分布近似により得られる必要な試行回数 ( $\alpha = 0.01$ , 片側)

No.	$P_{req}$	$N_{req-n}$ ( $n_f = 0$ )	$N_{req-n}$ ( $n_f = 1$ )	$N_{req-n}$ ( $n_f = 2$ )	$N_{req-n}$ ( $n_f = 5$ )	$N_{req-n}$ ( $n_f = 10$ )
[1]	0.5	8	11	14	22	35
[2]	0.1	59	76	92	137	205
[3]	$4.55 \times 10^{-2}$	135	174	209	308	460
[4]	$10^{-2}$	632	808	972	1,424	2,115
[5]	$2.70 \times 10^{-3}$	2,355	3,008	3,614	5,289	7,851
[6]	$10^{-3}$	6,368	8,130	9,767	14,290	21,208
[7]	$10^{-4}$	63,722	81,348	97,718	142,953	212,145
[8]	$10^{-5}$	637,261	813,527	977,228	1,429,585	2,121,507

### 4.3 自動終了判定

モンテカルロ評価は計算負荷が高い評価手法であるため、作業効率の観点からはできるだけ試行回数を少なくすることが望まれる。もし、あらかじめ母集団に対する失敗確率の要求値が明確になっているとすると、失敗確率が要求の範囲内、または、範囲外であることが確実になった時点で評価を終了させることができれば、不要な計算を省略できて効率的である。これを実現するためには、モンテカルロ評価実行中に信頼区間を逐次算出し、その区間の上限が要求値以下となれば母集団の失敗確率は要求を満たすし、逆に下限が要求値以上となれば母集団は要求を満たさないと判定すればよい。この判定の概念を示したものが図 4-4 である。正規分布近似による信頼区間を用いれば、信頼区間の算出は容易であるため、これが可能となる。

モンテカルロ評価中に逐次信頼区間の上限、または、下限を計算すればよいが、通常の両側の信頼区間を求める場合とは少し異なる。図 4-4 に示すように、標本の失敗確率  $\hat{P}_f$  が要求値  $P_{req}$  よりも小さいときは、要求を満足できる可能性が大きくなり、この場合は信頼区間の上限  $P_U$  を算出し  $P_{req}$  と比較すればよい。  $P_U \leq P_{req}$  となればシステムは要求を満足することになり、計算をそこで終了する。危険率を  $\alpha$  とすると  $(1-\alpha)$  以上の確率で  $P_U \leq P_{req}$  となればよいので、片側信頼区間として  $P_U$  を求める。よって、式(3-18)、(3-19)より近似値  $P_{nU}$  を算出する。逆に  $\hat{P}_f$  が  $P_{req}$  以上であるときは、 $(1-\alpha)$  以上の確率で  $P_L > P_{req}$  となるとき母集団の失敗確率は  $P_{req}$  以上であり要求を満たさないと判定する。この場合も片側信頼区間の下限を求めればよい。式(3-18)、(3-19)に対応する下限値の算出式は以下となる。

$$a_L \cdot P_{nL}^2 + b_L \cdot P_{nL} + c_L = 0$$

$$a_L = 1 + Z_\alpha^2 / N$$

$$b_L = - \left( 2 \cdot \frac{n_f - 1/2}{N} + Z_\alpha^2 / N \right)$$

$$c_L = \left( \frac{n_f - 1/2}{N} \right)^2$$
(4-6)

$$P_{nL} = \frac{-b_L - \sqrt{b_L^2 - 4 \cdot a_L \cdot c_L}}{2 \cdot a_L}$$
(4-7)

以上より、信頼区間下限の近似値  $P_{nL}$  が得られる。自動

終了判定の手順を図 4-5 にまとめる。

ここで注意すべきは、得られる信頼限界は近似であるということである。図 3-10 に示すように上側信頼限界の近似値  $P_{nU}$  は真値  $P_U$  よりもやや大きくなるため、  $P_{nU} \leq P_{req}$  となるときは必ず  $P_U \leq P_{req}$  となる。つまり、図 4-5 の手順に従って判定すれば、信頼区間の上限は確実に  $P_{req}$  以下となることが保証される。

一方、下側信頼限界については図 3-10 から明らかなように、近似値の区間幅は真のそれよりもやや小さくなる。つまり  $P_{nL} > P_L$  であり近似値のほうがやや大きい。従って、  $P_{nL} > P_{req}$  となっても真の下限値  $P_L$  は  $P_{req}$  よりも大きくなるとは限らない。つまり、近似値  $P_{nL}$  を用いて母集団は要求を満たさないと判定されても、真の下限値  $P_L$  に対してはまだ  $P_L > P_{req}$  となっておらず、要求を満たさないと判定は拙速となる可能性がある。これを防ぐため、下側の信頼区間幅を少し広げることを考える。  $\Delta P_{nL} = \hat{P}_f - P_{nL}$  として、次式のように下限値  $P_{nL}$  を  $P'_{nL}$  に修正する。

$$P'_{nL} = \hat{P}_f - \lambda \cdot \Delta P_{nL}$$
(4-8)

ここで、 $\lambda$  は 1 より大きい定数であり、次に  $\lambda$  として適当な値を検討する。  $P'_{nL} \leq P_L$  となればよいので、

$$\hat{P}_f - \lambda \cdot \Delta P_{nL} \leq P_L$$

$$\therefore \lambda \geq \frac{\hat{P}_f - P_L}{\Delta P_{nL}} = \frac{\Delta P_L}{\Delta P_{nL}}$$
(4-9)

よって、 $\lambda$  は  $\Delta P_L / \Delta P_{nL}$  以上となればよい。そこで、様々な  $\alpha$  と  $N$  に対して  $\Delta P_L / \Delta P_{nL}$  の値を算出したものが図 4-6 である。この結果から、 $\alpha$  が小さくなるほど  $\Delta P_L / \Delta P_{nL}$  の最大値は徐々に大きくなるものの、その値は高々 1.1 を少し超える程度である。したがって  $\lambda$  の値としては、

$$\lambda \approx 1.2$$
(4-10)

と設定しておけば、通常用いる範囲の  $\alpha$  に対しては、  $P'_{nL}$  が  $P_L$  より大きくなることはない。また、 $\lambda$  の値を小さくできればそれだけ評価回数が少なくて済む可能性が高くなるが、 $\alpha$  の値によっては  $\lambda$  を多少小さくすることは可能であり、必要に応じて式(4-10)の設定値を変更すればよい。

