

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

パラメータに対し区分線形なスケジュールドゲインを
有する制御系の設計法

濱田 吉郎, 大谷 崇, 木田 隆, 長塩 知之

2007年3月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

パラメータに対し区分線形なスケジュールドゲインを有する制御系の設計法*

濱田 吉郎*¹ 大谷 崇*¹ 木田 隆*² 長塩 知之*²

Synthesis of State Feedback Scheduled Gains Piecewise-Linear on Parameters*

Yoshiro HAMADA*¹ Takashi OHTANI*¹ Takashi KIDA*² Tomoyuki NAGASHIO*²

要約

本稿は、制御対象の持つ変動パラメータに応じて、制御器のゲインを変更して制御する「ゲインスケジューリング制御系」の新しい設計法について論ずる。従来の設計手法では、全パラメータ領域での制御性能を保証する一方で、導出されるゲインが複雑なものとなっていた。ここで提案する手法では、スプライン型のパラメータ依存二次形式を用いたゲインスケジューリング手法を応用し、従来法よりも分割数(区分点)の少ない簡便なゲインが得られる。設計条件は dilated LMI (Linear Matrix Inequality; 線形行列不等式) で記述されるため、数値的に解くことが可能であり、容易にゲインを得ることができる。また本手法では、ある制約条件を付加することで、パラメータに対し区分線形となるフィードバックゲインが得られる。スケジューリング制御において、区分点が少ないことや(区分線形のような)単純なスケジューリングで実現できることは、実装時のメモリ消費量や計算負荷の低減につながり、実応用上有効と考えられる。

ABSTRACT

This paper proposes a new synthesis of a gain scheduling controller. Although previous design methods guarantee control performance for every parameter value, resultant gains tend to be too complicated to be implemented in a real system. The proposed method is based on approximation of Lyapunov solutions with spline functions. The synthesis condition is described as dilated linear matrix inequalities, which can be solved numerically. While derived feedback gains in the previous study always have the same grid points as approximated Lyapunov solutions, our condition enables feedback gains to have fewer grid points without deteriorating the performance of the closed loop system. Piecewise-linear scheduling gains can also be obtained by adding some constraints to the derived condition.

1 はじめに

航空宇宙分野において扱われる制御対象は、そのダイナミクスが常に一定ではなく、変動するパラメータによって変化するものが多い。航空機を例にとると、空力係数が動圧や迎角によって変化し、各動作点において異なる挙動を見せる。また宇宙機では、太陽電池パドルが太陽方向を指向するために常に回転しており、その回転角によってダイナミクスが変化する。このような制御対象に対しては、常に一定のゲインで制御するのではなく、ダイナミクスの変動に応じてゲインを変化させて制御することが有効であると、古くから経験的に知られてきた。制御対象の持つ変動パラメータに応じて、制御器のゲインを変更して制御する手法を、

一般にゲインスケジューリング制御と呼ぶ。また導出される可変ゲインをスケジュールドゲインと呼ぶ。

初期のゲインスケジューリング制御は、ダイナミクスの変動が大きい幾つかのパラメータ値(「代表点」と呼ばれる)においてパラメータ値を固定し、それらのダイナミクスに対してゲインを設計し、他のパラメータ値においては設計したゲインを(線形補間などで)内挿することで、パラメータ変動に対応していた。この手法は現在でも用いられることがあるが、代表点間の安定性や制御性能について理論的に保証することができないため、設計後にシミュレーション等で確認する作業が必要である。一方、ロバスト制御理論の発展に伴い、全パラメータ領域での制御性能を理論的に保証する設計手法の研究が進められてきた。特に LPV(Linear Parameter Varying) システム(パラメータを固定した場合に線形時不変系として記述できるシステム)として表現できる制御対象に関しては、数多

*平成19年1月17日受付 (received 17 January 2007)

*¹ 総合技術研究本部 (Institute of Aerospace Technology)

*² 電気通信大学 (University of Electro Communications)

くの研究がこれまでに成されている。

これらの理論研究においては、安定性や制御性能を保証するために、いかにして適切な Lyapunov 関数を求めるかがポイントとなる。初期の研究においては、Lyapunov 関数をパラメータ依存でない固定の関数として解析・設計条件が導出されていた (例えば [1][2][3] など)。同時に、Lyapunov 関数をパラメータ非依存と限定することによる「保守性」(解のクラスが実際よりも小さくなってしまうこと)の問題も明らかになっていった。この保守性を排除するために、その後、パラメータ依存関数として Lyapunov 関数を導出する手法の研究が進められた [4][5][6][7][8]。これらの研究では、保守性は排除できるものの、その引き換えとして導出されるゲインが非常に複雑なものとなっていた。これは導出されるゲインが Lyapunov 関数の一部を利用しているためである。保守性を排除するために、Lyapunov 関数を複雑なパラメータ依存関数として表現することで、導出されるゲインも同時に複雑なパラメータ依存関数となってしまうのである。これは実装時に大きな問題となる。すなわち、実装のためにより多くのメモリ量を必要とする、又は各パラメータ値においてその都度逆行列演算を必要とする、という問題が生じる。最新の計算機環境で実装できるのであればこれらは問題にはならないが、基本的に「枯れた」技術を好む航空宇宙分野においては、最新の計算機環境を実装で用いることはまれであり、実装においては搭載計算機に極力負担をかけないスケジュールドゲインが必要となる。

これらの事情を踏まえ、本稿では保守性を排除しつつ実装に適したスケジュールドゲインを導出する設計法を提案する。パラメータ依存 Lyapunov 関数を求める手法として、スプライン型のパラメータ依存二次形式を利用する研究が既に成されており [5]、この手法を基に設計法を構築する。文献 [5] では、保守性を排除するために Lyapunov 関数の解のクラスを広げること、導出されるゲインが複雑になっていく傾向があったが、本稿では Lyapunov 関数の複雑さとゲインの複雑さを分離し、Lyapunov 関数の解のクラスを広げつつ簡便なゲインを導出する手法を提案する。設計条件は dilated¹ LMI (Linear Matrix Inequality; 線形行列不等式) [9][10] として記述されるため、標準的なソルバを用いて解を容易に導出することができる。更に、この手法を用いると、ある制約条件を課すだけで、パラメータに関し区分線形なゲインを導出できることを示す。区分線形なゲインは、オンラインでの複雑な計算 (逆行列演算など) を必要とせず、単純な線形補間で

¹又は extended/enhanced LMI[11][12].

