

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

連続モデルに由来しない離散モデルの性質について

相曾 秀昭, アブジャロフ ムスタファ

2007年3月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

連続モデルに由来しない離散モデルの性質 について

An Example of Inconsistency between Continuous and Discrete Models

相曾 秀昭 (AISO, Hideaki) *アブジャロフ ムスタファ (ABOUZIAROV, Moustafa) †

In numerical simulation two kinds of mathematical models are usually used, continuous models and discontinuous models. The continuous models are used to describe the target phenomena that are numerically computed, but the models can not be directly used in digital computation. Another kind of models, the discrete models, are needed. The discrete models have been often regarded just as conventional tools to approximate the original continuous models. But the discrete models are also independent models and the viewpoint to consistency between continuous and discrete models with respect to the inheritance of various properties would be useful to establish the reliability of numerical simulation.

As an example of discussion on consistency between the both models, we are concerned with the carbuncle phenomenon, a kind of instability that happens in numerical computation for compressible Euler equations. Through numerical experiments we show that the occurrence of instability is closely related with some linearized stability of discrete temporal evolution

*JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency) Jindaiji-Higashi-machi 7-44-1 Chofu TOKYO 182-8522 JAPAN, aiso@chofu.jaxa.jp

†Institute of Mechanics, Nizhni-Novgorod State University GSP1000, Gagarin av.23, Nizhni-Novgorod 603600 RUSSIA. abouziar@dk.mech.unn.ru

1 はじめに

デジタル計算機を用いる数値シミュレーションにおいて解析対象の現象を数式で表すことが不可欠であるが、その数式表現は殆どの場合には微分方程式など電子計算機で直接は計算できない連続モデルであり、連続モデルを離散化する過程が必要となる。離散化についての議論は差分スキームの優劣の比較といった形で計算技法の一部として考察されることが多いが、数学的な考察からは微分方程式のような連続モデルと離散化により得られる差分方程式や有限要素モデルのような離散モデルは明らかに異なる範疇に属するもので、当然それらの数理的性質も異なるものである。

以上のような状況を考慮すれば、「離散化手法の改良とは連続及び離散両モデル間の数理的性質の乖離をより小さくすることである」といった直感的な理解では離散化手法の改良やその信頼性を担保するには不十分である事は容易に理解されよう。そこで、連続と離散の両モデルがそれぞれ異なる数理的範疇に属する事実の認識から導かれる、両モデルの数理的性質がどのように対応するか(もしくは対応しないか)という適合性(もしくは非適合性)の考え方が重要となる。この適合性の考え方を元に両モデル間の乖離の度合いを明確に評価する事が数値シミュレーションの信頼性の向上に必要である。しかしながら、このような方法論の構築は未だその途上にあり、数値シミュレーションの中から発見される具体的な問題点のそれぞれについて議論を深めていく事が重要であろう。

本稿では、適合性の議論の一つの例として圧縮性 Euler 方程式の衝撃波の数値計算における不安定性を取り上げる。

Quirk[2]により議論され学術的に考察すべき対象として認識される以前から、圧縮性 Euler 方程式で強い衝撃波が形成される場合の数値計算において数値的と考えられる不安定現象が生じる事は経験的に知られ、この不安定性はカーバンクル(Carbuncle)現象またはカーバンクル不安定性と呼ばれる。[2]はこの不安定現象を差分近似の方法に起因するものとして論じたが、この現象を学術的観点から論じたものは[2]が初めてのものであり、それ以前のおそらくは十数年にわたって現象は知られつつも数理的な議論がなされずに放置される状況が続いていた。これは圧縮性 Euler 方程式等の非線形双曲型保存則の差分近似手法開発の黎明期において個々の手法についての議論やそれらの比較が優先され、その一方で連続モデルである非線形双曲型保存則とその離散モデルの比較という観点は殆ど顧みられなかった事にもよると考えられる。また、現在に至るまで圧縮性 Euler 方程式の厳密解に関する十分な理論が存在しない事も理由の一つであろう。

Moschetta ら [3] は圧縮性 Euler 方程式の種々の離散モデルの時間発展の安

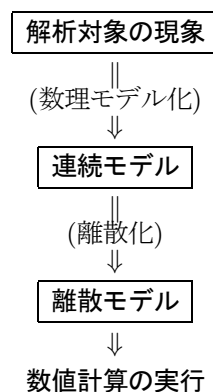
定性を線形安定性の見地から議論しこのカーバンクル不安定の原因について論じている。これは各離散モデルの時間発展に係る性質を比較し近似対象の連続モデルの性質との適合を論じようとする方向性を示した点で興味あるものである。しかし、この議論は静止衝撃波の場合のみであり数値実験はやや大まかな議論となっている。