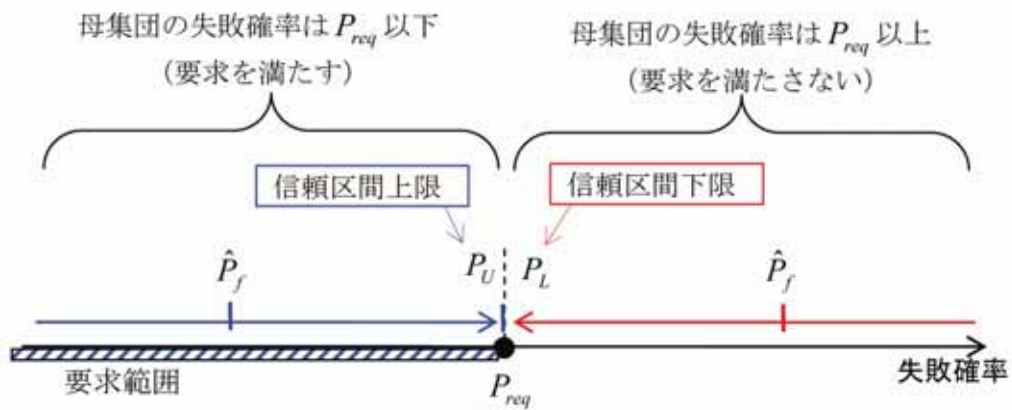


図 4-4 モンテカルロ評価結果の判定

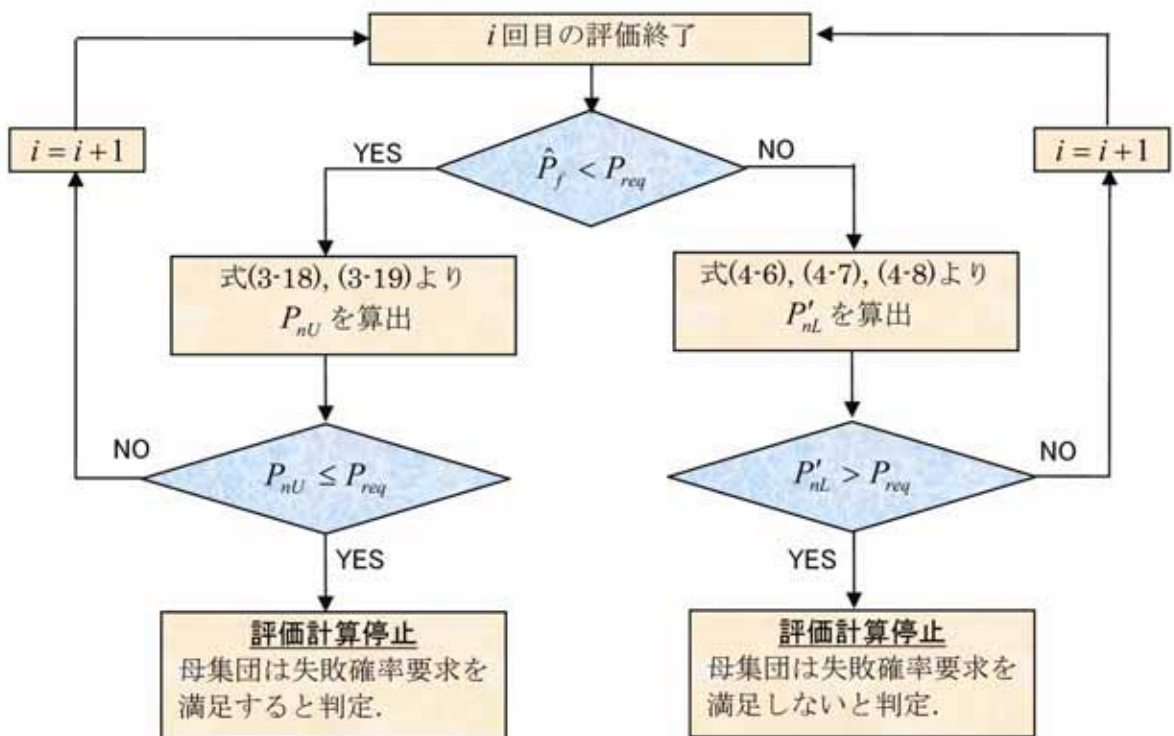


図 4-5 自動終了判定手順

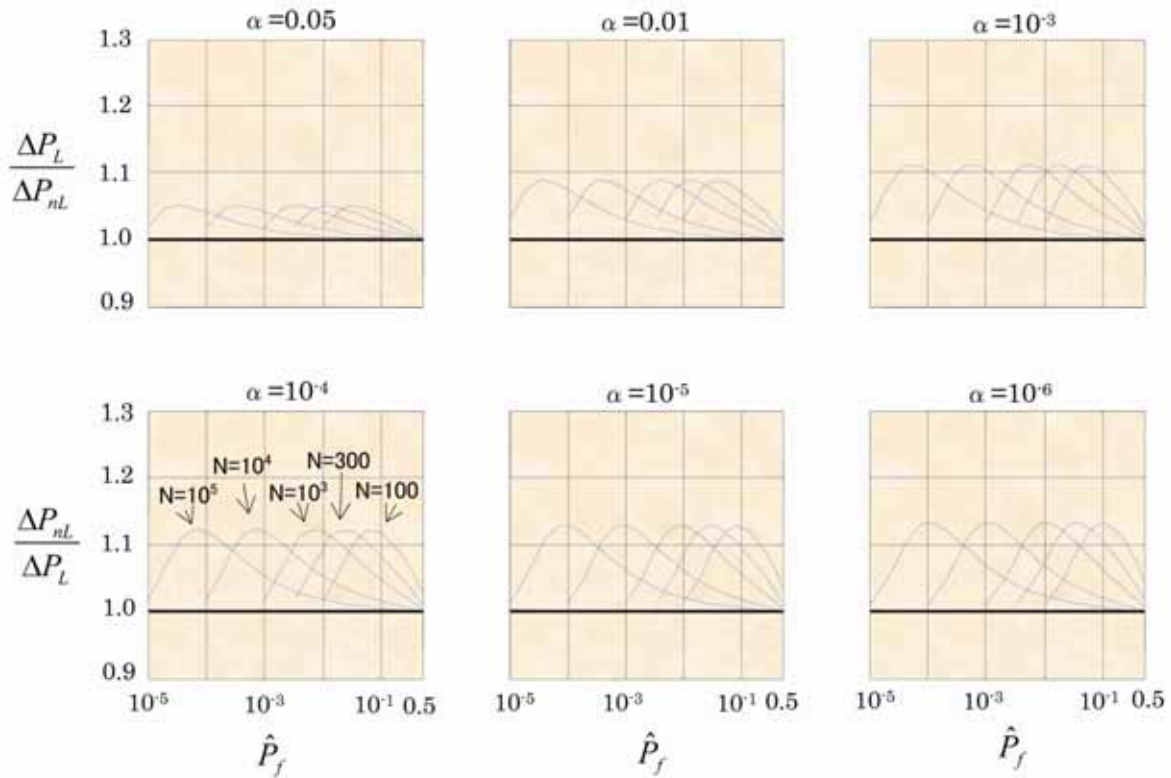


図 4-6 危険率  $\alpha$  (片側) と下側信頼限界誤差

**5. 自動着陸システムへの適用例**

実際の開発におけるモンテカルロ評価の例として、自動着陸システムを取り上げて適用例を示す。ここでは、1996年にオーストラリア・ウメラ飛行場にて実施された小型自動着陸実験(ALFLEX)<sup>23-28)</sup>を取り上げる。ALFLEXは将来の宇宙往還機のための自動着陸技術を確立することを目的とした実験であり、機体の固有安定性はなく、実環境での飛行試験が困難なシステムである。この点で飛行前の事前評価が極めて重要であり、モンテカルロ法が有効なシステムである。実際に飛行前にモンテカルロ評価を実施し、設計の確認を行っている<sup>6)</sup>。以下では、最初にALFLEXの実験概要について述べ、次にこのシステムで設定した不確定パラメータを具体的に示す。その上で、モンテカルロ法による評価結果例を示す。

**5.1 小型自動着陸実験(ALFLEX)**

小型自動着陸実験の概要を図 5-1 に示す。まずヘリコプタにより懸吊装置を介して一本のワイヤで吊された状態で、実験機は飛行する。この状態を懸吊飛行と呼んでいる。その懸吊飛行状態で、滑走路手前 2682m、高度 1500m において実験機は分離される。図 5-2 は懸吊装置

から一本のワイヤで吊されて飛行する実験機、図 5-3 は平衡滑空中の実験機である。実験機の分離後、搭載された誘導制御ロジックにしたがって舵面操舵を行い、実験機は滑走路に自動着陸する。自動着陸実験は合計 13 回実施され、全て成功している。図 5-4 に ALFLEX 実験機の 3 面図と主要諸元を示す。

飛行前の設計評価において、ALFLEX の飛行シミュレーションモデル<sup>29-30)</sup>を構築し、6 自由度の非線形シミュレーション評価を実施した。このシミュレーションモデルを利用して、様々な不確定パラメータの変動を考慮したモンテカルロ評価も実施したが、その際に考慮した不確定パラメータを次に具体的に示す。

