ISSN 1349-1113
JAXA-RR-07-002

宇宙航空研究開発機構研究開発報告
JAXA Research and Development Report

Straight line systemsの摂動系に対する衝撃波干渉条件について

岸　恭子，岩宮　敏幸，高橋　匡康

2007 年 10月

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

Straight line systems の摂動系に対する衝撃波干渉条件について*

岸　恭子 *1　　岩宮　敏幸 *1　　高橋　匡康 *1

On Shock Interaction Conditions for a Perturbation of Straight Line Systems*

Kyoko KISHI*1, Toshiyuki IWAMIYA*1 and Tadayasu TAKAHASHI*1

ABSTRACT

The purpose of this report is to prove the existence of 2×2 hyperbolic non-linear systems of conservation laws which satisfy shock interaction conditions such that different from Smoller-Johnson class. By using the fact that straight line systems reduce to two scalar conservation laws, we estimate shock interaction conditions for a certain perturbed system of straight line systems.

概　　要

本稿の目的は，Smoller-Johnson class とは異なる衝撃波干渉条件を満足する 2×2 非線形双曲型保存則系の存在を示すことである．Straight line system と呼ばれる系がスカラー保存則に帰着されることを用いて，Straight line system のある摂動系に対する衝撃波干渉条件の評価を行う．

1.　はじめに

本稿では，次の形の 2×2 双曲型保存則系

$$\begin{cases} u_t + f(u,v)_x = 0 \\ v_t + g(u,v)_x = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える．ここで $t > 0$，$-\infty < x < \infty$ とし，$u = u(t,x)$，$v = v(t,x)$ は未知関数とする．また $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は，$\mathcal{C}^2$-級関数で，$f_v g_u \neq 0$ を満たすものとする．

非線形双曲型保存則系においては，滑らかな初期関数に対してもその解が有限時間内に不連続性をもつという現象が知られている．このように有限時刻で解が不連続となる現象は，(u_l, v_l)，(u_r, v_r) から成る初期値：

$$\big(u(0,x), v(0,x)\big) = \begin{cases} (u_l, v_l) & x < 0 \\ (u_r, b_r) & x > 0 \end{cases}$$

とする，いわゆる Riemann 問題として一般化され，その解は衝撃波 (shock wave) 及び膨張波 (rarefaction wave) として求められる（Riemann 問題とその解の存在や一意性，また衝撃波及び膨張波などについての詳細に関しては，[8] などの文献を参照されたい）．

Riemann 問題が可解であるためには，衝撃波曲線 (shock curve) 及び膨張波曲線 (rarefaction curve) が大域的に存在することが必要となる．

本稿では, Temple class の特別な例である straight line system がスカラー保存則に分解できることを用いて，その摂動系に対する衝撃波干渉条件 (shock interaction condition) の正負に関する評価を行い，Smoller-Johnson class とは異なる衝撃波干渉条件を満足する系が存在することを述べる．衝撃波干渉条件は, 衝撃波の干渉後に起こる現象の幾何学的特徴付けを与える条件であり ([4]，[9])，衝撃波曲線の大域的存在を保証する条件として期待され

*　平成 19 年 4 月 27 日受付 (Received 27 April, 2007)
*1　総合技術研究本部 計算科学研究グループ (Computational Science Research Group, Institute of Aerospace Technology)

るものである．

2. 衝撃波干渉条件

2.1 固有ベクトルの正規化

系 (1.1) の流束関数

$$F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

に対する Jacobian 行列を

$$\nabla F = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

とする．∇F は相異なる実固有値をもつとし，それらの実固有値を

(2.1) $$\lambda_1(u,v) < \lambda_2(u,v)$$

とする．これは，系 (1.1) が strictly hyperbolic ([5]) であることを意味している．

Remark 2.1. 系 (1.1) の固有値 λ_i に対して，以下が成立する：

(i) $f_v g_u > 0$ のとき，

$$\lambda_1 < \min\{f_u, g_v\} \le \max\{f_u, g_v\} < \lambda_2.$$

(ii) $f_v g_u < 0$ のとき，

$$\min\{f_u, g_v\} < \lambda_1 < \lambda_2 < \max\{f_u, g_v\}.$$

系 (1.1) の固有値 λ_1，λ_2 に対応する右固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，左固有ベクトルを $\boldsymbol{\ell}_1$，$\boldsymbol{\ell}_2$ で表し，次のような正規化を仮定する：

(2.2) $$\nabla\lambda_i \cdot \boldsymbol{r}_i > 0 \qquad \text{for } i = 1, 2,$$

(2.3) $$\boldsymbol{\ell}_i \cdot \boldsymbol{r}_i > 0 \qquad \text{for } i = 1, 2.$$

ここで (2.2) 式は genuinely nonlinear ([5]) であることを意味している．

2.2 衝撃波干渉条件

F の 2 階 Fréchet 微分を

$$\nabla^2 F(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r_i}^T \cdot \nabla^2 f \cdot \boldsymbol{r}_i \\ \boldsymbol{r_i}^T \cdot \nabla^2 g \cdot \boldsymbol{r}_i \end{pmatrix}$$

で表す．ここで $\nabla^2 f$，$\nabla^2 g$ は Hessian 行列

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}$$

である．

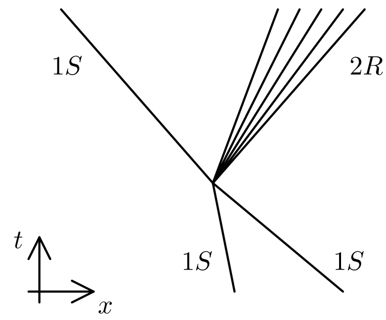
衝撃波が干渉することによって新たに発生する衝撃波または膨張波に対する指標として，次のスカラー値

$$\boldsymbol{\ell}_j \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i) \qquad (i, j = 1, 2,\ i \ne j)$$