そこで、本稿ではGodunov法の差分による進行衝撃波の数値計算について離散モデルの時間発展の線形安定性の喪失とカーバンクル不安定の出現の一致についてのより精密な議論を試みる。実際、Godunov法は圧縮性Euler方程式等の保存則に広く用いられる有限体積概念に基く保存型差分の中で理論的に最も自然に導出されるものであり、それ故に線形化を行う際に必要な差分式の偏微分を理論的に求め易い。それらの解析を基に、実際の進行衝撃波の数値計算とその数値計算の離散モデルの線形化から得られる線形系の固有値を観察しカーバンクル不安定と線形不安定の一致を確かめる。

2 連続モデルと離散モデルの適合性

数値シミュレーションとは考察対象である現象の数値計算によるシミュレーション(模擬)を行うものである。それ故に現象(現象を生起させる機構)の本質を的確に捉える適切な数式的表現(モデリング)の重要性は広く認識されている。しかし、モデリングにより得られた数式表現の多くは微分方程式等の連続モデルであり微分等の抽象的な極限概念を含みデジタル電子計算機による直接の数値計算は不可能である。そのため計算機による数値計算が可能であるような離散化された数式(離散モデル)を構成しなければならない。

即ち、数値シミュレーションでは現象から数値計算実行までに次のような過程を経ていることとなる。¹⁾



¹⁾実際には数値計算の実行の過程においても、数値表現の量子化誤差の影響、最終的な理解の為の可視化技法などの問題があり、数値計算全体の信頼性向上のためにはいくつかの過程に分けて議論する必要がある。しかし、本稿の主題は離散化周辺の問題を議論する事であるので、それらについては詳しくは触れない。

微分方程式の離散化には差分法、有限体積法、有限要素法など種々の方法が提案されているが、圧縮性 Euler 方程式など圧縮性流体では有限体積法に基づく差分近似が用いられることが多い。差分近似の評価では差分の刻みを無限小としたときの近似解の厳密解への収束が示されるのが理想とされるが、圧縮性 Euler 方程式のような非線形双曲型保存則の系においてはそのような収束の証明は非常に困難である。そのため、実用に供される差分近似では打切誤差の精度評価や TVD(全変動減少) 性のような広い意味での単調性の視点からの評価が主であるのが実情で、差分近似自体を離散的な時間発展系とする視点での評価はまだ十分には行われていない。

一般に連続モデルの与える厳密解のできるだけ多くの性質が離散モデルの与える近似解によって何らかの形で実現される事が望ましく、厳密解のある性質が近似解の類似の性質により実現されることを(広い意味での)適合性と呼ぶ。この適合性の意味では、圧縮性 Euler 方程式等の差分近似では適合性は未だ限られた範囲の性質について議論されている状況と言え、より広い範囲で適合性の視点からの議論を進める必要がある。特に、実際の数値計算においては差分刻みを無限小の極限に移行することは不可能であり、その事実を意識した適合性の議論がますます必要になると考えられる。また、数値計算において不都合とされる現象や、更に数値計算上の不都合を現実に生起する現象として誤解してしまう危険性のある程度の部分は、連続モデルに由来しない副次的な離散モデルの性質からもたらされるものと考えられ、その意味からも適合性の議論は重要である。

本稿ではそのような適合性の視点からの議論の一例として圧縮性 Euler 方程式の進行衝撃波解のカーバンクル不安定性についての考察を行う。この現象は古くから知られながら学術的考察の対象としては Quirk[2] で初めて議論され、その後もその不安定性の原因について諸説が存在する状況である。圧縮性 Euler 方程式の厳密解について一意性の証明が未解決であることから、その不安定性が連続モデル由来であるとする説と離散モデル由来であるとする説の両方が存在するが、本稿では離散モデルに由来する可能性が非常に高いことを示す。

従来からカーバンクル不安定性については

- (1) 衝撃波が強いほど不安定が生じ易い。
- (2) 不安定は衝撃波が計算格子座標のどれかの座標軸又は2つの座標軸のなす面にほぼ平行な場合に生じ易い。
- (3) また、不安定現象の空間的スケールは計算格子上でのスケールに依存し物理現象のスケールには依存しない。

- (4) 不安定が1次元計算で生じなくても同一の1次元的現象を多次元(2次元、3次元)で数値計算すると生じ得る。
- (5) 上記計算において、本質的な次元の方向(これを x 方向とする)以外の方向(例えば y 方向、 z 方向)の差分増分の刻みを桁落ち誤差の出ないようなもの(例えば $\Delta y, \Delta z$ を整数形として値を1に固定)にすると生じない。

