

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

極超音速風洞で用いている気体モデル

渡利 實

2007年2月

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

宇宙航空研究開発機構研究開発報告
JAXA Research and Development Report

極超音速風洞で用いている気体モデル

Air Models Used in Flow Calculations for the
JAXA Hypersonic Wind Tunnel

渡利 實

Minoru WATARI

総合技術研究本部 風洞技術開発センター
Wind Tunnel Technology Center
Institute of Aerospace Technology

2007 年 2 月
February 2007

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

目 次

| | |
|--|----|
| 概要..... | 1 |
| 記号..... | 2 |
| 1 はじめに..... | 3 |
| 2 極超音速風洞における気体モデルと流れ諸量の計算..... | 3 |
| 2.1 流れ諸量の計算..... | 3 |
| 2.2 気体モデル..... | 4 |
| 2.3 ノズルでの加速計算..... | 5 |
| 2.4 衝撃波前後の関係式..... | 5 |
| 2.5 衝撃波後の状態からピトー管内よどみ点状態に至る関係..... | 6 |
| 3 Perfect モデル..... | 6 |
| 3.1 状態方程式..... | 6 |
| 3.2 比熱..... | 6 |
| 3.3 その他の状態量..... | 6 |
| 3.4 等エントロピー変化..... | 7 |
| 3.5 衝撃波を横切る関係..... | 7 |
| 3.6 衝撃波後のよどみ点状態..... | 8 |
| 3.7 解法..... | 8 |
| 4 Thermally Perfect モデル..... | 9 |
| 4.1 状態方程式..... | 9 |
| 4.2 原子間振動のモデル..... | 9 |
| 4.3 比熱..... | 9 |
| 4.4 その他の状態量..... | 10 |
| 4.5 等エントロピー変化..... | 10 |
| 4.6 衝撃波を横切る関係..... | 11 |
| 4.7 衝撃波後のよどみ点状態..... | 12 |
| 4.8 解法..... | 12 |
| 5 Real モデル..... | 12 |
| 5.1 状態方程式..... | 13 |
| 5.2 原子間振動のモデル..... | 14 |
| 5.3 比熱..... | 14 |
| 5.4 その他の状態量..... | 15 |
| 5.5 等エントロピー変化..... | 16 |
| 5.6 衝撃波を横切る関係..... | 17 |
| 5.7 衝撃波後のよどみ点状態..... | 17 |
| 5.8 解法..... | 18 |
| 6 プログラム..... | 18 |
| 6.1 FORTRAN プログラム..... | 18 |
| 6.2 Perfect, Thermally Perfect モデルの検証..... | 19 |
| 6.3 Real モデルの検証..... | 20 |

| | | |
|----------|--|----|
| 7 | 三つのモデルの比較..... | 22 |
| 8 | 近似式..... | 24 |
| 8.1 | マッハ数連続近似..... | 24 |
| 8.2 | マッハ数 5,7,10 での Thermally Perfect モデル多項式近似..... | 27 |
| 8.3 | マッハ数 5,7,10 での Real モデル多項式近似..... | 30 |
| | 参考文献..... | 34 |
| Appendix | プログラム・コード..... | 35 |

極超音速風洞で用いている気体モデル

渡利 實[※]

Air Models Used in Flow Calculations for the JAXA Hypersonic Wind Tunnel

Minoru WATARI[※]

ABSTRACT

JAXA's Wind Tunnel Technology Center operates three hypersonic wind tunnels: a 0.5 m wind tunnel (HWT1), a 1.27 m wind tunnel (HWT2), and a 0.44 m shock tunnel (HST). Hypersonic flow is generated by injecting high-temperature and high-pressure air into a vacuum chamber through a contour nozzle. To determine Mach numbers in these wind tunnels, calibration tests have been conducted using a Pitot rake. The Mach number is deduced theoretically by flow calculations based on an air model. Flow qualities, such as a dynamic pressure, Pitot pressure, static pressure, and temperature in the test section can be obtained from the Mach numbers and stagnation measurements using an air model. We have used three different air models. A perfect model is used in general for analytical purposes. A thermally perfect model was used to calibrate HWT1 and HST. A real model was applied to HWT2. This paper reports details of the three models and discusses their differences. Fortran code is supplied.

Keywords: air model, hypersonic wind tunnel, normal shock wave, Mach number, stagnation temperature, stagnation pressure, Pitot pressure, dynamic pressure, perfect gas, real gas effect, equation of state, specific heat, enthalpy, entropy, molecular energy, Fortran program

概 要

宇宙航空研究開発機構の風洞技術開発センターは、ノズル出口直径 0.5 m のマッハ数 5, 7, 9 極超音速風洞、ノズル出口直径 1.27 m のマッハ数 10 極超音速風洞、およびノズル出口直径 0.44 m のマッハ数 10, 12 極超音速衝撃風洞を有している。極超音速気流は高圧空気をノズルにより加速、真空中に噴出することにより作る。断熱膨張による空気の液化を防ぐため、あらかじめ高圧空気を加熱してからノズルに送り込む。加熱の方法に衝撃風洞と他の二つの風洞とでは違いはあるが、得た高圧高温空気をノズルにより加速する原理は共通である。これら極超音速風洞では、予めピトー管を用いた校正試験をして、そのノズルで実現できるマッハ数を検定しておく。その時、ピトー圧とマッハ数と関係付けるため気体モデルを用いる。一方、力測定試験を実施し無次元空力係数を求める場合に必要になる動圧はよどみ点での測定量と校正したマッハ数から気体モデルを用いて算出する。極超音速風洞では要請される精度に応じ三つのモデルを使い分けている。一番基本になるモデルは完全気体である。しかし、極超音速風洞のように高圧高温の空気になると、そのような理想的な扱いでは誤差が大きくなる。0.5 m 極超音速風洞と 0.44 m 極超音速衝撃風洞では所謂 Thermally Perfect と呼ばれているモデルを、1.27 m 極超音速風洞では Beattie-Bridgeman モデルと言われるものを用いてきている。ただし、それらがどのようなモデルか、的確にまとめられていなかった。本書は、これら極超音速風洞で用いられているモデルをできるだけ共通の統一した表現で表わすとともに、それらのモデル間にどれほどの差があるのか、を示す。作成した FORTRAN プログラムは多くの人に用いていただきたく公開する。

キーワード：

気体モデル、極超音速風洞、垂直衝撃波、マッハ数、よどみ点温度、よどみ点圧力、ピトー圧力、動圧、完全気体、実在気体効果、状態方程式、比熱、エンタルピー、エントロピー、分子エネルギー、FORTRAN プログラム

2006 年 10 月 16 日 原稿受付 (Received 16 October, 2006)

※総合技術研究本部 風洞技術開発センター 極超音速風洞セクション

(Hypersonic Wind Tunnel Section, Wind Tunnel Technology Center, Institute of Aerospace Technology)

記号

| | | |
|----------|---------------------------|---|
| A | 断面積 | m^2 |
| a | 音速 | m / s |
| C_A | 無次元空力係数 | |
| c_v | 等容比熱 | $\text{J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ |
| c_p | 等圧比熱 | $\text{J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ |
| D | 圧力修正係数 | |
| E | エントロピーに対する原子間振動による寄与分 | |
| F | エントロピーに対する分子間ポテンシャルによる寄与分 | |
| F_x | 力試験測定値 | N |
| G | 内部エネルギーに対する原子間振動による寄与分 | |
| H | 比熱に対する原子間振動による寄与分 | |
| h | エンタルピー | J / kg |
| I | 音速の二乗に関する Perfect モデルとの比 | |
| J | エンタルピーに関する Perfect モデルとの比 | |
| M | マッハ数 | |
| P | 圧力 | Pa |
| q | 動圧 | Pa |
| R | 気体定数 | $\text{J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ |
| Re | レイノルズ数 | |
| S | エントロピー | |
| T | 温度 | K |
| u | 内部エネルギー | J / kg |
| V | 速度 | m / s |
| γ | 比熱比 | |
| ρ | 密度 | kg / m^3 |
| θ | 原子間振動の代表温度 | K |

添字

| | |
|------------|------------------------|
| N2 | 窒素 |
| O2 | 酸素 |
| pot | 分子間ポテンシャル |
| vib | 原子間振動 |
| Therm.Perf | Thermally Perfect モデル |
| Perf | Perfect モデル |
| Real | Real モデル |
| 0 | よどみ点状態 |
| 1 | 測定室 衝撃波前の状態 |
| 2 | 測定室 衝撃波後の状態 |
| 02 | 測定室 衝撃波後のよどみ点(ピトー管内)状態 |

1 はじめに

宇宙航空研究開発機構の風洞技術開発センターは、ノズル出口直径 0.5 m のマッハ数 5, 7, 9 極超音速風洞 (HWT1)、ノズル出口直径 1.27 m のマッハ数 10 極超音速風洞 (HWT2)、およびノズル出口直径 0.44 m のマッハ数 10, 12 極超音速衝撃風洞 (HST)を有している。

極超音速気流は高圧の空気をノズルにより加速、真空中に噴出することにより作る。空気は断熱膨張するため非常に低温になる。空気の液化を防ぐため、あらかじめ高圧空気を加熱してからノズルに送り込む。加熱の方法が、HWT1、HWT2 では高圧空気を加熱器を通過させることにより、HST では衝撃波管を用いた圧縮効果により、といった違いはあるが、得た高圧高温空気をノズルにより加速する原理は共通である。

レイノルズ数効果により境界層の厚みが増加し実現するマッハ数が多少変動することはあるが、ノズル形状が与えられれば基本的にはマッハ数はユニークに決まってしまう。したがって、極超音速風洞では、予めピトー管を用いた校正試験をして、そのノズルで実現できるマッハ数を検定しておく。^(1,2,3) その時、ピトー圧とマッハ数を関係付けるため気体モデルを用いる。

一方、力測定試験を実施し無次元空力係数を求める場合、必要になる動圧はよどみ点での測定量と校正したマッハ数から気体モデルを用いて算出する。

このように種々の局面で必要になる気体モデルであるが、極超音速風洞では要請される精度に応じ三つのモデルを使い分けている。一番基本になるモデルは完全気体である。解析式として与えられるので検討には便利である。しかし、極超音速風洞のように高圧高温の空気になると、そのような理想的な扱いでは誤差が大きくなる。HWT1、HST では所謂 Thermally Perfect と呼ばれているモデルを、HWT2 では Beattie-Bridgeman モデルと言われるものを用いてきている。ただし、それらがどのようなものか、的確にまとめられていなかった。

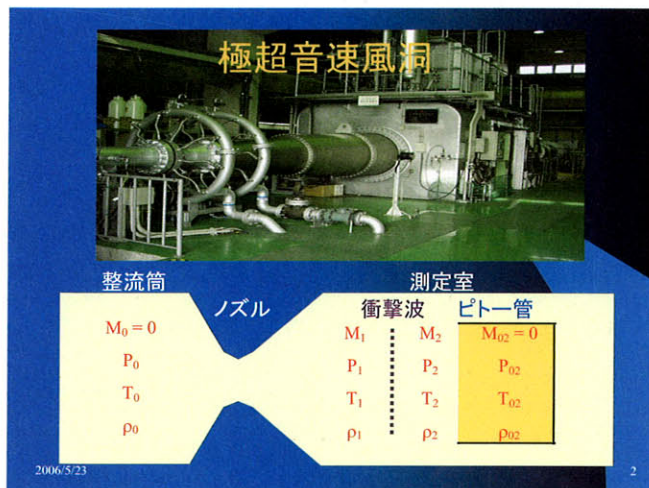
本書は、これら極超音速風洞で用いられているモデルをできるだけ共通の統一した表現で表わすとともに、それらのモデル間にどれほどの差があるのか、を示すのが目的である。

参考にした文献は R, ft, inch, lbf 単位系をベースにしている上、非線形方程式を繰返し計算で解く部分が非常に難解である。まず、単位系は国際単位系に統一した。次いで、非線形方程式を解く部分は全て見直し、できるだけ過剰な式の変形を避け、元々の条件式に近いところで繰返し計算をするように工夫した。

2 極超音速風洞における気体モデルと流れ諸量の計算

2.1 流れ諸量の計算

極超音速風洞の整流筒でのよどみ点状態から、ノズルにより測定室内に極超音速気流が生成され、次いでピトー管の存在により衝撃波が形成され、最終的にピトー管内のよどみ点状態になる様子を図



2.1 に示す。マッハ数 M 、圧力 P 、温度 T 、密度 ρ の変数名に添字 0、1、2、02 を付けて状態を区別する。

図 2.1 極超音速風洞の流れ概念図

図 2.2 にマッハ数 $M_1 = 10$ へ加速した場合のマッハ数、温度、圧力の変化の様子を示す。上の線はマッハ数の変化を示す。マッハ 10 まで加速された点で垂直衝撃波に出会うと直後ではマッハ 0.4 程度にまで急減速する。そしてピトー管内では再び速度ゼロ、 $M_{02} = 0$ になる。

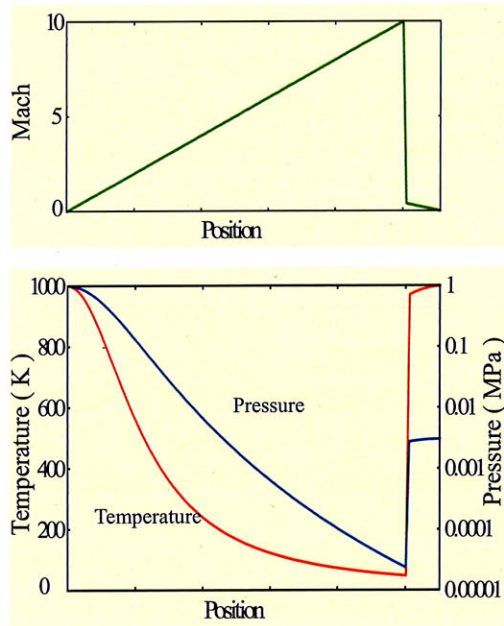


図 2.2 マッハ数 $M_1 = 10$ の場合のマッハ数、温度、圧力の変化

よどみ点温度 1000K の空気はマッハ数 10 では空気液化の 50K に近い温度になる。衝撃波通過後では急上昇、それがピトー管内では再びよどみ点温度に近い温度にまで回復する。

よどみ点圧力 1MPa の空気はマッハ数 10 では 100Pa 以下になる。衝撃波通過後は急上昇するが、ピトー管内の圧力、即ちピトー圧は 2kPa 程度である。

ピトー圧 P_{02} とよどみ点圧力 P_0 の比は、例えば、空気を完全気体と仮定した場合、マッハ数の関数として表わすことができる。マッハ数校正試験ではこの関係を逆に使ってマッハ数 M_1 を算出する。

$$\frac{P_{02}}{P_0} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.1)$$

極超音速風洞で力測定試験を実施し、力 F_x を測定、無次元空力係数 C_A を求める場合を考える。

$$C_A = \frac{F_x}{q_1 S} \quad (2.2)$$

必要になる動圧 q_1 は極超音速風洞ではよどみ点での測定量と校正したマッハ数から算出する。例えば、空気を完全気体と仮定した場合、よどみ点圧力 P_0 とマッハ数 M_1 から次式を用いて算出する。 γ は比熱比である。

$$\frac{q_1}{P_0} = \frac{\gamma}{2} M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.3)$$

ここでは、気体モデルがマッハ数校正試験および力測定試験でどのように使われるかを示すため一番簡単な完全気体を例に説明した。実際にはもっと複雑な気体モデルを用いる。それらについて以下の章節で説明する。

2.2 気体モデル

気体を構成する分子は様々な形でエネルギーを蓄える。それを、ある場合はマクロな流体運動エネ

ルギーとして、あるいは仕事として放出しながら、逆にある場合は吸収しながら変化していく。分子の持つエネルギー形態の主要なものは以下の通りである。⁽⁴⁾

並進運動

回転運動

構成原子間の振動

分子間ポテンシャル

原子内電子励起運動

分子間のリアクションに関係するものは、このうち並進運動と分子間ポテンシャルであり、これは我々の前には圧力、密度、温度の関係、すなわち状態方程式という形で現れる。密度が十分低い時には、分子間ポテンシャルを無視することができ、圧力は密度と温度に比例する、という完全気体の状態方程式に近づく。

他のエネルギー形態は分子内エネルギーの貯槽として機能し、比熱を担う。並進運動と比べて他の運動を励起させるためのエネルギー基底は高く、回転運動、原子間の振動、原子内電子運動の順で励起されていく。原子内電子励起運動は相当高温にならない限り励起されない。先ほど見たように、極超音速風洞の空気は高压高温状態と低压低温状態の間で、めまぐるしい変化をするが、分子の乖離、イオン化等が伴うほどではない。