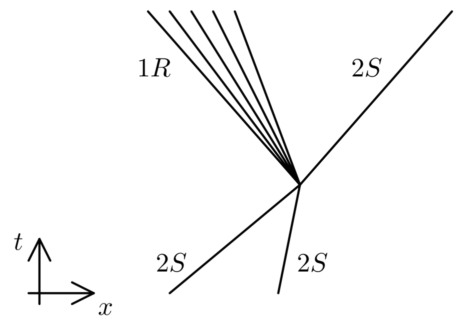
が用いられる ([9])．但しここで $\boldsymbol{r}_i$ 及び $\boldsymbol{\ell}_i$ は，系 (1.1) の正規化された右固有ベクトル及び左固有ベクトルとする．

スカラー値 $\boldsymbol{\ell}_j \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i)$ の正負は，同じ固有値に対応する衝撃波が干渉した場合に新たに発生する波を特徴付けるものである．このことを以下の (i)〜(iv) に図示した．但し，iS は λ_i に対応する衝撃波，iR は λ_i に対応する 膨張波を表すものとする ($i = 1$, 2).

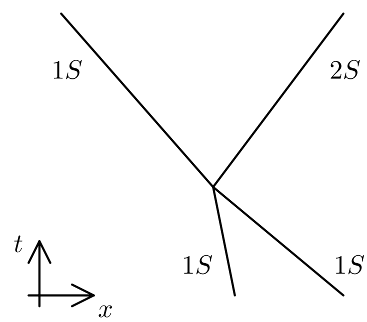
(i) $\boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) > 0$ の場合，$1S$ と $1S$ が干渉すると，$1S$ と $2R$ が発生する．



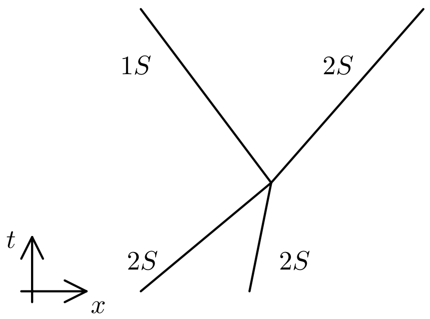
(ii) $\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) > 0$ の場合，$2S$ と $2S$ が干渉すると，$1R$ と $2S$ が発生する．



(iii) $\boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) < 0$ の場合，$1S$ と $1S$ が干渉すると，$1S$ と $2S$ が発生する．



(iv) $\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) < 0$ の場合，$2S$ と $2S$ が干渉すると，$1S$ と $2S$ が発生する．

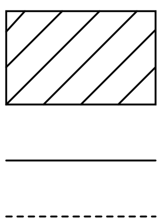


特に，

(2.4)
$$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) > 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) > 0 \end{cases}$$

の場合，これらの式は Glimm-Lax の**衝撃波干渉条件 (shock interaction condition)** と呼ばれ ([4])，これらを満足する系の class は **Smoller-Johnson class** として知られている．

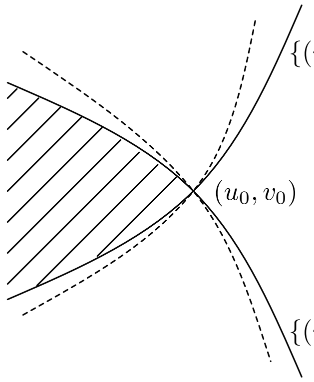
文献 [9] と同様の考察によって，(2.4) 以外の衝撃波干渉条件に対しても，衝撃波曲線及び膨張波曲線の幾何的な構造を知ることができる．このことを以下に図示する．（なお，図中の矢印 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ は点 (u_0, v_0) における右固有ベクトルの向きを示すものとする）


：invariant region

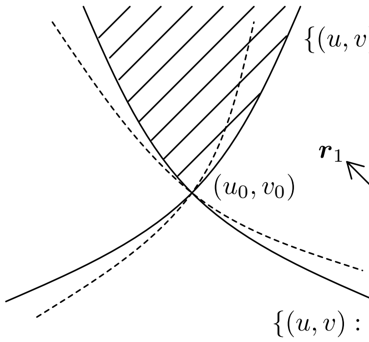
：膨張波曲線

：衝撃波曲線

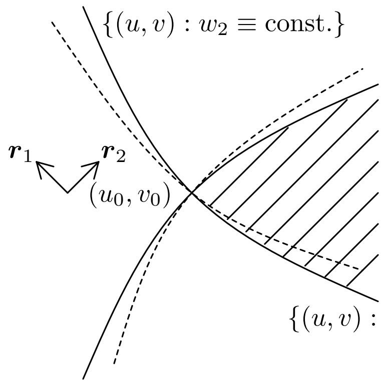
1) $\boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) > 0, \quad \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) > 0$



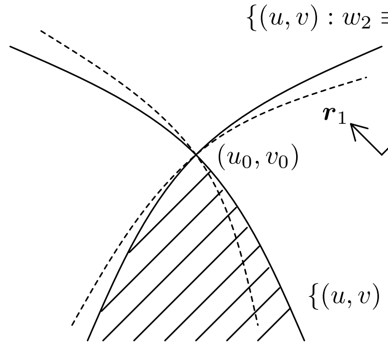
2) $\boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) < 0, \quad \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) > 0$



3) $\boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) < 0, \quad \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) < 0$



4) $\boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) > 0, \quad \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) < 0$