といったことが経験的に知られ、(1) 以外は進行衝撃波解のカーバンクル不安定性が離散モデル由来であることを暗示しているように思われる。本稿では、離散モデルの時間発展の安定性を考察し、その安定性の喪失がカーバンクル不安定の発生と非常に良い一致を示すことを数値計算により例示する。個々の離散モデルでの時間発展の安定性の喪失の機構を見ると、それが連続モデルの時間発展の安定性の喪失に由来する可能性は非常に低いと思われ、この結果は進行衝撃波解のカーバンクル不安定性が離散モデル由来であることを強く暗示するものである。

同様の議論は既に Moschetta ら [3] により行なわれているが、[3] では静止衝撃波の場合にいくつかの差分近似について数値微分による線形安定性解析を実行しているのに比べ、本稿では進行衝撃波を対象として Godunov 法による差分近似(理論的には最も自然)について線形安定性に関する行列を理論的に導出した後に数値計算による議論を行なう。

3 圧縮性 Euler 方程式の進行衝撃波解

ここでは、空間2次元の圧縮性 Euler 方程式

$$\begin{aligned} U_t + F(U)_x + G(U)_y &= 0, \\ -\infty < x, y < \infty, t > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

について考える。ただし、 U は保存変数のベクトル

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad (2)$$

(ただし、 ρ, u, v, p, e はそれぞれ、密度、 x -、 y -各方向の速度成分、圧力、単位体積あたり内部エネルギー) であり、 x -、 y -各方向の流束 F, G は

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

のように表される。また、理想気体の状態方程式

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2). \quad (4)$$

を仮定する。

次のような進行衝撃波解を考える。Riemann 問題の初期値

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L = \mathfrak{t}[\rho_L, \rho_L u_L, 0, e_L], & x < 0, \\ U_R = \mathfrak{t}[\rho_R, \rho_R u_R, 0, e_R], & x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

が²⁾、次の Rankine-Hugoniot 条件

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L). \quad (6)$$

を満たし、かつ、次の条件³⁾

$$\begin{aligned} u_L - c_L > s > u_R - c_R \\ \text{または} \\ u_L + c_L > s > u_R + c_R \end{aligned} \quad (7)$$

($c_L = \sqrt{\gamma p_L / \rho_L}$ 、 $c_R = \sqrt{\gamma p_R / \rho_R}$ は、Riemann 問題を定める2状態 U_L, U_R における音速である。) また、衝撃波の両側の状態 U_L, U_R 共に、次のような意味で「十分に上流的な状況⁴⁾」であるとしておく。

$$u \pm c, u \gg 0, c = \sqrt{\gamma p / \rho} \quad (8)$$

以上の状況では、初期値問題 (1), (5) のエントロピー解 (一意) は進行衝撃波解

$$U(x, y, t) = U(x - st, y, 0) = \begin{cases} U_L, & x < st, \\ U_R, & x > st. \end{cases} \quad (9)$$

となる。これは2次元内を平面衝撃波が進行する様子を表す。この解の差分による数値計算について考えていく。

4 Godunov 法による離散化

Godunov 法による離散化を考える。Godunov 法は、圧縮性 Euler 方程式の様な保存則の数値計算に用いられる保存型差分の中では、Riemann 問題の

²⁾ $\mathfrak{t}A$ は行列又はベクトル A の転置 (transpose) を表すものとする。

³⁾ Rankine-Hugoniot 条件 (5) のみでは衝撃波における物理的なエントロピー条件を満たさないので、Riemann 問題 (5) の解が進行衝撃波解となる為にはこの条件を付加する必要がある。

⁴⁾ 後に離散モデルの考察では離散モデルの解 (数値解) に出現する中間状態 (U_L と U_R の間の状態) で物理的な意味はないが数値解では不可避) においても全ての特性速度の正値性 $u \pm c, u > 0$ を要請する。そのため U_L, U_R においては全ての特性速度が十分に0より大きい事を要請する。

厳密解を利用して数値流束を定める故、最も「自然な」差分近似の一つであると言える事を注意しておく。

まず、 x, y -空間を次のように有限体積(セル)に分割する。 $I_{i,j} = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ (i, j は整数). 時間変数も $\{t^n; 0 = t^0 < t^1 < \dots\}$ の様に離散化し、空間、時間の離散化は共に一様であるとしておく。即ち、任意の i, j, n について $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = \Delta x$, $y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} = \Delta y$, $t^{n+1} - t^n = \Delta t$ for all n . また、CFL条件についても

$$\frac{|u|+c}{\Delta x} + \frac{|v|+c}{\Delta y} \leq \frac{1}{\Delta t}. \quad (10)$$