完全気体 (Perfect と呼称する) は解析式で与えられるので検討には便利であるが、極超音速風洞を正確に扱うには少し粗すぎる。HWT1⁽¹⁾、HST⁽³⁾ では NACA Report 1135⁽⁵⁾ で Thermally Perfect と呼ばれているモデルを使っている。HWT2 では AEDC 報告書^(6,7) に掲載されている更に精緻なモデル (Real モデルと呼称する) を使っている。HWT2 マッハ数校正報告書⁽²⁾ はこれらの報告書の気体モデルを直接用いているわけではなく、報告書⁽⁸⁾ に載っている多項式近似式を用いている。Real モデルは Beattie-Bridgeman モデルと呼ばれることも多いが、Beattie と Bridgeman の研究結果⁽⁹⁾ はその中の状態方程式についてのみである。

気体の状態方程式、および熱の貯え方 (比熱等) が各モデルについて定義されれば、それらを用いてエンタルピー h 、エントロピー S を書き下すことにより、極超音速流れの計算は以下のように共通である。

2.3 ノズルでの加速計算

一次元等エントロピー変化を仮定して 5 変数: マッハ数 M (又は速度 V)、圧力 P 、温度 T 、密度 ρ 、および断面積 A の変化を次の 5 個の関係式を用いて解く。

$$\text{質量保存} \quad \Delta(\rho VA) = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{運動量保存} \quad \Delta(P + \rho V^2) = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{エネルギー保存} \quad \Delta(h + \frac{1}{2}V^2) = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{状態方程式} \quad f(P, \rho, T) = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{等エントロピー} \quad \Delta S(P, \rho, T) = 0 \quad (2.8)$$

もし、断面積を省いてマッハ数を既与とする時には、質量保存を除く 4 式を適用する。

Perfect モデル、Thermally Perfect モデルに対しては解析解が得られている。Real モデルに対しては上式に基づく非線形方程式を繰返し計算で解かなければならない。

2.4 衝撃波前後の関係式

4 変数: M (又は V)、 P 、 T 、 ρ の衝撃波前後の関係を、保存式 3 個、状態方程式 1 個、の計 4 式を用いて解く。

$$\text{質量保存} \quad \Delta(\rho V) = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{運動量保存} \quad \Delta(P + \rho V^2) = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{エネルギー保存} \quad \Delta(h + \frac{1}{2}V^2) = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{状態方程式} \quad f(P, \rho, T) = 0 \quad (2.12)$$

Perfect モデルの場合は解析解（Rankin-Hugoniot の式）が得られている。Thermally Perfect モデル、Real モデルに対しては上式に基づく非線形方程式を繰返し計算で解かなければならない。

2.5 衝撃波後の状態からピトー管内よどみ点状態に至る関係

等エントロピー変化であるからノズルでの加速計算の関係式を始点と終点を交換すれば、そのまま適用できる。

3 Perfect モデル

空気の主成分である窒素、酸素は 2 原子分子である。2 原子分子を前提としてモデルを構築する。分子間のエネルギー伝達は衝突によってのみ、衝突することで局所的には常に平衡状態にあることを仮定している。分子の持つエネルギーとしては、並進運動 3 自由度、および回転運動 2 自由度、の計 5 自由度を考慮し、分子間衝突によってエネルギーがこの 5 自由度に均等に配分されると考える。

3.1 状態方程式

圧力は密度と温度に比例する。

$$P = \rho RT \quad (3.1)$$

$$R = 287.05287 \text{ J/(kg.K)}$$

3.2 比熱

(1) 定容比熱

$$c_{v,perf} = \frac{5}{2}R \quad (3.2)$$

(2) 定圧比熱

$$c_{p,perf} = \frac{7}{2}R \quad (3.3)$$

(3) 比熱比

$$\gamma_{perf} = \frac{c_{p,perf}}{c_{v,perf}} = 1.4 \quad (3.4)$$

3.3 その他の状態量

(1) 内部エネルギー

$$u = c_{v,perf}T \quad (3.5)$$

(2) エンタルピー

$$h = u + \frac{P}{\rho} = c_{p,perf}T \quad (3.6)$$

(3) エントロピー

ここで、 \bar{s} は未定定数である。

$$S = R \left(\ln T^{\frac{1}{\gamma_{perf}-1}} - \ln \rho \right) + \bar{S} \quad (3.7)$$

(4) 音速

$$a^2 = \gamma_{perf} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \gamma_{perf} RT \quad (3.8)$$

3.4 等エントロピー変化

よどみ点状態 0 から状態 1 へ等エントロピー的に ($S_1 - S_0 = 0$) 変化すると (3.7) 式から次の関係が成立つ。

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_{perf}-1}} \quad (3.9)$$

マッハ数は次式で表わされる。

$$M_1^2 = \frac{V_1^2}{a_1^2} = \frac{2(h_0 - h_1)}{\gamma_{perf} RT_1} = \frac{2 \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right)}{(\gamma_{perf} - 1)} \quad (3.10)$$

これらの関係と状態方程式を使えば流れ諸量とマッハ数のよく知られた、以下の関係が導かれる。

(1) 温度比

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma_{perf} - 1}{2} M_1^2 \right)^{-1} \quad (3.11)$$

(2) 密度比

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma_{perf} - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{-1}{\gamma_{perf}-1}} \quad (3.12)$$

(3) 圧力比

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma_{perf} - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{-\gamma_{perf}}{\gamma_{perf}-1}} \quad (3.13)$$

(4) 動圧比

$$\frac{q_1}{P_1} = \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{P_1} V_1^2 = \frac{\gamma_{perf}}{2} M_1^2 \quad (3.14)$$

3.5 衝撃波を横切る関係

衝撃波前後 (状態 1 と状態 2) の関係は質量保存、運動量保存、およびエネルギー保存を適用することにより、垂直衝撃波の式が導かれる。詳細は適当な教科書で。

(1) 密度比

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma_{perf} + 1)M_1^2}{(\gamma_{perf} - 1)M_1^2 + 2} \quad (3.15)$$

(2) 圧力比

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma_{perf}M_1^2 - (\gamma_{perf} - 1)}{\gamma_{perf} + 1} \quad (3.16)$$

(3) 温度比

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{[2\gamma_{perf}M_1^2 - (\gamma_{perf} - 1)][(\gamma_{perf} - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma_{perf} + 1)^2 M_1^2} \quad (3.17)$$

(4) マッハ数

$$M_2^2 = \frac{(\gamma_{perf} - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma_{perf}M_1^2 - (\gamma_{perf} - 1)} \quad (3.18)$$

3.6 衝撃波後のよどみ点状態

衝撃波後の流れ（状態 2）からピトー管等のよどみ点状態 02 に至る関係は等エントロピー、可逆的であるから、添字を置き換えるだけで 3.4 節の式がそのまま使える。

(1) 温度

等エントロピー関係を使って T_2 から T_{02} を求めてもよいが、エネルギー保存 $h_{02} = h_0$ から直接、次の関係が導かれる。

$$T_{02} = T_0 \quad (3.19)$$

(2) 密度比

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_2} = \left(1 + \frac{\gamma_{perf} - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{1}{\gamma_{perf} - 1}} \quad (3.20)$$

(3) 圧力比

$$\frac{P_{02}}{P_2} = \left(1 + \frac{\gamma_{perf} - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1}} \quad (3.21)$$

3.7 解法

よどみ点状態 0 から衝撃波後のよどみ点状態 02 までの流れを解く方法について述べる。

衝撃波前の流れ諸量の比はマッハ数 M_1 だけの関数である。衝撃波前後の流れ諸量の比および衝撃波後のマッハ数 M_2 も M_1 から計算される。そして、衝撃波後の流れ諸量の比はマッハ数 M_2 だけの関数である。したがって、マッハ数 M_1 を指定すれば、全ての関係式が、順次、計算できることになる。計算フローは以下の通りである。

- (1) M_1 、 P_0 、 T_0 を与える
- (2) ρ_0 を求める
- (3) 衝撃波前の流れ諸量 T_1 、 ρ_1 、 P_1 、 q_1 を求める
- (4) 衝撃波後の流れ諸量 ρ_2 、 P_2 、 T_2 を求める

- (5) 衝撃波後のマッハ数 M_2 を求める
 (6) 衝撃波後よどみ点の流れ諸量 T_{02} 、 ρ_{02} 、 P_{02} を求める

4 Thermally Perfect モデル

内部エネルギーとしては、並進運動 3 自由度および回転運動 2 自由度、および分子を構成する原子間の振動自由度を考慮する。振動自由度に配分される内部エネルギーは温度の関数であるため、比熱は温度の関数になる。

4.1 状態方程式

熱運動（並進運動）と圧力の関係は変わらないため状態方程式は完全気体と同一になる。圧力は密度と温度に比例する。

$$P = \rho RT \quad (4.1)$$

$$R = 287.05287 \text{ J/(kg K)}$$

4.2 原子間振動のモデル

文献⁽⁵⁾ では空気という平均化された仮想的な 2 原子分子の単成分気体を仮定し、それを調和振動子でモデル化している。調和振動子モデルの比熱 c_{vib} 、又はそれを R で割った H は、次式で与えられる⁽⁴⁾。ここで、 θ は原子間振動の代表温度である。

$$H(T) = \frac{c_{vib}}{R} = \left[\frac{\theta/2T}{\sinh(\theta/2T)} \right]^2 = \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{\exp(\theta/T)}{[\exp(\theta/T) - 1]^2} \quad (4.2)$$

$$\theta = 3055.56 \text{ K}$$

内部エネルギー u_{vib} 、又はそれを RT で割った G は、次式で与えられる。

$$G(T) = \frac{u_{vib}}{RT} = \frac{1}{RT} \int_0^T c_{vib} dT = \frac{\theta/T}{\exp(\theta/T) - 1} \quad (4.3)$$

次式で定義される E は後でエントロピー寄与分を計算するため必要になる。前式で定義された G を用いて(4.5)式で表わされる。

$$\ln E = \frac{1}{R} \int_0^T \frac{c_{vib}}{T} dT = \frac{\theta}{2T} \coth\left(\frac{\theta}{2T}\right) - \ln \left[2 \sinh\left(\frac{\theta}{2T}\right) \right] \quad (4.4)$$

$$E(T) = \left[\frac{\exp G}{1 - \exp(-\theta/T)} \right] \quad (4.5)$$

4.3 比熱

比熱は完全気体（並進および回転自由度）による寄与分および振動自由度寄与分の和として表わす。

- (1) 定容比熱

$$c_v = c_{v,perf} + c_{vib} = \frac{R}{\gamma_{perf} - 1} + RH = c_{v,perf} [1 + (\gamma_{perf} - 1)H] \quad (4.6)$$

- (2) 定圧比熱

$$c_p = c_{p,perf} + c_{vib} = \frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1} R + RH = c_{p,perf} \left(1 + \frac{\gamma_{perf} - 1}{\gamma_{perf}} H \right) \quad (4.7)$$

(3) 比熱比

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\gamma_{perf} + (\gamma_{perf} - 1)H}{1 + (\gamma_{perf} - 1)H} = 1 + \frac{\gamma_{perf} - 1}{1 + (\gamma_{perf} - 1) \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{\exp(\theta/T)}{[\exp(\theta/T) - 1]^2}} \quad (4.8)$$

4.4 その他の状態量

(1) 内部エネルギー

$$u = c_{v,perf} T + GRT = c_{v,perf} [1 + (\gamma_{perf} - 1)G]T \quad (4.9)$$

(2) エンタルピー

$$h = u + \frac{P}{\rho} = c_{p,perf} \left[1 + \frac{(\gamma_{perf} - 1)}{\gamma_{perf}} G \right] T \quad (4.10)$$

(3) エントロピー

$$S = R \left(\ln T^{\frac{1}{\gamma_{perf}-1}} - \ln \rho + \ln E \right) + \bar{S} \quad (4.11)$$

(4) 音速

$$a^2 = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \gamma RT \quad (4.12)$$

4.5 等エントロピー変化

よどみ点状態 0 から状態 1 へ等エントロピー的に変化すると(4.11)式から次の関係が成立つ。ここで、 E_1 は先に(4.5)式で定義された関数 E に温度 T_1 を代入したものを示す。

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_{perf}-1}} \frac{E_1}{E_0} \quad (4.13)$$

マッハ数は次式で表わされる。

$$M_1^2 = \frac{V_1^2}{a_1^2} = \frac{2(h_0 - h_1)}{\gamma_1 R T_1} \quad (4.14)$$

これらの式に前述の E, h の表現を代入し、状態方程式を使えば、下記関係式を導出することができる。

(1) マッハ数

$$M_1^2 = \frac{2}{\gamma_1} \left[\frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1} \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right) + \frac{\theta}{T_1} \left(\frac{1}{\exp(\theta/T_0) - 1} - \frac{1}{\exp(\theta/T_1) - 1} \right) \right] \quad (4.15)$$

(4.15)式は M_1 が T_0, T_1 の関数として与えられる解析式であるが、4.8 節で述べるように T_0, M_1 を与えて T_1 を求める場合には同式を少し変形して、繰り返し計算用の関係式として次式を用いる。

$$\frac{T_1}{T_0} = \left\{ \frac{\gamma_{perf} - 1}{\gamma_{perf}} \left[\frac{\gamma_1 M_1^2}{2} - \frac{\theta}{T_1} \left(\frac{1}{\exp(\theta/T_0) - 1} - \frac{1}{\exp(\theta/T_1) - 1} \right) \right] + 1 \right\}^{-1} \quad (4.16)$$

(2) 密度比

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{\exp(\theta/T_0) - 1}{\exp(\theta/T_1) - 1} \right) \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_{perf} - 1}} \exp \left[\left(\frac{\theta}{T_1} \right) \frac{\exp(\theta/T_1)}{\exp(\theta/T_1) - 1} - \left(\frac{\theta}{T_0} \right) \frac{\exp(\theta/T_0)}{\exp(\theta/T_0) - 1} \right] \quad (4.17)$$

(3) 圧力比

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{T_1}{T_0} \quad (4.18)$$

(4) 動圧比

$$\frac{q_1}{P_1} = \frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1} \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right) + \frac{\theta}{T_1} \left(\frac{1}{\exp(\theta/T_0) - 1} - \frac{1}{\exp(\theta/T_1) - 1} \right) \quad (4.19)$$

4.6 衝撃波を横切る関係

質量保存、運動量保存、エネルギー保存の式はそれぞれ、

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (4.20)$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (4.21)$$

$$h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (4.22)$$

V をマッハ数 M で表わすと、質量保存、運動量保存式は

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \sqrt{\frac{\gamma_1 T_1 M_1^2}{\gamma_2 T_2 M_2^2}} \quad (4.23)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma_1 M_1^2}{1 + \gamma_2 M_2^2} \quad (4.24)$$

これら 2 式から状態方程式を用いて ρ 、 P を消去、温度 T とマッハ数 M の関係として表わせば

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\gamma_2 M_2^2}{(1 + \gamma_2 M_2^2)^2}}{\frac{\gamma_1 M_1^2}{(1 + \gamma_1 M_1^2)^2}} \quad (4.25)$$

又は、繰り返し計算用の関係式として (4.25) 式を変形すれば

$$M_2^2 = \frac{1}{2\gamma_2} \left[\frac{T_1}{T_2} \frac{(1 + \gamma_1 M_1^2)^2}{\gamma_1 M_1^2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{T_2}{T_1} \frac{\gamma_1 M_1^2}{(1 + \gamma_1 M_1^2)^2}} \right) - 2 \right] \quad (4.26)$$

一方、エネルギー保存式 (4.22) を変形すると

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \left(\frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1} + G_1 \right) + \gamma_1 M_1^2}{2 \left(\frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1} + G_2 \right) + \gamma_2 M_2^2} = \frac{2 \left(\frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1} + \frac{\theta/T_1}{\exp(\theta/T_1) - 1} \right) + \gamma_1 M_1^2}{2 \left(\frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1} + \frac{\theta/T_2}{\exp(\theta/T_2) - 1} \right) + \gamma_2 M_2^2} \quad (4.27)$$

この(4.26)、(4.27)式は温度 T_2 とマッハ数 M_2 を決めるための連立方程式である。

4.7 衝撃波後のよどみ点状態

衝撃波後の流れからピトー管等のよどみ点状態に至る関係は等エントロピー、可逆的であるから、添字を置き換えるだけで4.5節の式がそのまま使える。

(1) 温度

等エントロピー関係を使って T_2 から T_{02} を求めてもよいが、エネルギー保存 $h_{02} = h_0$ から $c_{p,02}T_{02} = c_{p,0}T_0$ が成立ち、更に c_p は温度 T だけの単調関数であるから、次式が成立つ。

$$T_{02} = T_0 \quad (4.28)$$

(2) 密度比

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_2} = \left(\frac{\exp(\theta/T_2) - 1}{\exp(\theta/T_{02}) - 1} \right) \left(\frac{T_{02}}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_{\text{perf}} - 1}} \exp \left[\left(\frac{\theta}{T_{02}} \right) \frac{\exp(\theta/T_{02})}{\exp(\theta/T_{02}) - 1} - \left(\frac{\theta}{T_2} \right) \frac{\exp(\theta/T_2)}{\exp(\theta/T_2) - 1} \right] \quad (4.29)$$