以下では，(u, v)-空間において局所的に衝撃波干渉条件 2)〜4) を満足する系の存在について考察する．

3. Temple class と straight line system

本節では，Temple class と呼ばれる系と，その特別な例である straight line system について述べる．特に，straight line system の持ついくつかの重要な性質を示す．

Temple class 及び straight line system は以下のように定義される．尚，Temple class に対する解の安定性に

ついては文献 [1]，[2] などを，差分近似については [3]，[7]，[11] などを参照されたい．

Definition 3.1. 系 (1.1) において衝撃波曲線と膨張波曲線が一致するとき，系 (1.1) は **Temple class に属する**という ([10])．特に，Riemann 不変量から成る座標系 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ に対して，その等値線 $\{(u,v) : w_i(u,v) = const.\}$ $(i = 1, 2)$ が直線となるとき, 系 (1.1) を **straight line system** という．

Definition 3.1 で定義された class に関して，次の結果が知られている．

Theorem 3.1 ([10])**.** 系 (1.1) の右固有ベクトルを

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$$

とし p，q が Riemann 不変量であると仮定する．このとき，以下は同値である：

(i) 系 (1.1) が straight line system となる．
(ii) ある関数 $H_1(\cdot)$，$H_2(\cdot)$ が存在して

$$\begin{cases} f = \dfrac{H_1(p) - H_2(q)}{q - p} \\ g = \dfrac{qH_1(p) - pH_2(q)}{q - p} \end{cases}$$

と表せる．

Remark 3.1. 系 (1.1) が straight line system であるとき，Riemann 不変量 w_i $(i = 1, 2)$ は $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ を満たす実数 a_i，b_i を用いて

$$\begin{cases} w_1 = a_1u + b_1v \\ w_2 = a_2u + b_2v \end{cases}$$

と表すことができる．このとき，次の Theorem 3.2 からもわかるように，衝撃波曲線と膨張波曲線は一致し，$\{w_i \equiv const.\}$ で表せる直線となる．

Theorem 3.1 と同様の証明法により，次の Theorem を得る（ここでは議論の簡単化のため，上の Remark に述べた Riemann 不変量に対して $b_1 = b_2 = 1$ とする)．

Theorem 3.2. 系 (1.1) は straight line system とする．$a_1 \neq a_2$ なる $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対し系 (1.1) の Riemann 不変量 w_1，w_2 を

$$\begin{cases} w_1 = a_1u + v \\ w_2 = a_2u + v \end{cases} \tag{3.1}$$

と表記すると，

$$\begin{cases} a_1f(u,v) + g(u,v) = \phi(a_1u + v) \\ a_2f(u,v) + g(u,v) = \psi(a_2u + v) \end{cases} \tag{3.2}$$

なる実数値関数 ϕ 及び ψ が存在して，系 (1.1) は互いに独立したスカラー保存則

$$\begin{aligned} &(a_1u + v)_t + \phi(a_1u + v)_x = 0, \\ &(a_2u + v)_t + \psi(a_2u + v)_x = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

に帰着される．またこのとき, 系 (1.1) の固有値 $\lambda_1(u,v)$，$\lambda_2(u,v)$ に対して次が成立する：

$$\begin{aligned} \psi'(a_2u + v) &= \lambda_1(u,v) \\ &< \lambda_2(u,v) = \phi'(a_1u + v). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Proof. $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ を任意に選び固定する．

点 (u_0, v_0) を通る衝撃波曲線上の点 $(u,v) \neq (u_0, v_0)$ に対して Rankine-Hugöniot 条件：

$$\begin{cases} \sigma(u - u_0) = f(u,v) - f(u_0,v_0) \\ \sigma(v - v_0) = g(u,v) - g(u_0,v_0) \end{cases}$$

が成立している．ここから衝撃波速度 σ を消去すると

$$\frac{f(u,v) - f(u_0,v_0)}{u - u_0} = \frac{g(u,v) - g(u_0,v_0)}{v - v_0}$$

を得る．

系 (1.1) が straight line system であるとすると，λ_i に対応する衝撃波曲線（及び膨張波曲線）は $\{(u,v) \mid w_i(u,v) = const.\}$，$i = 1, 2$, で表すことができる．従って (3.1) 式より λ_1 に対応する衝撃波曲線上の点 (u,v) に対して $a_1(u - u_0) + (v - v_0) = 0$ が成立し，

$$\begin{aligned} &\frac{f(u,v) - f(u_0,v_0)}{u - u_0} - \frac{g(u,v) - g(u_0,v_0)}{v - v_0} \\ &\quad = \frac{f(u,v) - f(u_0,v_0)}{u - u_0} - \frac{g(u,v) - g(u_0,v_0)}{-a_1(u - u_0)} \\ &\quad = \frac{a_1\big(f(u,v) - f(u_0,v_0)\big) + \big(g(u,v) - g(u_0,v_0)\big)}{a_1(u - u_0)} \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

を得る．従って

$$a_1\big(f(u,v) - f(u_0,v_0)\big) + \big(g(u,v) - g(u_0,v_0)\big) \equiv 0$$

が成立する．このことから，w_1 を変数とするある実数値関数 $\phi = \phi(w_1)$ が存在して $a_1f(u,v) + g(u,v) = \phi(w_1)$ と表せることがわかる．

また，λ_2 に対応する衝撃波曲線上の点 (u,v) に対して同様の考察を行うことにより，w_2 を変数とする実数値関数 $\psi = \psi(w_2)$ が存在して $a_2f(u,v) + g(u,v) = \phi(w_2)$ と表せることがわかる．

以上により，(3.1) 式が成立するならば，(3.2) を満足する ϕ，ψ が存在することが示された．さらに，(3.3) 式並びに (3.4) 式は (3.2) 式から自明である．