を仮定する。

ベクトル $U_{i,j}^n = \mathbf{t}[\rho_{i,j}^n, (\rho u)_{i,j}^n, (\rho v)_{i,j}^n, e_{i,j}^n]$ は、時刻 $t = t^n = n\Delta t$ における有限体積 $I_{i,j}$ での状態 U を近似するものであり、 $\{U_{i,j}^0\}_{i,j \text{ は整数}}$ は $\{U_{i,j}^n\}_{n, i, j \text{ は整数}, n \geq 1}$ を逐次計算するための初期値として与えられる。 $\{U_{i,j}^n\}_{n, i, j \text{ は整数}, n \geq 1}$ は(圧縮性 Euler 方程式を近似する)離散的時間発展

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i} \left\{ \bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right\} - \frac{\Delta t^n}{\Delta y_j} \left\{ \bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right\}, \quad (11)$$

より n について逐次定義される。ここで各方向の数値流束 $\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n, \bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ は有限体積境界における流束 F, G のそれぞれを近似するもので、Godunov 法においては次のように定める。

各 $\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n$ は、 $U_{i,j}^n$ と $U_{i+1,j}^n$ の2状態が定める Riemann 問題

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U(x, 0) = \begin{cases} U_{i,j}^n, & x < 0 \\ U_{i+1,j}^n, & x > 0 \end{cases} \quad (12)$$

の定めるエントロピー解(厳密解)⁵⁾

$$U = U(x, t) = U(x/t; U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n)$$

を利用して

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n = F(U(0; U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n)). \quad (13)$$

の様に定められる。

各 $\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ も同様に定められる。即ち、Riemann 問題

$$U_t + G(U)_y = 0, \quad U(y, 0) = \begin{cases} U_{i,j}^n, & y < 0 \\ U_{i,j+1}^n, & y > 0. \end{cases} \quad (14)$$

⁵⁾一般に保存則の Riemann 問題のエントロピー解 $U = U(x, t)$ が存在すればそれは x/t に依存するいわゆる自己相似解である。

のエントロピー解(厳密解)

$$U = U(y, t) = U(y/t; U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n)$$

から

$$\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n = G(U(0; U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n)). \quad (15)$$

により与えられる。

5 数値計算に用いられる離散モデルの解析

数値計算に用いられる離散モデル(11)の解析を進める。

初期値 $\{U_{i,j}^0\}_{i,j \text{ は整数}}$ が完全に1次元的で j に全く依存せず、離散的な時間発展(11)が桁落ち等による誤差が皆無であるよう全く厳密に計算されると仮定すれば、カーバンクル不安定は生じ得ない。また、桁落ち等による誤差が生じて、各セル $I_{i,j}$ における誤差が j に依存しなければ、誤差発生を含む数値計算が全く1次元的でありカーバンクル不安定は生じ得ない。

しかしながら、実際の数値計算においては、2つのセル I_{i,j_1} と I_{i,j_2} ($j_1 \neq j_2$)における計算誤差は異なり得る。⁶⁾しかしながら、そのような誤差の蓄積がカーバンクル不安定であるとする事では、一旦誤差の発生が観察されればそれが急速に発展するカーバンクル不安定の現象を十分に説明できない。そこで、一旦誤差が発生すればそれが離散モデル(11)により増幅される機構が存在すると推論するのが自然である。実際、[3, 1]においても同様の視点から議論を展開している。

ここでは議論を単純化するために、誤差のodd-even性(偶奇交代性)

$$\begin{aligned} U_{i,j}^n &= U_i^n + (-1)^j \hat{U}_i^n, \\ U_i^n &= \mathbf{t}[\rho_i^n, (\rho u)_i^n, 0, e_i^n], \\ \hat{U}_i^n &= \mathbf{t}[\hat{\rho}_i^n, (\widehat{\rho u})_i^n, (\widehat{\rho v})_i^n, \hat{e}_i^n t]. \end{aligned} \quad (16)$$

を仮定する。 $(-1)^j \hat{U}_i^n$ が(本来は j に関係なく $U_{i,j}^n = U_i^n$ であるべき)各 $U_{i,j}^n$ に係る計算誤差であるという仮定である。この仮定はそれ程人工的なものではない。実際、[2]においてもカーバンクル不安定は大まかにはodd-evenであるとされ、保存型差分近似における保存性の観点から見ても自然である。また、実際の計算において脚注6)に述べた方法で Δy の計算機上デジタル表現の

