

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

低レイノルズ数プロペラの設計法

原田 正志

2007年3月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

宇宙航空研究開発機構研究開発報告
JAXA Research and Development Report

低レイノルズ数プロペラの設計法
Design of Propeller in Low Reynolds Number Range

原田 正志
Masashi HARADA

航空プログラムグループ 無人機・未来型航空機チーム
Unmanned and Innovative Aircraft Team
Aviation Program Group

2007 年 3 月
March 2007

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

目 次

概要

1. はじめに	2
2. 従来のプロペラ設計法	2
3. 提唱するプロペラ設計法	3
3.1 プロペラモデル	3
3.2 誘導速度の計算	3
3.3 翼素に働く力	3
3.4 r_i による T および P の表記	4
3.5 関数 f_{cl} , f_{cd} , f_c , f_α の導出の準備	5
3.6 関数 f_{cl} , f_{cd} , f_c , f_α の導出	6
3.7 設計	7
4. 計算と考察	7
4.1 大局的最適解を用いた設計法	7
4.2 局所最適解を用いた設計法	9
5. おわりに	12
参考文献	12

低レイノルズ数プロペラの設計法*

原田正志^{*1}

Design of Propeller in Low Reynolds Number Range

Masashi HARADA^{*1}

Abstract

A new method is presented for propeller design for low Reynolds numbers, where conventional methods may fall short. Conventional design methods determine the shape of a propeller by minimizing its induced loss, but this approach is not useful in designing a propeller for low Reynolds numbers, because there the majority of the energy loss is caused by the large profile drag of a propeller's blades. The proposed method directly maximizes the propulsive efficiency of a propeller, allowing the design of a highly efficient propeller while monitoring the loss caused by profile drag. In this method, thrust and power are expressed as functions of the circulation around the blade segments, while wing section data is also taken into account. This method was validated by comparing propellers designed by the conventional method and by the proposed method for a human-powered airplane. The propulsive efficiency of the propeller designed by the new technique is higher by as much as 1.8%.

Keywords: Propeller, Low Reynolds number, Design, Optimum

概 要

従来の設計法では設計することが困難であった低レイノルズ数域で使用されるプロペラの設計法を開発した。従来の設計法ではプロペラ後流の形成により生じるエネルギー損失を最小にすることでプロペラ形状を決定していたが、この設計法はブレードの形状抵抗によるエネルギー損失が支配的になる低レイノルズ数領域では有効ではない。一方でここで提唱する設計法ではプロペラの推進効率そのものを最大化してプロペラ形状を決定するため、形状抵抗によるエネルギー損失を考慮に入れることができる。提唱する設計法ではブレード翼型の性能データに基づいて推力と吸収パワーを循環のみの関数として表し、最適化を行う。提唱する設計法の有効性を検証するため、一般的な人力飛行機用のプロペラを従来の設計法と提唱する方法とで設計した。その結果、従来の設計法で設計されたプロペラの推進効率よりも提唱する設計法で設計されたプロペラの推進効率の方が最大で 1.8% 高いという結果が得られた。

記 号

		F	:	Γ の関数
		I	:	評価関数
		J	:	進行率
		n	:	プロペラ回転数
		N	:	ブレード分割数
		P	:	必要パワー
		r	:	半径
		Re	:	レイノルズ数
		T	:	推力
		u	:	誘導速度の x 成分
		U	:	前進速度
		U_p	:	相対速度の垂直成分
		U_T	:	相対速度の接線成分
B	:	ブレード枚数		
c	:	翼弦長		
C_D	:	抵抗係数		
CP	:	コントロールポイント		
C_L	:	揚力係数		
dL	:	局所揚力		
dD	:	局所抵抗		
D	:	抵抗		
D	:	プロペラ直径		
DP	:	分割点		
f	:	dL および V の関数		

* 平成 18 年 12 月 11 日受付 (Received 11 December, 2006)

*1 航空プログラムグループ 無人機・未来型航空機チーム
(Unmanned and Innovative Aircraft Team, Aviation Program Group)

V	:	相対速度
w	:	誘導速度の z 成分
W	:	重み
α	:	迎角
Γ	:	循環
Δ_B	:	ブレード分割幅
ν	:	動粘性係数
θ	:	取付け角度
ρ	:	空気密度
ϕ	:	流入角度
Ω	:	角回転速度

1. はじめに

JAXA では 1998 年から 2004 年までミレニアムプロジェクトの一つである「成層圏プラットフォームプロジェクト」を進めてきた。このプロジェクトでは約 20km の高度を長期間滞空する飛行体の開発が要求され、船体に貼付けた太陽電池と再生型燃料電池をエネルギー源とし、ゴンドラの左右と船尾に取付けられたプロペラによって推進する軟式飛行船が有力な候補として挙げられた^{1, 2)}。一方、著者は飛行船の推進系の解としてエネルギー貯蔵装置にリチウムイオン電池を用い、プロペラ、モータ、バッテリーをユニット化して直径 1 メートル程度の小型のプロペラを飛行船船体表面上に分散させる推進器分散方式を提唱してきた（特許第 3 8 6 7 1 3 8 号）。図 1 に推進

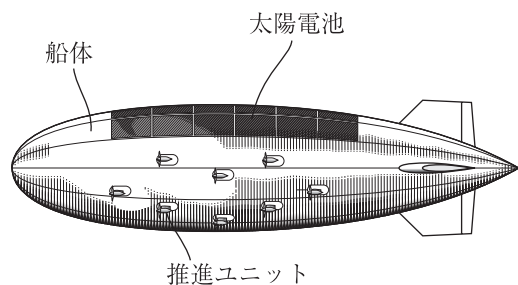


図1 推進器分散方式の概要

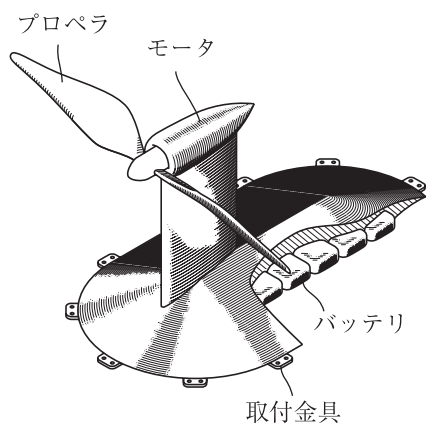


図2 推進ユニットの概要

器分散方式の概略を、また図2に推進ユニットの概略を示した。この方式を用いると、飛行船船体に補強を入れずに簡便に推進器を装着する事が出来、またスケール効果でプロペラ総重量が軽くなることが期待される。しかし、プロペラ寸法が小さくなるため、レイノルズ数が低くなる問題がある。

他にも高度記録を樹立した高高度航空機 Pathfinder / Centurion³⁾で同様な低レイノルズ数領域でのプロペラの使用が見られる。また火星の探査に航空機を用いる検討⁴⁾がなされているが、火星の大気が薄いため、使用するプロペラのレイノルズ数が非常に低くなる問題がある。また各国で盛んに開発が進められている超小型無人飛行機でも非常に小さな、つまりレイノルズ数の低いプロペラが使用されている。

このように低レイノルズ数のもとで使用されるプロペラの需要は大きく、低レイノルズ数条件下でのプロペラ設計法の開発が望まれている。

2. 従来のプロペラ設計法

圧縮性の影響が出ない速度領域で用いられるプロペラの従来の設計法は、ブレードまわりの循環が誘導する流れによるエネルギー損失（以後、誘導エネルギー損失）を最小とする循環分布を決定する最適化問題と見る事が出来る。Betz⁵⁾はこの最適化問題を円柱座標系におけるラプラス方程式の境界値問題とした。この境界条件がいわゆる「Betz の条件」である。Prandtl⁵⁾は巧みな近似によってこの Betz の条件を近似的に満たす循環分布を得た。この近似はプロペラの進行率 J が小さい時 ($J < 0.5$) には極めて良く成り立つ。Goldstein⁶⁾は Betz の条件を厳密に満たす循環分布を解析的に求めた。Larrabee⁷⁻⁹⁾は推力 T 、プロペラ直径 D 、ブレード枚数 B 、ブレード翼型性能、回転数 n 、前進速度 U を与えたとき、与えられた条件のもとで吸収パワー P を最小とするプロペラブレード形状を決定する簡便で具体的な設計法を考案した。