(3.2) を仮定すると，Riemann 不変量 w_1，w_2 は (3.1) のように表記されることが容易にわかる．従って，上の議論を逆にたどることにより，衝撃波曲線と膨張波曲線が一致することを示すことができる．///

Remark 3.2. (3.4) 式は，λ_1 は上に有界，且つ λ_2 は下に有界であることを示している．

さらに，Theorem 3.2 と同様の仮定のもとで，系 (1.1) の固有値・固有ベクトルに対し次の Proposition が成立することがわかる．

Proposition 3.1. 系 (1.1) が straight line system であるとき，Riemann 不変量を (3.1) で定めると，右固有ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ 及び固有値 λ_i $(i = 1,\ 2)$ に対して次が成立する：

(i) $\boldsymbol{r}_1 = \pm\begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\nabla\lambda_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 = \mp(a_1 - a_2)\psi'' \quad (\text{複号同順}), \tag{3.5}$$

(ii) $\boldsymbol{r}_2 = \pm\begin{pmatrix} 1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\nabla\lambda_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 = \pm(a_1 - a_2)\phi'' \quad (\text{複号同順}). \tag{3.6}$$

Proof. (3.4) より

$$\begin{cases} \nabla\lambda_1 = (a_2\psi'', \psi'') \\ \nabla\lambda_2 = (a_1\phi'', \phi'') \end{cases}$$

となり，$i = 1,\ 2$ に対して

$$\nabla\lambda_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \begin{cases} \mp(a_1 - a_2)\psi'' & (i = 1) \\ \pm(a_1 - a_2)\phi'' & (i = 2). \end{cases}$$

を得る．///

この Proposition は，Straight line system (1.1) の右固有ベクトルの向きと，関数 ϕ 及び ψ の凹凸性との対応関係を示すものである．またこの場合，(2.2) より系 (1.1) に対する正規化された右固有ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ は次のように書ける：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1 = -(\operatorname{sgn}\{(a_1 - a_2)\psi''\})\begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{r}_2 = (\operatorname{sgn}\{(a_1 - a_2)\phi''\})\begin{pmatrix} 1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.7}$$

但し

$$\operatorname{sgn} h = \begin{cases} -1 & h < 0 \\ 0 & h = 0 \\ +1 & h > 0. \end{cases}$$

さらに，(2.3) より正規化された左固有ベクトル $\boldsymbol{\ell}_i$ は

$$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_1 = (\operatorname{sgn}\psi'')(a_2, 1) \\ \boldsymbol{\ell}_2 = (\operatorname{sgn}\phi'')(a_1, 1) \end{cases} \tag{3.8}$$

と書くことができる．

次の Proposition は，straight line system の重要な特徴を示すものである．

Proposition 3.2. straight line system に対して恒等式

$$\boldsymbol{\ell}_j \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i) \equiv 0 \qquad (i, j = 1, 2,\ i \neq j)$$

が成立する．

Proof. ここでは $\boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) \equiv 0$ に対する証明のみを与える．

Theorem 3.2 と同様に，Riemann 不変量は (3.1) で与えるものとする．このとき，関係式 (3.2) から，f，g に対する 1 階及び 2 階の偏微分は，ϕ，ψ を用いて以下のように表すことができる．

$$\begin{cases} f_u = \dfrac{1}{a_1 - a_2}(a_1\phi' - a_2\psi') \\ f_v = \dfrac{1}{a_1 - a_2}(\phi' - \psi') \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_u = -\dfrac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}(\phi' - \psi') \\ g_v = -\dfrac{1}{a_1 - a_2}(a_2\phi' - a_1\psi'), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{uu} = \dfrac{1}{a_1 - a_2}({a_1}^2\phi'' - {a_2}^2\psi'') \\ f_{uv} = \dfrac{1}{a_1 - a_2}(a_1\phi'' - a_2\psi'') \\ f_{vv} = \dfrac{1}{a_1 - a_2}(\phi'' - \psi'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{uu} = -\dfrac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}(a_1\phi'' - a_2\psi'') \\ g_{uv} = -\dfrac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}(\phi'' - \psi'') \\ g_{vv} = -\dfrac{1}{a_1 - a_2}(a_2\phi'' - a_1\psi''). \end{cases}$$

これらの関係式と (3.7) 式から，

$$\nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) = \begin{pmatrix} f_{uu} - 2a_1 f_{uv} + {a_1}^2 f_{vv} \\ g_{uu} - 2a_1 g_{uv} + {a_1}^2 g_{vv} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a_1-a_2)^2}\begin{pmatrix} -(a_1-a_2)^2\psi'' \\ a_1(a_1-a_2)^2\psi'' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix}\psi''$$

となり，これに (3.8) 式で表された左固有ベクトル $\boldsymbol{\ell}_2$ をかけることによって

$$\boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) = (\operatorname{sgn}\phi'')(a_1, 1)\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \end{pmatrix}\psi'' = 0$$

を得る．///

4. 基本的な衝撃波干渉条件

系 (1.1) に対するスカラー値 $\boldsymbol{\ell}_j \cdot \nabla^2 F\big(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i\big)$ の正負の基本的な組み合わせとして，以下の 4 つが考えられる：

1) $$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) > 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) > 0 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) < 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) > 0 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) < 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) < 0 \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1) > 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2) < 0. \end{cases}$$

本稿では，1)〜4) の条件全てを「衝撃波干渉条件」と呼ぶこととし，これらを満足する系の存在について述べる．

4.1 straight line system の摂動系

本節では，系 (1.1) を straight line system に属するものとし，簡単のため θ を正の実数とし，次のような一次の摂動系を考える：

(4.1) $$\begin{cases} u_t + f(u,v)_x + \theta u_x = 0 \\ v_t + g(u,v)_x = 0. \end{cases}$$