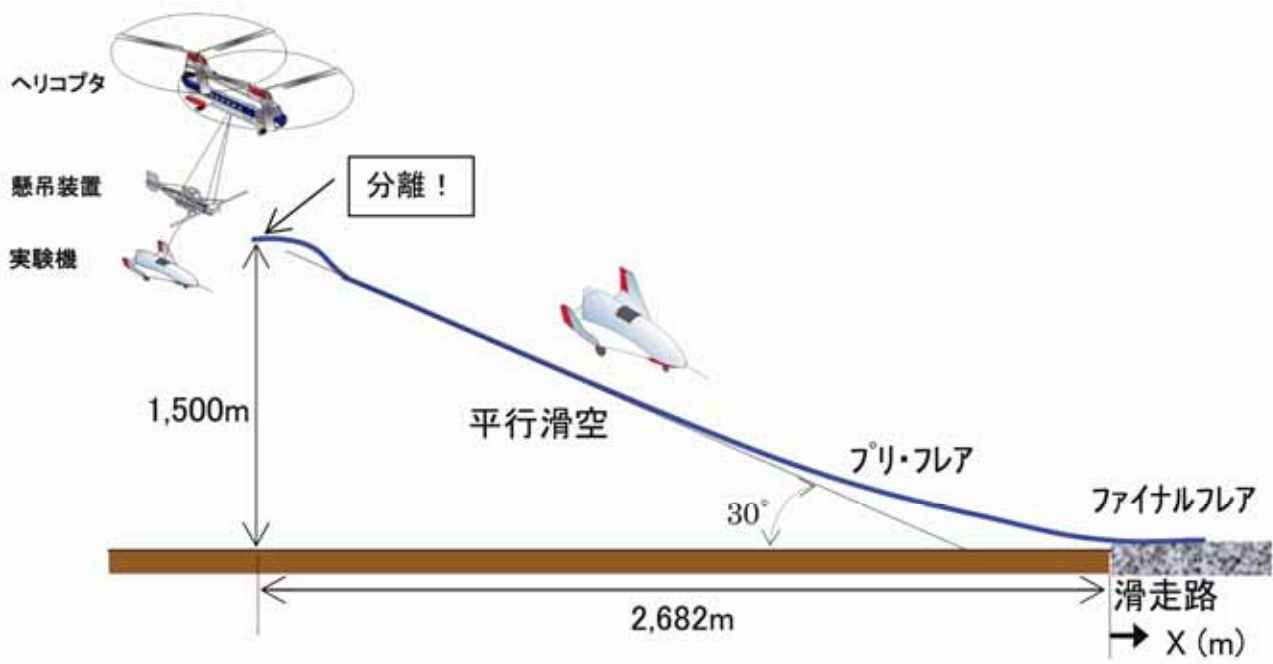


図 5-1 小型自動着陸実験(ALFLEX)の概要



図 5-2 懸吊飛行



図 5-3 平衡滑空中の ALFLEX 実験機

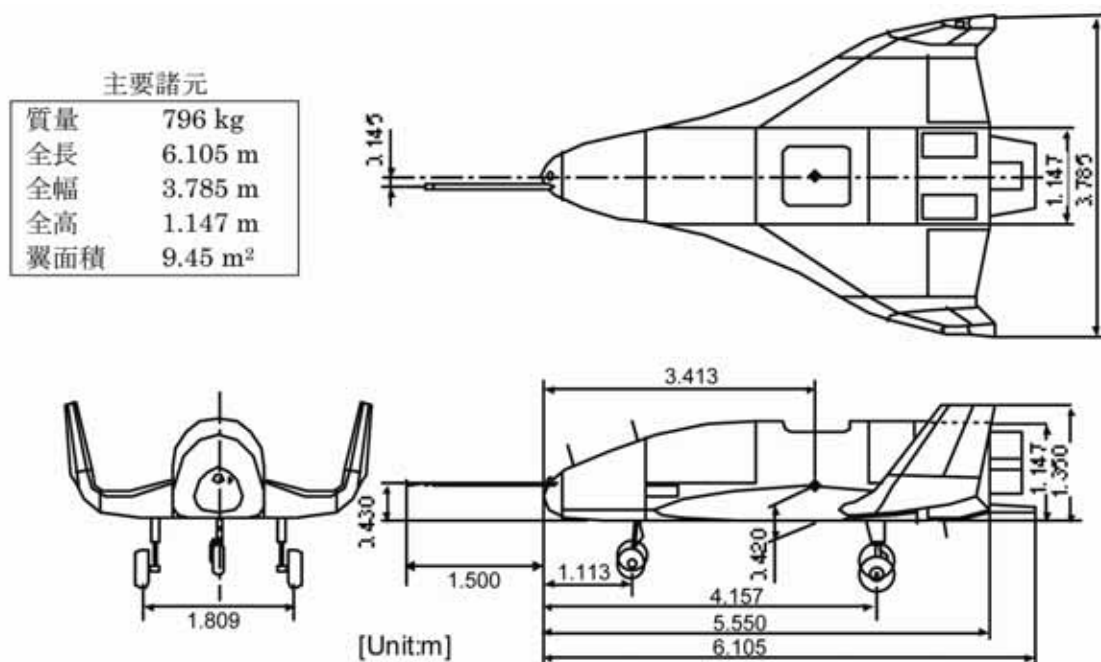


図 5-4 ALFLEX 実験機の 3 面図と主要諸元

## 5.2 不確定パラメータ

表 5-1 に ALFLEX のシミュレーションモデルに組み込んだ不確定パラメータとその変動範囲を、 $3\sigma$  相当値として示す。基本的には 0 を中心とした正規分布を仮定しており、 $3\sigma$  相当値はその正規分布の  $3\sigma$  値を表す。正規分布ではなく一様分布を仮定したパラメータについては、分布の欄に「一様」と明記した。一様分布の場合の下限値と上限値は  $\pm 3\sigma$  相当値としたが、それが適切でないものについては [下限値, 上限値] のように記した。定常風及び連続突風については、文献[29]に示される風モデルを用いている。表 5-1(b) に示す定常風の範囲は [0, 1] とあるが、「0」は無風、「1」は設定風速最大を表す。定常風の風速は、無風から設定最大風速までの間で一様分布とした。また連続突風については、常に設定範囲の最大であるとして評価した。

これらの  $3\sigma$  相当値は基本的には ALFLEX 着陸実験の時に設定された値であるが、ここではより適切であろうと考えられる値や分布に一部修正を施している。例えば、ALFLEX 実験当時は時間的制約もあり、不確定パラメータの分布は全て正規分布で、かつ、互いに独立であると仮定した。しかし、ここでは正規分布よりも一様分布のほうが適切と考えられるパラメータはそのように修正した。また実状に合わせて、空力パラメータ  $C_L$  と  $C_D$  は強い相関を持つとした。この他にもいくつかの修正を施している。

また ALFLEX に特殊な事情として、空力モデル  $C_{L\alpha}$ 、 $C_{m\alpha}$ 、 $C_{m\delta e}$  の値は不確定性無しとした。通常、これら

の不確定性の影響は小さくはなく、誤差量を見捨てることは本来適切ではない。しかし  $C_{L\alpha}$  及び  $C_{m\alpha}$  については迎角に対する傾斜であり、これらの不確定性のみを変化させることは不可能であり、必ず  $C_L$  や  $C_m$  の値も同時に変化する。幸いにして ALFLEX では懸吊飛行により実機を用いた空力特性の推定を行うことができ、この結果を反映して風洞試験モデルを修正できた。このため、懸吊飛行試験結果を反映することで誤差量を組み込んだ評価とみなし、モンテカルロ評価では変動は考慮していない。 $C_{m\delta e}$  についても懸吊試験結果を反映し風洞試験モデルを修正できたことから、不確定性のばらつきは考慮していない。ただし、常に実機による空力特性の確認が可能なのではないため、何らかの方法で  $C_{L\alpha}$  や  $C_{m\alpha}$  も不確定パラメータとしてモンテカルロ評価に組み込むのが適当である。別の飛行実験では組み込んだ例も存在するが、その方法については議論もあるため、まだ技術課題として残されている。