⁶⁾ こうした数値計算上の誤差は、主に、 $\Delta y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$ のデジタル表現が j に依存して桁落ち誤差により同一でなくなる事に由来するのではないかと考えられる。実際、 $y_{j+\frac{1}{2}} = j$ として計算機上で整数型変数をとればそのような桁落ち誤差は生じないが、この場合には本稿のような平面衝撃波の伝播の計算ではカーバンクル不安定は発生しない。しかし、このような場合でも誤差を一旦与えるとカーバンクル不安定が生じる。これは、不安定を起こす最初の誤差の発生機構と不安定の成長機構とは別物として考察すべきである事も示唆している。

誤差を抑制した数値計算を設定し $n = 0$ の段階で (16) の様に誤差を与えれば、カーバングル不安定を発生させる事ができ、任意の n で (16) が保たれる。

次の事実が不安定性の解析に基本的なものであるから、定理として記述しておく。

定理 1 (11) と (16) を仮定し、誤差 \hat{U}_i^n の大きさのオーダーを δ で記すこととすれば、関係式

$$\begin{aligned}\hat{U}_i^{n+1} &= \hat{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{\partial F}{\partial U}(U_i^n) \hat{U}_i^n - \frac{\partial F}{\partial U}(U_{i-1}^n) \hat{U}_{i-1}^n \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \cdot 2 \left| \frac{\partial G}{\partial U}(U_i^n) \right| \hat{U}_i^n + o(\delta) \\ &= \left\{ I - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial U}(U_i^n) - 2 \frac{\Delta t}{\Delta y} \left| \frac{\partial G}{\partial U}(U_i^n) \right| \right\} \hat{U}_i^n \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial U}(U_{i-1}^n) \hat{U}_{i-1}^n + o(\delta).\end{aligned}\tag{17}$$

が得られる。これらは

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{U}_i^{n+1}}{\partial \hat{U}_i^n} &= \left\{ I - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial U}(U_i^n) - 2 \frac{\Delta t}{\Delta y} \left| \frac{\partial G}{\partial U}(U_i^n) \right| \right\}, \\ \frac{\partial \hat{U}_i^{n+1}}{\partial \hat{U}_{i-1}^n} &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial U}(U_{i-1}^n), \\ \frac{\partial \hat{U}_i^{n+1}}{\partial \hat{U}_k^n} &= O, \quad i - k \neq 0, 1\end{aligned}\tag{18}$$

の様にも記される。ここで、 $|A|$ はある行列 P で $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ のように対角化される A について

$$\begin{aligned}|A| &= P \cdot \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) \cdot P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & & \cdots & & |\lambda_n| \end{bmatrix} P^{-1}\end{aligned}\tag{19}$$

の様に与えられるものとする。⁷⁾

本定理の証明は、次の2つの補題 1、2. から与えられる。これらの補題は x -方向の「十分な上流性」の仮定である (8) と y -方向では通常の線形化が可能である事実に基く。

補題 1

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n = F(U_{i,j}^n).\tag{20}$$

⁷⁾ 行列 A が対角化可能な場合、対角化を与える行列 P は一意ではないが、ここで定義される $|A|$ は P の取り方に依存しない事を注意しておく。

補題 2

$$\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n = G(U_i^n) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial G}{\partial U}(U_i^n) \right| (U_{j+1}^n - U_j^n) + o(\delta). \quad (21)$$

上の2つの補題はそれぞれ Godunov 法における数値流束 $\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n$ 又は $\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ を定める Riemann 問題(12) 又は(14) を考察すれば容易に得られるものである。

さて、数列 \hat{U}^n と行列 E_n^{n+1} を

$$\hat{U}^n = {}^t \left[\dots, \hat{\rho}_i^n, (\widehat{\rho u})_i^n, (\widehat{\rho v})_i^n, \hat{e}_i^n, \hat{\rho}_{i+1}^n, (\widehat{\rho u})_{i+1}^n, (\widehat{\rho v})_{i+1}^n, \hat{e}_{i+1}^n, \dots \right],$$

$$E_n^{n+1} = \left[\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial U_k^n}(U_k^n) \right]_{i,k:\text{整数}},$$

のように定める。但し、 $\frac{\partial U_i^{n+1}}{\partial U_k^n}(U_k^n)$ は E の 4×4 小行列であり i, k は整数である。⁸⁾すると、 \hat{U}^n から \hat{U}^{n+1} への離散的な時間発展

$$\hat{U}^n \mapsto \hat{U}^{n+1}$$

は

$$\hat{U}^{n+1} = E_n^{n+1} \cdot \hat{U}^n + o(\delta).$$

のように書き表す事ができ、更に行列 E_n^{n+r} を

$$E_n^{n+r} = \left[\frac{\partial U_i^{n+r}}{\partial U_k^n}(U_k^n) \right]_{i,k:\text{整数}}$$