以下では，正の実数 M に対して，Ω_M を次によって定義される $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする：

$$\Omega_M \overset{\text{def}}{=} \big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : |u|, |v| \le M\big\}.$$

系 (4.1) の Jacobian 行列は

$$\nabla F(\theta) = \begin{pmatrix} f_u+\theta & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix},$$

行列 $\nabla F(\theta)$ の固有値は

$$\lambda_1(\theta) = \frac{1}{2}\Big\{(f_u+g_v+\theta) - \sqrt{(f_u-g_v+\theta)^2 + 4f_v g_u}\Big\},$$
$$\lambda_2(\theta) = \frac{1}{2}\Big\{(f_u+g_v+\theta) + \sqrt{(f_u-g_v+\theta)^2 + 4f_v g_u}\Big\}$$

と表される．また，各 $\lambda_i(\theta)$ $(i=1,2)$ に対する右固有ベクトルを $\boldsymbol{r}_i(\theta)$，左固有ベクトルを $\boldsymbol{\ell}_j(\theta)$ とし，(2.2), (2.3) によってこれらを正規化すると，次の Proposition のように表すことができる．

Proposition 4.1. ϕ 及び ψ は Theorem 3.2 (3.2) 式で得られた関数とする．系 (4.1) に対する固有値 $\lambda_i(\theta)$ に対して $\alpha_i(\theta)$ を

$$\alpha_i(\theta) = \frac{(f_u+\theta) - \lambda_i(\theta)}{f_v}$$

で定める．このとき，任意の $M > 0$ に対してある実数 $\theta_M > 0$ が存在し，$0 < \theta < \theta_M$ なる θ 及び $(u,v)\in\Omega_M$ に対して以下のことが成立する．

系 (4.1) の正規化された右固有ベクトル $\boldsymbol{r}_i(\theta)$ は

(4.2) $$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1(\theta) = -(\operatorname{sgn}(a_1-a_2)\psi'')\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_1(\theta) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{r}_2(\theta) = (\operatorname{sgn}(a_1-a_2)\phi'')\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_2(\theta) \end{pmatrix} \end{cases}$$

と書け，左固有ベクトル $\boldsymbol{\ell}_i(\theta)$ は

(4.3) $$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_1(\theta) = (\operatorname{sgn}\psi'')(\alpha_2(\theta), 1) \\ \boldsymbol{\ell}_2(\theta) = (\operatorname{sgn}\phi'')(\alpha_2(\theta), 1) \end{cases}$$

と書ける．

Proof. (3.5)，(3.6) より，(4.2) で定めた $\boldsymbol{r}_i(\theta)$ に対し

$$\nabla\lambda_i(0)\cdot\boldsymbol{r}_i(0) = \nabla\lambda_i\cdot\boldsymbol{r}_i > 0$$

が成立していることがわかる．但し λ_i，$\boldsymbol{r}_i$ は系 (1.1) に対する固有値並びに正規化された右固有ベクトルとする．

(2.1) 式からわかるように，

$$\nabla\lambda_i(\theta) = \Big(\big(\lambda_i(\theta)\big)_u, \big(\lambda_i(\theta)\big)_v\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (f_u+g_v)_u \mp \dfrac{(f_u-g_v+\theta)(f_u-g_v)_u + 2(f_v g_u)_u}{\sqrt{(f_u-g_v+\theta)^2+4f_v g_u}} \\ (f_u+g_v)_v \mp \dfrac{(f_u-g_v+\theta)(f_u-g_v)_v + 2(f_v g_u)_v}{\sqrt{(f_u-g_v+\theta)^2+4f_v g_u}} \end{pmatrix}^T$$

の各成分は $\theta \geq 0$ に関する連続関数である．$\alpha_i(\theta)$ は $\theta \geq 0$ に関する連続関数であるから，

$$\begin{aligned}
&\nabla\lambda_1(\theta)\cdot\boldsymbol{r}_1(\theta)\\
&= -(\mathrm{sgn}(a_1-a_2)\psi'')\Big(\big(\lambda_1(\theta)\big)_u, \big(\lambda_1(\theta)\big)_v\Big)\\
&\qquad\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_1(\theta)\end{pmatrix}\\
&= -(\mathrm{sgn}(a_1-a_2)\psi'')\Big(\big(\lambda_1(\theta)\big)_u - \alpha_1(\theta)\big(\lambda_1(\theta)\big)_v\Big)
\end{aligned}$$

並びに

$$\begin{aligned}
&\nabla\lambda_2(\theta)\cdot\boldsymbol{r}_2(\theta)\\
&= (\mathrm{sgn}(a_1-a_2)\phi'')\Big(\big(\lambda_2(\theta)\big)_u, \big(\lambda_2(\theta)\big)_v\Big)\\
&\qquad\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_2(\theta)\end{pmatrix}\\
&= (\mathrm{sgn}(a_1-a_2)\phi'')\Big(\big(\lambda_2(\theta)\big)_u - \alpha_2(\theta)\big(\lambda_2(\theta)\big)_v\Big)
\end{aligned}$$

は $\theta \geq 0$ に関して連続である．

従って，(4.2) は系 (4.1) の正規化された右固有ベクトルであり，(4.3) は正規化された左固有ベクトルであることが示される．///

(4.2)，(4.3) より，摂動系 (4.1) に応じるスカラー値 $\boldsymbol{\ell}_j(\theta)\cdot\nabla^2F\big(\boldsymbol{r}_i(\theta),\boldsymbol{r}_i(\theta)\big)$ は，次のようにかける：

Proposition 4.2. 摂動系 (4.1) の左固有ベクトル $\boldsymbol{\ell}_j(\theta) = \pm(\alpha_i(\theta),1)$，$i,j=1,2$，$i\neq j$ に対し