(3) 圧力比

$$\frac{P_{02}}{P_2} = \frac{\rho_{02}}{\rho_2} \frac{T_{02}}{T_2} \quad (4.30)$$

4.8 解法

衝撃波前のマッハ数 M_1 は、よどみ点温度 T_0 および衝撃波前の温度 T_1 の解析関数として表わされている。したがって、プログラム化には入力を T_0 、 T_1 とするのが容易だが、使い勝手は悪い。 M_1 、 T_0 を入力として T_1 を繰返し計算で求めるプログラムを用意した。計算フローは以下の通りである。

(1) M_1 、 P_0 、 T_0 を与える。

(2) ρ_0 を求める。

(3) 衝撃波前の T_1 を繰返し計算により決定する。

完全気体式を用いて T_1 の初期値を求める。

T_1 に関する(4.16)式を繰返し計算で解く。

収束するまで繰り返す。10回繰り返せば十分収束する。

(4) 衝撃波前の流れ諸量 ρ_1 、 P_1 、 q_1 を収束した T_1 を用いて計算する。

(5) 衝撃波後の T_2 、 M_2 を繰返し計算により決定する。

完全気体式を用いて T_2 、 M_2 の初期値を求める。

T_2 、 M_2 に関する連立方程式(4.26)、(4.27)式を繰返し計算で解く。

収束するまで繰り返す。20回繰り返せば十分収束する。

(6) 衝撃波後の残りの諸量 ρ_2 、 P_2 を、収束した T_2 、 M_2 を用いて計算する。

(7) 衝撃波後よどみ点の流れ諸量 ρ_{02} 、 P_{02} を、 T_2 、 $T_{02}(=T_0)$ を用いて計算する。

5 Real モデル

内部エネルギーとしては、並進運動 3 自由度、回転運動 2 自由度、原子間の振動自由度に加えて、更に分子間のポテンシャルエネルギーを考慮する。分子間ポテンシャルは分子の混み具合によるため、状態方程式も比熱も、温度、密度または圧力の関数になる。分子間ポテンシャルエネルギーを考慮するモデルとして Beattie と Bridgeman が提案したモデル⁽⁹⁾を採用する。

原子間振動モデルは、AEDC 報告書^(6,7) は窒素分子と酸素分子別々に計算後、合成する手法をとっている。我々もそれに従うとする。8章で述べるように Thermally Perfect モデルの単成分的扱いと少量の差を生ずる。

5.1 状態方程式

実在気体を表わすための状態方程式として van der Waals の式を始めとして、いくつかのモデルが提案されてきた。細部は異なるが、図 5.1 のような分子間ポテンシャルを前提とするところは変わらない。

⁽¹⁰⁾ 分子が接触するほど近づかない限りポテンシャルは分子間距離の減少とともに減少する。すなわち引力である。接触すると反発力になる。

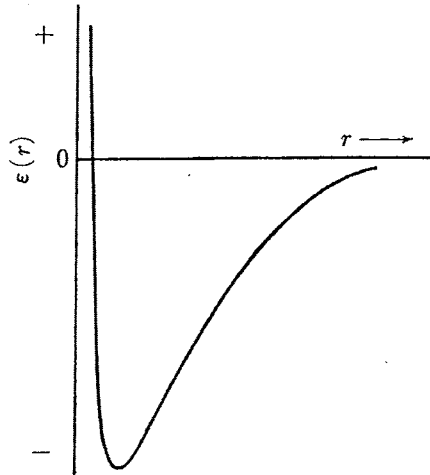


図 5.1 分子間ポテンシャル

r 分子間距離、 $\varepsilon(r)$ ポテンシャルエネルギー

一方、多くの人たちが気体の圧力、温度、密度（又は比体積）の関係を把握すべく実験を行った。特にドイツの二つの機関 University of Leiden と Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin の研究者たちは様々な気体について膨大な実験を行った。実験結果は、完全気体からの補正項を圧力もしくは（1/比体積）の多項式で表わす、ビリアル展開形式で書かれていたが、Beattie と Bridgeman はこの両機関のデータを主に使って (5.1) 式の形にまとめあげた。ここで、 A_0 、 B_0 、 a 、 b 、 c は実験データにマッチさせる定数である。

$$P = \rho^2 RT \left(1 - \frac{c\rho}{T^3} \right) \left[\frac{1}{\rho} + B_0(1 - b\rho) \right] - A_0 \rho^2 (1 - a\rho) \quad (5.1)$$

$$= \rho RT \cdot D$$

ここで、圧力修正係数 D をビリアル展開形式で書くと次式になる。 ρ 、 T の関数になるが、密度 ρ が (5.3) 式のように P 、 T の関数として表現できるので、 D は P 、 T の関数と見てもよい。

$$D(P, T) = (1 + e_1 \rho + e_2 \rho^2 + e_3 \rho^3) \quad (5.2)$$

$$e_1 = B_0 - \frac{A_0}{RT} - \frac{c}{T^3}$$

$$e_2 = \frac{A_0 a}{RT} - B_0 b - \frac{B_0 c}{T^3}$$

$$e_3 = \frac{B_0 b c}{T^3}$$

$$A_0 = 1.57222 \times 10^2 \text{ J m}^3 / \text{kg}^2$$

$$B_0 = 1.59228 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$a = 6.66814 \times 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$b = -3.80199 \times 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$c = 1.49868 \times 10^3 \text{ m}^3 \text{ K}^3 / \text{kg}$$

参考までに、参照した文献⁽⁷⁾ から本レポートの単位系へ変換した時の換算数値は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
1\text{lbmol} &= 1.33941 \frac{\text{mkg}^2}{J} \\
1\text{ft} &= 0.3048\text{m} \\
1\text{in} &= 0.0254\text{m} \\
1\text{lb} &= 0.453592\text{kg} \\
1R &= (1./1.8)K
\end{aligned}$$

密度を圧力に関するビリアル展開形式で表わすと以下の通りである。

$$\rho = \frac{P}{RT} (1 + g_1 P + g_2 P^2 + g_3 P^3 + g_4 P^4 + g_5 P^5 + g_6 P^6) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= -\frac{e_1}{RT} \\
g_2 &= \frac{2e_1^2 - e_2}{(RT)^2} \\
g_3 &= \frac{5e_1(e_2 - e_1^2) - e_3}{(RT)^3} \\
g_4 &= \frac{6e_1e_3 + 3e_2^2 + 7e_1^2(2e_1^2 - 3e_2)}{(RT)^4} \\
g_5 &= \frac{7e_2e_3 - 28e_1(e_2^2 + e_1e_3) + 42e_1^3(2e_2 - e_1^2)}{(RT)^5} \\
g_6 &= \frac{60e_1^2(3e_2^2 + 2e_1e_3) + 66e_1^4(2e_1^2 - 5e_2) - 12e_2^3 + e_3(4e_3 - 73e_1e_2)}{(RT)^6}
\end{aligned}$$

5.2 原子間振動のモデル

窒素分子、酸素分子を別々に計算し、その成分比で合成する。比熱、内部エネルギー、エントロピーそれぞれに関するパラメータ H 、 G 、 E は次式で表わされる。いずれも温度 T の関数である。

$$\begin{aligned}
H(T) &= 0.78088H_{N_2} + 0.20950H_{O_2} \\
&= 0.78088 \left(\frac{\theta_{N_2}}{T} \right)^2 \frac{\exp(\theta_{N_2}/T)}{[\exp(\theta_{N_2}/T) - 1]^2} + 0.20950 \left(\frac{\theta_{O_2}}{T} \right)^2 \frac{\exp(\theta_{O_2}/T)}{[\exp(\theta_{O_2}/T) - 1]^2} \quad (5.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(T) &= 0.78088G_{N_2} + 0.20950G_{O_2} \\
&= 0.78088 \frac{\theta_{N_2}/T}{\exp(\theta_{N_2}/T) - 1} + 0.20950 \frac{\theta_{O_2}/T}{\exp(\theta_{O_2}/T) - 1} \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$E(T) = \left[\frac{\exp G_{N_2}}{1 - \exp(-\theta_{N_2}/T)} \right]^{0.78088} \left[\frac{\exp G_{O_2}}{1 - \exp(-\theta_{O_2}/T)} \right]^{0.20950} \quad (5.6)$$

$$\theta_{N_2} = 3394.3 \text{ K}$$

$$\theta_{O_2} = 2273.4 \text{ K}$$

5.3 比熱

比熱は完全気体（並進および回転自由度）による寄与分、原子間振動自由度寄与分、および分子間ポテンシャル寄与分の和として表わす。

(1) 定容比熱

$$\begin{aligned}
c_v &= c_{v,perf} + c_{vib} + c_{pot} \\
&= \frac{R}{\gamma_{perf} - 1} + RH + \frac{6Rc}{T^3} \rho \left(1 + \frac{B_0}{2} \rho - \frac{B_0 b}{3} \rho^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

(2) 定圧比熱

$$\begin{aligned}
c_p &= c_v - T \frac{(\partial P / \partial T)_v^2}{(\partial P / \partial v)_T} = c_v + \frac{T}{\rho^2} \frac{(\partial P / \partial T)_\rho^2}{(\partial P / \partial \rho)_T} \\
&= c_v + R \frac{\left(1 + \frac{2c}{T^3} \rho \right)^2 (1 + B_0 \rho - B_0 b \rho^2)^2}{1 + 2e_1 \rho + 3e_2 \rho^2 + 4e_3 \rho^3}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

(3) 比熱比

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{5.9}$$

5.4 その他の状態量

(1) 内部エネルギー

$$u = c_{v,perf} T + RTG + RT \left[-\rho \left(\frac{A_0}{RT} + \frac{3c}{T^3} \right) - \rho^2 \left(\frac{3B_0 c}{2T^3} - \frac{A_0 a}{2RT} \right) + \rho^3 \left(\frac{B_0 bc}{T^3} \right) \right] \tag{5.10}$$

(2) エンタルピー

$$\begin{aligned}
h &= u + \frac{P}{\rho} \\
&= c_{p,perf} T \left\{ 1 + \frac{(\gamma_{perf} - 1)}{\gamma_{perf}} \left[G + \rho \left(B_0 - \frac{2A_0}{RT} - \frac{4c}{T^3} \right) + \rho^2 \left(\frac{3A_0 a}{2RT} - \frac{5B_0 c}{2T^3} - B_0 b \right) + \rho^3 \left(\frac{2B_0 bc}{T^3} \right) \right] \right\} \\
&= c_{p,perf} T \cdot J
\end{aligned} \tag{5.11}$$

ここで、エンタルピーに関する完全気体との比 J は以下の通り。密度 ρ は状態方程式を用いて P, T から計算できるから、結局、 J は P, T の関数になる。

$$J(P, T) = 1 + \frac{\gamma_{perf} - 1}{\gamma_{perf}} \left[G + \rho \left(B_0 - \frac{2A_0}{RT} - \frac{4c}{T^3} \right) + \rho^2 \left(\frac{3A_0 a}{2RT} - \frac{5B_0 c}{2T^3} - B_0 b \right) + \rho^3 \left(\frac{2B_0 bc}{T^3} \right) \right] \tag{5.12}$$

(3) エントロピー

$$S = R \left(\ln T^{\frac{1}{\gamma_{perf}-1}} - \ln \rho + \ln E - \ln F \right) + \bar{S} \tag{5.13}$$

ここで、 E は原子間振動による寄与分、 F は分子間ポテンシャルによる寄与分で次式で表される。

$$F(P, T) = \exp \left[\rho \left(B_0 + \frac{2c}{T^3} \right) + \rho^2 \left(\frac{B_0 c}{T^3} - \frac{B_0 b}{2} \right) - \rho^3 \left(\frac{2B_0 bc}{3T^3} \right) \right] \tag{5.14}$$

(4) 音速

$$a^2 = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \gamma RT (1 + 2e_1 \rho + 3e_2 \rho^2 + 4e_3 \rho^3) = \gamma_{perf} RT \cdot I \quad (5.15)$$

音速の二乗に関する完全気体との比 I は P, T の関数である。

$$I(P, T) = \frac{a^2}{a_{perf}^2} = \frac{\gamma(\partial P / \partial \rho)_T}{\gamma_{perf} RT} = \frac{\gamma}{\gamma_{perf}} (1 + 2e_1 \rho + 3e_2 \rho^2 + 4e_3 \rho^3) \quad (5.16)$$

5.5 等エントロピー変化

よどみ点状態 0 から状態 1 へ等エントロピー的に変化すると、(5.13)式から次の関係が成立つ。ここで、 E_1, F_1 等は先に定義された関数に温度 T_1 、圧力 P_1 を代入したものを示す。

$$1 = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_{perf}-1}} \frac{E_1 / F_1}{E_0 / F_0} \frac{1 / \rho_1}{1 / \rho_0} \quad (5.17)$$

これに状態方程式(5.1)、エンタルピーの式(5.11)を適用すれば以降の関係式が導出できる。

(1) 密度比

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_{perf}-1}} \frac{E_1 / F_1}{E_0 / F_0} \quad (5.18)$$

(2) 圧力比

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf}-1}} \frac{E_1 D_1 / F_1}{E_0 D_0 / F_0} \quad (5.19)$$

(3) 温度比

速度の二乗 V_1^2 は以下のように、よどみ点エンタルピーからの減少量から計算できる。

$$\begin{aligned} V_1^2 &= 2(h_0 - h_1) \\ &= 2c_{p,perf}(T_0 J_0 - T_1 J_1) \\ &= 2 \frac{\gamma_{perf} R}{\gamma_{perf} - 1} (T_0 J_0 - T_1 J_1) \end{aligned} \quad (5.20)$$

したがって、マッハ数は

$$M_1^2 = \frac{V_1^2}{a_1^2} = \frac{2 \left(\frac{T_0 J_0}{T_1} - J_1 \right)}{(\gamma_{perf} - 1) I_1} \quad (5.21)$$

温度について解くと次式になる。

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{J_0}{\frac{\gamma_{perf} - 1}{2} I_1 M_1^2 + J_1} \quad (5.22)$$

(4) 動圧比

$$\frac{q_1}{P_1} = \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{P_1} V_1^2 = \frac{\gamma_{perf}}{(\gamma_{perf} - 1) D_1} \left(\frac{T_0 J_0}{T_1} - J_1 \right) \quad (5.23)$$

5.6 衝撃波を横切る関係

質量保存、運動量保存、エネルギー保存

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (5.24)$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (5.25)$$

$$h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (5.26)$$

衝撃波前の諸量（添字1）が与えられたとすれば、次の関係式を用いれば

$$V^2 = \gamma_{perf} R T M^2 \quad (5.27)$$

$$P = \rho R T D \quad (5.28)$$

$$h = c_{p,perf} T J = \frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1} R T J \quad (5.29)$$

衝撃波後の量 M_2 、 P_2 、 T_2 に関する次の連立方程式を得る。

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \frac{I_1}{I_2} \quad (5.30)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma_{perf} \frac{I_1}{D_1} M_1^2}{1 + \gamma_{perf} \frac{I_2}{D_2} M_2^2} \quad (5.31)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2J_1 + (\gamma_{perf} - 1) I_1 M_1^2}{2J_2 + (\gamma_{perf} - 1) I_2 M_2^2} \quad (5.32)$$

それらの量が求まれば、密度比は次式で計算できる。

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{T_1}{T_2} \frac{D_1}{D_2} \quad (5.33)$$

5.7 衝撃波後のよどみ点状態

5.5 節の等エントロピーの関係を使って、衝撃波後の諸量（添字2）とよどみ点状態量（添字02）を結び付ける。 P_{02} 、 T_{02} は次の連立方程式を解くことで得られる。

$$\frac{T_{02}}{T_2} = \frac{\frac{\gamma_{perf} - 1}{2} I_2 M_2^2 + J_2}{J_{02}} \quad (5.34)$$

$$\frac{P_{02}}{P_2} = \left(\frac{T_{02}}{T_2} \right)^{\frac{\gamma_{perf}}{\gamma_{perf} - 1}} \frac{E_{02} D_{02} / F_{02}}{E_2 D_2 / F_2} \quad (5.35)$$

密度比は

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_2} = \left(\frac{T_{02}}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma_{\text{perf}} - 1}} \frac{E_{02} / F_{02}}{E_2 / F_2} \quad (5.36)$$