スケジューリングが可能のため、搭載計算機への負荷が低く、実装上好ましい。導出されるゲインと制御性能を簡単な数値例で示し、従来の手法と比較する。

2 問題設定

本稿では状態フィードバック系についてのみ取り扱う。以下の LPV システムを考える:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)w + B_u(\theta)u, \\ z = C(\theta)x + D(\theta)w + D_u(\theta)u, \end{cases} \quad (1)$$

ここで $x \in \mathbf{R}^n$ は制御対象の状態量、 $w \in \mathbf{R}^m$ は外生入力、 $u \in \mathbf{R}^{m_u}$ は制御入力で $z \in \mathbf{R}^p$ は制御出力を表わす。一次元のスケジューリングパラメータ $\theta(t)$ は微分可能な関数で、その値と微分値は以下の領域に収まるものとする:

$$\begin{aligned} \theta(t) &\in \Theta_{\text{val}} := [\underline{\theta}, \bar{\theta}], \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \in \Omega_{\text{val}} := [\underline{\omega}, \bar{\omega}]. \end{aligned} \quad (2)$$

次式で表される静的状態フィードバックを考える:

$$\Gamma: u = F(\theta)x. \quad (3)$$

ゲイン $F(\theta)$ はパラメータ θ に応じて値が決定される、スケジュールドゲインである。以下、このフィードバック則 Γ と制御対象 Σ から構成される閉ループ系を $\Sigma\Gamma$ と記述する。

LPV システムに対して、安定性と L_2 ゲイン性能を保証する以下の条件が知られている。これは有界実補題として知られている結果を、上記の状態フィードバックを含んだ LPV システム向けに拡張したものである。

補題 1 [4] 任意の $(\theta, \omega) \in (\Theta_{\text{val}} \times \Omega_{\text{val}})$ において、以下の LMI 条件²

$$P(\theta) \gg 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{cl}(\theta, \omega) & P(\theta)B(\theta) & C_{cl}^T(\theta) \\ B^T(\theta)P(\theta) & -\gamma I & D^T(\theta) \\ C_{cl}(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} \ll 0, \quad (5)$$

を満足する正数 γ と一回微分可能な対称行列値関数 $P(\theta) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が存在するとき、閉ループ系 $\Sigma\Gamma$ は指数安定かつ $\|\Sigma\Gamma\|_{L_2} < \gamma$ となる。但し

$$\begin{aligned} Q_{cl}(\theta, \omega) &= \omega \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} + A_{cl}^T(\theta)P(\theta) + P(\theta)A_{cl}(\theta), \\ A_{cl}(\theta) &= A(\theta) + B_u(\theta)F(\theta), \\ C_{cl} &= C(\theta) + D_u(\theta)F(\theta) \end{aligned}$$

である。 □

²不等式 $P(\theta) \gg 0$ ($P(\theta) \ll 0$) は、ある正数 α について、任意の $\theta \in \Theta_{\text{val}}$ において $P(\theta) \geq \alpha$ ($P(\theta) \leq -\alpha$) が成り立つことを表している。

3 従来の設計手法

上記 LPV システム (1) を全パラメータ領域で安定化し、制御性能を満足するスケジュールドゲイン (3) を設計する手法は、古くから研究されてきた。ここでは我々の提案する手法と関係の深い、代表的な三つの手法について言及する。なお本稿では、制御性能を表わす指標として、補題 1 にも現れる L_2 ゲインを採用する。

3.1 単純補間

後述する二手法は、補題 1 に基づいて理論的な安定性及び性能を保証するものであるが、これらとは異なるヒューリスティックな手法が初期には用いられ、現在でも応用の場面で良く用いられる。基本的な考え方は以下の通りである：

- 式 (1) のシステムにおいて、ダイナミクスが大きく変わるパラメータ値 (ここでは「代表点」と呼ぶ) を選ぶ。
- 各代表点において、パラメータ値を固定することで得られる線形時不変系に対して、制御性能を満足するゲインを設計する。この際の設計手法は目的に合わせて選択して良い。
- 各代表点では、上記で設計されたゲインを用い、それ以外では内挿 (線形補間など) で得られたゲインを用いる。

利点としては、設計が容易であること、スケジューリングが線形補間などの単純な内挿で済むため実装が容易であること、などが挙げられる。しかしこの手法では、各代表点における制御性能は保証できても、それ以外のパラメータ値における制御性能は設計時に理論的に保証することができない。そのため設計後に総当たりで制御性能を解析する必要がある。近年ではその解析にロバスト制御理論を応用し、省力化を図る研究もあるが [13]、制御性能を満足しない場合は代表点を増やすなどして再設計を行なう必要があり、結果的に多大な労力を要する。

3.2 パラメータ非依存の変数行列を用いた解法

補題 1 の条件に基づき、全パラメータ領域での性能を理論的に保証する手法である [3]。補題 1 は、連続値パラメータ $(\theta, \omega) \in (\Theta_{\text{val}} \times \Omega_{\text{val}})$ の全ての値に対

して式 (4)(5) が成り立つことを要求している。これは無限個の行列不等式条件であり、解くことは非常に困難であるため、制御対象の LPV システムにある程度の仮定を置くことで、有限個の行列不等式に帰着させることが必要となってくる。本手法では、(1) 式の行列 $A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta)$ が θ に関して affine な関数 (パラメータが複数の場合はそのポリトープ) として記述され、 $B_u(\theta)$ 及び $D_u(\theta)$ はパラメータに依存しない (つまり $B_u(\theta) = B_u, D_u(\theta) = D_u$) と仮定する。

変数行列 $P(\theta)$ をパラメータ非依存 ($P(\theta) = P, \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} = 0$) に限定することで、補題 1 における条件式を有限個の行列不等式に帰着させることができ、 θ の affine 関数 (パラメータが複数の場合はポリトープ) として表現されるゲインが得られる。具体的には、式 (5) をパラメータ領域の端点 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ で固定した行列不等式を考え、それらを満足する変数行列を求める。これは LMI として記述できるため、(解が存在する場合は) 容易に解を得ることができる。

この手法により得られるスケジュールドゲインは θ に関して affine であるため、前節で述べた手法と同様に実装が容易である。それに加えて、全パラメータ領域で制御性能を理論的に保証できるという利点がある。その反面、本来パラメータ依存であるはずの変数行列を非依存に限定して行列不等式を解いているため、得られる解は保守的である。つまり、解のクラスを狭めているため、本来は存在するはずの解が得られないという事態も起こり得る。

3.3 パラメータ依存行列不等式としての解法

前節の手法における保守性を排除するために、補題 1 の条件式 (4)(5) をパラメータ依存行列不等式として解く手法も存在する。この場合、同条件中の変数行列 $P(\theta)$ の解はパラメータ非依存ではなく、パラメータの関数として導出されるため、上述の手法よりも解のクラスが広がり、より保守的でない解が期待できる。これらの手法を代表して、文献 [5] で提案された手法について述べる。

本手法では、(1) 式に現れる全ての行列は θ に関して区分線形な関数と仮定する。例えば $A(\theta)$ は、

$$A(\theta) = A_i^\Sigma + \frac{\theta - \theta_i^\Sigma}{\theta_{i+1}^\Sigma - \theta_i^\Sigma} (A_{i+1}^\Sigma - A_i^\Sigma), \quad (6)$$

$$\theta \in [\theta_i^\Sigma, \theta_{i+1}^\Sigma], i = 0, 1, \dots, N_\Sigma,$$

と表される。ここで θ_i^Σ は $A(\theta)$ の区分点であり、 $\underline{\theta} = \theta_0^\Sigma < \theta_1^\Sigma < \dots < \theta_{N_\Sigma}^\Sigma < \theta_{N_\Sigma+1}^\Sigma = \bar{\theta}$ という関係に

ある. これらの θ_i^Σ による領域 Θ_{val} の分割を $D^\Sigma = \{\underline{\theta} = \theta_0^\Sigma, \theta_1^\Sigma, \dots, \theta_{N^\Sigma}^\Sigma, \theta_{N^\Sigma+1}^\Sigma = \bar{\theta}\}$ と記述し, $A(\theta)$ 以外の行列も同じ分割 D^Σ を持つ区線形関数とする. ここでは全ての行列がパラメータ依存としているので, 前節の手法よりは緩い仮定となっている. また, 分割 D^Σ をより細かく取れば, 任意の関数を近似することができるため, 実システムに対する仮定としては妥当と思われる.