表 5-1 (a) - (c) の不確定パラメータについては、各回のシミュレーション開始時にそれぞれ 1 個の値をランダムに発生させ、実験機分離から着陸までの 1 回の飛行シミュレーション中は、それらの値を固定する。これに対して表 5-1 (d) に示すパラメータは飛行中に時系列的に変動するランダム誤差であるため、各シミュレーション開始時には個別に乱数の種となる数字を与え、飛行シミュレーション中には設定した分布に従って、サンプリング周期毎に誤差値を発生するようにしている。

表 5-1 (a) 不確定パラメータ：機体モデル誤差

No.	変数名	$3\sigma$ 相当値 (単位)	分布
[空力モデル]			
[1]	空力係数 $C_L$	0.0216	}(相関 0.8)
[2]	$C_D$	0.0069	
[3]	$C_Y$	0.0056	
[4]	$C_l$	0.0042	
[5]	$C_{l\beta}$	0.0009	
[6]	静的空力微係数 $C_{Y\beta}$	0.00194 (1/deg)	
[7]	$C_{l\beta}$	0.0006 (1/deg)	
[8]	$C_{n\beta}$	0.004 (1/deg)	
[9]	動的空力微係数 $C_{mq}$	100 (%)	
[10]	$C_{lp}$	100 (%)	
[11]	$C_{nr}$	150 (%)	
[12]	$C_{lr}$	150 (%)	
[13]	$C_{np}$	150 (%)	
[14]	舵効き $C_{L\delta e}$	0.003141 (1/deg)	
[15]	$C_{Y\delta a}$	0.00183 (1/deg)	
[16]	$C_{l\delta a}$	0.00039 (1/deg)	
[17]	$C_{n\delta a}$	0.00024 (1/deg)	



[18]		$C_{Y\delta r}$	0.000183	(1/deg)	
[19]		$C_{l\delta r}$	0.00029	(1/deg)	
[20]		$C_{n\delta r}$	0.00042	(1/deg)	
[21]		$C_{L\delta s b}$	20	(%)	
[22]		$C_{D\delta s b}$	20	(%)	
[23]		$C_{m\delta s b}$	20	(%)	
[24]	地面効果	$C_{GE}$	100	(%)	
[慣性特性]					
[25]	質量	M	24	(kg)	
[26]	慣性特性	$I_{xx}$	100	(kg·m <sup>2</sup> )	
[27]		$I_{yy}$	200	(kg·m <sup>2</sup> )	
[28]		$I_{zz}$	200	(kg·m <sup>2</sup> )	
[29]		$I_{xz}$	50	(kg·m <sup>2</sup> )	
[アクチュエータ特性]					
[30]	エレボン	固有振動数	23	(%)	
[31]		減衰係数	14	(%)	
[32]		レートリミット	[-20, 0]	(%)	一様
[33]	ラダー	固有振動数	23	(%)	
[34]		減衰係数	14	(%)	
[35]		レートリミット	[-20, 0]	(%)	一様
[36]	スピードブレーキ	固有振動数	23	(%)	
[37]		減衰係数	14	(%)	
[38]		レートリミット	[-20, 0]	(%)	一様