5.8 解法

プログラム化するときの入力変数は M_1 、 P_0 、 T_0 で、計算フローは以下の通りである。

- (1) M_1 、 P_0 、 T_0 を与える。
- (2) ρ_0 を求める。
- (3) 衝撃波前の P_1 、 T_1 を繰返し計算により決定する。
完全気体式を用いて P_1 、 T_1 の初期値を求める。
 P_1 、 T_1 に関する連立方程式(5.19)、(5.22)式を繰返し計算で解く。
収束するまで繰返す。10 回繰返せば十分収束する。
- (4) 衝撃波前の残りの流れ諸量 ρ_1 、 q_1 を、収束した P_1 、 T_1 を用いて計算する。
- (5) 衝撃波後の M_2 、 P_2 、 T_2 を繰返し計算により決定する。
完全気体式を用いて M_2 、 P_2 、 T_2 の初期値を求める
 M_2 、 P_2 、 T_2 に関する連立方程式(5.30)、(5.31)、(5.32)式を繰返し計算で解く。
収束するまで繰返す。40 回繰返せば十分収束する。
- (6) 衝撃波後の ρ_2 を、収束した M_2 、 P_2 、 T_2 を用いて計算する。
- (7) 衝撃波後よどみ点の P_{02} 、 T_{02} を繰返し計算により決定する。
完全気体式を用いて P_{02} を求める。 $T_{02}=T_0$ とする。
 P_{02} 、 T_{02} に関する連立方程式(5.34)、(5.35)式を繰返し計算で解く。
収束するまで繰返す。10 回繰返せば十分収束する。
- (8) 衝撃波後よどみ点の残りの流れ諸量 ρ_{02} を、収束した P_{02} 、 T_{02} を用いて計算する。

6 プログラム

6.1 FORTRAN プログラム

Perfect モデル、Thermally Perfect モデル および Real モデルのサブルーチンプログラムを作成した。マッハ数 M_1 が 1.6 以上について計算可能である。コーディングを Appendix に示す。このプログラムは 7 章の計算に用いたものである。三つのサブルーチンの入出力は以下に示すように共通とした。各モデルの解法で説明した手順でプログラムは作られているのでコーディング内容は容易に理解できると思う。出力を適当に追加／削除してカスタム化することは随意である。

Subroutine Perfect (xM1, P0, T0, r0, h0, r1, P1, T1, q1, a1, xM2, r2, P2, T2, r02, P02, T02, h02)

Subroutine ThermPe(xM1, P0, T0, r0, h0, r1, P1, T1, q1, a1, xM2, r2, P2, T2, r02, P02, T02, h02)

Subroutine RealGas(xM1, P0, T0, r0, h0, r1, P1, T1, q1, a1, xM2, r2, P2, T2, r02, P02, T02, h02)

| | | | |
|----|-----|------------|----------|
| 入力 | xM1 | 衝撃波前マッハ数 | M_1 |
| 入力 | P0 | よどみ点圧力 | P_0 |
| 入力 | T0 | よどみ点温度 | T_0 |
| 出力 | r0 | よどみ点密度 | ρ_0 |
| 出力 | h0 | よどみ点エンタルピー | h_0 |
| 出力 | r1 | 衝撃波前密度 | ρ_1 |
| 出力 | P1 | 衝撃波前圧力 | P_1 |

| | | | |
|----|-----|-------------|-------------|
| 出力 | T1 | 衝撃波前 温度 | T_1 |
| 出力 | q1 | 衝撃波前 動圧 | q_1 |
| 出力 | a1 | 衝撃波前 音速 | a_1 |
| 出力 | xM2 | 衝撃波後 マッハ数 | M_2 |
| 出力 | r2 | 衝撃波後 密度 | ρ_2 |
| 出力 | P2 | 衝撃波後 圧力 | P_2 |
| 出力 | T2 | 衝撃波後 温度 | T_2 |
| 出力 | r02 | ピトー管内密度 | ρ_{02} |
| 出力 | P02 | ピトー管内圧力 | P_{02} |
| 出力 | T02 | ピトー管内温度 | T_{02} |
| 出力 | h02 | ピトー管内エンタルピー | h_{02} |

6.2 Perfect、Thermally Perfect モデルの検証

Thermally Perfect モデルについて 文献⁽⁵⁾ と同様に Perfect モデルを基準に、それとの比という形で計算した。主要な変数について結果を図 6.1～図 6.4 に示す。よどみ点温度 T_0 を 1000R (556K)、2000R (1111K)、3000R (1667K)、5000R (2778K) と 4 段階に変えて示した。文献⁽⁵⁾ の対応する図と直接比較し、全く一致することから Perfect、Thermally Perfect 両モデルとも正しいと確信する。

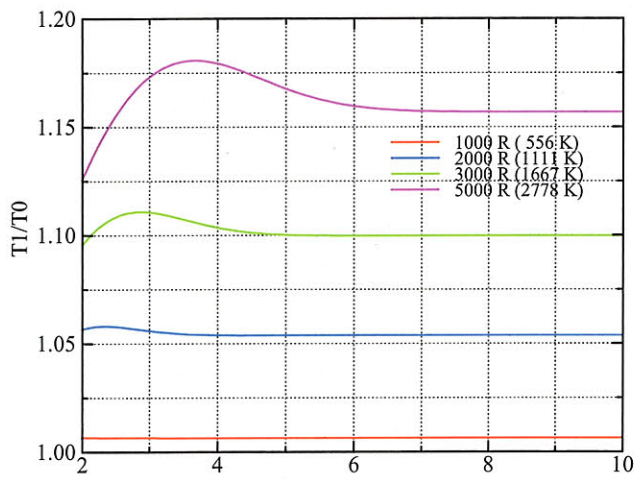


図 6.1 $(T_1/T_0)_{\text{Therm.Perf}} / (T_1/T_0)_{\text{Perf}}$

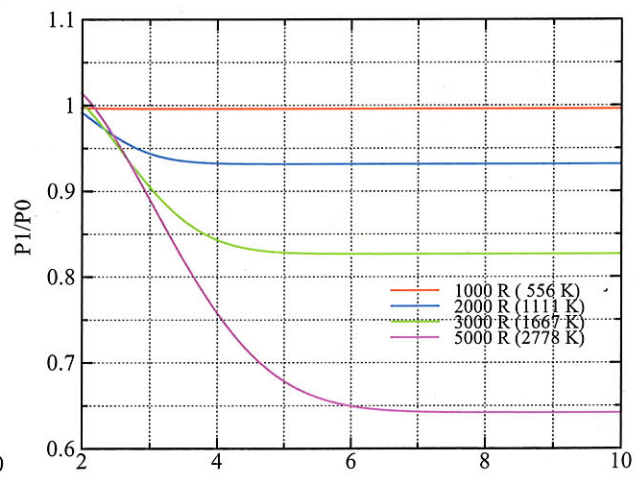


図 6.2 $(P_1/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (P_1/P_0)_{\text{Perf}}$

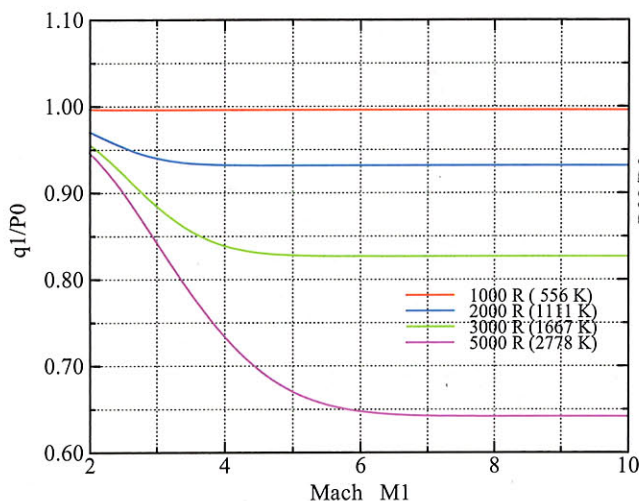


図 6.3 $(q_1/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (q_1/P_0)_{\text{Perf}}$

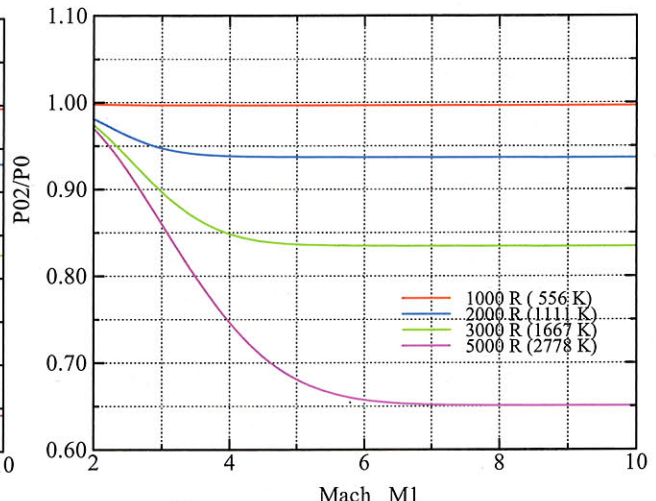


図 6.4 $(P_{02}/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (P_{02}/P_0)_{\text{Perf}}$

6.3 Real モデルの検証

Real モデルについては、まず、 c_v, I, J 等の要素変数について、よどみ点温度 T_0 を 70R (39K)、100R (56K)、200R (111K)、300R (167K)、500R (278K)、1000R (556K)、2200R (1222K) と 7 段階に変えて試算し、文献⁽⁷⁾に掲載されている対応する図と比較した。図 6.5～図 6.10 に示す。次いで、文献⁽⁷⁾に「Calculated Values」という表に載っている組合せで計算、同表と比較した。結果を表 6.1 に示す。いずれもよく一致していることから Real モデルも正しいと考える。

分子間引力の効果は温度が低い程、分子が密になるため大きくなる。図 6.5 Density ratio の 500 R (278 K) 以下の変化がこの状況を表わしている。ただし、第 2 ビリアル係数 ((5.2) 式、又は (5.3) 式第 2 項の係数 e_1 又は g_1) がゼロになる温度 (Boyle 温度という) を境にして分子間反発力の効果が優越してくる。空気の場合、Boyle 温度は 350 K 程度である。500 R (278 K) を超えて様子が変わるのはこの効果である。図 6.6 Specific heat at constant volume の結果を見ると、温度が上がると (例えば 1000R 以上) 比熱が全体として上がる。これは原子間振動の効果が徐々に利きだしてきたからである。

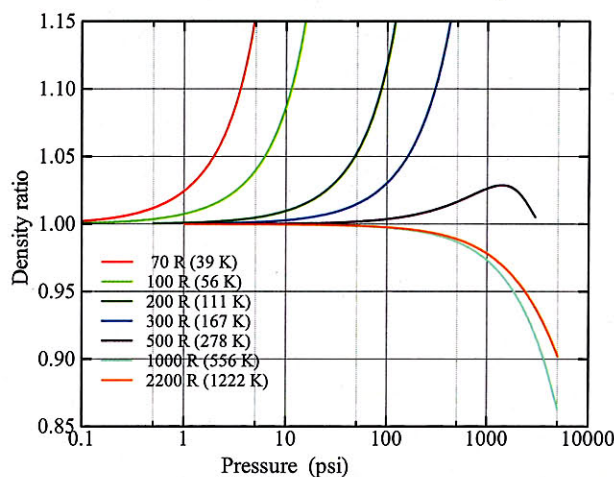


図 6.5 Density ratio (5.3)式カッコ部分

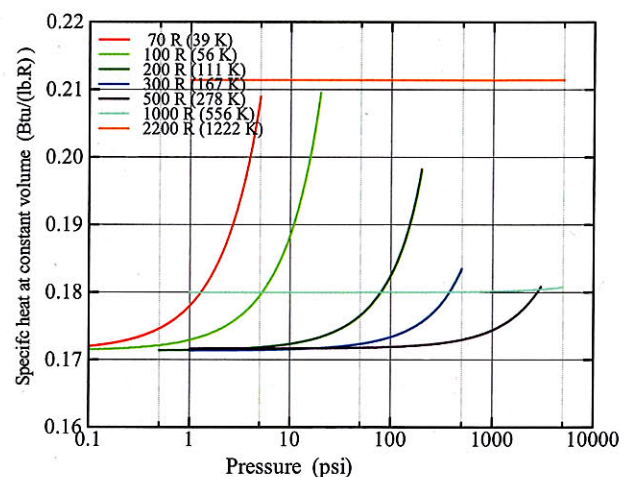


図 6.6 Specific heat at constant volume c_v

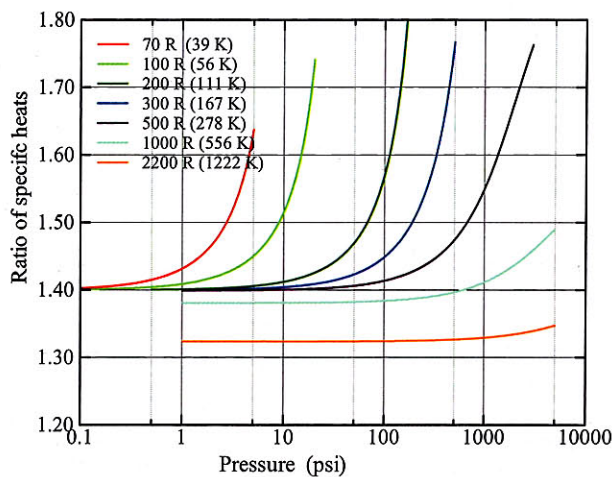


図 6.7 Ratio of specific heats γ

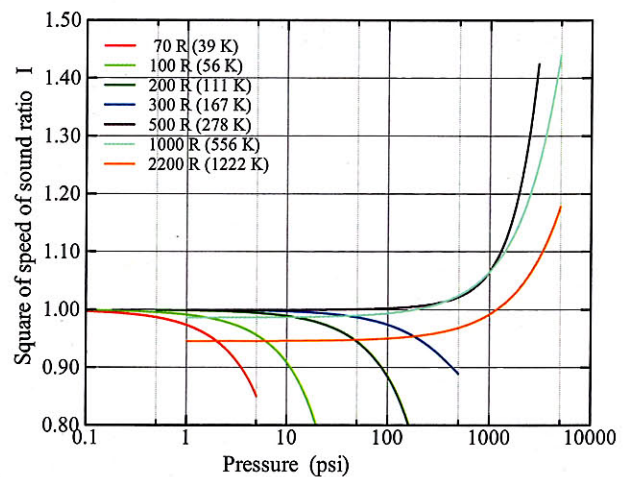


図 6.8 Square of speed of sound ratio I

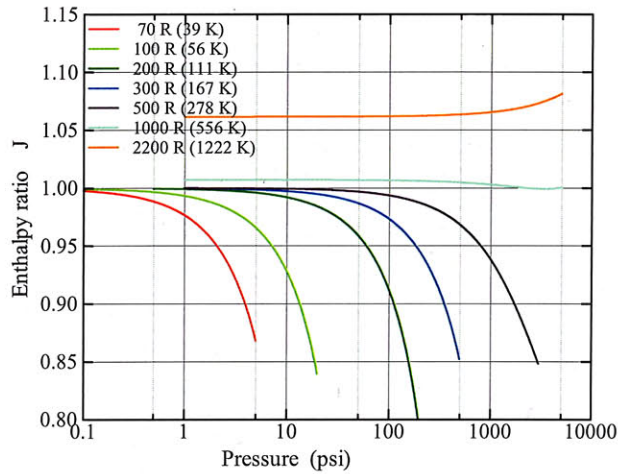


図 6.9 Enthalpy ratio J

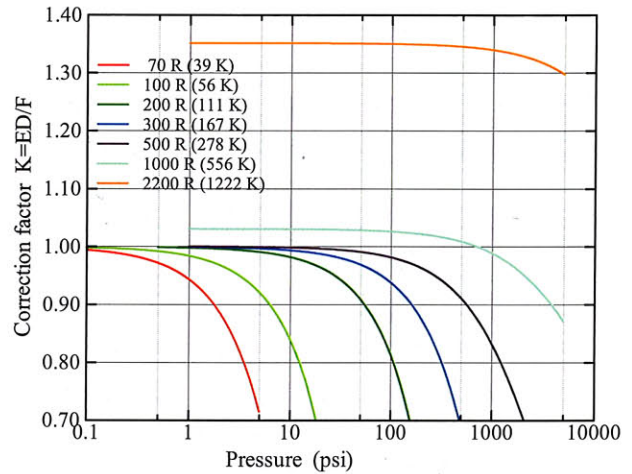


図 6.10 Correction factor $K=ED/F$

表 6.1 Verification of Real-Gas model.