文献 [5] では, 無限個の行列不等式である (5) と等価な, 有限個の LMI から成る条件が導出されている.

補題 2 [5] 以下の (i) と (ii) は等価である.

(i) θ の連続値関数であるフィードバックゲイン $F(\theta)$ と, 一回連続微分可能な対称行列値関数 $P(\theta)$ が存在して, 任意の $(\theta, \omega) \in (\Theta_{\text{val}} \times \Omega_{\text{val}})$ において式 (4)(5) を満たす.

(ii) D^Σ の細分となるある分割 $D(D = \{\underline{\theta} = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_{N+1} = \bar{\theta}\})$, 行列 W_k 及び対称行列 $X_k (k = 0, 1, \dots, N+1)$ が存在して, $\omega = \underline{\omega}, \bar{\omega}$ について以下の不等式を満足する:

$$X_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, N+1, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{cl(k)} & B_k & S_k^T \\ B_k^T & -\gamma I & D_k^T \\ S_k & D_k & -\gamma I \end{bmatrix} := J_{cl(k)} < 0, \\ k = 0, 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{cl(k)}^- & B_k & S_k^T \\ B_k^T & -\gamma I & D_k^T \\ S_k & D_k & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \\ k = 1, 2, \dots, N+1, \quad (9)$$

$$J_{cl(k)} + \frac{1}{2}(L_{cl(k)} + L_{cl(k)}^T) < 0, \\ k = 0, 1, \dots, N, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } Q_{cl(k)} &:= A_k X_k + X_k A_k^T - \frac{\omega}{\Delta\theta_k} \Delta X_k \\ &\quad + B_{u(k)} W_k + W_k^T B_{u(k)}^T, \\ Q_{cl(k)}^- &:= A_k X_k + X_k A_k^T - \frac{\omega}{\Delta\theta_{k-1}} \Delta X_{k-1} \\ &\quad + B_{u(k)} W_k + W_k^T B_{u(k)}^T, \\ S_k &:= C_k X_k + D_{u(k)} W_k, \end{aligned}$$

$$L_{cl(k)} := \begin{bmatrix} L_{cl(k)}^{11} & \Delta B_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ L_{cl(k)}^{31} & \Delta D_k & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_{cl(k)}^{11} := (\Delta A_k X_k + A_k \Delta X_k) \\ + (\Delta B_{u(k)} W_k + B_{u(k)} \Delta W_k),$$

$$L_{cl(k)}^{31} := (\Delta C_k X_k + C_k \Delta X_k) \\ + (\Delta D_{u(k)} W_k + D_{u(k)} \Delta W_k),$$

であり, 上記の Δ は差分を表わす. つまり $\Delta\theta_k := \theta_{k+1} - \theta_k, \Delta X := X_{k+1} - X_k, \Delta A := A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k)$. (ii) が成り立つとき, (i) を満足する $P(\theta)$ と $F(\theta)$ のひとつは以下のように与えられる:

$$P(\theta) = \left\{ \frac{1}{l} \int_{\theta - \frac{l}{2}}^{\theta + \frac{l}{2}} X_S(h) dh \right\}^{-1}, \quad (11)$$

$$F(\theta) = W_S(\theta) X_S^{-1}(\theta), \quad (12)$$

ここで l は十分小さなある正数であり, X_S と W_S は以下のように定義する:

$$X_S(\theta) = X_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} (X_{k+1} - X_k),$$

$$W_S(\theta) = W_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} (W_{k+1} - W_k),$$

for $\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]$. \square

前節の手法では, 変数行列をパラメータ非依存に限定することで条件式を導出していたが, 本手法は変数行列を式 (11) の形式に限定することで条件式 (7)–(10) を導出している. 分割 D を細かく取る (区分点を多くすること) で, $P(\theta)$ は任意の連続値関数を近似することができるため, 解の保守性を排除することができる. しかし, 前述の手法で得られるゲインと比較して, 本手法で導出されるゲインは式 (12) のように複雑なものになっている. 複雑さの要因は次の二点にある:

- パラメータ依存の逆行列演算 ($X_S^{-1}(\theta)$) が含まれているため, 各パラメータ値において逆行列演算が必要となる.
- $P(\theta)$ と同じ分割 D を持つため, 保守性を排除するために D を細かくとると, その分だけ多くの行列値を記憶する必要がある.

前者は, スケジュール時にその都度逆行列演算が必要であることを意味している. 逆行列演算は線形補間などに比べて演算処理に時間がかかるため, CPU 性能と行列のサイズによっては実時間でのスケジュールが不可能になってしまう. 後者は実装時に必要なメモリ容量に密接に関係してくる. 式 (12) を実現するためには, 行列 X_k, W_k を分割 D の区分点の数 ($N+2$) だけ用意する必要がある. 前述の通り, 保守性を排除するためには分割 D の区分点を多くする必要があるが, そのことにより実装に必要なメモリ容量が増加してしまうため, 解の保守性とメモリ容量の間に明らかなトレードオフが発生してしまう.