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\ell}_j(\theta)\cdot\nabla^2F\big(\boldsymbol{r}_i(\theta),\boldsymbol{r}_i(\theta)\big)\\
&= \pm\frac{\alpha_i(\theta)-a_i}{a_1-a_2}\cdot\big(\alpha_i(\theta)-a_j\big)\\
&\qquad\times\Big(\big(\alpha_i(\theta)-a_1\big)\phi'' - \big(\alpha_i(\theta)-a_2\big)\psi''\Big)
\end{aligned}$$

（複号同順）

と表せる．

Proof. Proposition 3.2 の証明で用いた f，g の 1 階及び 2 階微分を ϕ，ψ で表した関係式から，(4.1) に対する Hessian 行列 $\nabla^2F\big(\boldsymbol{r}_i(\theta),\boldsymbol{r}_i(\theta)\big)$ は以下のように表すことができる：

$$\begin{aligned}
&\nabla^2F\big(\boldsymbol{r}_i(\theta),\boldsymbol{r}_i(\theta)\big)\\
&= \begin{pmatrix} f_{uu}-2f_{uv}\alpha_i(\theta)+f_{vv}\alpha_i(\theta)^2 \\ g_{uu}-2g_{uv}\alpha_i(\theta)+g_{vv}\alpha_i(\theta)^2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{a_1-a_2}\\
&\quad\times\begin{pmatrix} \big(\alpha_i(\theta)-a_1\big)^2\phi''-\big(\alpha_i(\theta)-a_2\big)^2\psi'' \\ -a_2\big(\alpha_i(\theta)-a_1\big)^2\phi''+a_1\big(\alpha_i(\theta)-a_2\big)^2\psi''\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

但しここで $\boldsymbol{r}_i(\theta) = \pm\big(1,-\alpha_i(\theta)\big)^T$，$i = 1,2$ である．従って，$\boldsymbol{\ell}_j(\theta)=\pm(\alpha_i(\theta),1)$，$i,j=1,2$，$i\neq j$ とすると

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\ell}_j(\theta)\cdot\nabla^2F\big(\boldsymbol{r}_i(\theta),\boldsymbol{r}_i(\theta)\big)\\
&= \pm\frac{1}{a_1-a_2}\Big\{\big(\alpha_i(\theta)-a_1\big)^2\big(\alpha_i(\theta)-a_2\big)\phi''\\
&\qquad - \big(\alpha_i(\theta)-a_1\big)\big(\alpha_i(\theta)-a_2\big)^2\psi''\Big\}\\
&= \pm\frac{\big(\alpha_i(\theta)-a_1\big)\big(\alpha_i(\theta)-a_2\big)}{a_1-a_2}\\
&\qquad\times\Big(\big(\alpha_i(\theta)-a_1\big)\phi''-\big(\alpha_i(\theta)-a_2\big)\psi''\Big)\\
&= \pm\frac{\alpha_i(\theta)-a_i}{a_1-a_2}\cdot\big(\alpha_i(\theta)-a_j\big)\\
&\qquad\times\Big(\big(\alpha_i(\theta)-a_1\big)\phi''-\big(\alpha_i(\theta)-a_2\big)\psi''\Big)
\end{aligned}$$

（複号同順）

を得る．///

いま，

$$\begin{aligned}
P_1(\theta) &= (\mathrm{sgn}\,\phi'')\cdot\big(\alpha_1(\theta)-a_2\big)\\
&\qquad\times\Big(\big(\alpha_1(\theta)-a_1\big)\phi''-\big(\alpha_1(\theta)-a_2\big)\psi''\Big)\\
P_2(\theta) &= (\mathrm{sgn}\,\psi'')\cdot\big(\alpha_2(\theta)-a_1\big)\\
&\qquad\times\Big(\big(\alpha_2(\theta)-a_1\big)\phi''-\big(\alpha_2(\theta)-a_2\big)\psi''\Big)
\end{aligned}$$

と定めると，Proposition 4.1 (4.3) 及び Proposition 4.2 より

$$\begin{cases}
\boldsymbol{\ell}_2(\theta)\cdot\nabla^2F\big(\boldsymbol{r}_1(\theta),\boldsymbol{r}_1(\theta)\big)\\
\qquad\qquad = \dfrac{\alpha_1(\theta)-a_1}{a_1-a_2}\cdot P_1(\theta)\\
\boldsymbol{\ell}_1(\theta)\cdot\nabla^2F\big(\boldsymbol{r}_2(\theta),\boldsymbol{r}_2(\theta)\big)\\
\qquad\qquad = \dfrac{\alpha_2(\theta)-a_2}{a_1-a_2}\cdot P_2(\theta)
\end{cases}\tag{4.4}$$

と表せる．

以下では，摂動系 (4.1) に対する衝撃波干渉条件，すなわちスカラー値 $\boldsymbol{\ell}_j(\theta)\cdot\nabla^2F\big(\boldsymbol{r}_i(\theta),\boldsymbol{r}_i(\theta)\big)$ の正負を調べるため，(4.4) 式の右辺の各項 $(\alpha_i(\theta)-a_i)/(a_1-a_2)$ および $P_i(\theta)$ $(i=1,\,2)$ の正負について考察する．

まずはじめに，以下の Lemma を示すことができる．

Lemma 4.1. 任意の $M>0$ に対してある実数 $\theta_M>0$ が存在し，$0<\theta<\theta_M$ なる θ 及び $(u,v)\in\Omega_M$ について以下のことが成立する．