See Table "Calculated Values" in AEDC-TR-57-8 p15

| | P0 | T0 | P02 | P1 | T1 | P2 | T2 | rho1/rho2 | M1 |
|----------|--------|--------|-------|--------|-------|-------|--------|-----------|--------|
| Perfect | 4000.0 | 1900.0 | 40.0 | 0.5191 | 147.3 | 35.94 | 1842.8 | 0.1807 | 7.713 |
| B. Bridg | 4000.0 | 1900.0 | 40.0 | 0.5079 | 154.1 | 36.17 | 1877.2 | 0.1713 | 7.778 |
| Perfect | 3000.0 | 1900.0 | 30.0 | 0.3893 | 147.3 | 26.96 | 1842.8 | 0.1807 | 7.713 |
| B. Bridg | 3000.0 | 1900.0 | 30.0 | 0.3849 | 155.0 | 27.13 | 1870.8 | 0.1715 | 7.738 |
| Perfect | 2500.0 | 1900.0 | 25.0 | 0.3244 | 147.3 | 22.46 | 1842.8 | 0.1807 | 7.713 |
| B. Bridg | 2500.0 | 1900.0 | 25.0 | 0.3225 | 155.5 | 22.60 | 1867.6 | 0.1716 | 7.717 |
| Perfect | 2000.0 | 1900.0 | 20.0 | 0.2596 | 147.3 | 17.97 | 1842.8 | 0.1807 | 7.713 |
| B. Bridg | 2000.0 | 1900.0 | 20.0 | 0.2594 | 156.0 | 18.08 | 1864.5 | 0.1716 | 7.697 |
| Perfect | 1500.0 | 1900.0 | 15.0 | 0.1947 | 147.3 | 13.48 | 1842.8 | 0.1807 | 7.713 |
| B. Bridg | 1500.0 | 1900.0 | 15.0 | 0.1956 | 156.4 | 13.56 | 1861.4 | 0.1717 | 7.677 |
| Perfect | 1000.0 | 1900.0 | 10.0 | 0.1298 | 147.3 | 8.99 | 1842.8 | 0.1807 | 7.713 |
| B. Bridg | 1000.0 | 1900.0 | 10.0 | 0.1311 | 156.9 | 9.04 | 1858.4 | 0.1718 | 7.656 |
| Perfect | 500.0 | 1900.0 | 5.0 | 0.0649 | 147.3 | 4.49 | 1842.8 | 0.1807 | 7.713 |
| B. Bridg | 500.0 | 1900.0 | 5.0 | 0.0659 | 157.4 | 4.52 | 1855.4 | 0.1719 | 7.636 |
| Perfect | 2500.0 | 2200.0 | 7.0 | 0.0523 | 101.2 | 6.31 | 2135.9 | 0.1747 | 10.181 |
| B. Bridg | 2500.0 | 2200.0 | 7.0 | 0.0527 | 109.9 | 6.36 | 2167.2 | 0.1633 | 10.111 |
| Perfect | 2500.0 | 1960.0 | 11.0 | 0.0997 | 108.5 | 9.91 | 1902.4 | 0.1764 | 9.239 |
| B. Bridg | 2500.0 | 1960.0 | 11.0 | 0.0994 | 115.1 | 9.97 | 1928.5 | 0.1670 | 9.230 |
| Perfect | 2000.0 | 1900.0 | 15.0 | 0.1714 | 130.8 | 13.49 | 1843.3 | 0.1790 | 8.222 |
| B. Bridg | 2000.0 | 1900.0 | 15.0 | 0.1713 | 138.5 | 13.57 | 1865.0 | 0.1700 | 8.205 |
| Perfect | 1500.0 | 1900.0 | 100.0 | 3.1861 | 327.4 | 88.74 | 1836.2 | 0.2014 | 4.901 |
| B. Bridg | 1500.0 | 1900.0 | 100.0 | 3.2042 | 347.8 | 89.33 | 1855.3 | 0.1918 | 4.875 |
| Perfect | 1000.0 | 1700.0 | 50.0 | 1.3772 | 258.8 | 44.50 | 1644.3 | 0.1966 | 5.277 |
| B. Bridg | 1000.0 | 1700.0 | 50.0 | 1.3813 | 271.0 | 44.73 | 1656.8 | 0.1891 | 5.258 |

Pressure in [psi] Temperature in [R]

7 三つのモデルの比較

ここでは改めて国際単位系条件下で計算をしてモデルの比較を行った。6.2 節の図と同様に Perfect モデルとの比という形で示してある。Thermally Perfect モデル(実線)についてはよどみ点温度 T_0 を 400K、800K、1200K、1600K、2000K と 5 段階に変えて、Real モデルについては、400K、1200K、2000K 各温度でよどみ点圧力 P_0 を 2MPa、6MPa、10MPa と 3 段階に変えて計算を行った。

極超音速領域といわれるマッハ数 5 以上では Real モデルも Thermally Perfect モデルも Perfect モデルとの比はマッハ数変化に対して非常に鈍感(一定)になる。

Real モデルと Thermally Perfect モデルの違いは分子間ポテンシャル効果の有無である。温度が低い程、圧力が高い程、分子間は密になり分子間ポテンシャル効果が大きくなる。示した図は、 T_0 が低い程 Real モデルの差異が大きく現れる特徴、および、よどみ点圧力 P_0 が減ずるとともに Real モデルが Thermally Perfect モデルに漸近する基本的特徴をよく表している。ただし、両モデル間で原子間振動モデルが若干違うので、漸近先に微小な差異を生じる(因みに原子間振動モデルを全く共通にした場合、漸近先が完全に一致することを確認した)。

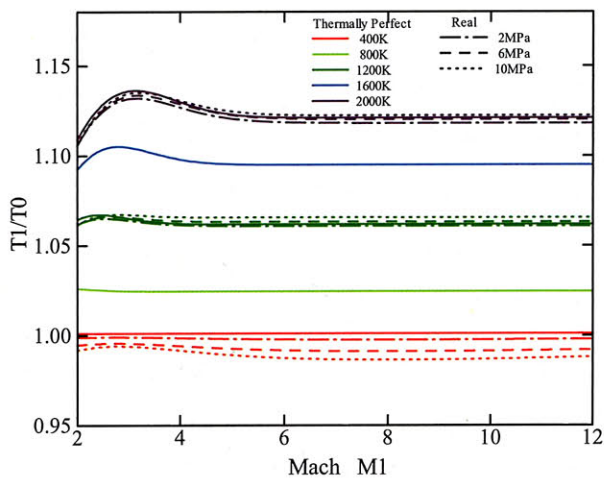


図 7.1 $(T_1/T_0)_{\text{Therm.Perf}} / (T_1/T_0)_{\text{Perf}} \ \& \ (T_1/T_0)_{\text{Real}} / (T_1/T_0)_{\text{Perf}}$

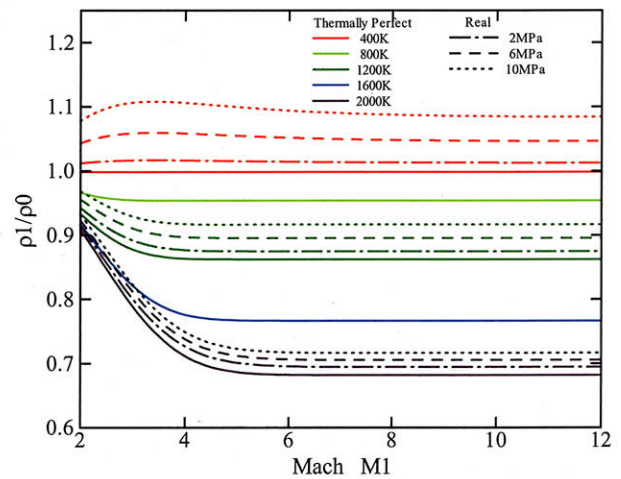


図 7.2 $(\rho_1/\rho_0)_{\text{Therm.Perf}} / (\rho_1/\rho_0)_{\text{Perf}} \ \& \ (\rho_1/\rho_0)_{\text{Real}} / (\rho_1/\rho_0)_{\text{Perf}}$

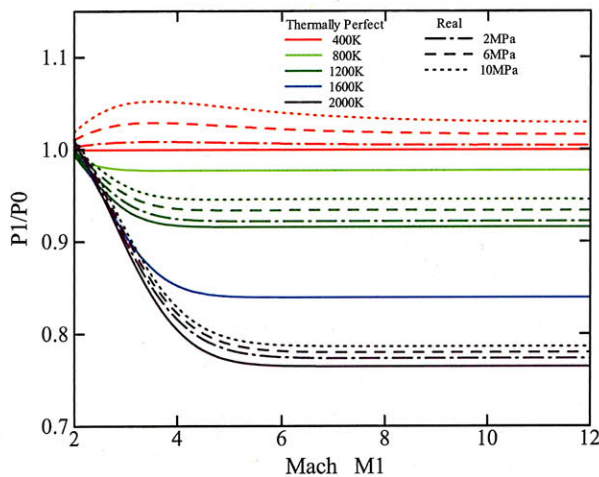


図 7.3 $(P_1/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (P_1/P_0)_{\text{Perf}} \ \& \ (P_1/P_0)_{\text{Real}} / (P_1/P_0)_{\text{Perf}}$

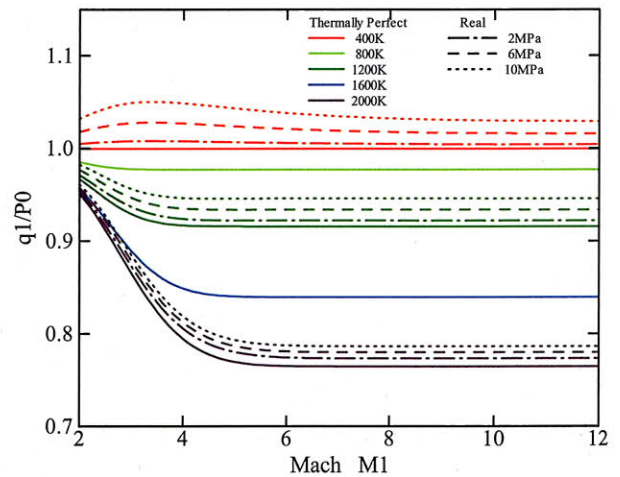


図 7.4 $(q_1/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (q_1/P_0)_{\text{Perf}} \ \& \ (q_1/P_0)_{\text{Real}} / (q_1/P_0)_{\text{Perf}}$

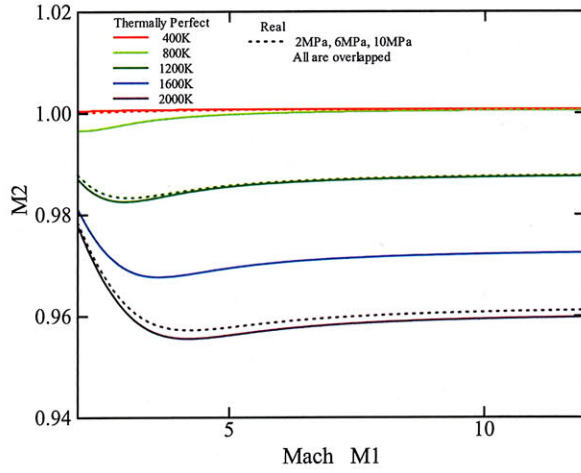


図 7.5 $(M_2)_{\text{Therm.Perf}} / (M_2)_{\text{Perf}}$ & $(M_2)_{\text{Real}} / (M_2)_{\text{Perf}}$

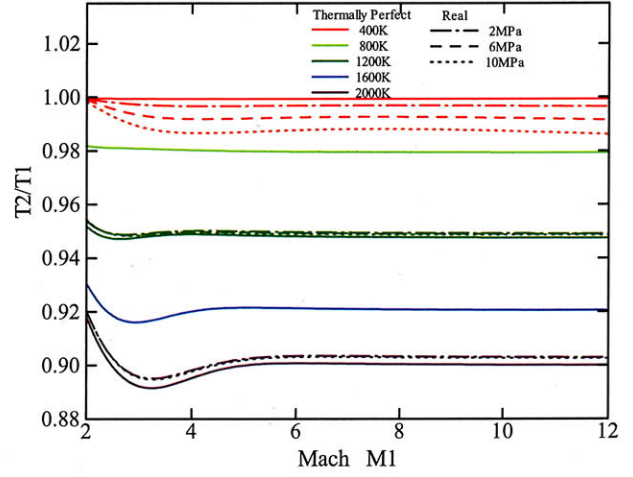


図 7.6 $(T_2/T_1)_{\text{Therm.Perf}} / (T_2/T_1)_{\text{Perf}}$ & $(T_2/T_1)_{\text{Real}} / (T_2/T_1)_{\text{Perf}}$

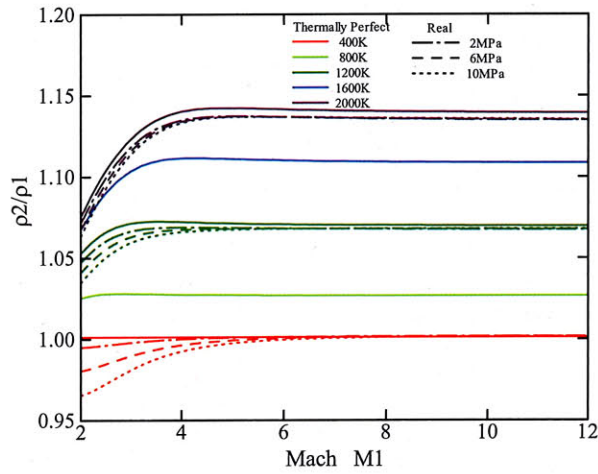


図 7.7 $(\rho_2/\rho_1)_{\text{Therm.Perf}} / (\rho_2/\rho_1)_{\text{Perf}}$ & $(\rho_2/\rho_1)_{\text{Real}} / (\rho_2/\rho_1)_{\text{Perf}}$

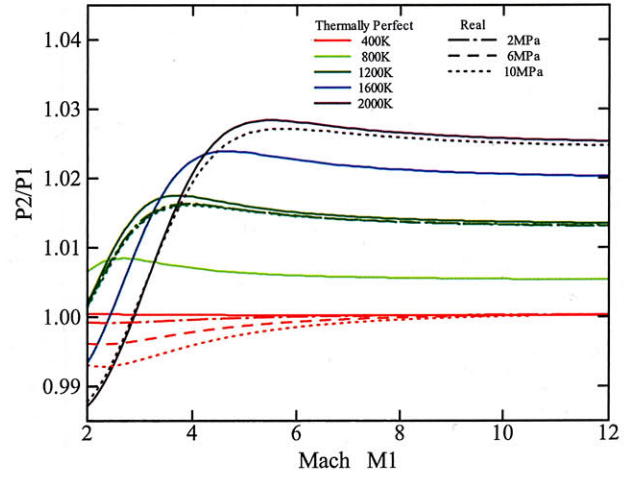


図 7.8 $(P_2/P_1)_{\text{Therm.Perf}} / (P_2/P_1)_{\text{Perf}}$ & $(P_2/P_1)_{\text{Real}} / (P_2/P_1)_{\text{Perf}}$

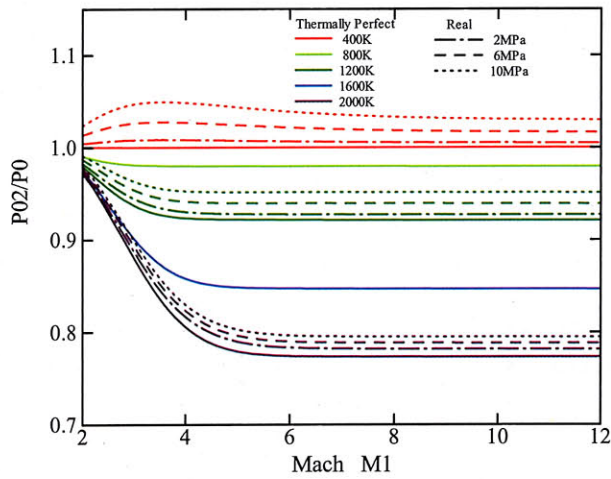


図 7.9 $(P_{02}/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (P_{02}/P_0)_{\text{Perf}}$ & $(P_{02}/P_0)_{\text{Real}} / (P_{02}/P_0)_{\text{Perf}}$

測定部（状態 1）のレイノルズ数に対するモデルの影響を検討した。粘性係数はサザーランドの公式を用いて、代表長 $L=1\text{ m}$ に対するレイノルズ数を下記式により計算した。

$$\mu = \frac{1.458 \times 10^{-6} T^{\frac{3}{2}}}{T + 110.4} \quad (7.1)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{\rho a ML}{\mu} \quad (7.2)$$