4 提案する設計手法

前節で述べたトレードオフを解消する、新たな設計手法を提案する。本手法も補題1に基づくものであるが、補題2と異なり、条件式(5)をそのまま有限個のLMI化するのではなく、dilated LMI[9][10]と呼ばれる形式に変形した後に有限個の条件式に帰着させる。これにより、前述のトレードオフが解消される。

4.1 Dilated LMI による条件の記述

補題1では $P(\theta)$ と $F(\theta)$ の積を含む項が存在し、これが文献[5]の条件でLyapunov関数を構成する関数 $X_S(\theta)$ とフィードバックゲインが同じ分割を持たざるを得ないことの原因となっていた。しかしdilated LMIを用いることで、これらの積の項を含まない、補題1と等価な定理が導かれる。以下では簡単のため、パラメータに依存する行列値関数はCalligraphic体で表現し、引数 (θ) は陽に記述しない。例えば $A(\theta)$ の代わりに \mathcal{A} なる表記を用いる。

定理 1 任意の $(\theta, \omega) \in (\Theta_{\text{val}} \times \Omega_{\text{val}})$ において、以下の条件

$$\mathcal{X} \gg 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\omega \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \theta} + \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{X}\mathcal{A}^T & \mathcal{B} & \mathcal{X}\mathcal{C}^T & -\mathcal{X} \\ \mathcal{B}^T & -\gamma I & \mathcal{D}^T & 0 \\ \mathcal{C}\mathcal{X} & \mathcal{D} & -\gamma I & 0 \\ -\mathcal{X} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_u \mathcal{F} \\ 0 \\ \mathcal{D}_u \mathcal{F} \\ I \end{bmatrix} \mathcal{G} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ -\epsilon I \end{bmatrix} \mathcal{G}^T \begin{bmatrix} \mathcal{F}^T \mathcal{B}_u^T & 0 & \mathcal{F}^T \mathcal{D}_u^T & I \end{bmatrix} \ll 0, \end{aligned} \quad (14)$$

を満足する正数 γ, ϵ 、一回微分可能な対称行列値関数 $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 及び行列値関数 $\mathcal{G} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が存在するとき、閉ループ系 $\Sigma\Gamma$ は指数安定かつ $\|\Sigma\Gamma\|_{L_2} < \gamma$ となる。□

証明 1 証明は文献[9]及び[10]と同様であるが、読者の理解の助けとするために以下に証明手順を示す。補題1に対する定理1の必要十分性が、直行行列及び

Schur補題を用いることで証明される。十分性は、以下の行列:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}_u \mathcal{F} \\ 0 \\ \mathcal{D}_u \mathcal{F} \\ I \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -\mathcal{B}_u \mathcal{F} \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -\mathcal{D}_u \mathcal{F} \end{bmatrix}.$$

(\perp は直行行列を表わす)を考える。上記行列とその転地行列を式(14)の左右から掛けると、左辺第二項及び第三項は零行列となり、

$$\begin{bmatrix} \star & \mathcal{B} & \mathcal{X}\mathcal{C}^T + \mathcal{X}\mathcal{F}^T \mathcal{D}_u^T \\ \mathcal{B}^T & -\gamma I & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{C}\mathcal{X} + \mathcal{D}_u \mathcal{F}\mathcal{X} & \mathcal{D} & -\gamma I \end{bmatrix} \ll 0 \quad (15)$$

$$(\star = -\omega \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \theta} + \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{X}\mathcal{A}^T + \mathcal{B}_u \mathcal{F}\mathcal{X} + \mathcal{X}\mathcal{F}^T \mathcal{B}_u^T)$$

を得る。この不等式と式(5)との等価性は $\mathcal{X} = \mathcal{P}^{-1}$ とすることで示される。必要性は、 $\mathcal{X} > 0$ であるから、

$$\begin{bmatrix} \epsilon \mathcal{B}_u \mathcal{F}\mathcal{X} \\ 0 \\ \epsilon \mathcal{D}_u \mathcal{F}\mathcal{X} \end{bmatrix} (2\epsilon \mathcal{X})^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon \mathcal{X}\mathcal{F}^T \mathcal{B}_u^T & 0 & \epsilon \mathcal{X}\mathcal{F}^T \mathcal{D}_u^T \end{bmatrix} \geq 0, \quad (16)$$

を満足する小さな正数 ϵ が存在することを利用する。 ϵ が十分小さければ、式(5)と等価な式(15)の左辺にこの項を加えても不等式の向きに変化はない。そしてSchur補題を適用することで、

$$\begin{bmatrix} \star & \mathcal{B} & \mathcal{X}\mathcal{C}^T + \mathcal{X}\mathcal{F}^T \mathcal{D}_u^T & -\epsilon \mathcal{B}_u \mathcal{F}\mathcal{X} \\ \mathcal{B}^T & -\gamma I & \mathcal{D}^T & \\ \mathcal{C}\mathcal{X} + \mathcal{D}_u \mathcal{F}\mathcal{X} & \mathcal{D} & -\gamma I & -\epsilon \mathcal{D}_u \mathcal{F}\mathcal{X} \\ -\epsilon \mathcal{X}\mathcal{F}^T \mathcal{B}_u^T & 0 & -\epsilon \mathcal{X}\mathcal{F}^T \mathcal{D}_u^T & -2\epsilon \mathcal{X} \end{bmatrix} \ll 0$$

$$(\star = -\omega \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \theta} + \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{X}\mathcal{A}^T + \mathcal{B}_u \mathcal{F}\mathcal{X} + \mathcal{X}\mathcal{F}^T \mathcal{B}_u^T)$$

を得る。これは定理1の \mathcal{G} として $\mathcal{G} = \mathcal{G}^T = \mathcal{X}$ を選ぶことに他ならない。■

4.2 Dilated LMI による設計法

上述の定理から、次の提案する設計法が得られる。まず Θ_{val} の分割のうち、2節で定義された D がその細分となるものを考え、 D^Γ と記述する。

$$D^\Gamma = \{\theta_0^\Sigma = \theta_0^\Gamma, \theta_1^\Gamma, \dots, \theta_{N_\Gamma}^\Gamma, \theta_{N_\Gamma+1}^\Gamma = \theta_{N_\Sigma+1}^\Sigma\}, \quad (N_\Gamma \leq N). \quad (17)$$

つまり D^Γ は、 D の区分点の数 (つまり $X_S(\theta)$ の区分点の数) 以下の区分点を持つ Θ_{val} の分割である。

例 $\Theta_{\text{val}} = [0, 6]$, $D^\Sigma = \{0, 6\}$ で、 $D = \{0, 2, 4, 6\}$, ($N_\Sigma = 0, N = 2$) の場合を考える。この時 D^Γ の候補は、 $\{0, 6\}$ ($N_\Gamma = 0$), $\{0, 2, 6\}$, $\{0, 4, 6\}$ ($N_\Gamma = 1$) 及び $\{0, 2, 4, 6\}$ ($N_\Gamma = 2$) である。

次の定理は、定理 1 の結果に基づき、区分点の数が D よりも小さい D^Γ を区分点として持つフィードバックゲイン $F(\theta)$ を与える。

定理 2 次の (i) と (ii) は等価である。

(i) θ の連続値関数であるフィードバックゲイン \mathcal{F} 、一回微分可能な対称行列値関数 \mathcal{X} 、正な行列値関数 \mathcal{G} および正数 γ, ϵ が存在して、任意の $(\theta, \omega) \in (\Theta_{\text{val}} \times \Omega_{\text{val}})$ において式 (13)(14) を満たす。