表 5-1 (b) 不確定パラメータ：環境条件の変動

No.	変数名	3σ相当値 (単位)	分布
[環境条件]			
[1]	海面上温度	10 (°C)	一様
[2]	海面上気圧	20 (hPa)	一様
[3]	重力加速度	0.015 (m/s <sup>2</sup> )	一様
[4]	風モデル	定常風 強さ	[0, 1] (m/s)
[5]		定常風 風向	[0, 360] (deg)
[分離状態]			
[6]	角速度	P	0.0728 (rad/s)
[7]		Q	0.0445 (rad/s)
[8]		R	0.1896 (rad/s)
[9]	姿勢各	Φ	0.1852 (rad)
[10]		Θ	0.020 (rad)
[11]		Ψ	0.2019 (rad)
[12]	速度	U	3.78 (m/s)
[13]		V	2.51 (m/s)
[14]		W	2.89 (m/s)
[15]	位置	X	100 (m)
[16]		Y	100 (m)
[17]		Z	50 (m)

表 5-1 (c) 不確定パラメータ： センサ出力誤差

No.	変数名	3 $\sigma$ 相当値 (単位)	分布
[IMU]			
[1]	加速度 Ax $\hat{\mu}$ イアス	150 ( $\mu$ G)	
[2]	Ay $\hat{\mu}$ イアス	150 ( $\mu$ G)	
[3]	Az $\hat{\mu}$ イアス	150 ( $\mu$ G)	
[4]	Ax スケールファクタ	241 (ppm)	
[5]	Ay スケールファクタ	241 (ppm)	
[6]	Az スケールファクタ	241 (ppm)	
[7]	角速度 P $\hat{\mu}$ イアス	0.075 (deg/hr)	
[8]	Q $\hat{\mu}$ イアス	0.075 (deg/hr)	
[9]	R $\hat{\mu}$ イアス	0.075 (deg/hr)	
[10]	P スケールファクタ	40 (ppm)	
[11]	Q スケールファクタ	40 (ppm)	
[12]	R スケールファクタ	40 (ppm)	
[13]	姿勢角 $\Phi$ $\hat{\mu}$ イアス誤差	0.153 (deg)	
[14]	$\Theta$ $\hat{\mu}$ イアス誤差	0.153 (deg)	
[15]	$\Psi$ $\hat{\mu}$ イアス誤差	0.723 (deg)	
[16]	むだ時間	[-12.5, 0] (msec)	一様
[MLS]			
[17]	方位 方位 $\hat{\mu}$ イアス	2.22 (mrad)	
[18]	方位スケールファクタ	5.99E-5 (mrad/m)	
[19]	仰角 仰角 $\hat{\mu}$ イアス	2.24 (mrad)	
[20]	仰角スケールファクタ	6.04E-5 (mrad/m)	
[21]	むだ時間	[-46.5, 0] (msec)	一様
[電波高度計]			
[22]	$\hat{\mu}$ イアス誤差	0.6 (m)	
[23]	スケールファクタ誤差	0.031 (%)	
[ADS]			
[24]	等価対気速度( $V_{EAS}$ ) $\hat{\mu}$ イアス	2 (m/s)	
[25]	横滑り角( $\beta$ ) $\hat{\mu}$ イアス	0.9 (deg)	
[26]	スケールファクタ	5 (%)	
[27]	リミット	[-30, 0] (%)	
[分離時航法]			
[28]	GPS 航法 $X_{NAV}$	25 (m)	
[29]	$Y_{NAV}$	25 (m)	
[30]	$Z_{NAV}$	25 (m)	
[31]	$dX_{NAV}$	0.5 (m/s)	
[32]	$dY_{NAV}$	0.5 (m/s)	
[33]	$dZ_{NAV}$	0.5 (m/s)	

表 5-1 (d) 不確定パラメータ： ランダム誤差

No.	変数名	3σ相当値 (単位)
[IMU]		
[1]	加速度 Ax	0.4 (G)
[2]	Ay	0.4 (G)
[3]	Az	0.4 (G)
[4]	角速度 P	0.66 (deg/s)
[5]	Q	0.66 (deg/s)
[6]	R	0.66 (deg/s)
[MLS]		
[7]	方位角 AZ	2.16 (mrad)
[8]	AZ 距離依存分	5.83E-05 (mrad/m)
[9]	仰角 EL	2.5 (mrad)
[10]	EL 距離依存分	6.76 (mrad/m)
[電波高度計]		
[11]	H	0.4 (m)
[連続突風]		
[12]	Wgust	(最大 <sup>29)</sup> (m/s)

### 5.3 モンテカルロ評価

次に実際のモンテカルロ評価方法と評価結果例を示す。初めに ALFLEX での評価基準について述べ、次に試行回数の設定と評価結果について述べる。

#### 5.3.1 評価基準

ALFLEX における被評価パラメータは接地時状態量として規定される。それらの接地時状態量とその許容範囲を表 5-2 に示す。これらの被評価パラメータ及び許容範囲はそれぞれ式(2-2)、(2-3)に対応するものである。表 5-2 の条件は接地まで飛行が可能であることを前提としており、当然のことながら滑走路に到達することが大前提である。よって表 5-2 とは別に、飛行中に不安定運動が発生しないことも評価基準に含まれる。全ての条件を満たす場合に“成功”、一つでも基準を満たせなければ“失敗”としてミッション達成確率を式(2-6)から算出する。

#### 5.3.2 試行回数の設定と評価結果

要求する失敗確率  $P_{req}$  を与えれば、失敗ケース  $n_f$  が 0 である場合に、要求を満足する試行回数は式(4-2)から得られる。以下では、危険率  $\alpha = 0.05$  として議論を進める。要求確率  $P_{req} = 0.01$  と設定すると、表 4-1 に示すように、299 回の試行が必要となる。この数は、「299 回試行して一度も失敗ケースが現れなければ、信頼区間の上限が要求値  $P_{req} = 0.01$  以下となる」という意味である。よって、失敗ケースが 1 回でも現れた場合は、要求を満足することはできない。そこで、失敗ケースが何