と定めれば、

$$\hat{U}^{n+r} = E_n^{n+r} \cdot \hat{U}^n + o(\delta) \quad (22)$$

の関係が得られる。⁹⁾

さて、我々は安定な進行衝撃波の離散プロファイル¹⁰⁾の数値計算を利用し、カーバンクル不安定性と \hat{U}^n から \hat{U}^{n+r} への写像(22)の線形安定性の関係を論じる。我々の本稿の主張を次に記す。

主張. カーバンクル不安定性の不出現・出現と、(22)の写像 $\hat{U}^n \mapsto \hat{U}^{n+r}$ の線形安定・線形不安定は一致する。

⁸⁾ これらの小行列は定理 1 内の式により得られ、 $i - k \neq 0, 1$ の場合には零行列 O となる。

⁹⁾ E_n^{n+r} について、 $E_n^{n+r} = E_{n+r-1}^{n+r} \times \dots \times E_n^{n+1}$, $r \geq 1$ であり、 $i - r \leq k \leq i$ 以外の場合には $\frac{\partial U_i^{n+r}}{\partial U_k^n}(U_k^n) = 0$ である。

¹⁰⁾ 安定な進行衝撃波の数値計算における安定な離散プロファイルについては理論的な解決は未だなされていない。ここでは、安定な離散プロファイルに十分に近いと考えられるデータを数値計算により得て数値実験を行う。

6 数値計算による実験

数値計算は、進行衝撃波の安定な離散プロファイルを得る部分と不安定性の観察の2つの部分からなる。

6.1 進行衝撃波の安定離散プロファイル

まず、進行衝撃波の安定離散プロファイルを次のようにして得る。

1. 1次元圧縮性 Euler 方程式に対し Godunov 法

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n \right\}. \quad (23)$$

を用いて計算する。各 $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n$ は(11)と同様に与えられる。 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ は後の2次元計算と同じ値である。

2. 計算領域は $i_{\min} \leq i \leq i_{\max}$ であるが、 $i_{\max} - i_{\min}$ は十分に大とする。また初期値 $\{U_i^0\}$ は

$$U_i^0 = \begin{cases} U_L, & i_{\min} \leq i \leq i_s \\ U_R, & i_s < i \leq i_{\max}, \end{cases} \quad (24)$$

で与えるが、 U_L と U_R は(6),(7),(8),(10)を満足し衝撃波速度 s は $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ に対して有理比を持つ

$$s = \frac{q}{r} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad q, r \text{は互いに素な正整数.}$$

とする。2つの境界については、 $i = i_{\min}$ では完全流入条件、 i_{\max} では完全流出条件とする。

3. 離散的な時間発展(23)を繰り返す。ただし、 r 回の離散的な時間発展毎に空間的にデータを $-q$ ノード分だけシフトする。即ち

```
do i = i_min, i_max - q
  U_i^n = U_{i+q}^n
enddo
do i = i_max - q + 1, i_max
  U_i^n = U_R
enddo
```

4. 安定な離散プロファイルが得られたと判断される時点で数値計算を停止し、その時点での $\{U_i^n\}_i$ を安定離散プロファイルとして採用する。その判断は、

$$S(n) = \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}-r} \left\{ |\rho_i^{n+r} - \rho_i^n| + |(\rho u)_i^{n+r} - (\rho u)_i^n| + |e_i^{n+r} - e_i^n| \right\}.$$

により、 $\{U_i^{n+r}\}_i$ と $\{U_i^n\}_i$ を比較し、 $S(n)$ が十分小さくなった事による。

実際、離散プロファイルへの数値的収束はかなり良く、倍精度計算でノードの点数が千点オーダーの場合でも $S(n)$ は 10^{-13} 程度までは減少する。ここでは $i_{\min} = 0, i_{\max} = 1000, i_s = 100$ とした。しかし、ノードの点数の安定プロファイルへの影響を確かめる為、 $i_{\min} = 0, i_{\max} = 2000, i_s = 200$ の場合も同様に試した。非常に弱い衝撃波でなければ、どちらの場合も本質的に同一のプロファイルを与える。