(ii) Θ_{val} の分割 D^Γ 、その細分となる D 、 n 次対称行列 X_k ($k = 0, 1, \dots, N+1$), n 次の正方行列 G_j^Γ ($j = 0, 1, \dots, N_\Gamma+1$), 行列 W_j^Γ ($j = 0, 1, \dots, N_\Gamma+1$) 及び正数 γ, ϵ が存在して、 $\omega = \underline{\omega}, \bar{\omega}$ について以下の不等式を満足する:

$$X_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots, N+1, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{cl(k)} & B_k & S_k^T & R_k \\ B_k^T & -\gamma I & D_k^T & 0 \\ S_k & D_k & -\gamma I & -\epsilon D_{u(k)} W_k \\ R_k^T & 0 & -\epsilon W_k^T D_{u(k)}^T & -\epsilon(G_k + G_k^T) \end{bmatrix} := J_{cl(k)} < 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{cl(k)}^- & B_k & S_k^T & R_k \\ B_k^T & -\gamma I & D_k^T & 0 \\ S_k & D_k & -\gamma I & -\epsilon D_{u(k)} W_k \\ R_k^T & 0 & -\epsilon W_k^T D_{u(k)}^T & -\epsilon(G_k + G_k^T) \end{bmatrix} < 0, \quad k = 1, 2, \dots, N+1, \quad (20)$$

$$J_{cl(k)} + \frac{1}{2}(L_{cl(k)} + L_{cl(k)}^T) < 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (21)$$

$$\text{但し, } G_k := G_j^\Gamma + \frac{\theta_k - \theta_j^\Gamma}{\theta_{j+1}^\Gamma - \theta_j^\Gamma} (G_{j+1}^\Gamma - G_j^\Gamma),$$

$$W_k := W_j^\Gamma + \frac{\theta_k - \theta_j^\Gamma}{\theta_{j+1}^\Gamma - \theta_j^\Gamma} (W_{j+1}^\Gamma - W_j^\Gamma),$$

(for k s.t. $\theta_j^\Gamma \leq \theta_k \leq \theta_{j+1}^\Gamma$),

$$Q_{cl(k)} := A_k X_k + X_k A_k^T - \frac{\omega}{\Delta \theta_k} \Delta X_k + B_{u(k)} W_k + W_k^T B_{u(k)}^T,$$

$$Q_{cl(k)}^- := A_k X_k + X_k A_k^T - \frac{\omega}{\Delta \theta_{k-1}} \Delta X_{k-1}$$

$$+ B_{u(k)} W_k + W_k^T B_{u(k)}^T,$$

$$R_k := G_k - X_k - \epsilon B_{u(k)} W_k,$$

$$S_k := C_k X_k + D_{u(k)} W_k,$$

$$L_{cl(k)} := \begin{bmatrix} L_{cl(k)}^{11} & \Delta B_k & 0 & L_{cl(k)}^{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{cl(k)}^{31} & \Delta D_k & 0 & L_{cl(k)}^{34} \\ 0 & 0 & 0 & -2\epsilon \Delta G_k \end{bmatrix},$$

$$L_{cl(k)}^{11} := (\Delta A_k X_k + A_k \Delta X_k) + (\Delta B_{u(k)} W_k + B_{u(k)} \Delta W_k),$$

$$L_{cl(k)}^{31} := (\Delta C_k X_k + C_k \Delta X_k) + (\Delta D_{u(k)} W_k + D_{u(k)} \Delta W_k),$$

$$L_{cl(k)}^{14} := \Delta G_k - \Delta X_k - \epsilon (\Delta B_{u(k)} W_k + B_{u(k)} \Delta W_k),$$

$$L_{cl(k)}^{34} := -\epsilon (\Delta D_{u(k)} W_k + D_{u(k)} \Delta W_k),$$

であり、 Δ は差分を表す ($\Delta \theta_k := \theta_{k+1} - \theta_k$, $\Delta X := X_{k+1} - X_k$, $\Delta A := A(\theta_{k+1}) - A(\theta_k)$ など)。

(ii) が成り立つとき、(i) を満足する $P(\theta)$ と $F(\theta)$ のひとつは以下のように与えられる:

$$P(\theta) = \left\{ \frac{1}{l} \int_{\theta - \frac{l}{2}}^{\theta + \frac{l}{2}} X_S(h) dh \right\}^{-1},$$

$$F(\theta) = W_S^\Gamma(\theta) G_S^{\Gamma-1}(\theta),$$

ここで l は十分小さなある正数である。 $X_S, W_S^\Gamma, G_S^\Gamma$ は以下のように定義する。

$$X_S(\theta) = X_k + \frac{\theta - \theta_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} (X_{k+1} - X_k),$$

for $\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]$,

$$W_S^\Gamma(\theta) = W_j^\Gamma + \frac{\theta - \theta_j^\Gamma}{\theta_{j+1}^\Gamma - \theta_j^\Gamma} (W_{j+1}^\Gamma - W_j^\Gamma),$$

$$G_S^\Gamma(\theta) = G_j^\Gamma + \frac{\theta - \theta_j^\Gamma}{\theta_{j+1}^\Gamma - \theta_j^\Gamma} (G_{j+1}^\Gamma - G_j^\Gamma),$$

for $\theta \in [\theta_j^\Gamma, \theta_{j+1}^\Gamma]$. \square

証明 2 式 (13)(14) は、文献 [15] で扱われている不等式のクラスに含まれるため、(ii) \Rightarrow (i) は文献 [15] の結果から導かれる。(i) \Rightarrow (ii) についても、 $N_\Gamma = N$ と選ぶことで同様に示される。 \blacksquare

注意 不等式 (18)–(21) には、変数 ϵ と行列変数 W_k 及び G_k との積の項があるため、LMI ではないが、 ϵ をラインサーチパラメータとすることで [10]、標準的な LMI ソルバを用いて解くことができる。 \square

4.3 本手法の特徴

本定理の特徴は、フィードバックゲイン $F(\theta)$ の導出に $X_S(\theta)$ が直接関与しない点にある。前節で述べた手法では、 $F(\theta)$ の導出に $X_S(\theta)$ が必要であったため、必然的に $F(\theta)$ は $X_S(\theta)$ の分割 D と同じ分割を持たざるを得なかった。本手法では、 $X_S(\theta)$ が分割 D を持つ一方、 $F(\theta)$ の導出に用いられるパラメータ依存行列は、 D とは異なる (D の区分点の一部を区分点として持つ) 分割 D^Γ を持つ。結果的に、より保守的でない Lyapunov 関数を得るために $X_S(\theta)$ の区分点の数を増やしても、分割 D^Γ の区分点の数を抑えることによって、少ない区分点を持つ $F(\theta)$ の導出が可能となり、ゲインの実装時に必要なメモリ量を増加させることなく保守性を排除することができる。

更に、定理 2 において G_* を共通の行列 ($G_* = G$) として、不等式 (18)–(21) の解が得られれば、導出されるフィードバックゲイン $F(\theta)$ は θ に関して区分線形な関数となる。この場合、文献 [5] や通常定理 2 の結果と異なり、スケジュール時に逆行列計算が不要となり、単純な線形補間のみでスケジュールリングが可能となる。また、第 2 節で示した通り、文献 [3] の手法でもそのような区分線形なゲインは導出可能であるが、制御対象のシステム行列に対する仮定が緩いことと、Lyapunov 関数をパラメータ依存として導出することで保守性が大きく排除されている点が異なる。これらの特徴については次節の数値例にて具体的に示す。

4.4 パラメータが複数存在する場合

議論を簡単にするために、パラメータが 1 つ ($\theta \in \mathbf{R}^1$) のプラントについてのみ取り扱ってきたが、ここまで述べた条件式はパラメータが複数存在する場合にも拡張は可能である。参考として、パラメータが 2 つ ($\theta \in \mathbf{R}^2$) の場合の、有限個の行列不等式としての条件式を付録 A に示す。パラメータがそれ以上ある場合についても、同様に条件式の導出は可能である。

5 数値例

次の LPV システム Σ を考える [5]:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -4.1 - 3.0\theta & 1 \\ -2.0\theta & 2.0 - 3.2\theta \end{bmatrix},$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} -0.03 - 0.3\theta \\ -0.47 + 0.9\theta \end{bmatrix},$$

表 1: Minimized upper bound of L_2 gain in each case.