Larrabee の方法では Prandtl の近似解または Goldstein の解を用いて Betz の条件を満たす循環分布を決定し、この循環分布を実現するように翼弦長 c および取り付け角 θ を決定してプロペラ形状を得ている。つまり「誘導エネルギー損失最小のプロペラ＝推進効率最大のプロペラ」という近似に基づいた設計方法である。ところが、レイノルズ数 Re が小さい領域 ($Re < 300,000$) では翼型の形状抵抗によるエネルギー損失が無視出来なくなり、「誘導エネルギー損失最小のプロペラ＝推進効率最大のプロペラ」という近似に基づいた設計法は成立しなくなる。たとえば、プロペラブレードの先端と付け根では c が小さいため Re が小さい。通常の使用条件であれば問題ないが、低 Re 領

域で使用する場合には先端と付け根で Re が著しく小さくなり形状抵抗が大きくなってしまいます。この事を考慮して次のようなプロペラが考えられる。

「 Re が小さくなりやすい先端や付け根で意図的に翼弦長を大きくし、理想的な循環分布から外れる事による効率低下量よりも形状抵抗を減少させる事による効率向上量を大きくし、総合的に効率を向上させたプロペラ。」

3. 提唱するプロペラ設計法

このようなプロペラを得るために、本稿では、今までの「誘導エネルギー損失」を評価関数とする考えを改め、「推進効率」そのものを評価関数とする設計法を提唱する。これは一見、単純な問題の変換に見えるが、実際には Betz, Prandtl, Goldstein, Larrabee らが築き上げてきた研究成果を使うことが出来ない、大きな問題の変換である。

3.1 プロペラモデル

図3のようにプロペラの回転軸に x 軸をとり、 x 軸の正の方向を前として速度 U m/s の風を受けているとする。回転方向を後ろから見て時計回りとし、回転速度を Ω rad/s とする。ブレードは 1/4 弦長におかれた拘束渦で代表される。ブレード数を B 枚とし、1 番目のブレードを y 軸上にとり、ブレードを N 個の翼素に等分割し、付け根から番号をふる。この時の分割幅を Δ_b とする。 i 番目の翼素の中心に i 番目のコントロールポイント $CP(i)$ をとり、 b 番目のブレード上の j 番目の分割点 $DP(b,j,1)$ から j 番目の螺旋状の放出渦が図4のように伸びているものとする。放出渦の長さはプロペラ直径の 10 倍程度の長さがあれば誤差を生じない。この放出渦を M 個に分割し、ブレードに近い分割点から順に番号をふる。ここでは b

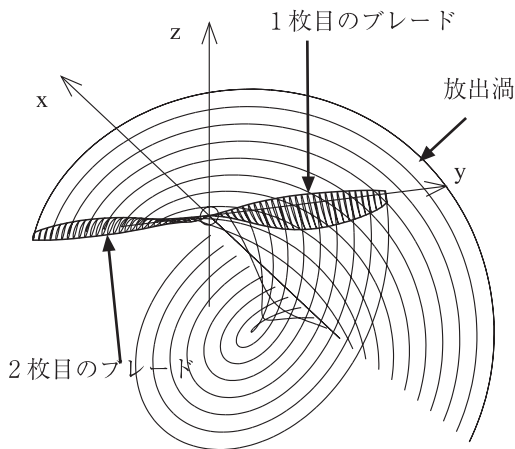


図3 プロペラの座標系

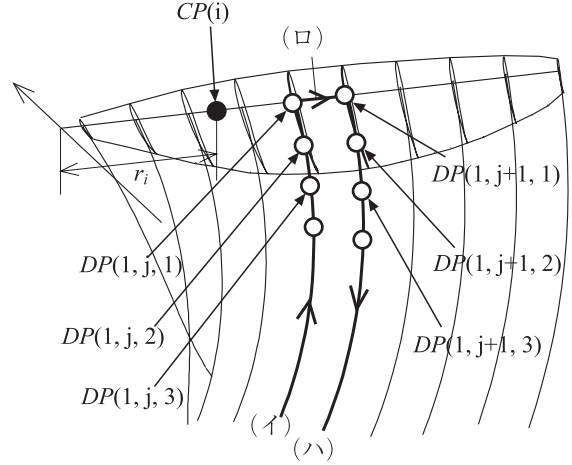


図4 CP , DP , 放出渦の定義

番目のブレードの j 番目の放出渦の k 番目の分割点を $DP(b,j,k)$ と表記する。

3.2 誘導速度の計算

ここで点 A と点 B を結ぶ線分上の単位強度の循環が点 O に引き起こす流速を与える関数を f とすると f は Biot-Savart の法則より次式で与えられる。

$$f(a, b) = \frac{1}{4\pi} \frac{a \times l}{|a \times l|^2} \left(\frac{b}{|b|} - \frac{a}{|a|} \right) \cdot l \quad (1)$$

ここで a , b , l はそれぞれ \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{AB} である。

各ブレードの付け根から j 番目の馬蹄渦 (図中でイロハ) の回りの単位強度の循環が $CP(i)$ に引き起こす流速は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{ij} & Y_{ij} & Z_{ij} \end{pmatrix}^T = & - \sum_{b=1}^B \sum_{k=1}^M f(a_{bij}, b_{bij}) \\ & + \sum_{b=1}^B f(a_{bij1}, a'_{bij1}) + \sum_{b=1}^B \sum_{k=1}^M f(a'_{bij}, b'_{bij}) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで a_{bij} は $CP(i)$ から $DP(b,j,k)$ へのベクトル、 b_{bij} は $CP(i)$ から $DP(b,j,k+1)$ へのベクトルである。また a'_{bij} は $CP(i)$ から $DP(b,j+1,k)$ へのベクトル、 b'_{bij} は $CP(i)$ から $DP(b,j+1,k+1)$ へのベクトルである。この X_{ij} と Z_{ij} を用いて、 $CP(i)$ でのプロペラブレード全体の循環が引き起こす x 方向の誘導速度 u_i , z 方向の誘導速度 w_i は次式で与えられる。

$$u_i = \sum_{j=1}^N X_{ij} \Gamma_j \quad (3)$$

$$w_i = \sum_{j=1}^N Z_{ij} \Gamma_j \quad (4)$$

3.3 翼素に働く力

図5に $CP(i)$ の空気との相対速度を示した。 $CP(i)$ の回転中心からの距離を r_i とすると、 $CP(i)$ の回転方向の移動速度は Ωr_i となる。また z 方向の誘導速度は w_i であるか