結果を図 7.10 に示す。

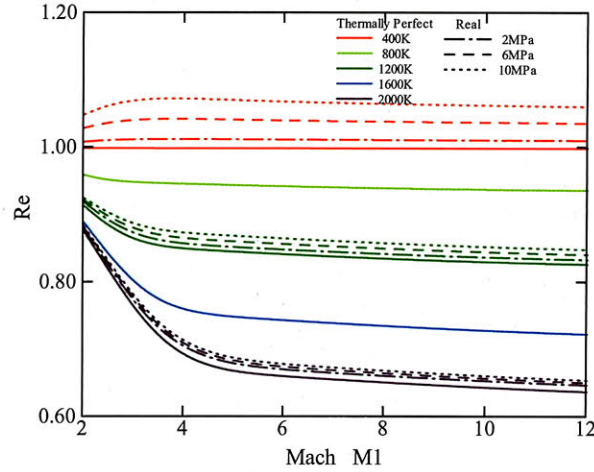


図 7.10 $(\text{Re}_1)_{\text{Therm.Perf}} / (\text{Re}_1)_{\text{Perf}} \ \& \ (\text{Re}_1)_{\text{Real}} / (\text{Re}_1)_{\text{Perf}}$

8 近似式

流れ計算を大量に行うので時間のかかる繰返し計算を避けたい場合があるかもしれない。2種類の近似式を用意した。

8.1 マッハ数連続近似

マッハ数 $M_1 = 4 \sim 12$ 、よどみ点温度 $T_0 = 400\text{K} \sim 2000\text{K}$ の間をカバーする Thermally Perfect モデルの近似式を以下に示す。衝撃波前の諸量であれば(8.1)式の形、衝撃波後の諸量であれば(8.2)式の形をとる。ここで、変数 X は T 、 ρ 、 P 等を代表して示す。係数 a_i 、 b_i 、 c_i を表 8.1 に示す。

$$\frac{(X_1/X_0)_{\text{Therm.Perf}}}{(X_1/X_0)_{\text{Perf}}} = a_0 + a_1 T_0 + a_2 T_0^2 + a_3 T_0^3 + a_4 T_0^4 \quad (8.1)$$

$$+ (b_0 + b_1 T_0 + b_2 T_0^2 + b_3 T_0^3 + b_4 T_0^4) \times \exp(b_5 M_1)$$

$$\frac{(X_2/X_1)_{\text{Therm.Perf}}}{(X_2/X_1)_{\text{Perf}}} = a_0 + a_1 T_0 + a_2 T_0^2 + a_3 T_0^3 + a_4 T_0^4 \quad (8.2)$$

$$+ (b_0 + b_1 T_0 + b_2 T_0^2 + b_3 T_0^3 + b_4 T_0^4) \times \exp(b_5 M_1)$$

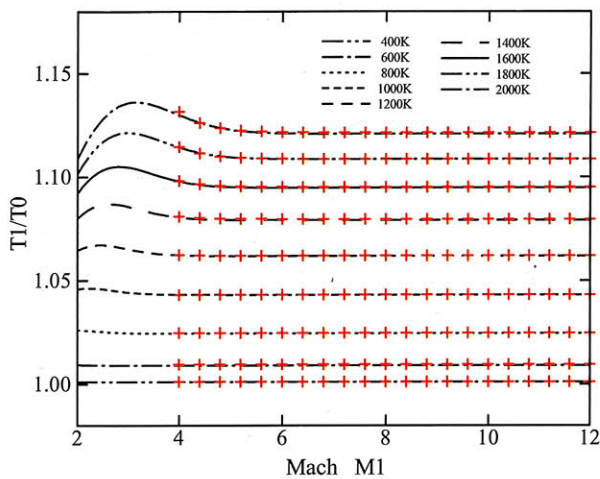
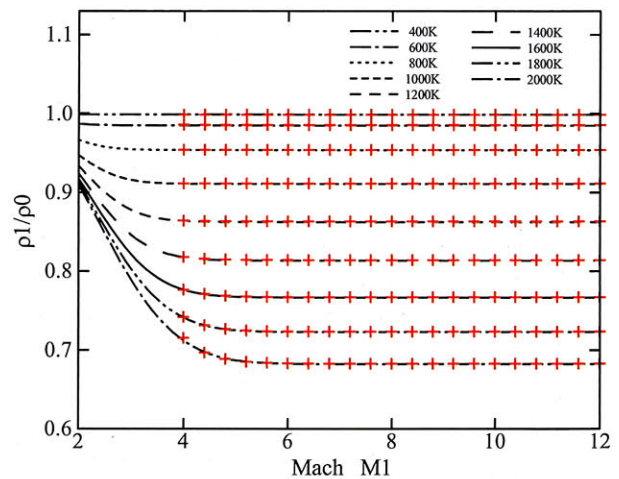
$$+ (c_0 + c_1 T_0 + c_2 T_0^2 + c_3 T_0^3 + c_4 T_0^4) \times \exp(c_5 M_1)$$

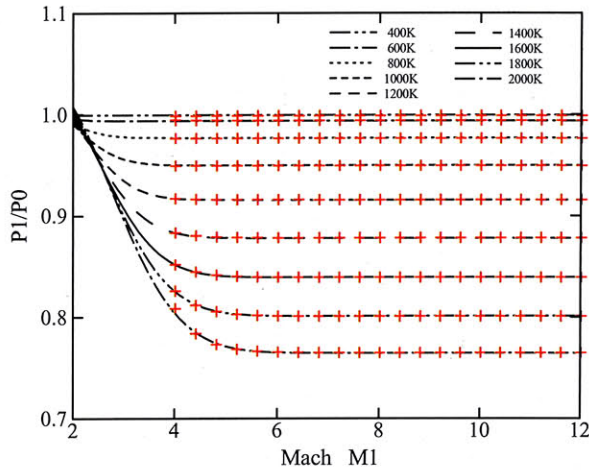
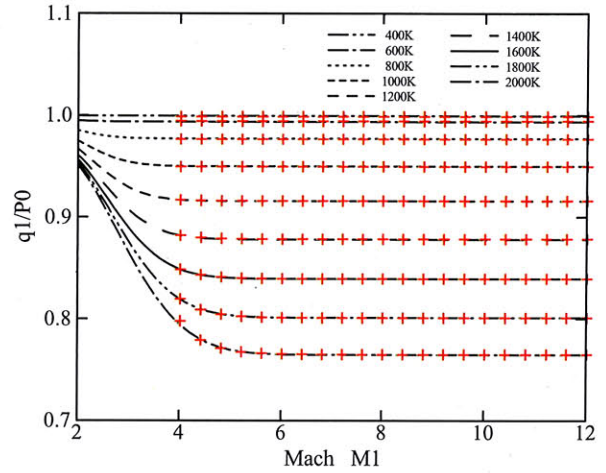
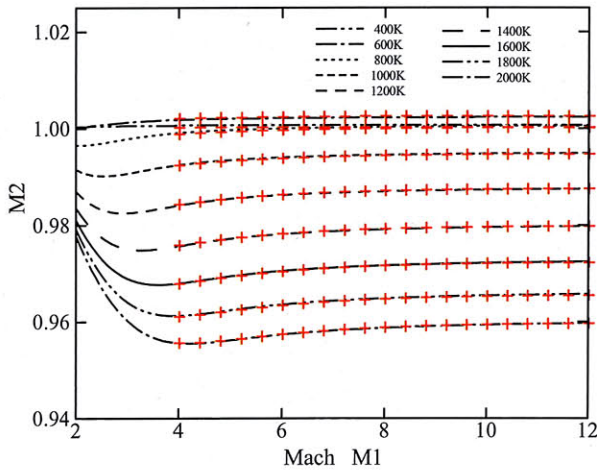
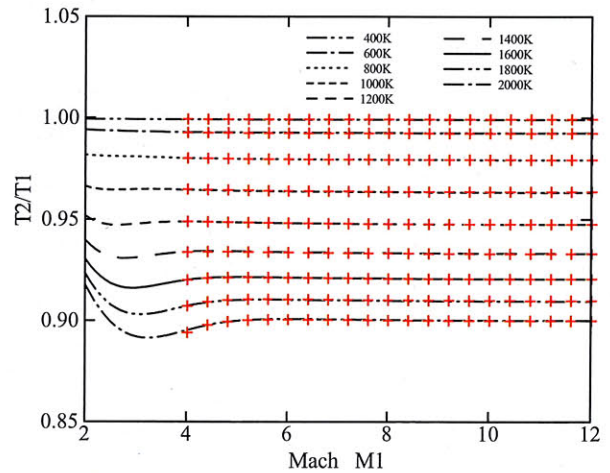
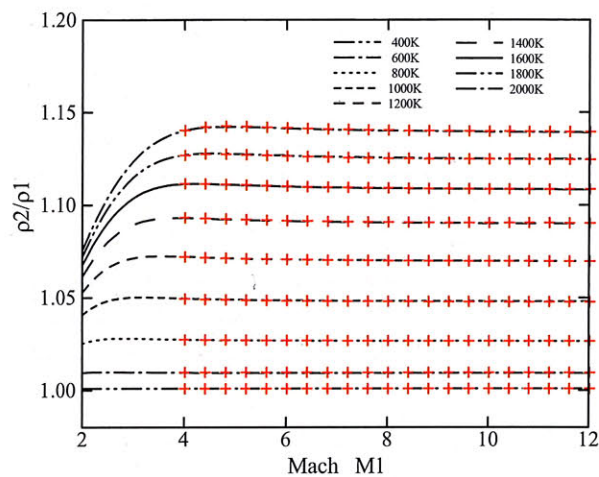
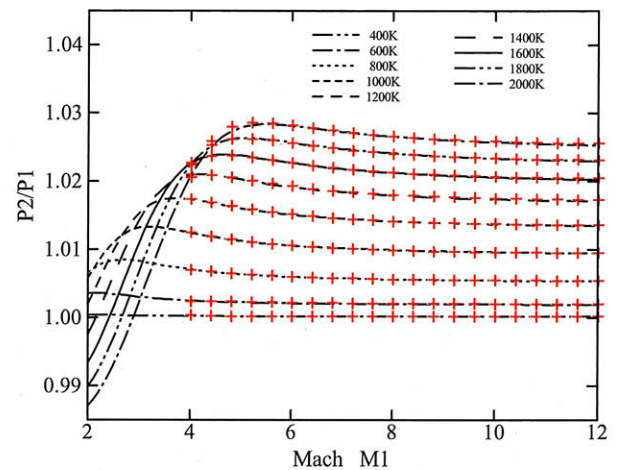
Thermally Perfect 厳密解への載り具合を、よどみ点温度 $T_0 = 400\text{K} \sim 2000\text{K}$ の間 200K キザミで計算し、図 8.1～図 8.9 に示す。赤十字印が近似値である。

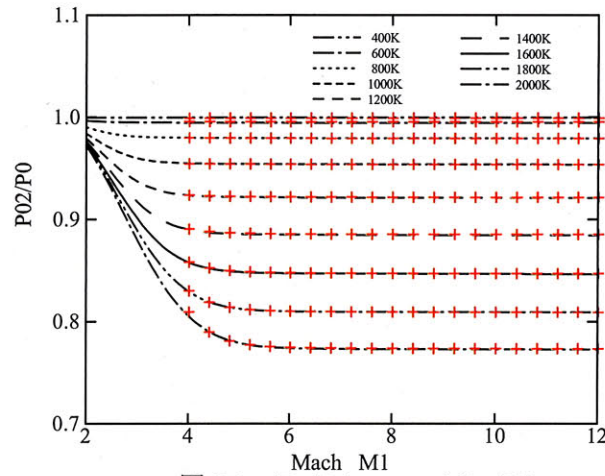
Real モデルについては、更によどみ点圧力 P_0 の関数にもなるため、複雑すぎて断念した。

表 8.1 Thermally Perfect モデル マッハ数連続近似係

| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------|
| T_1/T_0 | a_i | 1.0248E+00 | -1.5661E-04 | 2.9759E-07 | -1.4806E-10 | 2.5237E-14 | |
| | b_i | -3.5360E+00 | 1.5792E-02 | -2.1841E-05 | 9.3328E-09 | 2.0791E-13 | -1.8790 |
| ρ_1/ρ_0 | a_i | 9.3170E-01 | 3.7436E-04 | -6.1978E-07 | 2.6360E-10 | -3.9251E-14 | |
| | b_i | -2.8943E+01 | 1.2874E-01 | -1.7594E-04 | 7.1598E-08 | 4.2619E-12 | -2.1330 |
| P_1/P_0 | a_i | 9.5480E-01 | 2.1951E-04 | -3.0838E-07 | 9.1700E-11 | -8.0600E-15 | |
| | b_i | -3.2721E+01 | 1.4550E-01 | -1.9884E-04 | 8.1009E-08 | 4.6986E-12 | -2.0890 |
| q_1/P_0 | a_i | 9.5480E-01 | 2.1951E-04 | -3.0838E-07 | 9.1700E-11 | -8.0600E-15 | |
| | b_i | -2.2498E+01 | 9.7855E-02 | -1.2743E-04 | 4.3444E-08 | 8.3657E-12 | -2.0970 |
| M_2 | a_i | 9.7349E-01 | 1.1556E-04 | -1.4204E-07 | 5.5169E-11 | -7.3736E-15 | |
| | b_i | -1.7898E-01 | 7.4376E-04 | -8.5559E-07 | 2.0125E-10 | 1.1558E-13 | -1.6050 |
| | c_i | -9.1387E-03 | 5.7448E-05 | -1.1111E-07 | 5.6135E-11 | -9.5780E-15 | -0.4763 |
| T_2/T_1 | a_i | 9.7641E-01 | 1.4608E-04 | -2.7355E-07 | 1.3846E-10 | -2.3891E-14 | |
| | b_i | 2.2551E+00 | -1.0242E-02 | 1.4646E-05 | -7.0872E-09 | 3.9118E-13 | -1.7810 |
| | c_i | -5.4220E-04 | -1.0822E-05 | 4.2127E-08 | -2.7038E-11 | 5.4008E-15 | -0.4763 |
| ρ_2/ρ_1 | a_i | 1.0314E+00 | -1.9018E-04 | 3.4851E-07 | -1.7074E-10 | 2.8770E-14 | |
| | b_i | 1.5059E+00 | -6.1394E-03 | 6.7341E-06 | -3.8497E-10 | -1.6893E-12 | -1.9780 |
| | c_i | 1.4501E-02 | -7.3276E-05 | 1.1164E-07 | -4.9763E-11 | 7.7254E-15 | -0.4763 |
| P_2/P_1 | a_i | 1.0057E+00 | -3.6196E-05 | 6.8941E-08 | -3.5051E-11 | 6.0450E-15 | |
| | b_i | 7.7684E+00 | -3.5691E-02 | 5.3220E-05 | -2.9211E-08 | 3.9964E-12 | -1.8410 |
| | c_i | 1.4193E-02 | -8.5944E-05 | 1.5792E-07 | -7.9964E-11 | 1.3778E-14 | -0.4763 |
| P_{02}/P_0 | a_i | 9.5725E-01 | 2.0344E-04 | -2.7659E-07 | 7.4220E-11 | -4.8955E-15 | |
| | b_i | -2.6665E+01 | 1.1664E-01 | -1.5328E-04 | 5.3386E-08 | 9.2798E-12 | -2.1310 |
| | c_i | 4.9280E-03 | -3.1347E-05 | 6.0815E-08 | -3.3588E-11 | 6.1489E-15 | -0.4763 |
| ρ_{02}/ρ_0 | a_i | 9.5725E-01 | 2.0344E-04 | -2.7659E-07 | 7.4220E-11 | -4.8955E-15 | |
| | b_i | -2.6665E+01 | 1.1664E-01 | -1.5328E-04 | 5.3386E-08 | 9.2798E-12 | -2.1310 |
| | c_i | 4.9280E-03 | -3.1347E-05 | 6.0815E-08 | -3.3588E-11 | 6.1489E-15 | -0.4763 |

図 8.1 $(T_1/T_0)_{\text{Therm.Perf}} / (T_1/T_0)_{\text{Perf}}$ 図 8.2 $(\rho_1/\rho_0)_{\text{Therm.Perf}} / (\rho_1/\rho_0)_{\text{Perf}}$

図 8.3 $(P_1/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (P_1/P_0)_{\text{Perf}}$ 図 8.4 $(q_1/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (q_1/P_0)_{\text{Perf}}$ 図 8.5 $(M_2)_{\text{Therm.Perf}} / (M_2)_{\text{Perf}}$ 図 8.6 $(T_2/T_1)_{\text{Therm.Perf}} / (T_2/T_1)_{\text{Perf}}$ 図 8.7 $(\rho_2/\rho_1)_{\text{Therm.Perf}} / (\rho_2/\rho_1)_{\text{Perf}}$ 図 8.8 $(P_2/P_1)_{\text{Therm.Perf}} / (P_2/P_1)_{\text{Perf}}$