	(A) 文献 [5]	(B) 定理 2 ($N_\Gamma = 0$)	(B') 定理 2 ($N_\Gamma = 0$; $G_1 = G_2$)
$N = 0$	1.47	1.47	1.48
1	0.992	1.07	1.10
2	0.822	0.836	0.883
3	0.743	0.747	0.783
4	0.690	0.698	0.723
5	0.657	0.668	0.692

$$B_u(\theta) = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 2.0 - 1.0\theta \end{bmatrix}, C(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_u(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

パラメータの領域として $\Theta_{\text{val}} = [0, 6], \Omega_{\text{val}} = [-10, 10]$ を仮定し、 $D^\Sigma = \{0, 6\}$ とする³。要求される L_2 ゲイン性能は 0.7 以下とする。

ここでは

- 文献 [5] の手法
- 本稿で提案する手法 ($N_\Gamma = 0$)
- 本稿で提案する手法 ($N_\Gamma = 0$ かつ $G_* = G$)

を用いた場合について、設計結果を示す。

5.1 文献 [5] の手法

表 1 は、それぞれの手法と分割 D の区分点の数 $N = 0 \dots 5$ の各値において、 γ 最小化の結果得られた L_2 ゲインの上界を示している。分割 D については、 Θ が等間隔に分割されるように区分点を設定している。

文献 [5] の手法では、 L_2 ゲイン性能要求を満足するためには少なくとも N は 4 以上の数である必要があり (表 1 (A) 参照)、結果的に導出されるフィードバックゲインの区分点の数も $6 (= N + 2)$ かそれ以上になってしまう。 $N = 4$ において得られたゲイン $F(\theta)$ 及び Lyapunov 関数を構成する行列 $P(\theta)$ を図 1 に示す。両者とも 6 つの区分点を持っている。

5.2 本稿で提案する手法 ($N_\Gamma = 0$)

提案する手法を用いて、ゲインの行列の区分点を θ の値域の上下限のみ ($N_\Gamma = 0$) に抑えた設計を行なっ

³文献 [5] の数値例には不適切な部分があるため (主著者に確認済)、仮定する領域に変更を加えている。

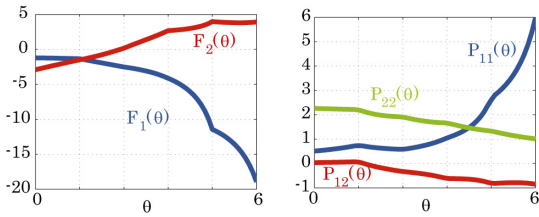


図 1: The derived feedback gain $F(\theta)$ (left) and Lyapunov matrix $P(\theta)$ (right) using the method in [5].

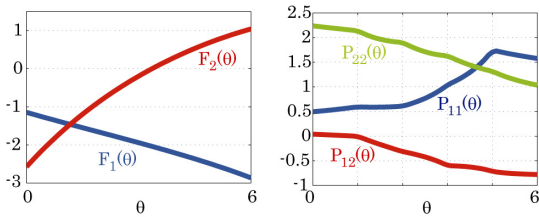


図 2: The derived feedback gain $F(\theta)$ (left) and Lyapunov matrix $P(\theta)$ (right) using the proposed method.

た。表 1 (B) より、提案する手法では、ゲインの区分点の数 ($= N_\Gamma + 2$) を変更せずとも、Lyapunov 関数の区分点の数 ($= N + 2$) を増やすことで、 L_2 ゲインの上界の値を低減できていることがわかる。これが本手法の利点の一つである。またこの場合も、 L_2 ゲイン性能要求を満足するためには、 N が 4 以上の数であればよいことがわかる。

図 2 は、提案する手法を用いて、 $N = 4$ として得られたゲイン $F(\theta)$ 及び行列 $P(\theta)$ である。6 つの区分点を持つ $P(\theta)$ に対して、 $F(\theta)$ は θ の上下限 ($\underline{\theta}, \bar{\theta}$) のみを区分点として持つ。これは文献 [5] の手法と比較して、同等の性能ながらゲイン実装時に必要となるデータ量を 1/3 減らせることを意味する。しかしその一方で、区分点間の補間に逆行列演算が必要であることは両者とも同じである。

5.3 本稿で提案する手法 ($N_\Gamma = 0, G_* = G$)

次に、提案する手法でゲイン行列の区分点を θ の領域の上下限のみに限り、かつ変数 G_* を共通の行列として (つまり $G(\theta)$ をパラメータ非依存として) 設計を行なった。表 1 (C) より、この場合も Lyapunov 関数の区分点の数 ($= N + 2$) を増やすことで L_2 ゲインの上界の値が低減でき、かつ $N \geq 5$ ならば要求性能を満足することがわかる。

図 3 は、変数 G_* を共通の行列として、 $N = 5$ とし

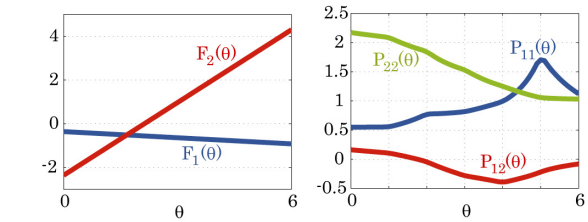


図 3: The derived feedback gain $F(\theta)$ (left) and Lyapunov matrix $P(\theta)$ (right) using the proposed method with $G_1 = G_2$.