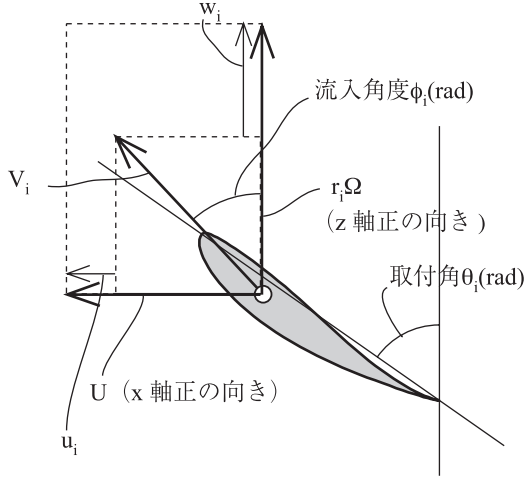


図5 流入速度および誘導速度

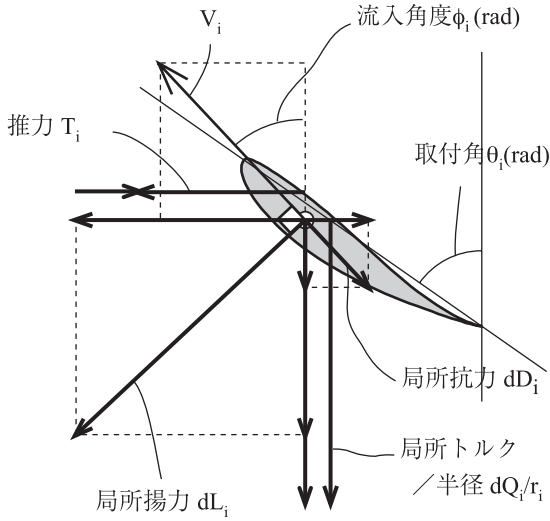


図6 翼素に働く力

ら $CP(i)$ の空気との相対速度の z 成分 U_{Ti} は次式で与えられる。

$$U_{Ti} = \Omega r_i - w_i \quad (5)$$

同様に、 $CP(i)$ の空気との相対速度の x 成分 U_{Pi} は次式で与えられる。

$$U_{Pi} = U - u_i \quad (6)$$

よって $CP(i)$ の空気との相対速度 V_i 、および V_i が回転面となす角度 ϕ_i はそれぞれ次式で与えられる。

$$V_i = \sqrt{U_{Pi}^2 + U_{Ti}^2} \quad (7)$$

$$\phi_i = \tan^{-1} \left(\frac{U_{Pi}}{U_{Ti}} \right) \quad (8)$$

図6に翼素に働く力を示した。 i 番目の翼素が発生する局所揚力 dL_i は Γ_i を用いて次式で与えられる。

$$dL_i = \rho V_i \Delta_B \Gamma_i \quad (9)$$

また i 番目の翼素が受ける局所抗力 dD_i は次式で与えら

れる。

$$dD_i = \frac{1}{2} \rho V_i^2 c_i \Delta_B C_{Di}(\alpha_i, \text{Re}_i) \quad (10)$$

ここで α_i は i 番目の翼素の迎え角であり、次式で与えられる。

$$\alpha_i = \phi_i - \theta_i \quad (11)$$

これらより推力 T 、必要パワ P はそれぞれ次式で与えられる

$$T = B \sum_{i=1}^N (dL_i \cos \phi_i - dD_i \sin \phi_i) \quad (12)$$

$$P = B \Omega \sum_{i=1}^N (dL_i \sin \phi_i + dD_i \cos \phi_i) r_i \quad (13)$$

与えられたパワ P_0 のもとで効率最大のプロペラを設計する問題は次の最適化問題になる。

$$\text{条件 } P - P_0 = 0$$

$$\text{最小化 } -T$$

しかし、 T 、 P は Γ_i 、 c_i 、 θ_i の3種類の変数を独立変数として持ち、最適化計算は容易ではない。

3.4 Γ_i による T および P の表記

そこで最適化計算を容易にするため T と P を Γ_i のみの関数として表記する方法を考える。今、 i 番目の翼素での V_i と dL_i が与えられたとき、最小の dD_i を与える C_{Li} 、 C_{Di} 、 c_i 、 α_i がそれぞれ

$$C_{Li} = f_{CL}(dL_i, V_i) \quad (14)$$

$$C_{Di} = f_{CD}(dL_i, V_i) \quad (15)$$

$$c_i = f_c(dL_i, V_i) \quad (16)$$

$$\alpha_i = f_\alpha(dL_i, V_i) \quad (17)$$

で与えられるとする。また(3)、(4)、(5)、(6)、(7)式より V_i を Γ_i のみの関数で表す事が出来、改めて次のように表す。

$$V_i = F_{Vi}(\Gamma_i) \quad (18)$$

同様に(8)式より ϕ_i を Γ_i のみの関数で表す事が出来、改めて次のように表す。

$$\phi_i = F_{\phi}(\Gamma_i) \quad (19)$$

dL_i は(9)式と(18)式より Γ_i のみの関数で表す事が出来、改めて次のように表す。

$$dL_i = F_{Li}(\Gamma_i) \quad (20)$$

(18)、(20)式より(14)、(15)、(16)、(17)式は Γ_i のみの関数である。これらを改めて次のように表す。

$$C_{Li} = f_{CL}\{F_{Li}(\Gamma_i), F_{Vi}(\Gamma_i)\} = F_{CLi}(\Gamma_i) \quad (21)$$

$$C_{Di} = f_{CD}\{F_{Li}(\Gamma_i), F_{Vi}(\Gamma_i)\} = F_{CDi}(\Gamma_i) \quad (22)$$

$$c_i = f_c \left\{ F_{Li}(\Gamma_j), F_{Vi}(\Gamma_j) \right\} = F_{Ci}(\Gamma_j) \quad (23)$$

$$\alpha_i = f_\alpha \left\{ F_{Li}(\Gamma_j), F_{Vi}(\Gamma_j) \right\} = F_{\alpha i}(\Gamma_j) \quad (24)$$

(10)式に(18), (22), (23)式を代入して次式を得る。

$$dD_i = \frac{1}{2} \rho \left\{ F_{Vi}(\Gamma_j) \right\}^2 F_{Ci}(\Gamma_j) \Delta_b F_{CDi}(\Gamma_j) \quad (25)$$

上式は dD_i が Γ_i のみの関数である事を示しているの、改めて次のように表す。

$$dD_i = F_{Di}(\Gamma_j) \quad (26)$$

以上で推力 T と吸収パワー P はそれぞれ式のように書く事が出来る。

$$T = B \sum_{i=1}^N \left\{ F_{Li}(\Gamma_j) \cos F_{\phi i}(\Gamma_j) - F_{Di}(\Gamma_j) \sin F_{\phi i}(\Gamma_j) \right\} \quad (27)$$

$$P = B \Omega \sum_{i=1}^N \left\{ F_{Di}(\Gamma_j) \cos F_{\phi i}(\Gamma_j) + F_{Li}(\Gamma_j) \sin F_{\phi i}(\Gamma_j) \right\} r_i \quad (28)$$

以上で T および P を Γ_i のみの関数として表す事ができた。

3.5 関数 f_{CL} , f_{CD} , f_c , f_α の導出の準備

T および P を Γ_i のみの関数として表す事ができたが、まだ $f_{CL}(dL_i, V_i)$, $f_{CD}(dL_i, V_i)$, $f_c(dL_i, V_i)$, $f_\alpha(dL_i, V_i)$ の決定の方法には触れなかった。ここではこれらの関数を求めるためのデータの処理方法を述べる。

dL_i は(9)式の他に次式からも求める事が出来る。

$$dL_i = \frac{1}{2} \rho V_i^2 c_i \Delta_b C_{Li} \quad (29)$$

一方、 i 番目の翼素のレイノルズ数 Re_i は次式で与えられる。

$$Re_i = \frac{V_i c_i}{\nu} \quad (30)$$

(29)式に(30)式を代入して次式を得る

$$dL_i = \frac{1}{2} \rho \nu V_i \Delta_b C_{Li} Re_i \quad (31)$$

同様に(10)式に(30)式を代入して次式を得る。

$$dD_i = \frac{1}{2} \rho \nu V_i \Delta_b C_{Di} Re_i \quad (32)$$

ここで式の表記の簡略のために次の変数を導入する。

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \rho \nu V_i \Delta_b \quad (33)$$

(33)式を(31), (32)式に代入してそれぞれ次式を得る。

$$dL_i = \sigma_i C_{Li} Re_i \quad (34)$$

$$dD_i = \sigma_i C_{Di} Re_i \quad (35)$$

これにより dL_i 一定の下で dD_i の最小値を求める事は、 $\sigma_i C_{Li} Re_i$ 一定の下で $\sigma_i C_{Di} Re_i$ の最小値を求める事である事が分かる。さらに σ_i が共通であるから、 $C_{Li} Re_i$ 一定の下で $C_{Di} Re_i$ の最小値を求める問題に帰着する。この問題を解くために「 C_L と Re を変数として $C_D Re$ を与える関数」を用意する。

1) 実験データの入手

使用する翼型の各 Re ごとのポーラーカーブを入手する。ここでは低 Re で良好な性能を示す DAE51 を用いる。図 7 に DAE51 の各 Re でのポーラーカーブの実験値¹⁰⁾を示した。

2) データの補完

実験データの足りない部分をスプライン関数で補う。

3) 物理量の準備

計算の便宜を図るため Re を 300,000 で割り、規格化されたレイノルズ数 Re^* とする。また C_L も 1.2 で割り規格化された揚力係数 C_L^* とする。第 8 図に横軸を Re^* , 縦軸を C_L^* として $C_D Re$ の等高線を示した。

4) 最小値の探索

「 $C_L^* Re^* = \text{const.}$ 」の曲線群を $C_D Re$ の等高線に重ねた図を図 9 に示した。更にこの $C_L^* Re^* = \text{const.}$ の曲線の上で $C_D Re$ が最小となる位置と値を求める。この作業は有限個の $C_L^* Re^* = \text{const.}$ の曲線上で $C_D Re$ の最小値を求める簡単な一次元探索の繰り返しである。この最小値を同図に○で示した。