図 8.9 $(P_{02}/P_0)_{Therm.Perf} / (P_{02}/P_0)_{Perf}$

8.2 マッハ数 5,7,10 での Thermally Perfect モデル多項式近似

7章で見たようにマッハ数 5 以上では Thermally Perfect モデルと Perfect モデルの比はマッハ数変化に対し非常に鈍感になる。マッハ数を 5,7,10 それぞれについて、よどみ点温度 T_0 の 4 次多項式 (8.3) を仮定して最小二乗近似式を求めた。係数 C_i を表 8.2 に示す。

Thermally Perfect 厳密解への載り具合を図 8.10～図 8.13 に示す

$$\frac{(X_1/X_0)_{Therm.Perf}}{(X_1/X_0)_{Perf}} = C_0 + C_1 T_0 + C_2 T_0^2 + C_3 T_0^3 + C_4 T_0^4 \quad (8.3)$$

HWT1 マッハ数校正試験⁽¹⁾ では次の補正多項式 (8.4)、(8.5) を用いた。図 8.13 に併せて示す。1200K を超えるあたりから遊離しですが、実施した試験条件はそれより低いので実質的には問題にならない。

マッハ数 5

$$\frac{(P_{02}/P_0)_{Therm.Perf}}{(P_{02}/P_0)_{Perf}} = 0.97340 + 9.9443 \times 10^{-5} T_0 - 5.9899 \times 10^{-8} T_0^2 - 1.0690 \times 10^{-10} T_0^3 + 4.8364 \times 10^{-14} T_0^4 \quad (8.4)$$

マッハ数 7

$$\frac{(P_{02}/P_0)_{Therm.Perf}}{(P_{02}/P_0)_{Perf}} = 0.96672 + 1.3587 \times 10^{-4} T_0 - 1.3130 \times 10^{-7} T_0^2 - 4.7466 \times 10^{-11} T_0^3 + 3.0226 \times 10^{-14} T_0^4 \quad (8.5)$$

表 8.2 Thermally Perfect モデル 補正多項式係数

| | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------|-----|-------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| T_1 / T_0 | M5 | C_i | 1.0251E+00 | -1.5826E-04 | 3.0087E-07 | -1.5097E-10 | 2.6175E-14 |
| | M7 | C_i | 1.0249E+00 | -1.5712E-04 | 2.9824E-07 | -1.4843E-10 | 2.5317E-14 |
| | M10 | C_i | 1.0249E+00 | -1.5712E-04 | 2.9824E-07 | -1.4843E-10 | 2.5317E-14 |
| P_1 / P_0 | M5 | C_i | 9.5585E-01 | 2.1340E-04 | -2.9574E-07 | 8.0653E-11 | -4.5891E-15 |
| | M7 | C_i | 9.5484E-01 | 2.1932E-04 | -3.0807E-07 | 9.1485E-11 | -8.0084E-15 |
| | M10 | C_i | 9.5480E-01 | 2.1951E-04 | -3.0838E-07 | 9.1700E-11 | -8.0600E-15 |
| q_1 / P_0 | M5 | C_i | 9.5567E-01 | 2.1452E-04 | -2.9823E-07 | 8.2972E-11 | -5.3596E-15 |
| | M7 | C_i | 9.5482E-01 | 2.1942E-04 | -3.0824E-07 | 9.1597E-11 | -8.0342E-15 |
| | M10 | C_i | 9.5480E-01 | 2.1951E-04 | -3.0838E-07 | 9.1700E-11 | -8.0600E-15 |
| P_{02} / P_0 | M5 | C_i | 9.5857E-01 | 1.9561E-04 | -2.6096E-07 | 6.2425E-11 | -1.6173E-15 |
| | M7 | C_i | 9.5747E-01 | 2.0210E-04 | -2.7407E-07 | 7.2792E-11 | -4.6239E-15 |
| | M10 | C_i | 9.5726E-01 | 2.0333E-04 | -2.7631E-07 | 7.4064E-11 | -4.8685E-15 |

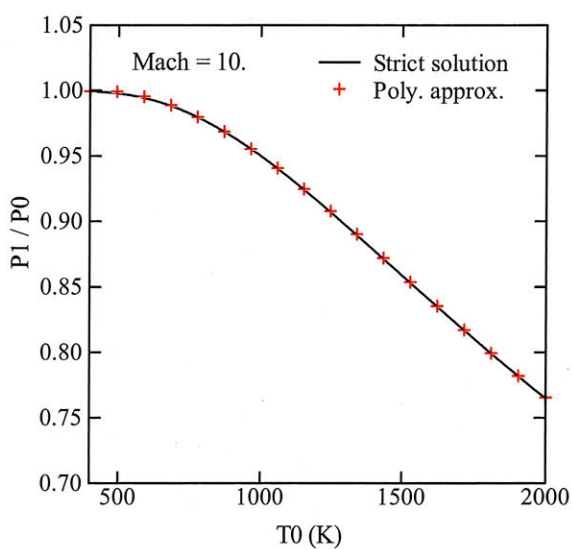
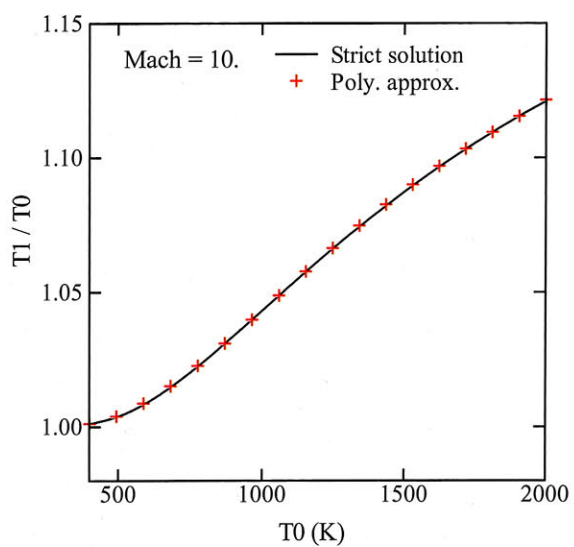
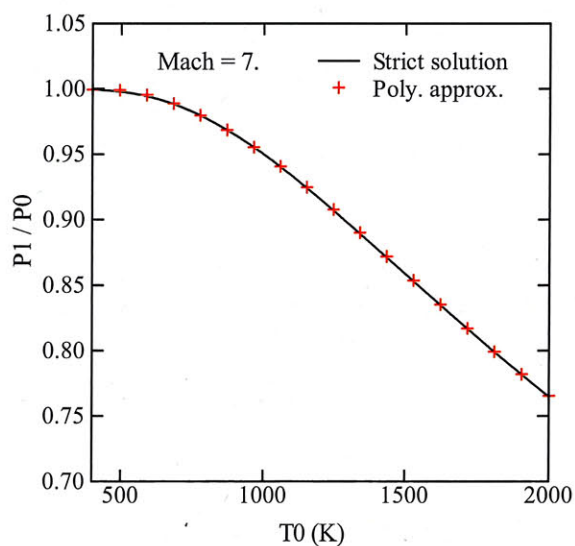
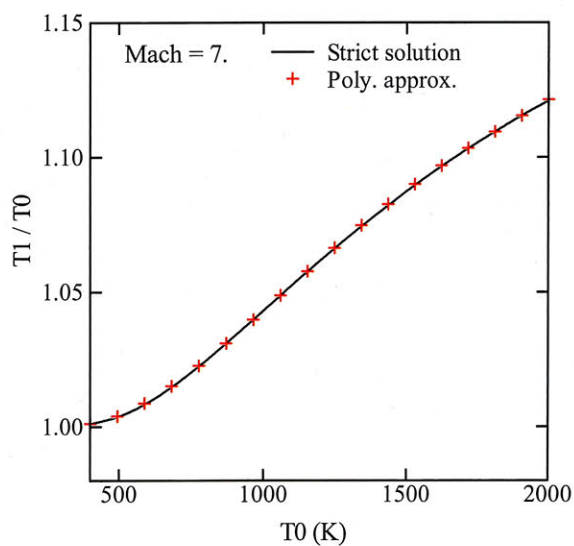
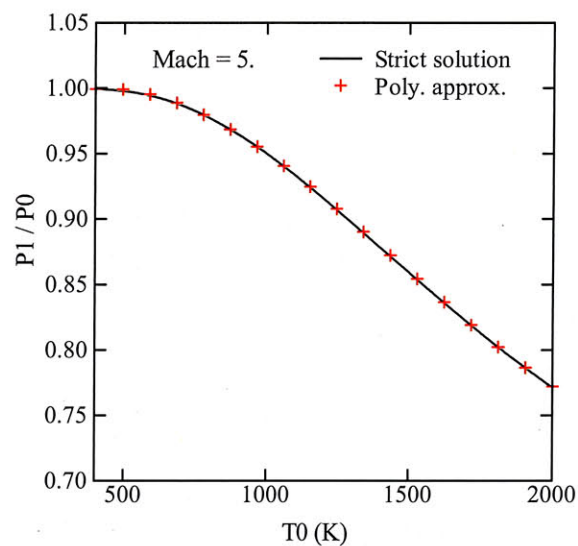
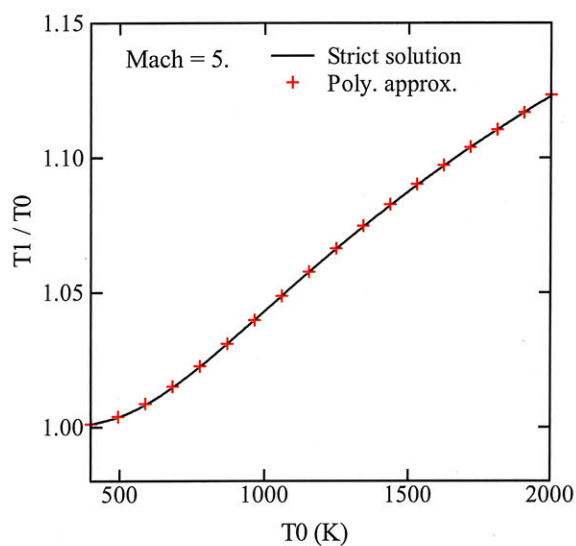


図 8.10 $(T_1/T_0)_{\text{Therm.Perf}} / (T_1/T_0)_{\text{Perf}}$

図 8.11 $(P_1/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (P_1/P_0)_{\text{Perf}}$

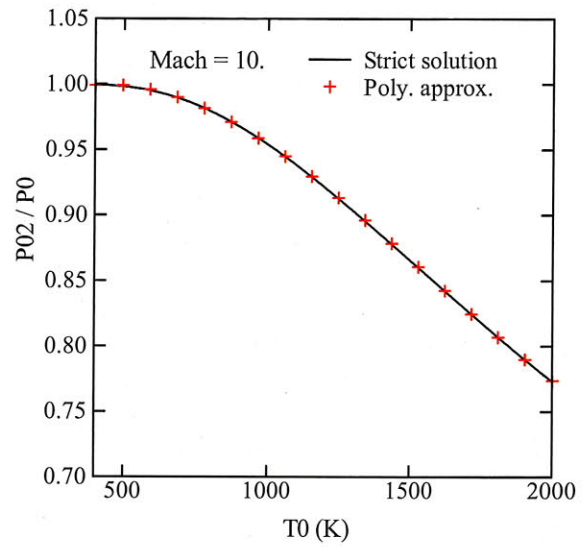
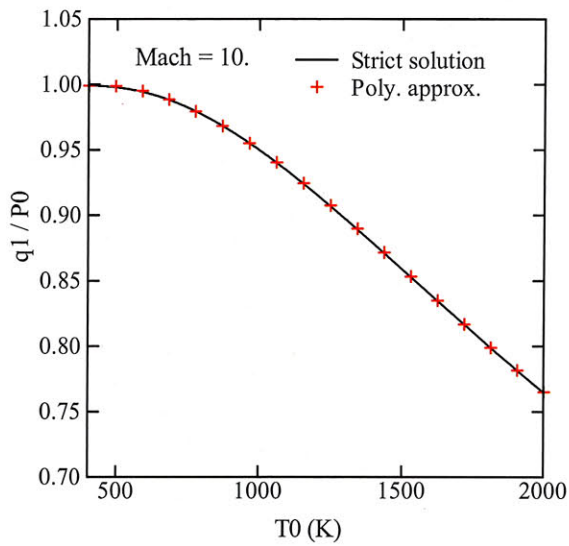
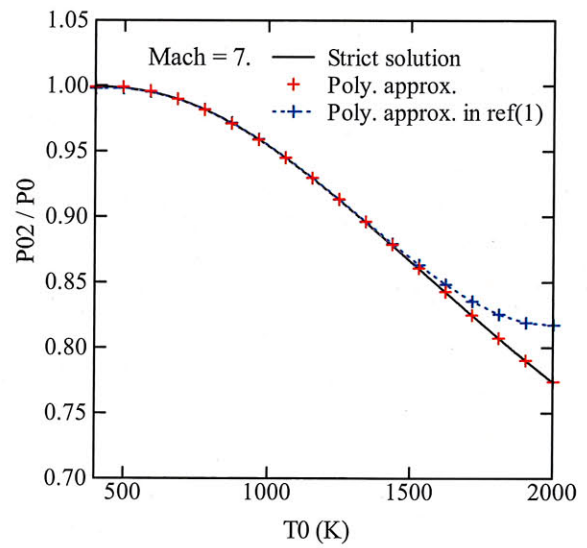
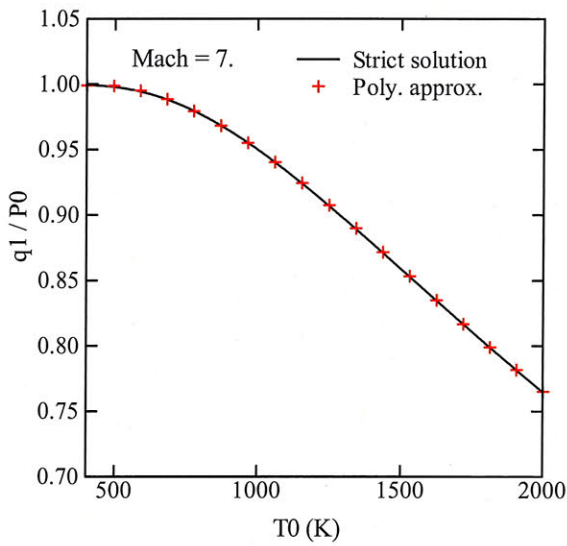
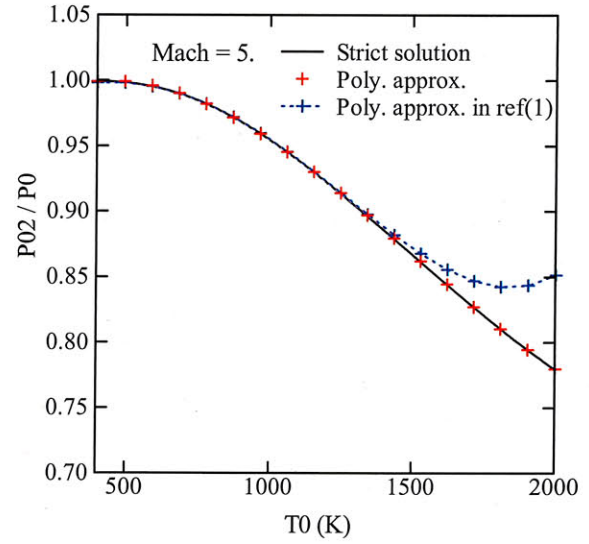
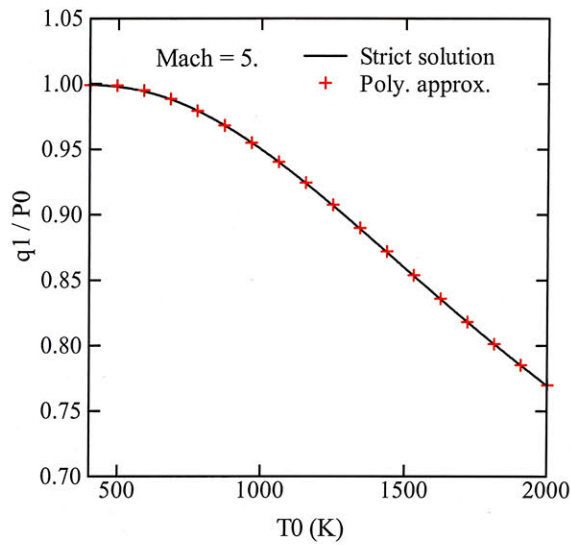


図 8.12 $(q_1/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (q_1/P_0)_{\text{Perf}}$