ここで得られたプロファイルを次の安定性の試験計算の初期値 $\{U_i^0\}_i$ として用いる。

6.2 安定・不安定の確認

ここでは、安定・不安定の確認の為、上で得られたデータから2つの計算を行う。

まず、 r 回分の離散時間発展¹¹⁾による誤差の発展 $\hat{U}^n \mapsto \hat{U}^{n+r}$ の状況を E_n^{n+r} を用いて調べる。しかし、 E_n^{n+r} は無限なので、有限部分行列を取り出して調べる必要がある。そこで、 i_- と i_+ ¹²⁾を

$$\begin{aligned} |\rho_i^0 - \rho_L| &< 10^{-4} |\rho_R - \rho_L|, i < i_-, \\ |\rho_R - \rho_i^0| &< 10^{-4} |\rho_R - \rho_L|, i > i_+ - q. \end{aligned} \quad (25)$$

満たすようにとり、 $\{4(i_+ - i_- - q)\} \times \{4(i_+ - i_- - q)\}$ 行列 \bar{E}_0^r を $\bar{E}_0^r = \left\{ \frac{\partial U_i^r}{\partial U_k^0} \right\}_{i_+ - q \leq i \leq i_+, i_- \leq k \leq i_+ - q}$ で定める。そして、これらの行列の固有値を求める。

上の線形安定性の観察と同時に(11)による実際の2次元計算も行う。以下の2つの方法を試したが、カーバンクル不安定性の発生状況はどちらでも同一である。

1. 計算領域は m を適当な正整数として $1 \leq i \leq 10000, 1 \leq j \leq 2m$ とする。¹³⁾誤差の制御の為(脚注6参照)、 $y_{j+\frac{1}{2}}$ と Δy の計算機上での表現は整数形とする。初期データ $\{U_{i,j}^0\}$ は $1 \leq i \leq 1000$ では安定な離散衝撃波プロファイル $\{U_i^0\}$ を用い、それ以外では U_R とする。 $i = 1, 10000$ での境界はそれぞれ完全流入条件、完全流出条件とし、 $j = 1, 2m$ での境界は循環境界条件とする。また、この場合は自然発生する計算誤差による不安定が生じ得ないので人工的に誤差を付加する。実際には、初期値

¹¹⁾ r 回の離散的な時間発展でデータは s ノード分のシフトを除けば同一になっている。

¹²⁾(25)の定める i のノードの範囲で行列 \bar{E}_0^r を定めて観察して問題はないと思われる。実際、(25)の 10^{-4} を 10^{-5} に取り替えて行列 \bar{E}_0^r を定めても、優越固有値は殆ど変化しない。

¹³⁾ m の値による違いは生じない。実際には $m = 1$ で十分である。

の $50 \leq i \leq 100$ の部分に相対的オーダーが 10^{-10} 程度の (odd-even 性の制約以外では) ランダムな誤差を加える。

2. 計算領域を $1 \leq i \leq 10000, 1 \leq j \leq 2$ とする。初期値、境界値の扱いは上と同様である。(但し、初期値に人工的な誤差は付加しない。) ただし、 Δy を浮動小数形で与える。例えば 0.7D-1。

6.3 数値実験の結果

我々は色々と条件を変化させながら数値実験を行ったが、それらの数値実験ではカーバングルの発生は \bar{E}_0^* の最大固有値が 1 を超える事と一致した。

その一例を提示する。

1. 特性速度 $u + c$ に関連するいわゆる 3-衝撃波を対象に計算を行った。左右の圧力比 $p_R/p_L = e^\xi$ で衝撃波の強さを考え、 $\xi < 0$ を変化させて色々な強さの衝撃波を考察した。(衝撃波の左右の状態の定義については [4] 等を参照されたい。)
2. x -方向の速度は衝撃波の両側の各特性速度 ($u \pm c, u$ が両側にあるので 6 つとなる) が十分に 0 より大きく、かつその最大と最小の比が 10 以下となるように調整した。(また、その際に $s/(\frac{\Delta t}{\Delta x})$ が有理数となるようにする必要があるので。)
3. ここの例では $\xi = -1.0, -1.1, \dots, -2.0$ とし $s = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x}$ となるようにした。

結果は次のようになる。

ξ	密度比	$i_+ - i_-$	固有値の絶対値の最大値	カーバングルの不安定性
-1.0	0.5037	37	0.9708	出現せず
-1.1	0.4733	35	0.9779	出現せず
-1.2	0.4455	34	0.9849	出現せず
-1.3	0.4201	32	0.9917	出現せず
-1.4	0.3969	31	0.9982	出現せず
-1.5	0.3758	30	1.0044	出現
-1.6	0.3566	29	1.0104	出現
-1.7	0.3390	29	1.0162	出現
-1.8	0.3231	28	1.0217	出現
-1.9	0.3085	28	1.0269	出現
-2.0	0.2953	27	1.0319	出現