5) データの整理

図 9 から次の二つの関数を作る事が出来る。

$$C_D Re = F_{CDRe}(C_L^* Re^*) \quad (36)$$

$$C_L^* = F_{CL}(C_L^* Re^*) \quad (37)$$

この関数を図 10 に示す。ここで得られた $C_D Re$ と C_L^* は

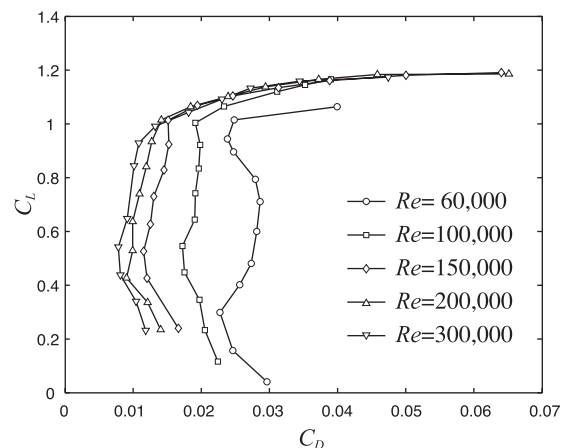
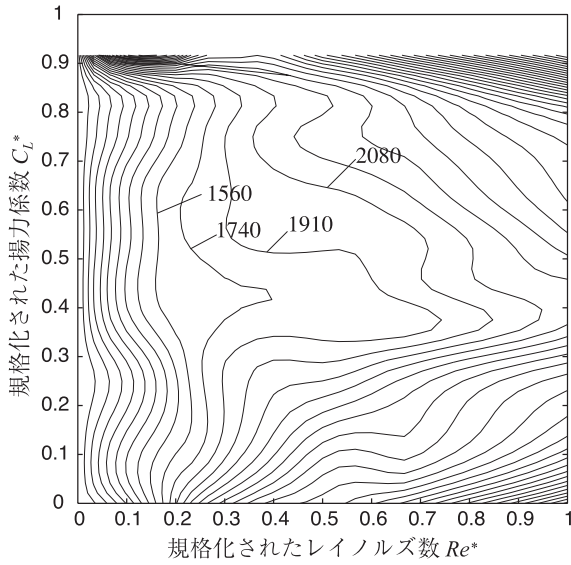
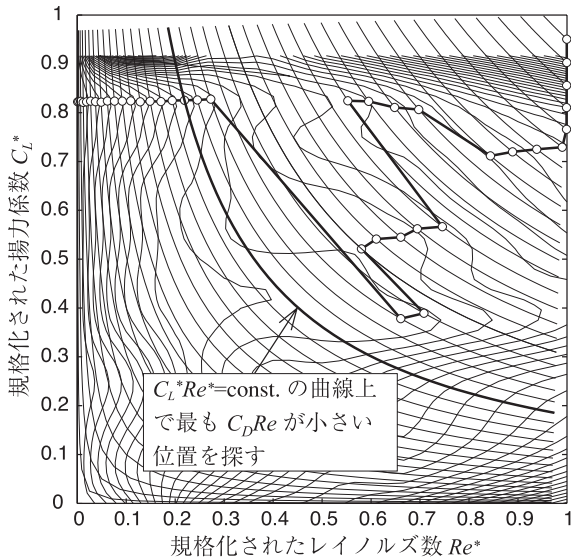
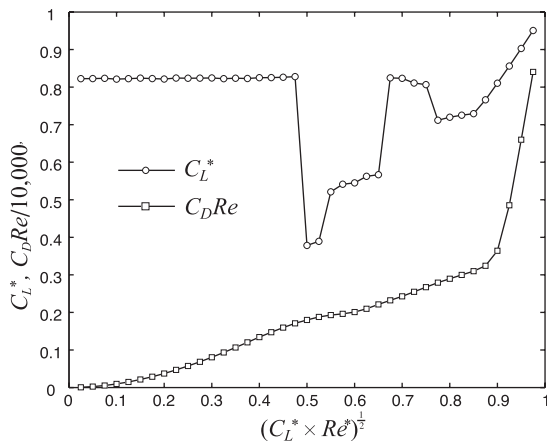


図 7 DAE51 のポーラーカーブ

図8 $C_D Re$ の等高線図図9 $C_L^* Re^* = \text{const.}$ 上での最小 $C_D Re$ の探索

第10図 図9から得られる2つの関数

$Re^* - C_L^*$ 平面上の一次元探索の繰り返しの結果得られる大域的最適解である。今後、 $C_D Re$ と C_L^* の局所最適解も用いるので、これらと区別するために図10で示される

$C_D Re$ と C_L^* をそれぞれ $C_D Re$ の大域的最適解、 C_L^* の大域的最適解と呼ぶ事とする。

また、実験データを補間して次の関数を作る。

$$\alpha = F_\alpha(C_L, Re) \quad (38)$$

3.6 関数 f_{CL} , f_{CD} , f_c , f_α の導出

これらの関数から次のようにして $f_{CL}(dL_i, V_i)$, $f_{CD}(dL_i, V_i)$, $f_c(dL_i, V_i)$, $f_\alpha(dL_i, V_i)$ を求める。

(31)式から次式が成り立つ

$$C_L Re = \frac{2dL}{\rho v V \Delta_B} \quad (39)$$

これは V と dL の関数であるから改めて次のように表記する。

$$C_L Re = f_{CLRe}(dL, V) \quad (40)$$

これらを次のように規格化する。

$$C_L^* Re^* = f_{CLRe}(dL, V) / 1.2 / 3.0e5 \quad (41)$$

(41)式を(37)式に代入して次式を得る

$$C_L^* = F_{CL} \{ f_{CLRe}(dL, V) / 1.2 / 3.0e5 \} \quad (42)$$

これは V と dL の関数であるから改めて次のように表記する。

$$C_L^* = f_{CL}^*(dL, V) \quad (43)$$

(43)式より、求める $f_{CL}(dL, V)$ が直ちに次のように得られる。

$$f_{CL}(dL, V) = 1.2 f_{CL}^*(dL, V) \quad (44)$$

また(40)式を $f_{CL}(dL, V)$ で除して次のように Re を求める。

$$Re = \frac{f_{CLRe}(dL, V)}{f_{CL}(dL, V)} \quad (45)$$

(36)式を(45)式で除して次式を得る。

$$C_D = \frac{F_{CDRe}(C_L^* Re^*) f_{CL}(dL, V)}{f_{CLRe}(dL, V)} \quad (46)$$

(46)式に(41)式を代入して次のように $f_{CD}(dL, V)$ を得る。

$$f_{CD}(dL, V) = \frac{F_{CDRe} \{ f_{CLRe}(dL, V) / 1.2 / 3.0e5 \} f_{CL}(dL, V)}{f_{CLRe}(dL, V)} \quad (47)$$

また、(30)式と(45)式を等値して次のように $f_c(dL, V)$ を得る。

$$f_c(dL, V) = \frac{v f_{CLRe}(dL, V)}{V f_{CL}(dL, V)} \quad (48)$$

さらに、(38)式に(44)、(45)式を代入して次のように $f_\alpha(dL, V)$ を得る。

$$f_{\alpha}(dL, V) = F_{\alpha} \left\{ f_{CL}(dL, V), \frac{f_{CLRe}(dL, V)}{f_{CL}(dL, V)} \right\} \quad (49)$$

3.7 設計

以上で翼型データを加工し、 T および P を Γ_i のみの関数で表す手順を示した。この結果、非線形ではあるが、 T 、 P はともに Γ_i のみの関数として表され、プロペラの設計は

$$\begin{aligned} \text{条件} \quad & P(\Gamma_i) - P_0 = 0 \\ \text{最小化} \quad & -T(\Gamma_i) \end{aligned}$$