回か現れても要求を満たせるだけの回数を算出したのが、表 4-2 (a) である。例えば、失敗数が 5 回以下と仮定するならば 1,091 回、失敗数が 10 回以下と仮定するならば 1,731 回の試行が必要である。計算負荷を考慮して余裕があれば、より多数の試行回数を設定することによって、信頼区間幅が小さく精度の高い評価結果を得ることができる。

これらの試行回数は、システムが要求確率を満足するとの前提で算出されたものであるが、このシステムが要求を満足できるかどうかは事前には不明である。それでも上記の目安となる試行回数をを用いれば、失敗ケースが現れなければ要求を満足することが保証されており、逆に失敗ケースが現れても失敗確率の大まかな見当をつける程度のことは可能である。

信頼区間の上側限界  $P_U$  が  $P_{req}$  よりも小さければ、システムは要求を満たすと判定できる。この場合は失敗確率がいくら小さくても全く問題ないので、下側限界を気にする必要はなく、上側限界のみの片側の信頼区間を求める。よって、式(3-4)から  $P_U$  を求めるか、又は式(3-19)から近似値  $P_{nU}$  を求めればよい。

一方、信頼区間の下限  $P_L$  が  $P_{req}$  よりも大きければ、システムは要求を満足できないと判定できる。要求を満足しないことの判定においては、下限のみが意味を持ち上限は必要ない。したがって、 $P_L$  を求める場合も下側だけの片側信頼区間を算出すればよい。式(3-6b)は両側の信頼限界を考慮する場合の下限を求める式であるが、

次のように  $\alpha/2$  を  $\alpha$  に置き換えれば下限  $P_L$  を求めるための式となる。

$$\sum_{j=0}^{n_f} {}_N C_j \cdot (P_L)^j (1-P_L)^{N-j} = 1-\alpha \tag{5-1}$$

または近似値ならば、式(4-6)、(4-7)を用いれば  $P_{nL}$  が求められる。

ここでは目安となる試行回数のうち、最も少なくすむ  $n_f = 0$  の場合の  $N = 299$  と設定して評価した結果を表 5-3 に示す。また接地状態のばらつきの例を図 5-5 に示す。この結果、失敗ケースが 6 回現れ、299 回の試行の失敗確率は  $\hat{P}_f = 6/299 = 0.0201$  となった。また、表 5-3 の右側には失敗ケースの内訳を記す。飛行運動が不安定となって接地に至らなかった場合が 1 ケース、表

5-2 の接地基準を満足できなかった場合が 5 ケースであった。接地基準を満たさなかったものは、沈下率要求を超過したものが 4 ケース、対地速度要求を超過したものが 1 ケースであった。

このとき、それぞれ片側が危険率  $\alpha$  である下側、上側の信頼限界を算出すると  $[0.00877, 0.0392]$  であり、要求値  $P_{req} = 0.01$  はこの区間内に含まれる。したがって、この結果からはシステムが要求を満足するか、しないかの統計的な判定はできない。ただし、試行結果の失敗確率は 0.02 程度であり、このまま試行回数を増やして信頼区間幅を小さくしていくと要求を満足できなくなりそうであるという、大まかな見当をつけることはできる。次の項では、判定可能になるまで逐次信頼区間を算出する、自動終了判定の実行結果について述べる。

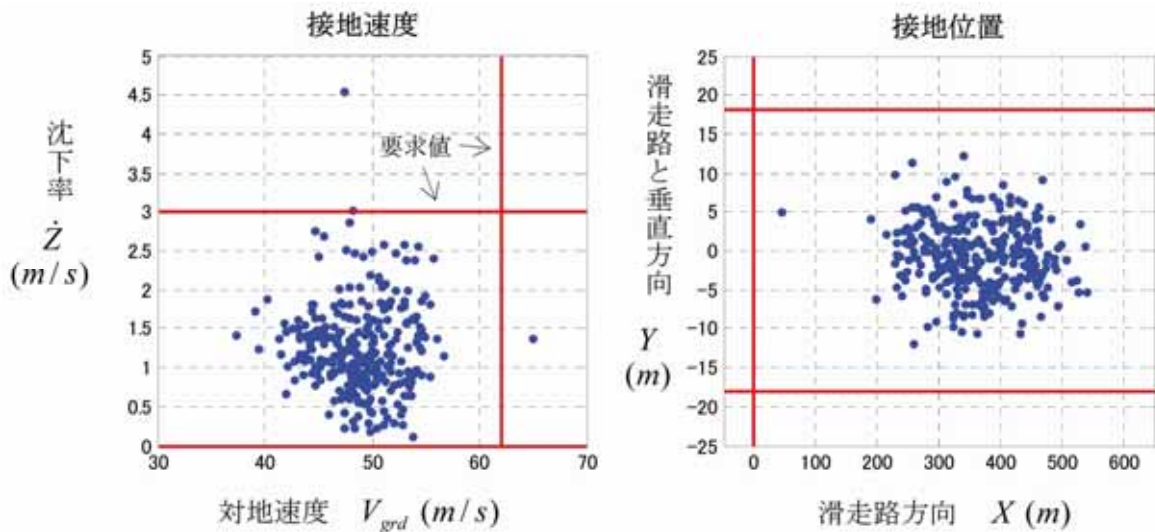


図 5-5 モンテカルロ評価結果：接地時状態量のばらつき ( $N = 299$ )

表 5-2 ALFLEX 評価基準

	接地時パラメタ	許容範囲	単位
縦運動	X 位置	$0 \leq X \leq 1000$	(m)
	沈下率	$\dot{Z} \leq 3.0$	(m/s)
	対地速度	$V_{grd} \leq 62.0$	(m/s)
	ピッチ角	$\Theta \leq 23.0$	(deg)
横運動	Y 位置	$ Y  \leq 18.0$	(m)
	ロール角	$ \Phi  \leq 10.0$	(deg)
	方位角	$ \Psi  \leq 8.0$	(deg)

表 5-3 モンテカルロ評価結果 ( $N_{req} = 299$ )

変数名	モンテカルロ 評価結果	失敗ケース 内訳	結果
$P_{req}$	0.01	不安定飛行	1
$N_{req}$	299	接地要求逸脱	5
$n_f$	6	$X$	0
$\hat{P}_f$	0.0201	$Z$	4
$[P_L, P_U]$	[0.00877, 0.0392]	$V_{grd}$	1
$[P_{nL}, P_{nU}]$	[0.00928, 0.0405]	$\Theta$	0
		$Y$	0
		$\Phi$	0
		$\Psi$	0