(I) $f_v g_u > 0$ のとき，

$$\frac{\alpha_i(\theta)-a_i}{a_1-a_2} > 0 \qquad (i=1,2)$$

(II) $f_v g_u < 0$ のとき，

(II$_1$) $f_u - g_v > 0$ ならば，

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1(\theta) - a_1}{a_1 - a_2} > 0 \\ \dfrac{\alpha_2(\theta) - a_2}{a_1 - a_2} < 0 \end{cases}$$

(II$_2$) $f_u - g_v < 0$ ならば，

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1(\theta) - a_1}{a_1 - a_2} < 0 \\ \dfrac{\alpha_2(\theta) - a_2}{a_1 - a_2} > 0 \end{cases}$$

Proof. $\theta = 0$ の場合には，摂動系 (4.1) は系 (1.1) に等しい．従って $i = 1, 2$ に対し $\dfrac{\alpha_i(0) - a_i}{a_1 - a_2} = \dfrac{a_i - a_i}{a_1 - a_2} = 0.$

以下では，θ についての関数

$$\frac{\alpha_i(\theta) - a_i}{a_1 - a_2}$$

の増減を調べるため，上の関数の θ に関する微分：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\alpha_i(\theta) - a_i}{a_1 - a_2}\right) \\ &= \frac{1}{a_1 - a_2}\frac{\partial\alpha_i(\theta)}{\partial\theta} \\ &= \frac{1}{\phi' - \psi'}\left(1 - \frac{\partial\lambda_i(\theta)}{\partial\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\phi' - \psi'}\left(1 \mp \frac{f_u - g_v + \theta}{\sqrt{(f_u - g_v + \theta)^2 + 4f_v g_u}}\right) \end{aligned}$$

について考える．

(I) $f_v g_u > 0$ を仮定する．このとき

$$\left|\frac{f_u - g_v + \theta}{\sqrt{(f_u - g_v + \theta)^2 + 4f_v g_u}}\right| < 1$$

であるから，

$$1 \mp \frac{f_u - g_v + \theta}{\sqrt{(f_u - g_v + \theta)^2 + 4f_v g_u}} > 0.$$

(3.4) 式より $\phi' - \psi' > 0$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\alpha_i(\theta) - a_i}{a_1 - a_2}\right) > 0$$

が成立し，$\dfrac{\alpha_i(\theta) - a_i}{a_1 - a_2}$ は θ に関する単調増加関数であることがわかる．従って $\theta > 0$ に対し

$$\frac{\alpha_i(\theta) - a_i}{a_1 - a_2} > 0.$$

(II) $f_v g_u < 0$ を仮定する．このとき

$$\left|\frac{f_u - g_v + \theta}{\sqrt{(f_u - g_v + \theta)^2 + 4f_v g_u}}\right| > 1$$

が成立している．

(II$_1$) $f_u - g_v > 0$ のとき，$f_u - g_v + \theta > 0$ であるから

$$\frac{f_u - g_v + \theta}{\sqrt{(f_u - g_v + \theta)^2 + 4f_v g_u}} > 1.$$

このとき

$$\begin{aligned} 1 - \frac{f_u - g_v + \theta}{\sqrt{(f_u - g_v + \theta)^2 + 4f_v g_u}} < 0, \\ 1 + \frac{f_u - g_v + \theta}{\sqrt{(f_u - g_v + \theta)^2 + 4f_v g_u}} > 0 \end{aligned}$$

となり，従って

$$\frac{\alpha_1(\theta) - a_1}{a_1 - a_2} < 0, \quad \frac{\alpha_2(\theta) - a_2}{a_1 - a_2} > 0$$

を得る．

(II$_2$) $f_u - g_v < 0$ のとき，$f_u - g_v + \theta < 0$ を満足するような充分小さい $\theta > 0$ をとれば

$$\frac{f_u - g_v + \theta}{\sqrt{(f_u - g_v + \theta)^2 + 4f_v g_u}} < -1.$$

以下 (II$_1$) と同様に示すことができる．///

Remark 4.1.

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(f_v g_u) = \mathrm{sgn}(a_1 a_2) \\ \mathrm{sgn}(f_v - g_u) = \mathrm{sgn}\,\dfrac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \end{cases}$$

であることに注意する．また, Lemma 4.1 において $\theta < 0$ を仮定すると，$(\alpha_i(\theta) - a_j)/(a_1 - a_2)$ $(i, j = 1, 2)$ の符号が反転することに注意する．

次に，$P_i(\theta)$ に対しては次の Lemma を示すことができる．

Lemma 4.2. 任意の $M > 0$ に対してある実数 $\theta_M > 0$ が存在し，$0 < \theta < \theta_M$ なる θ および $(u, v) \in \Omega_M$ に対して以下のことが成立する：

(i) $\phi'' \cdot \psi'' > 0$ のとき

$$P_1(\theta) < 0, \qquad P_2(\theta) > 0 \tag{4.5}$$

(ii) $\phi'' \cdot \psi'' < 0$ のとき

$$P_1(\theta) > 0, \qquad P_2(\theta) < 0 \tag{4.6}$$

Proof. まず $\theta = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} P_1(0) &= -(\mathrm{sgn}\,\phi'')(a_1 - a_2)^2\psi'', \\ P_2(0) &= (\mathrm{sgn}\,\psi'')(a_1 - a_2)^2\phi'' \end{aligned}$$

を得る．

(i) $\phi'' \cdot \psi'' > 0$ のとき

$$(\operatorname{sgn}\phi'')\psi'' > 0, \quad (\operatorname{sgn}\psi'')\phi'' > 0$$

であるから

$$P_1(0) < 0, \quad P_2(0) > 0$$

を得る．一方，$P_i(\theta)$ は $\alpha_i(\theta)$ について連続な関数であるから，$\theta \geq 0$ に関しても連続である．従って，充分小さな $\theta > 0$ に対して (4.5) を得る．