で表記される最適化問題となる。目的関数、拘束条件とともに非線形ではあるが、変数が Γ_i のみであるため、この最適化問題を解く事は難しい事ではない。

4. 計算と考察

4.1 大域的最適解を用いた設計法

ここでは標準的な人力飛行機の設計点で最大の推進効率をもつプロペラの設計を行う。一般的な人力飛行機のプロペラの設計点として、直径 $D=3.2\text{m}$ 、回転数 $n=4.0\text{Hz}$ 、 $T=30.0\text{N}$ 、前進速度 $V=7.2\text{m/s}$ 、 $\rho=1.225\text{kg/m}^3$ 、 $\nu=1.46 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ を選んだ。また比較のため、本稿で提唱する法のほかにGoldsteinの関数を用いたLarrabeeの方法(以下、従来の設計法)でも計算を行った。翼型は従来の方法、提唱する方法ともにDAE51を用いた。また提唱する設計法において $C_D Re$ と C_L^* として図10に示した $C_D Re$ の大域的最小解、 C_L^* の大域的最小解を用いた。提唱する設計法では使用する揚力係数が C_L^* の大域的最適解によって自動的に与えられるのに対し、従来の設計法ではパラメータとしてあらかじめ与えておかなければならない。ここでは先に提唱する設計法で解を得、この解で使われた揚力係数が半径に依らずほぼ1.0の定数であったため、従来の設計法でも比較のため揚力係数を1.0とした。

計算の結果、提唱する設計法で得られたプロペラの効率は88.2%、従来の方法で得られたプロペラの効率は87.8%と、従来の方法より0.4%効率が高いプロペラが得られた。図11にそれぞれの方法で得られた解を示した。

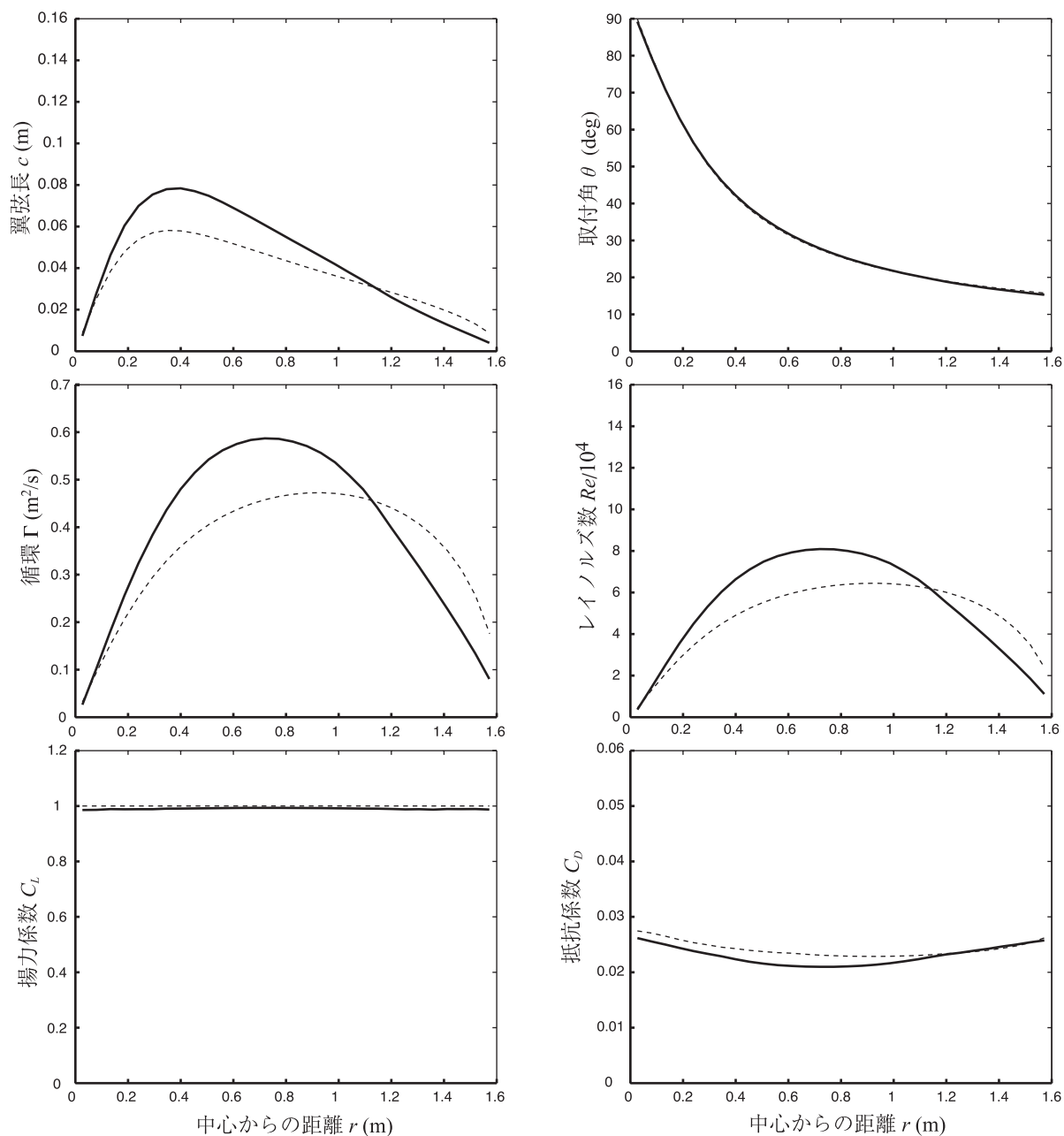
図11の翼弦長の分布をみると、従来の設計法と提唱する設計法とで効率が0.4%しか異ならないのにも関わらず、従来の設計法の方が付け根から半径70%の範囲で大きくなり、非常に異なった分布になっている。同じ事が循環についても言う事が出来る。これは理想的な循環分布から離れる事による誘導エネルギー損失よりも、翼弦長を伸ばすことで起こる形状抵抗係数減少による利得が上回り、このような大幅な循環分布の変化が起こった結

果だと推察される。これを裏付ける様にレイノルズ数の分布も提唱する設計法の方が従来の設計法よりも同様の範囲で大きくなっており、この領域で抵抗係数が提唱する設計法の方が小さくなっている。一方、提案する設計法で使用された揚力係数がほぼ1.0の定数となった。これは使用した翼型DAE51のデータから得られた $C_D Re$ の大域的最適解と C_L^* の大域的最適解が特異であったためであり、通常は揚力係数は一定の値をとらない。従来の設計法で計算する際の揚力係数の決定には、この提唱する設計法の結果で揚力係数が偶然1.0の一定の値になった事を利用した。これにより両者の設計法の比較が容易になった。提唱する設計法の取付け角と従来の設計法の取付け角がほぼ一致するのは、両者の揚力係数を等しくなるようにしたため自然な結果である。

従来の設計法の結果と提案する設計法の結果を比較すると非常に大きな形状の違いがあるにもかかわらず、両者の推進効率は極めて近かった。推進効率で大きな利点を示す事が出来なかったが、提案する設計法で得られたプロペラは、大きな曲げモーメントが加わる付け根付近で翼弦長が大きくなっているため構造上有利である。

今回の計算ではレイノルズ数が60,000までしか翼型のポーラーカーブを得られなかった。そこでより小さなレイノルズ数でのポーラーカーブはデータの外挿で代用した。このようにレイノルズ数が60,000以下のデータの信頼性が低いにもかかわらず、得られたプロペラのレイノルズ数は従来の設計法による解でも提唱する設計法による解でも大部分が60,000以下である。信頼できる解を得るためには、少なくともレイノルズ数が40,000と20,000における実験データが必要である。

提唱する設計法で得られた解のレイノルズ数の範囲は0から80,000、揚力係数が半径方向に関わらずほぼ1.0であった。規格化されたレイノルズ数 Re^* 、規格化された揚力係数 C_L^* に換算するとそれぞれ0から0.27と0.83となり、 $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ の値域は0から0.47となる。これを図10で見ると横軸 $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ が0から0.47の範囲で規格化された揚力係数 C_L^* は0.83の一定値をとっている。通常、 C_L^* の大域的最適解は横軸 $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ に対して起伏の大きい曲線となる。設計点が偶然 C_L^* の大域的最適解の平坦な部分を使用する値になっていたため、ここで得られた提唱する設計法の解の揚力係数は偶然にほぼ一定の値になったのである。そこで試みに設計条件のうち半径を倍に、回転数を半分に、推力を4倍にして解を求めてみる。この設計条件の変更では進行率と円盤荷重は変更前と同じであるから、従来の設計法で得られるプロペラの形状は条件変更前の結果と相似になる。しかし条件の変更によりレイノルズ数がほぼ2倍になるため、提唱する