5.3.3 自動終了判定

先の例では式(4-2)により算出した試行回数  $N_{req}$  を用いたが、要求を満足するかないかの統計的判定はできなかった。そこで次に 4.3 節で述べた自動終了判定法を用いて、モンテカルロ評価を実行しながら逐次信頼区間を計算し、自動で要求の満足の可否を判定することを試みた。この計算手順は、図 4-5 に示されるものである。判定できるまで飛行シミュレーションを継続するため、この場合はあらかじめ試行回数は設定しない。評価の結果として試行回数  $N$  は明らかになる。

ここで注意すべきは、要求値  $P_{req}$  が真の失敗確率に近い値であるときには、信頼区間が小さくなければ要求の満足／不満足は判定できなくなり、 $N$  が極めて大きくなる可能性があるということである。従って、許容できる最大の試行回数  $N_{max}$  をあらかじめ設定しておき、 $N_{max}$  に達すれば判定できなくても評価を終了することも必要である。

前節と同様に、失敗確率の要求値を  $P_{req} = 0.01$  とし、モンテカルロ評価を実施した。その結果を表 5-4 (a) に示す。その結果、試行回数は式(4-2)により算出した  $N_{req}$  に比べて約 1.7 倍の 512 回となった。このときの下側限界の近似値は  $P'_{nL} = 0.0106$  であり、確かに要求値 0.01 を満たさないと判定できる。式(5-1)によりオフラインで計算した二項分布の正確な下側限界は  $P_L = 0.0121$  であり、確かに正確な信頼区間も要求値を含んでおらず、近似値の補正式(4-8)、(4-10)が有効に機能していることが確認できる。

次に要求値を変更し、 $P_{req} = 0.05$  とした場合のモン

テカルロ評価結果を表 5-4 (b) に示す。今度は、試行回数  $N = 189$  と大幅に低下した。信頼区間上限の近似値が  $P_{nU} = 0.0498$  で要求値以下となるため、システムは要求される失敗確率を満足すると判定できることがわかる。この場合も、式(3-4)からオフラインで算出した二項分布の正確な上限値は  $P_U = 0.0478$  であり、やはり要求値以下であるので、近似式(3-19)は有効に機能していることが確認できる。今回試行回数が少なくとも判定できたのは、要求値  $P_{req}$  が標本の失敗確率  $\hat{P}_f$  とある程度離れていたために、判定にそれほど小さな信頼区間幅が必要なかったからである。

最後に、要求値  $P_{req}$  が  $\hat{P}_f$  に極めて近い例として、 $P_{req} = 0.02$  と設定した。この場合のモンテカルロ評価結果を表 5-4 (c) に示す。結果として得られた評価回数は  $N = 9175$  であり、かなりの試行回数を必要とすることがわかる。 $\hat{P}_f = 0.0230$  で、信頼区間下限  $P_{nL}$  は殆ど要求値と一致したところで、要求を満足しないと判定されていることがわかる。このように、設定した  $P_{req}$  が  $\hat{P}_f$  に近い値である場合には、判定するための試行回数が増大する。

以上、失敗確率の要求値を設定して自動終了判定することの利点をまとめると、確実に要求値を満足するかどうかの判定ができるまで評価を継続すること、及び判定に不要な試行は省略でき、モンテカルロ評価の作業効率を向上させることが可能となることである。

表 5-4 (a) 自動終了判定結果 ( $P_{req} = 0.01$ )

変数名	モンテカルロ 評価結果	失敗ケース 内訳	結果
$P_{req}$	<b>0.01</b>	不安定飛行	2
$N$	<b>512</b>	接地要求逸脱	9
$n_f$	11	$X$	0
$\hat{P}_f$	0.0215	$\dot{Z}$	8
$P'_{nL}$ or $P_{nU}$	$P'_{nL}=0.0106$ $(P_L=0.0121)$	$V_{grd}$	1
		$\Theta$	0
		$Y$	0
		$\Phi$	0
		$\Psi$	0

表 5-4 (b) 自動終了判定結果 ( $P_{req} = 0.05$ )

変数名	モンテカルロ 評価結果	失敗ケース 内訳	結果
$P_{req}$	<b>0.05</b>	不安定飛行	1
$N$	<b>189</b>	接地要求逸脱	3
$n_f$	4	$X$	0
$\hat{P}_f$	0.0212	$\dot{Z}$	2
$P'_{nL}$ or $P_{nU}$	$P_{nU}=0.0498$ $(P_U=0.0478)$	$V_{grd}$	1
		$\Theta$	0
		$Y$	0
		$\Phi$	0
		$\Psi$	0

表 5-4 (c) 自動終了判定結果 ( $P_{req} = 0.02$ )

変数名	モンテカルロ 評価結果	失敗ケース 内訳	失敗数
$P_{req}$	<b>0.02</b>	不安定飛行	27
$N$	<b>9,175</b>	接地要求逸脱	184
$n_f$	211	$X$	22
$\hat{P}_f$	0.0230	$\dot{Z}$	159
$P'_{nL}$ or $P_{nU}$	$P'_{nL}=0.0200$ $(P_L=0.0205)$	$V_{grd}$	27
		$\Theta$	1
		$Y$	2
		$\Phi$	0
		$\Psi$	9

### まとめ

モンテカルロ法は数値的に標本調査を行うことであり、多数の不確定パラメータを考慮した場合の膨大な非線形モデル空間を調査し、母集団特性を推定する方法である。このため、母集団特性を推定するための信頼区間の概念が重要となる。そこでモンテカルロ評価結果を、システム要求を満足するか、しないか、の二項分布として取り扱い、ミッション達成確率の推定に必要な信頼区間について述べた。また、実用上の利便性が高い、高精度の正規分布近似による信頼区間を導出した。

モンテカルロ法は計算負荷が大きな手法であるため、できるだけ少ない試行回数で必要とする結果を得ることが望まれる。このため試行回数について検討し、信頼区間を考慮した試行回数を導出した。さらに、正規分布近似による信頼区間を利用して、評価計算の自動終了判定法を提案した。最後に航空宇宙機の開発例として小型自動着陸実験(ALFLEX)を取り上げ、実際のシステムに対するモンテカルロ評価の適用例を示した。

モンテカルロ法は、計算機能力の向上と共にその利便性は益々高まっており、今後も様々なプロジェクトにおいて利用されていくものと考えられる。今後の航空宇宙機の開発において、モンテカルロ法が適用される際にこれらの検討内容が参考になり、プロジェクトの成功にいくらかでも貢献できるとすれば幸いである。