て得られたゲイン $F(\theta)$ 及び行列 $P(\theta)$ である。 $P(\theta)$ の区分点の数は 7 つで、 $F(\theta)$ は θ の上下限 ($\underline{\theta}, \bar{\theta}$) のみを区分点として持つ。ゲインの区分点数こそ図 2 の場合と同じであるが、ゲインが θ に関して affine であり、区分点間のゲインが線形補間で得られることが大きな違いである。

上記三例の設計結果を示したが、これらは全て要求仕様である L_2 ゲイン性能を満足しており、その値もほぼ同等である。性能に差が無い場合、ゲインを選択する指標となるのは「実装の容易さ」であり、その観点から考えると、最も好ましいゲインが図 3 であることは明らかである。

6 おわりに

パラメータに対し区分線形となるゲインを、保守性を排除しつつ導出するための設計条件を示した。条件はラインサーチパラメータを含む線形行列不等式で表わされるため、標準的なソルバを用いて容易に解くことができる。制御性能を保証するための Lyapunov 関数は、複数の区分点を持つ区分線形なパラメータ依存行列値関数を用いて表現され、その区分点は設計時に選択することができる。この値を大きくすることで、設計時の保守性を排除することが可能である。その一方、ゲインについては Lyapunov 関数の区分点とは別個に区分点を定めることができるため、従来手法と比較して制御性能を劣化させることなく簡便なゲインを導出することが可能である。

従来手法では、Lyapunov 関数の区分点とゲインの区分点が区別されていなかったため、「保守性の排除による制御性能の向上」と、「ゲインの区分点を増加させたことによる制御性能の向上」の二者の区別が付いていなかった。提案する手法では、これらは明確に別のものとして扱われているため、設計における自由度が増している。つまり、本設計手法を用いることで、

「ゲインの区分点を固定したまま、最良の制御性能を実現する」設計や、「制御要求を満足する、区分点数が最小のゲインを導出する」ということが可能となる。但し後者については、適切なゲインの区分点 (D^F) を導出するアルゴリズムも同時に必要となってくるため (現状では D^F は予め与えるものとしている)、今後の研究が必要である。本稿では状態フィードバック系についてのみ取り上げたが、出力フィードバック系への拡張として、大型柔軟構造衛星の姿勢制御を適用先とした検討も進めており、今後報告する予定である [14]。

参考文献

- [1] G. Becker and A. Packard, “Gain-Scheduled State-Feedback with Quadratic Stability for Uncertain Systems”, *Proceedings of the American Control Conference*, pp.2702-2703 (1991).
- [2] A. Packard, “Gain Scheduling via Linear Fractional Transformation”, *Systems & Control Letters*, vol.22, no.2, pp.79-92 (1994).
- [3] P. Apkarian and P. Gahinet, “A Convex Characterization of Gain-Scheduling H_∞ Control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.40, no.7, pp.853-864 (1995).
- [4] R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita and E. Shimomura, “ L_2 Gain and H_∞ Control of Linear Systems with Scheduling Parameter”, *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 1412/1414 (1994).
- [5] 増淵泉, 久米彩登, 示村悦二郎, “スプライン型のパラメータ依存二次形式を用いたゲインスケジューリング制御系の設計”, 計測自動制御学会論文集, vol.35, no.3, 319/325 (1999).
- [6] T. Azuma, R. Watanabe and K. Uchida, “An Approach to Solving Parameter-Dependent LMI Conditions Based on Finite Number of LMI Conditions”, *Proceedings of the American Control Conference*, 510/514 (1997).
- [7] P. Gahinet, P. Apkarian and M. Chilali, “Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.41, no.3, 436/442 (1996).
- [8] H. D. Tuan and P. Apkarian, “Relaxations of Parameterized LMIs with Control Applications”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol.9, no.2, 59/84 (1999).
- [9] Y. Ebihara and T. Hagiwara, “New Dilated LMI Characterizations for Continuous-Time Control Design and Robust Multiobjective Control”, *Proceedings of the American Control Conference*, 47/52 (2002).
- [10] T. Shimomura, M. Takahashi and T. Fujii, “Extended-Space Control Design with Parameter-Dependent Lyapunov Functions”, *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 2157/2162 (2001).
- [11] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel and J. Bernussou, “Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parameterizations for discrete-time systems”, *International Journal of Control*, vol.75, no.9, pp.666-679 (2002).
- [12] P. Apkarian, H. D. Tuan and J. Bernussou, “Continuous-Time Analysis, Eigenstructure Assignment, and H_2 Synthesis With Enhanced Linear Matrix Inequalities (LMI) Characterizations”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.46, no.12, 1941-1946 (2001).
- [13] M. Rotunno, T. Fiorenzani, P. Petritoli and S. Bennani, “Modern Analysis Techniques For Gain Scheduled Thrust Vector Controllers Of Launchers”, *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications*, 2896/2901 (2006).
- [14] 濱田吉郎, 大谷崇, 木田隆, 長塩知之, “大型柔軟構造衛星の姿勢制御系へのゲインスケジューリング制御則の適用検討”, JAXA-RR (投稿予定).
- [15] I. Masubuchi, “Numerical Solution to a Class of Parameter-Dependent Convex Differential Inequalities”, *Transaction of the Society of Instrument and Control Engineers*, vol.36, No.3, 248/254 (2000).