—— 提唱する設計法で得られる解：効率 88.2%
 ----- 従来の設計法で揚力係数として 1.0 を用いた場合の解：効率 87.8%

図 1.1 提唱する設計法で得られる解と従来の設計法で得られる解

設計法の解は図 1.2 に示した様に極めて特異な形となる。この解では $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ の値域は 0 から 0.62 であり、図 1.0 をみるとこの値域で C_L^* の大局的最適解が大きく変動する事が分かる。このように C_L^* の大局的最適解が $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ の値によって大きく変動する場合、得られるプロペラの形状はいびつなものになってしまう。また C_L^* の大局的最適解が $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ の値によって大きく変動することはごく一般に起こりやすいものである。従って提唱する設計法には得られるプロペラの形状がいびつにな

りやすい問題がある。

話を設計条件の変更前の解について戻すと、提案する設計法で得られた解はレイノルズ数 60,000 以下において揚力係数として 1.0 をとっている。図 7 のポーラーカーブではレイノルズ数 60,000 で揚力係数として 1.0 をとり得るが、僅かでも揚力係数を増加させると一気に失速する事が分かる。この急激な失速の傾向はレイノルズ数が下がるほど顕著になっているので、レイノルズ数 60,000 以下では最大揚力係数が 1 を超えない可能性が非常に高

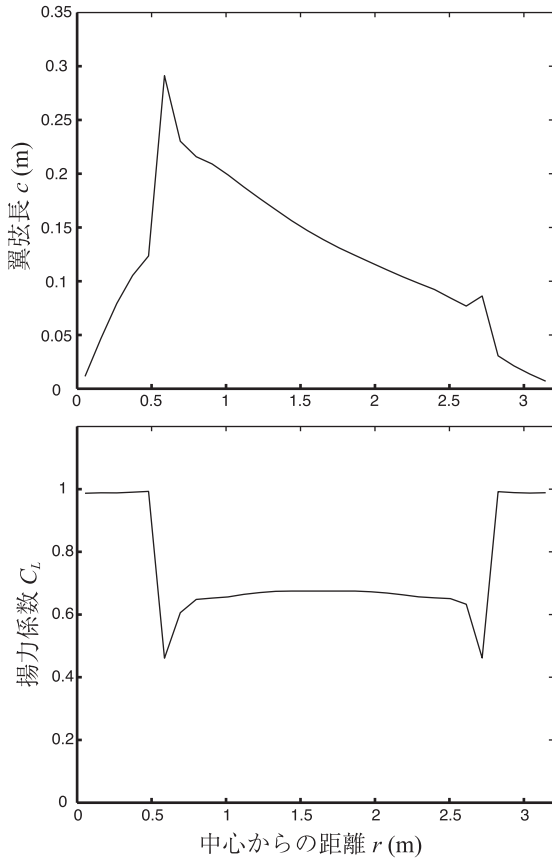


図 12 半径を倍にしたときの提唱する設計法で得られる解

い。従ってレイノルズ数 60,000 以下で揚力係数として 1.0 をとってしまう提唱する設計法には得られるプロペラが失速しやすい問題がある。一方、ここでは従来の設計法の設計条件として揚力係数=1.0 を用いたが、正しくは失速を避けるために揚力係数として 0.6 から 0.8 程度を選択する事が望ましい。

4.2 局所最適解を用いた設計法

前節で提唱する設計法には得られるプロペラの形状がいびつになりやすいと言う問題と、得られるプロペラが失速しやすいと言う問題がある事を述べた。ここでは提唱する設計法を改良し、上述の問題を解決する方法に関して述べる。

提唱する設計法に上述の問題があるのは図 10 に示す様に $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ の関数である C_L^* が $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ が小さい領域で 0.83 (揚力係数にして 1.0) とする大きな値をとっている点、また $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ が 0.47 以上の領域に C_L^* の不連続がある点である事は既に述べた。 C_L^* がこの様な関数となったのは、図 9 に示す横軸を Re^* 、縦軸を C_L^* とする $C_D Re$ の分布図で、 $C_L^* Re^* = \text{const.}$ の曲線上で $C_D Re$ の最小値を求める問題において、大域的最適解を求める事が出

来、その解が低い Re^* で高い C_L^* をとる問題と不連続性を持っていたためである。ここで、図 9 において最適解を求める際に、あえて大域的最適解を求めず、初期値から勾配法で得られる局所最適解を解として用いる方法を採用する。勾配法にはいくつかの種類があるが、いずれも局所最適解を得る事が出来るが必ずしも大域的最適解を得る事が出来ない。そこで $Re^* = 0$ において $C_L^* = 0.3$ 、 $Re^* = 1$ において $C_L^* = 1$ とする直線を図 9 に引き、これを初期値とし

$$I = \sum_{i=1}^N C_{Di} Re_i \quad (35)$$

で与えられる評価関数 I を最小にする局所最適解を勾配法の一つを用いて最小化した。ここで添字の i は

$$C_L^* Re^* = \left(\frac{i}{N} \right)^2 \quad (36)$$

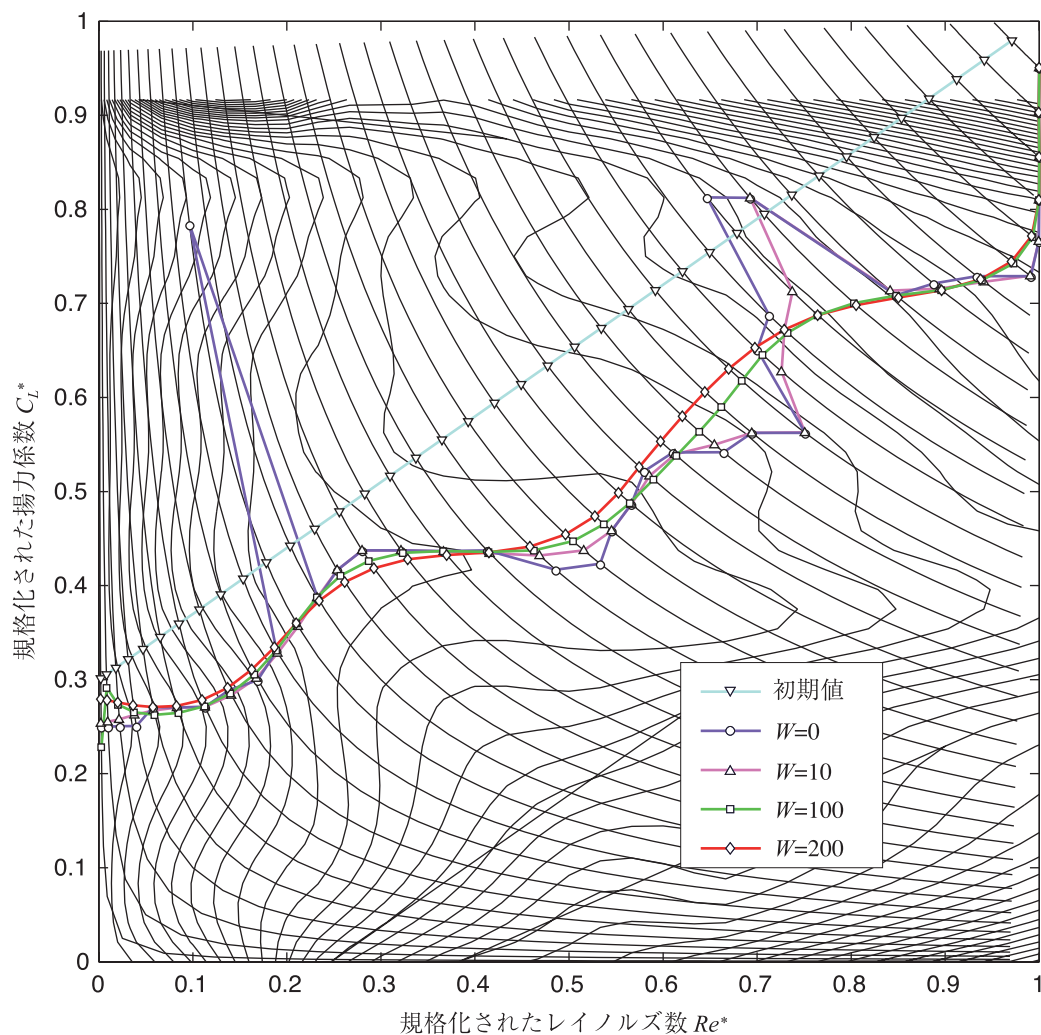
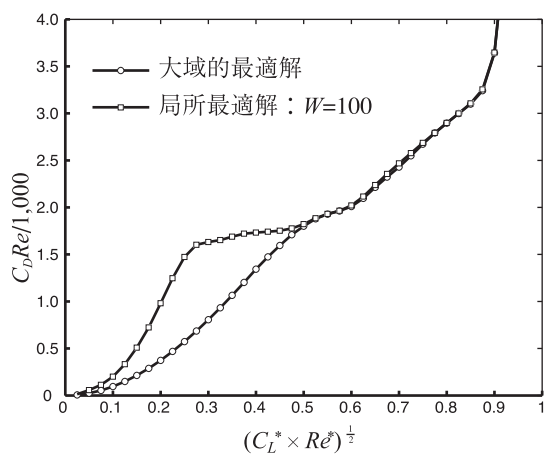
で表される曲線群の i 番目の曲線上の点であることを示している。図 13 にその解を青い線で示した。大域的最適解と比べ、かなり不連続性や低いレイノルズ数での高い揚力係数の使用が改善されている。しかし、まだ連続性が十分ではないため、解が描く折れ線の角度をペナルティ関数として前述の評価関数に加える事とする。ここで $i-1$ 番目の点から i 番目の点へのベクトルを \mathbf{a}_i とすると、 \mathbf{a}_i と \mathbf{a}_{i+1} がなす角度 \angle_i の正弦は次式で与えられる。