上の表は、離散モデル(11)の数値計算におけるカーバンクル不安定の発生とその離散的な時間発展を観察して得られる(22)の線形不安定がよく一致する事を示している。

7 結論

数値実験を用いており数学的に完全な論証ではないが、圧縮性 Euler 方程式の進行衝撃波解の数値計算におけるカーバンクル不安定は数値的な機構に起因する可能性が非常に濃厚である事が本稿での議論により明らかになった。

本稿の考察は従来の線形化手法(圧縮性 Euler 方程式の線形化)や単調性¹⁴⁾に注目する考察では明らかにできなかった不安定性の機構を見出したといえる。即ち、差分近似を連続モデルからの離散式への単なる書換えと見るのではなく、新たに得られた離散モデル(離散的な時間発展系)と見なしてその性質を考察することで数値計算法の解析の可能性を大きく広げることが可能となる。実際、離散モデルとしてみた場合、それはいわゆる差分近似式のみではなく格子や時間進行の制御といった物を含む総合的なものであり、そのような総合的に構成された離散時間発展系が近似対象の連続時間発展系とどのような性質を共有するかを明らかにする事で数値シミュレーションにおける数値計算法の信頼性向上の議論が進展することが期待される。

また、同一の連続モデルにより記述される対象であっても、その中で数値シミュレーションにより解明したい現象が異なる場合にはそれぞれ現象に応じた数値シミュレーションの手法の選択が望ましい。そのような場合においても、「解明したい現象に対応する連続モデルの性質についての離散モデルの適合性」という観点から最適の手法が選択し得るのではないかと考えられる。

一方、カーバンクル不安定については数値的機構は本質的には線形不安定であるという事が結論できよう。しかし、この現象は非線形性と深く関わっており、圧縮性 Euler 方程式の非線形性が本質的に影響している側面も見逃してはならない。例えば、本稿で観察される線形系が不安定である理由は圧縮性 Euler 方程式の非線形性に起因している。(線形保存則の Godunov 法による近似の場合には、適当な CFL 条件さえ満たしていれば上のような不安定性が生じない事は容易に示される。)

また、非線形離散発展系の線形不安定が直接に不安定現象につながる訳でない事もこの問題の本質の解明を難しくしている。実際、1次元の進行衝撃波計算で安定プロファイルが得られた状況で、本稿と同様にして線形化された形の安定性を調べると、衝撃波の強さによっては線形不安定になる事が数値計算で明らかとなる。しかし、その場合の1次元計算では不安定は生じな

¹⁴⁾広い意味での単調性、つまり、狭義の単調性、単調性の保存、全変動非増加などの性質

い。これは、非線形性の有する微小擾乱の抑制作用によるものであると考えられる。¹⁵⁾ そこで、圧縮性 Euler 方程式に存在する線形退化場の作用がより詳細に解析されなければならないが、この線形退化場は1次元でも2次元でも存在するものであり、線形退化場と多次元性の相互作用をどのように解析するかが今後の重要な課題である。しかしながら、こうした課題についても離散時間発展系とそれに対応する連続時間発展系という観点からの考察が有効であろうと予想される。

参考文献

- [1] H. Aiso, M. Abouziarov and T. Takahashi. Machinery of Numerical Instability in Conservative Difference Approximations for Compressible Euler Equations. . In S. Nishibata, editor, *Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics*, pages 178–191. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2003.
- [2] J. Quirk. A contribution to the great Riemann solver debate. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18:555–574, 1994.
- [3] J.-Ch. Robinet, J. Gressier, G. Casalis, and J.-M. Moschetta. Shock Wave Instability and Carbuncle Phenomenon: same intrinsic origin? . *J. Fluid Mechanics*, 417:237–263, 2000.
- [4] J. Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer-Verlag, New York, 1982.

¹⁵⁾非線形性による微小擾乱の抑制作用は連続モデル(元の偏微分方程式である非線形保存則)が有しており、それが離散モデルにも継承される。線形の輸送方程式の場合拡散項がなければ連続モデルである元の偏微分方程式は微小擾乱の抑制作用を有しない。(全ての情報が特性曲線に沿って拡散されずに伝播する。)離散化した場合に、いわゆる数値粘性により微小擾乱が拡散されるのみである。

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-06-050

発行 平成 19 年 3 月 30 日

編集・発行 宇宙航空研究開発機構

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町 7-44-1

URL : <http://www.jaxa.jp/>

印刷・製本 (株) 東京プレス

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記をお願いいたします。

宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター

〒305-8505 茨城県つくば市千現 2-1-1

TEL : 029-868-2079 FAX : 029-868-2956

© 2007 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。



本書は再生紙を使用しております。