### 参考文献

- 1) Shakarian, A., "Application of Monte-Carlo Techniques to the 757/767 Autoland Dispersion Analysis by Simulation," AIAA Paper 83-2193, Aug. 1983.
- 2) Ray, L. R. and Stengel, R. F., "Application of Stochastic Robustness to Aircraft Control Systems," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 14, No. 6, 1991, pp.1251-1259.
- 3) Ray, L.R. and Stengel, R. F., "A Monte Carlo Approach to the Analysis of Control System Robustness," Automatica, Vol. 29, No. 1, 1993, pp. 229-236.
- 4) Desai, P. N., Schofield, J. T. and Lisano, M. E., "Flight Reconstruction of the Mars Pathfinder Disk-Gap-Band Parachute Drag Coefficients," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 42, No. 4, 2005, pp. 672-676.
- 5) Mase, R. A., Antreasian, P. G., Bell, J. L., Martin-Mur, T. J. and Smith Jr., J. C., "Mars Odyssey Navigation Experience," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 42, No. 3, 2005, pp. 386-393.
- 6) Motoda, T., Miyazawa, Y., Ishikawa, K. and Izumi, T., "Automatic Landing Flight Experiment Flight Simulation Analysis and Flight Testing," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 36, No. 4, 1999, pp. 554-560.
- 7) 二宮哲次郎, 鈴木広一, 塚本太郎, 「高速飛行実証機フェーズ II の誘導制御系評価」, JAXA RR-04-002, 2004.
- 8) Hamada, Y., Ninomiya, T., Katayama, Y., Shinomiya, Y., Matsumoto, K., Yamamoto, M., Sawai, S., Ueno, S., and Hayashi, K., "Feasibility Study for Precise Lunar Landing using SELENE-B Lander Configuration," JAXA-RR-05-013E, 2005.
- 9) Miyazawa Y. and Motoda T., "Stochastic Parameter Tuning Applied to Space Vehicle Flight Control Design," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 24, No.3, 2001, pp.597-604 .
- 10) Schubert, W. M., and Stengel, R. F., "Parallel Synthesis of Robust Control Systems," IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 6, No. 6, 1998, pp. 701-706.
- 11) Motoda, T. and Miyazawa Y., "Identification of Influential Uncertainties in Monte Carlo Analysis," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 39, No. 4, 2002, pp. 615-623.
- 12) Motoda, T., "Simplified Approach to Identifying Influential Uncertainties in Monte Carlo Analysis," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 41, No. 6, 2004, pp. 1071-1075.
- 13) 元田敏和, 「モンテカルロ評価における危険不確定パラメータの検出法」, 日本航空宇宙学会論文集, Vol. 55, No. 638, 2007, pp. 117-124.
- 14) Marrison, C. I. and Stengel, R. F., "Robust Control System Design Using Random Search and Genetic Algorithms," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, No. 6, 1997, pp. 835-839.
- 15) Marrison, C. I. and Stengel, R. F., "Design of Robust Control Systems for Hypersonic Aircraft," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 21, No. 1, 1998, pp. 58-63.
- 16) Miyazawa Y., Motoda T., Izumi, T. and Hata, T., "Longitudinal Landing Control Law for an Autonomous reentry vehicle," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 22, No. 6, 1999, pp. 791-800.
- 17) Motoda, T., Stengel, R. F. and Miyazawa, Y., "Robust Control System Design Using Simulated Annealing," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 25, No. 2, 2002, pp. 267-274.
- 18) Mooney, C. Z., Monte Carlo Simulation, 1st ed., Sage Publications Inc., Thousand Oaks, CA, 1997, pp. 1-5,

46-49.

- 19) Stengel, R. F., Flight Dynamics, Princeton University Press, Princeton, 2004, pp. 375-385.
- 20) Stengel, R. F. and Ray, L. R., "Stochastic Robustness of Linear Time-Invariant Control Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 1, 1991.
- 21) Conover, W. J., Practical Nonparametric Statistics, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. 130-133.
- 22) 東京大学教養学部統計学教室編, 「統計学入門」, 東京大学出版会, 1997, pp.94-99, 111-113, 229-230.
- 23) NAL/NASDA HOPE 研究共同チーム ALFLEX サブグループ, 「小型自動着陸実験 (ALFLEX)」, 航空宇宙技術研究所報告 TR-1369, 1998.
- 24) Miyazawa, Y., Nagayasu, M., and Nakayasu, H., "Flight Testing of ALFLEX Guidance, Navigation and Control System," ICAS-98-1.1.3, Proceedings of the 21st Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, Melbourne, Australia, September 1998.
- 25) Miyazawa, Y., Ishikawa, K., Motoda, T., Izumi, T., Sagisaka, M., Hata, T. and Onuma, H., "Flight Control System for the Automatic Landing Flight Experiment", AIAA Paper 96-3782, July, 1996.
- 26) Tsukamoto T., Yanagihara, M., Nagayasu, M., Sagisaka, M., "ALFLEX Five Degrees of Freedom Hanging Flight Test", AIAA paper 97-3484, Aug. 1997.
- 27) Yanagihara, M., Shigemi, M., Suito, T., "Estimating Aerodynamic Characteristics of the ALFLEX Vehicle using Flight Test Data", AIAA paper 97-3485, Aug. 1997.
- 28) Okada, N, Tanaka, K., Ono, T. and Suito, T., "Landing Experiment and Ground Effects Estimation of Unmanned Reentry Vehicle", 28th Annual Symposium Proceedings, Society of Flight Test Engineers, Aug. 1997, pp.V-1-1 – V-1-12.
- 29) NAL/NASDA ALFLEX グループ, 「小型自動着陸実験機の飛行シミュレーションモデル」, 航空宇宙技術研究所報告 TR-1252, 1994.
- 30) Stevens, B.L., and Lewis, F. L., Aircraft Control and Simulation, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992, pp.51-110.



宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-07-005

---

発行 平成 19 年 12 月 28 日

編集・発行 宇宙航空研究開発機構

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町 7-44-1

URL : <http://www.jaxa.jp/>

印刷・製本 (有) ノースアイランド

---

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記にお願いいたします。

宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター

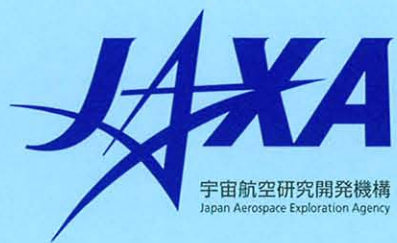
〒305-8505 茨城県つくば市千現 2-1-1

TEL : 029-868-2079 FAX : 029-868-2956

---

© 2007 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。



本書は再生紙を使用しております。

This document is provided by JAXA.