$$\sin \angle_i = \frac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|} \times \frac{\mathbf{a}_{i+1}}{|\mathbf{a}_{i+1}|} \quad (37)$$

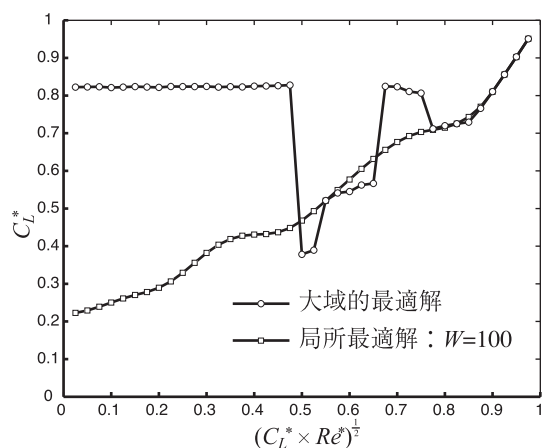
そして評価関数として次式を用いる。

$$I = \sum_{i=1}^N C_{Di} Re_i + W \sum_{i=2}^{N-1} \sin^2 \angle_i \quad (37)$$

ここで W は重みである。この評価関数の第二項により、解の屈曲が抑えられる。図 13 にいくつかの W の値に対する局所最適解を示す。図から W が大きくなるほど解の屈曲が抑えられている様子が分かる。一般に設計法は設計者の能力に依存せず、一意に解が得られる事が望ましいが、ここでは初期値の設定と W の設定という自由度がある。様々な初期値を試してみたが、図 13 上で低い Re^* で低い C_L^* をとり、高い Re^* で高い C_L^* をとる初期値を用いれば、ほぼ同じ解に収束した。また評価関数第二項の W は解の不連続性を解消するために導入されたから、図 13 上で解の不連続性が解消される事を持って W の値とする。図 13 に $W=10, 100, 200$ の場合の解を示した。 $W=10$ ではまだ解に不連続性が見られるが、 $W=100$ では不連続性が消えている。そこで W として 100 を採用する。図 14 に $W=100$ の場合の関数 $C_D Re$ を、図 15 に $W=100$ の場合の関数 C_L^* を示した。 $(C_L^* Re^*)^{1/2}$ が 0 から 0.5 の範囲

図 1 3 $C_D Re$ の局所最適解図 1 4 図 1 3 より得られる関数 $C_D Re$

で $W=100$ の関数 $C_D Re$ の局所最適解は大域的最適解より大きな値をとっており、この関数から得られるプロペラの推進効率はず大域的最適解を用いて設計されたプロペラよりも劣る。しかし、図 1 5 に示された様にこの領域で関数 C_L^* の局所最適解は低い値をとっており、失速

図 1 5 図 1 3 より得られる関数 C_L^*

の危険が低い事が分かる。また関数 C_L^* の局所最適解が滑らかな曲線であるため、図 1 2 に示した様ないびつなプロペラが得られる事が無い。

この関数 $C_D Re$ と関数 C_L^* を用いてプロペラを設計した結果を図 1 6 に実線で示す。また併せて従来の設計法で

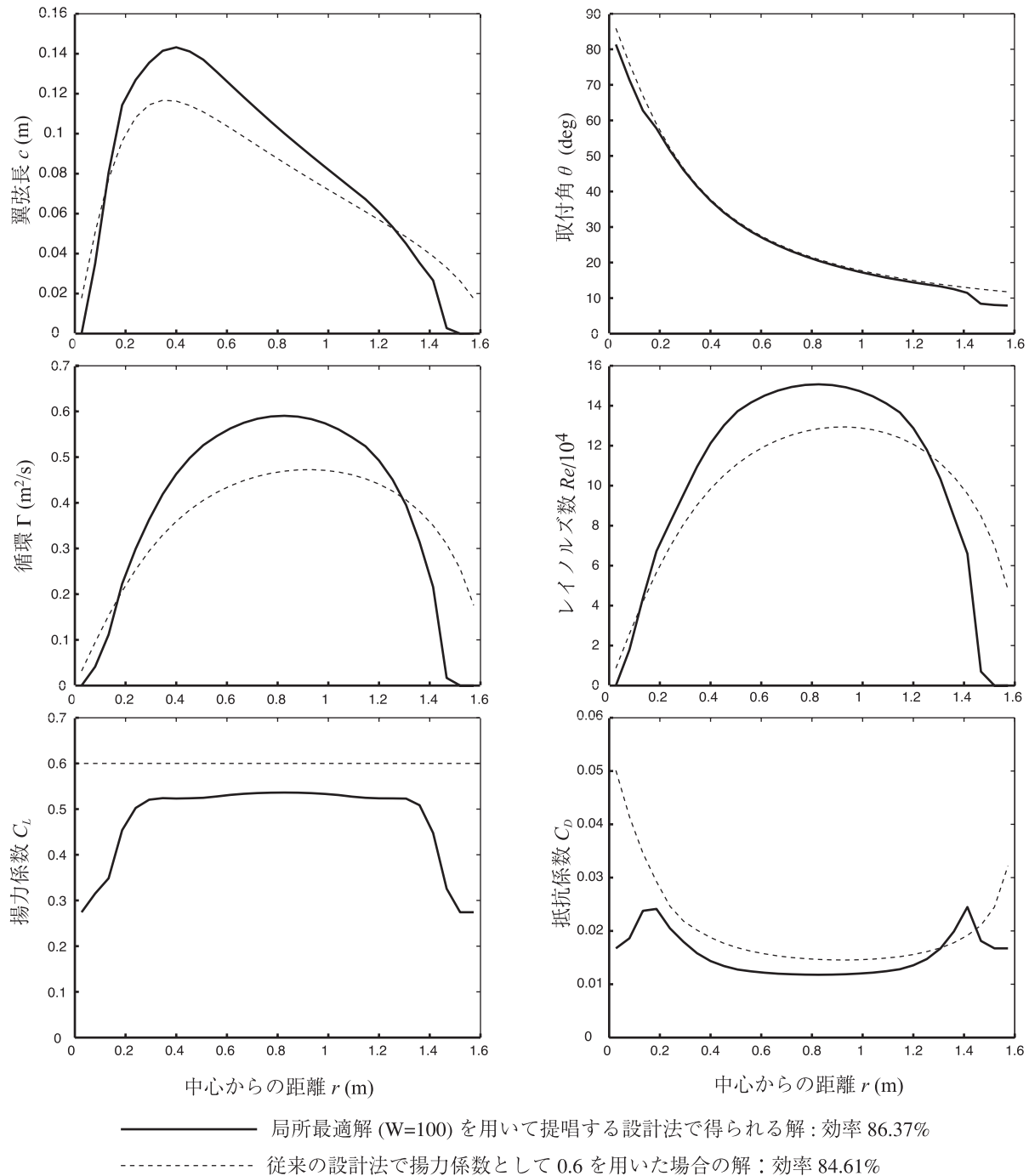


図 16 提唱する設計法で得られる解と従来の設計法で得られる解

揚力係数として 0.6 を用いて設計した結果を破線で示す。提唱する設計法から得られたプロペラの推進効率は 86.4%、従来の方法で得られたプロペラの推進効率は 84.6%であり、その差は約 1.8%である。ここで比較対象とした従来の設計方法では揚力係数として 0.6 を採用したが、提唱する設計法で得られた解では使用する揚力係数は最大でも 0.54 であった。図 7 のポラーカーブからも確認出来る様にどのレイノルズ数領域でも失速手前までは揚力係数が高い程揚抗比が高くなる。従って従来の設計法で用いる揚力係数として、提唱する設計法よりも