(ii) $\phi'' \cdot \psi'' < 0$ のとき

$$(\operatorname{sgn}\phi'')\psi'' < 0, \quad (\operatorname{sgn}\psi'')\phi'' < 0$$

であるから

$$P_1(0) > 0, \quad P_2(0) < 0.$$

同様にして (4.6) を示すことができる．///

Lemma 4.1 および Lemma 4.2 から，(4.4) 式右辺各項の正負がわかる．これらのことから，摂動系 (4.1) の衝撃波干渉条件に関して，次の定理が導出される：

Theorem 4.1. 正の実数 $M > 0$ に対して，$(u, v) \in \Omega_M$ とする．Straight line system に属する系 (1.1) に対する摂動系 (4.1) を $\theta > 0$ について定義する．

このとき，任意の $M > 0$ に対してある実数 $\theta_M > 0$ が存在し，$0 < \theta < \theta_M$ なる θ について以下のことが成立する：

(I) $f_v g_u > 0$ ならば

(i) $\phi'' \cdot \psi'' > 0$ のとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1(\theta), \boldsymbol{r}_1(\theta)) < 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2(\theta), \boldsymbol{r}_2(\theta)) > 0 \end{cases}$$

(ii) $\phi'' \cdot \psi'' < 0$ のとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1(\theta), \boldsymbol{r}_1(\theta)) > 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2(\theta), \boldsymbol{r}_2(\theta)) < 0 \end{cases}$$

(II) $f_v g_u < 0$ ならば

(II_1) $f_u - g_v \geq 0$ ならば

i) $\phi'' \cdot \psi'' > 0$ のとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1(\theta), \boldsymbol{r}_1(\theta)) < 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2(\theta), \boldsymbol{r}_2(\theta)) < 0 \end{cases}$$

ii) $\phi'' \cdot \psi'' < 0$ のとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1(\theta), \boldsymbol{r}_1(\theta)) > 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2(\theta), \boldsymbol{r}_2(\theta)) > 0 \end{cases}$$

(II_2) $f_u - g_v < 0$ ならば

i) $\phi'' \cdot \psi'' > 0$ のとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1(\theta), \boldsymbol{r}_1(\theta)) > 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2(\theta), \boldsymbol{r}_2(\theta)) > 0 \end{cases}$$

ii) $\phi'' \cdot \psi'' < 0$ のとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_2(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_1(\theta), \boldsymbol{r}_1(\theta)) < 0 \\ \boldsymbol{\ell}_1(\theta) \cdot \nabla^2 F(\boldsymbol{r}_2(\theta), \boldsymbol{r}_2(\theta)) < 0. \end{cases}$$

5. おわりに

Theorem 4.1 は，Smoller-Johnson class 以外の系の存在を示すものである．

Smoller-Johnson class に属する系に対しては，衝撃波曲線の存在が議論されているが，衝撃波干渉条件 2)～4) を満足する系に対しては衝撃波曲線の存在などが十分に議論されているとはいえない．これらの系に対して，衝撃波曲線の大域的存在，Riemann 問題の一意可解性などを解析することは極めて重要な問題である．

また，Theorem 4.1 では Straight line system の摂動系 (4.1) を考えることにより 4 種類の衝撃波干渉条件を満足する系が存在することを示したが，(4.1) 式のような形の摂動系の場合，$f_v g_u > 0$ という条件下で (2.4) を満たす系は現れないことがわかった．衝撃波干渉条件によって区別される 4 種の系を詳細に調べるためには，(4.1) 式とは異なるより一般的な摂動系についての考察が必要である．

参考文献

[1] S. Bianchini, Stability of $\mathcal{L}^\infty$ solutions for hyperbolic systems with coinciding shocks and rarefactions, SIAM J. Math. Anal., **33-4** (2001), 959–981.

[2] A. Bressan and P. Goatin, Stability of $\mathcal{L}^\infty$ solutions of Temple class systems, Differential and Integral Equations **13** (2000), 1503–1528.

[3] A. Bressan and H. K. Jenssen, On convergence of Godunov scheme for nonlinear hyperbolic systems, Chinese Ann. Math. Ser. B **21** (2000), 269–284.

[4] J. Glimm and P. D. Lax, Decay of solutions of systems of hyperbolic conservation laws, Memories of Amer. Math. Soc., **101** (1970).

[5] P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws, **II**, comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 537–566.

[6] P. D. Lax, Shock waves and entropy, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, edited by E. Zarantonello, Academic Press, New York, 1971, 603–634.

[7] R. J. LeVeque and B. Temple, Stability of Godunov's method for a class of 2×2 systems of conservation laws, Trans. Amer. Math. Soc., **288** (1985), 115–123.

[8] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] J. A. Smoller and J. L. Johnson, Global solutions for an extended class of hyperbolic systems of conservation laws, Arch. Rat. Mech. Anal., **32** (1969), 169–189.

[10] B. Temple, Systems of conservation laws with invariant submanifolds, Trans. Amer. Math. Soc., **280** (1983), 781–795.

[11] T. Yang, H. Zhao, C. Zhu, BV estimates of Lax-Friedrichs' scheme for a class of nonlinear hyperbolic conservation laws, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), 1257–1266.

宇宙航空研究開発機構研究開発報告　JAXA-RR-07-002

発　　行　平成 19 年 10月 31 日
編集・発行　宇宙航空研究開発機構
〒182-8522 東京都調布市深大寺東町 7-44-1
URL：http://www.jaxa.jp/
印刷・製本　（株）東京プレス

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記にお願いいたします。
宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター
〒305-8505 茨城県つくば市千現 2-1-1
TEL：029-868-2079　FAX：029-868-2956

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

本書は再生紙を使用しております.