付録 A パラメータが2つの場合

パラメータが2つの場合, つまり θ が二次元 ($\theta \in \mathbf{R}^2$) の場合について述べる. これは文献 [15] の結果

$$\begin{aligned}
& X_{k,l} > 0, \quad \text{for } k = 0, \dots, N^{(1)} + 1, \quad l = 0, \dots, N^{(2)} + 1, \quad (22) \\
& \sum_{(\tau_1, \mu_1, \tau_2, \mu_2) \in S_r} \left(\begin{bmatrix} Q_{k,l} & B_{k+\tau_1, l+\tau_2} & 0 & G_{k+\tau_1, l+\tau_2} - X_{k+\tau_1, l+\tau_2} \\ * & -\gamma I & D_{k+\tau_1, l+\tau_2}^T & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & -\epsilon(G_{k+\tau_1, l+\tau_2} + G_{k+\tau_1, l+\tau_2}^T) \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} A_{k+\tau_1, l+\tau_2} X_{k+\mu_1, l+\mu_2} & 0 & 0 & -\epsilon B_{u(k+\tau_1, l+\tau_2)} W_{k+\mu_1, l+\mu_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{k+\tau_1, l+\tau_2} X_{k+\mu_1, l+\mu_2} + D_{u(k+\tau_1, l+\tau_2)} W_{k+\mu_1, l+\mu_2} & 0 & 0 & -\epsilon D_{u(k+\tau_1, l+\tau_2)} W_{k+\mu_1, l+\mu_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + [*]^T \right) < 0, \\
& \left(Q_{k,l} = -\frac{\omega^{(1)}}{\theta_{k+1}^{(1)} - \theta_k^{(1)}} (X_{k+1, l} - X_{k, l}) - \frac{\omega^{(2)}}{\theta_{l+1}^{(2)} - \theta_l^{(2)}} (X_{k, l+1} - X_{k, l}) \right), \\
& \text{for } k = 0, \dots, N^{(1)}, \quad l = 0, \dots, N^{(2)}, \quad \omega^{(1)} = \bar{\omega}^{(1)}, \underline{\omega}^{(1)}, \quad \omega^{(2)} = \bar{\omega}^{(2)}, \underline{\omega}^{(2)}, \quad r = 1, \dots, 9, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{但し } G_{k,l} &= \left\{ G_{i,j}^\Gamma + \frac{\theta_l^{(2)} - \theta_j^{\Gamma(2)}}{\theta_{j+1}^{\Gamma(2)} - \theta_j^{\Gamma(2)}} (G_{i,j+1}^\Gamma - G_{i,j}^\Gamma) \right\} \\
&+ \frac{\theta_k^{(1)} - \theta_i^{\Gamma(1)}}{\theta_{i+1}^{\Gamma(1)} - \theta_i^{\Gamma(1)}} \left\{ G_{i+1,j} - G_{i,j} + \frac{\theta_l^{(2)} - \theta_j^{\Gamma(2)}}{\theta_{j+1}^{\Gamma(2)} - \theta_j^{\Gamma(2)}} (G_{i+1,j+1} - G_{i+1,j} - G_{i,j+1} + G_{i,j}) \right\}, \\
W_{k,l} &= \left\{ W_{i,j}^\Gamma + \frac{\theta_l^{(2)} - \theta_j^{\Gamma(2)}}{\theta_{j+1}^{\Gamma(2)} - \theta_j^{\Gamma(2)}} (W_{i,j+1}^\Gamma - W_{i,j}^\Gamma) \right\} \\
&+ \frac{\theta_k^{(1)} - \theta_i^{\Gamma(1)}}{\theta_{i+1}^{\Gamma(1)} - \theta_i^{\Gamma(1)}} \left\{ W_{i+1,j} - W_{i,j} + \frac{\theta_l^{(2)} - \theta_j^{\Gamma(2)}}{\theta_{j+1}^{\Gamma(2)} - \theta_j^{\Gamma(2)}} (W_{i+1,j+1} - W_{i+1,j} - W_{i,j+1} + W_{i,j}) \right\}, \\
& \text{(for } k \text{ and } l \text{ s.t. } \theta_i^{\Gamma(1)} \leq \theta_k^{(1)} \leq \theta_{i+1}^{\Gamma(1)} \text{ and } \theta_j^{\Gamma(2)} \leq \theta_l^{(2)} \leq \theta_{j+1}^{\Gamma(2)}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(0, 0, 0, 0)\}, \quad S_2 = \{(0, 0, 1, 1)\}, \quad S_3 = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}, \quad S_4 = \{(1, 1, 0, 0)\}, \\
S_5 &= \{(1, 1, 1, 1)\}, \quad S_6 = \{(1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}, \quad S_7 = \{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}, \\
S_8 &= \{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\} \quad S_9 = \{(0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}.
\end{aligned}$$

を基にして導出できる。まず $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ とし、取り扱う LPV システム (1) における各行列は以下のよう表わされるものとする:

$$\begin{aligned}
A(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) &= \left\{ A_{i,j} + \frac{\theta_j^{(2)} - \theta_j^{\Sigma(2)}}{\theta_{j+1}^{\Sigma(2)} - \theta_j^{\Sigma(2)}} (A_{i,j+1} - A_{i,j}) \right\} \\
&+ \frac{\theta_i^{(1)} - \theta_i^{\Sigma(1)}}{\theta_{i+1}^{\Sigma(1)} - \theta_i^{\Sigma(1)}} \left\{ A_{i+1,j} - A_{i,j} \right. \\
&+ \left. \frac{\theta_j^{(2)} - \theta_j^{\Sigma(2)}}{\theta_{j+1}^{\Sigma(2)} - \theta_j^{\Sigma(2)}} (A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j} - A_{i,j+1} + A_{i,j}) \right\}, \\
& \theta^{(1)} \in [\theta_i^{\Sigma(1)}, \theta_{i+1}^{\Sigma(1)}], i = 0, 1, \dots, N_{\Sigma(1)}, \\
& \theta^{(2)} \in [\theta_j^{\Sigma(2)}, \theta_{j+1}^{\Sigma(2)}], j = 0, 1, \dots, N_{\Sigma(2)}.
\end{aligned}$$

パラメータが1つの場合と同様、 $\theta_i^{\Sigma(1)}, \theta_j^{\Sigma(2)}$ は $A(\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ の区分点である。パラメータ $\theta^{(1)}$ は分割 $D^{\Sigma(1)}$ を、 $\theta^{(2)}$ は分割 $D^{\Sigma(2)}$ を持つ。この式には $\theta^{(1)}$ と $\theta^{(2)}$ の積の項が存在するが、一方を固定すればもう一方について区分子線形な式となる、文献 [15] において “multi-affine” と呼称される形式となっている。

$D^{\Sigma(1)}, D^{\Sigma(2)}$ の細分 $D^{(1)}, D^{(2)}$ と、 Θ_{val} の分割で $D^{(*)}$ がその細分となる $D^{\Gamma(1)}$ と $D^{\Gamma(2)}$ を考える (1 パラメータの場合と同様、これがゲインの分割を与える):

$$\begin{aligned}
D^{(1)} &= \{\theta_0^{\Sigma(1)} = \theta_0^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{N_{\Sigma(1)}+1}^{(1)} = \theta_{N_{\Sigma(1)}+1}^{\Sigma(1)}\}, \\
D^{(2)} &= \{\theta_0^{\Sigma(2)} = \theta_0^{(2)}, \theta_1^{(2)}, \dots, \theta_{N_{\Sigma(2)}+1}^{(2)} = \theta_{N_{\Sigma(2)}+1}^{\Sigma(2)}\}, \\
D^{\Gamma(1)} &= \{\theta_0^{\Sigma(1)} = \theta_0^{\Gamma(1)}, \theta_1^{\Gamma(1)}, \dots, \theta_{N_{\Gamma(1)}+1}^{\Gamma(1)} = \theta_{N_{\Sigma(1)}+1}^{\Sigma(1)}\},
\end{aligned}$$

$$D^{\Gamma(2)} = \{\theta_0^{\Sigma(2)} = \theta_0^{\Gamma(2)}, \theta_1^{\Gamma(2)}, \dots, \theta_{N_{\Gamma(2)}+1}^{\Gamma(2)} = \theta_{N_{\Sigma(2)}+1}^{\Sigma(2)}\}.$$

この時、解くべき行列不等式は式 (22) 及び (23) で表わされる。変数行列は $X_{*,*}, G_{*,*}^{\Gamma}, W_{*,*}^{\Gamma}$ である。1 パラメータの場合と同様、 $G_{*,*}^{\Gamma}$ に対して $G_{*,*}^{\Gamma} = G$ (共通) という制約を置いて解いた場合、得られるゲインは各パラメータに関して区分線形 (multi-affine) なものとなる。

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-06-013

発行 平成 19年 3月 30日
編集・発行 宇宙航空研究開発機構
〒182-8522 東京都調布市深大寺東町 7-44-1
URL: <http://www.jaxa.jp/>
印刷・製本 弘久写真工業（株）

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記にお願いいたします。

宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター
〒305-8505 茨城県つくば市千現 2-1-1
TEL: 029-868-2079 FAX: 029-868-2956

© 2007 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。