高い値を設定した事は従来の設計法にとって有利である。これにもかかわらず提唱する設計法で得られたプロペラの推進効率が従来の手法に比べ 1.8%高い事は特筆すべき結果である。

また提唱する設計法で得られたプロペラの翼弦長を見ても、設計条件の 1.6m よりも短い位置で翼弦長が 0 になっている。これは提唱する設計法が、設計条件の半径 $r=1.6$ よりも小さい値に最適値があるという結果を出したといえる。今まで設計者は、プロペラ半径、前進速度、回転速度、推力の 4 つを決めなければならなかった

が、提唱する設計法ではプロペラ半径を設計前に決めなくとも、半径の最適化も行われるのである。このような事は従来の設計法では起こりえない。この事も特筆すべき結果である。

提唱する設計法の方が、翼弦長が全体的に長くなっており、先端、および付け根で逆に短くなっている。レイノルズ数を見てみると全体的に提唱する設計法の方が大きくなっており、先端、付け根で小さくなっている。つまり従来の設計法で得られる解のレイノルズ数分布がなだらかな山の形をしているのに対して、提唱する設計法では矩形に近くなっている。矩形に近づくことで、レイノルズ数を大きくして形状抵抗係数を下げるところではブレード面積を大きく、レイノルズ数を小さくして形状抵抗係数が大きくなる場所ではブレード面積を小さくしていると考えられる。また提唱する設計法の循環分布は、従来の設計法で用いる誘導エネルギー損失を最小にする循環分布から離れた分布をしている。翼弦長を長くする事による形状抵抗の低減効果と理想的な循環分布から離れる事に依る誘導エネルギー損失のトレードオフがされた結果であると考えられる。また提唱する設計法では、高いレイノルズ数の領域では高い揚力係数を用い、低いレイノルズ数の領域では低い揚力係数を用いている様子が分かる。このようにレイノルズ数に応じて揚力係数を選択する事で形状抵抗係数も小さく抑える事に成功している様子が分かる。

5. おわりに

本稿では従来行われてきた、誘導エネルギー損失を最小とするプロペラの設計法にかえて、推進効率そのものを目的関数として最適化問題を解くプロペラ設計法を提唱した。また最適化の便を図るため、翼型データを加工し推力 T および必要パワ P を循環 Γ_i のみの関数で表す手順を示した。この結果、 T 、 P がともに Γ_i の関数で与えられ、プロペラの設計は

$$\text{条件 } P(\Gamma_i) - P_0 = 0$$

$$\text{最小化 } -T(\Gamma_i)$$

で表記される最適化問題を解く事に帰着された。目的関数、拘束条件ともに非線形ではあるが、変数が Γ_i のみであるため、この最適化問題を解く事は難しい事ではない。

また提唱する設計法の有用性を示すために、人力飛行機用のプロペラを提唱する設計法を用いて設計した。その結果、単に提唱する設計法を用いただけでは失速を起こしやすい高い揚力係数が選択され、実用性に乏しいプロペラが得られてしまった。またより大きなプロペラを設計してみたところ、いびつなプロペラが得られた。これらは関数 $C_D Re$ と関数 C_L^* を決定する際に大局的最適

解を用いたために生じた問題である。そこで関数 $C_D Re$ と関数 C_L^* を決定する際に、低いレイノルズ数で低い揚力係数を取り高いレイノルズ数で高い揚力係数をとる初期値を選択し、評価関数を勾配法で最適化する事で意図的に初期値の近傍の局所最適解に収束させることで失速しにくいプロペラを得る様にした。またいびつなプロペラ形状が得られる問題は、評価関数にペナルティ関数として屈曲角度の正弦の自乗に重み W を乗じて加える事で解決した。関数 $C_D Re$ と関数 C_L^* の局所最適解を用いた提案する設計法で得られたプロペラの推進効率は 86.4%、同様の揚力係数を用いた従来の方法で得られたプロペラの推進効率が 84.6%と、1.8%向上した。また従来の方法では行う事が出来なかったプロペラ半径の最適化が、提唱する設計法では可能となった。

本計算において計算は実験データを用いて行ったが、レイノルズ数が 60,000 以下のデータを入手する事が出来なかった。ここで設計されたプロペラのレイノルズ数は半径の 9 割程度が 60,000 を超えているが、残りの 1 割は 60,000 以下であり、この部分では入手データの外挿を利用しているため、ここで行われた計算の信頼性にはやや問題がある。

近年盛んに開発が進められている超小型無人機に用いられているプロペラはここで計算したレイノルズ数よりも低いレイノルズ数で使用されている。これらのプロペラを本方法で設計すれば推進効率を向上させる事が出来るが、100,000 を下回るレイノルズ数における翼型性能の計測例^{11,12)}は少なく、 $Re < 100,000$ の領域での細かな刻み幅のレイノルズ数変化ごとのパワーカーブを得る事が今後の課題である。

参考文献

- 1) 原田賢哉、“成層圏滞空試験成果報告書—試験機の上昇シミュレーション—”, JAXA-RR-04-033, 2005.
- 2) 奥山政広、柴田眞、横川彰寛、木村校優、“成層圏プラットフォーム飛行船の推進性能とプロペラ特性の検討”, JAXA-RR-05-056, 2006.
- 3) “AeroVironment Pushed Limits of Solar Flight,” Aviation Week & Space Technology, May 4, 1998, pp. 54-57.
- 4) 高木亮治：低レイノルズ数流れにおける NACA4402 翼の空力特性解析、日本航空宇宙学会論文集、54 (2006), pp. 367-373.
- 5) Betz, A., Prandtl, L., “Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust (Screw Propellers with Minimum Induced Loss),” Goettingen Reports 1919, pp. 193-213.
- 6) Goldstein, S., “On the Vortex Theory of Screw Propellers,” Royal Society Proc., Series A, Vol.123, London, 1929, pp.

- 440-465.
- 7) Larrabee, E. E., "Practical Design of Minimum Induced Loss Propellers," SAE, pre-print for the April 1979 Business Aircraft Meeting and Exposition, Wichita, KS.
 - 8) Larrabee, E. E., "The Screw Propeller," Scientific American, Vol. 243, No. 1, July 1980, pp. 134-148.
 - 9) Larrabee, E. E., French, S. E., "Minimum Induced Loss Windmills and Propellers," Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 15, 1983, pp. 317-327.
 - 10) Selig, M, Donovan, J and Fraster, D, "Airfoils at Low Speeds," H. A. Stokely, publisher, 1989.
 - 11) Okamoto, M., Yasuda, K. and Azuma, A., "Aerodynamic Characteristics of the Wings and Body of Dragonfly," Journal of Experimental Biology, 199, pp. 281-294.
 - 12) Okamoto, M. Azuma, A., "Experimental Study on Aerodynamic Characteristics of Unsteady Wings at Low Reynolds Number," AIAA Journal, Vol. 43, No. 12, 2005, pp. 2526-2536.

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-06-032

発 行 平成19年3月30日
編集・発行 宇宙航空研究開発機構
〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1
URL : <http://www.jaxa.jp/>
印刷・製本 (株)ビー・シー・シー・

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記にお願いいたします。

宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター
〒305-8505 茨城県つくば市千現2-1-1
TEL:029-868-2079 FAX:029-868-2956

© 2007 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体に加工することを禁じます。