図 8.13 $(P_{02}/P_0)_{\text{Therm.Perf}} / (P_{02}/P_0)_{\text{Perf}}$

8.3 マッハ数 5,7,10 での Real モデル多項式近似

マッハ数を寄与とすれば Real モデルはよどみ点温度、よどみ点圧力の関数になる。次に示すようによどみ点圧力 P_0 に関し 1 次、よどみ点温度 T_0 に関し 4 次の多項式 (8.6) を仮定して最小二乗近似すると係数 a_i, b_i は表 8.3 になる。

$$\frac{(X_1/X_0)_{\text{Real}}}{(X_1/X_0)_{\text{Perf}}} = (a_0 + b_0 P_0) + (a_1 + b_1 P_0) T_0 + (a_2 + b_2 P_0) T_0^2 + (a_3 + b_3 P_0) T_0^3 + (a_4 + b_4 P_0) T_0^4 \quad (8.6)$$

Real 厳密解への載り具合を図 8.14～図 8.16 に示す。

HWT2 マッハ数校正試験⁽²⁾ では文献⁽⁸⁾ の、多項式近似式 (8.7) ～ (8.10) を用いた。なお、 P_0 (Pa) T_0 (K) 単位系に直してある。

$$\begin{aligned} \frac{(T_1/T_0)_{\text{Real}}}{(T_1/T_0)_{\text{Perf}}} &= 0.9378 - 5.6565 \times 10^{-10} P_0 \\ &\quad + (1.1759 \times 10^{-4} + 1.7092 \times 10^{-12} P_0 - 1.3404 \times 10^{-8} T_0 - 6.3627 \times 10^{-16} P_0 T_0) T_0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{(P_1/P_0)_{\text{Real}}}{(P_1/P_0)_{\text{Perf}}} &= 1.0562 + 7.1895 \times 10^{-9} P_0 \\ &\quad - (6.3414 \times 10^{-5} + 4.7775 \times 10^{-12} P_0 + 4.4838 \times 10^{-8} T_0 - 1.0319 \times 10^{-15} P_0 T_0) T_0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

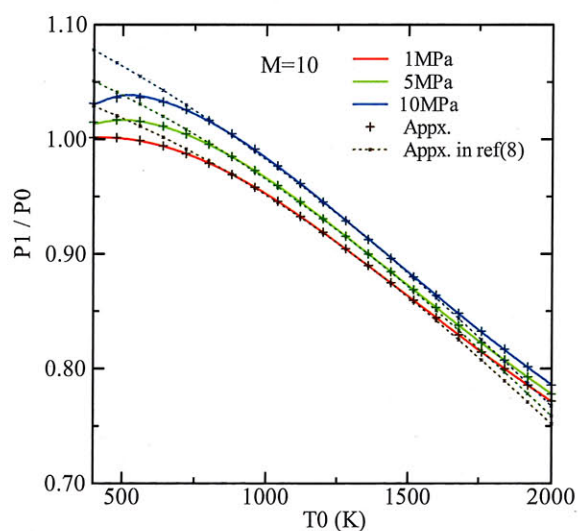
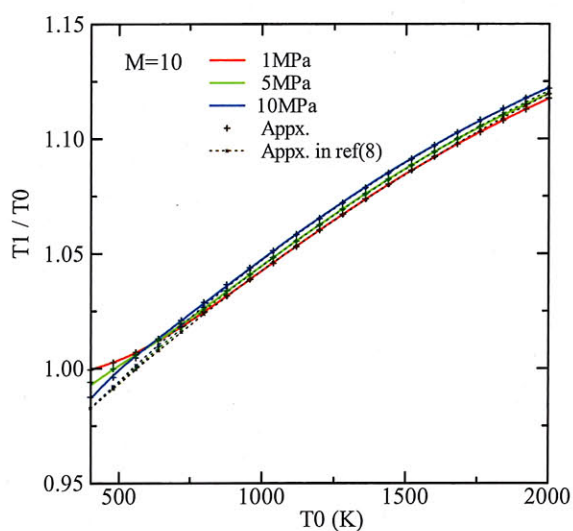
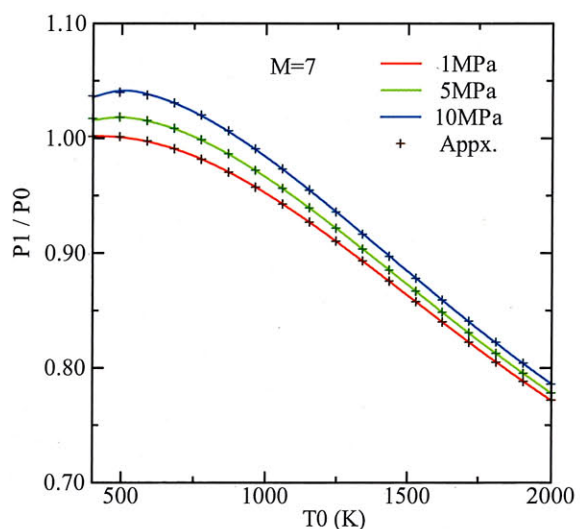
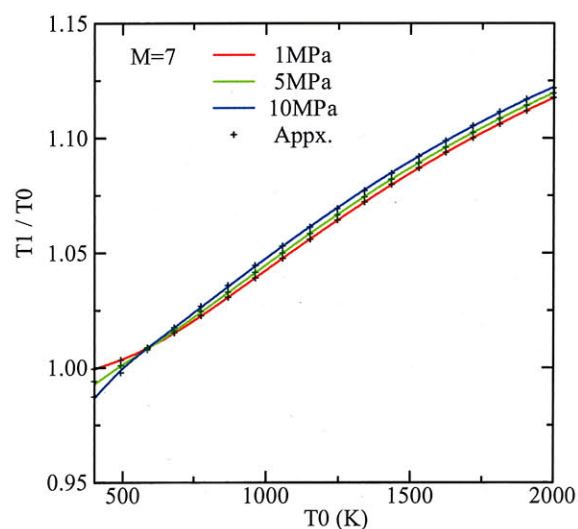
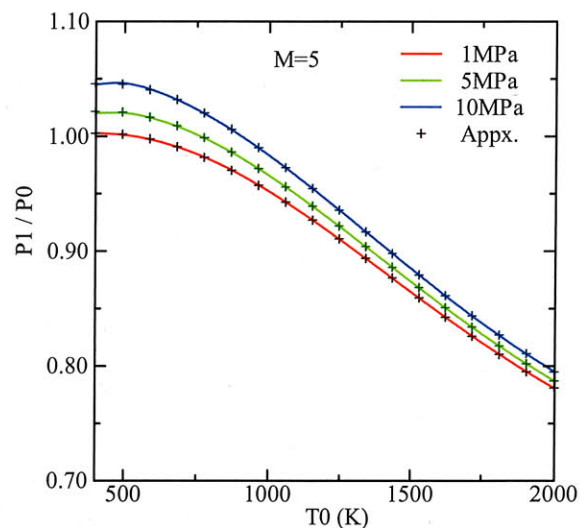
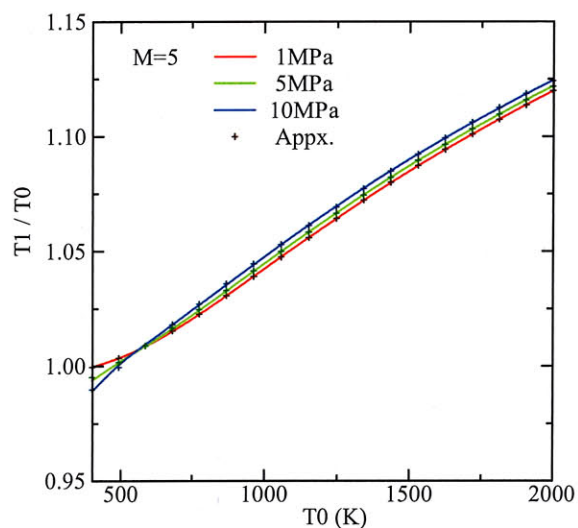
$$\begin{aligned} \frac{(q_1/P_0)_{\text{Real}}}{(q_1/P_0)_{\text{Perf}}} &= 1.0562 + 7.1895 \times 10^{-9} P_0 \\ &\quad - (6.3414 \times 10^{-5} + 4.7775 \times 10^{-12} P_0 + 4.4838 \times 10^{-8} T_0 - 1.0319 \times 10^{-15} P_0 T_0) T_0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{(P_{02}/P_0)_{\text{Real}}}{(P_{02}/P_0)_{\text{Perf}}} &= 1.0419 + 5.5564 \times 10^{-9} P_0 \\ &\quad - (3.5424 \times 10^{-5} + 2.0690 \times 10^{-12} P_0 + 5.4772 \times 10^{-8} T_0) T_0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

この曲線を図 8.14 から図 8.16 のマッハ数 10 の図に併せて示す。文献⁽⁸⁾ の近似式は 800K から 1500K の範囲を焦点に作られている。マッハ数校正試験はこの範囲で行われているので実質的に問題はない。しかし、より低速側に適用するには文献⁽⁸⁾ の近似式は要注意である。

表 8.3 Real モデル 補正多項式係数

| | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------|-----|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| T_1 / T_0 | M5 | a_i | 1.0172E+00 | -1.2174E-04 | 2.4785E-07 | -1.2250E-10 | 2.0907E-14 |
| | | b_i | -7.1408E-09 | 2.4015E-11 | -2.7113E-14 | 1.3201E-17 | -2.3482E-21 |
| | M7 | a_i | 1.0177E+00 | -1.2332E-04 | 2.4929E-07 | -1.2243E-10 | 2.0530E-14 |
| | | b_i | -8.1613E-09 | 2.6999E-11 | -3.0348E-14 | 1.4740E-17 | -2.6180E-21 |
| | M10 | a_i | 1.0175E+00 | -1.2266E-04 | 2.4848E-07 | -1.2201E-10 | 2.0453E-14 |
| | | b_i | -7.7708E-09 | 2.5388E-11 | -2.8246E-14 | 1.3628E-17 | -2.4100E-21 |
| P_1 / P_0 | M5 | a_i | 9.5822E-01 | 2.0221E-04 | -2.9037E-07 | 8.4840E-11 | -6.2760E-15 |
| | | b_i | 1.8548E-09 | 1.5115E-11 | -2.4314E-14 | 1.3421E-17 | -2.5396E-21 |
| | M7 | a_i | 9.5916E-01 | 1.9907E-04 | -2.8806E-07 | 8.6256E-11 | -7.7940E-15 |
| | | b_i | -2.4554E-09 | 2.8569E-11 | -3.9457E-14 | 2.0802E-17 | -3.8575E-21 |
| | M10 | a_i | 9.5991E-01 | 1.9664E-04 | -2.8536E-07 | 8.5047E-11 | -7.6181E-15 |
| | | b_i | -4.5859E-09 | 3.4715E-11 | -4.6127E-14 | 2.3987E-17 | -4.4179E-21 |
| q_1 / P_0 | M5 | a_i | 9.5848E-01 | 2.0112E-04 | -2.8909E-07 | 8.4634E-11 | -6.5088E-15 |
| | | b_i | 9.3628E-10 | 1.7993E-11 | -2.7555E-14 | 1.5000E-17 | -2.8213E-21 |
| | M7 | a_i | 9.5971E-01 | 1.9700E-04 | -2.8542E-07 | 8.4867E-11 | -7.5386E-15 |
| | | b_i | -2.8563E-09 | 2.9728E-11 | -4.0718E-14 | 2.1406E-17 | -3.9640E-21 |
| | M10 | a_i | 9.5938E-01 | 1.9866E-04 | -2.8802E-07 | 8.6496E-11 | -7.8985E-15 |
| | | b_i | -4.5472E-09 | 3.4451E-11 | -4.5712E-14 | 2.3742E-17 | -4.3686E-21 |
| P_{02} / P_0 | M5 | a_i | 9.6063E-01 | 1.8622E-04 | -2.5810E-07 | 6.7683E-11 | -3.4642E-15 |
| | | b_i | 8.6265E-10 | 1.8030E-05 | -2.7445E-08 | 1.4903E-11 | -2.7994E-15 |
| | M7 | a_i | 9.6151E-01 | 1.8398E-04 | -2.5781E-07 | 6.9789E-11 | -4.8491E-15 |
| | | b_i | -2.8111E-09 | 2.9467E-05 | -4.0280E-08 | 2.1145E-11 | -3.9120E-15 |
| | M10 | a_i | 9.6174E-01 | 1.8365E-04 | -2.5816E-07 | 7.0142E-11 | -4.9447E-15 |
| | | b_i | -4.6025E-09 | 3.4631E-05 | -4.5885E-08 | 2.3823E-11 | -4.3835E-15 |

図 8.14 $(T_1/T_0)_{\text{Real}} / (T_1/T_0)_{\text{Perf}}$ 図 8.15 $(P_1/P_0)_{\text{Real}} / (P_1/P_0)_{\text{Perf}}$

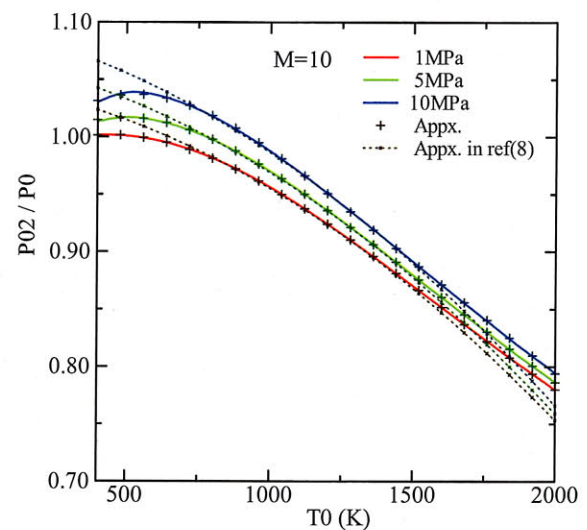
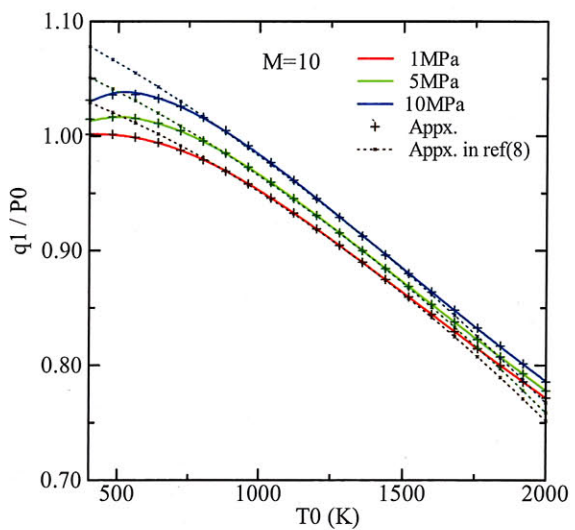
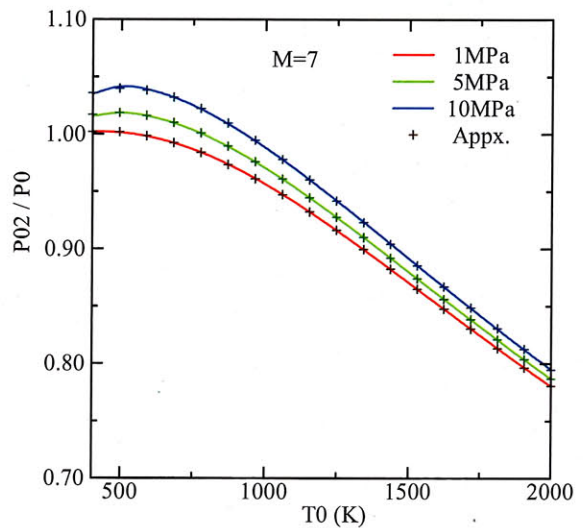
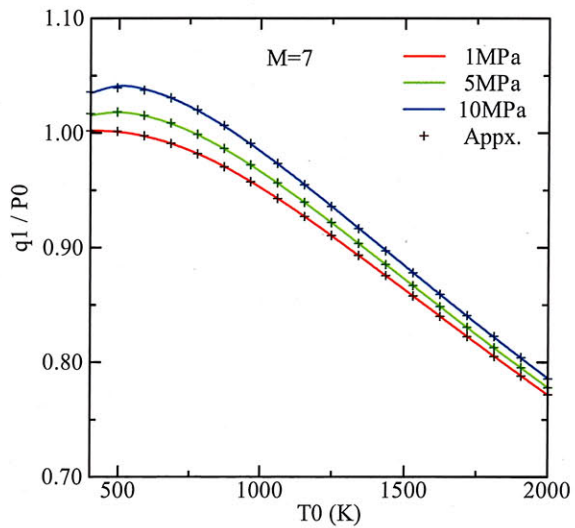
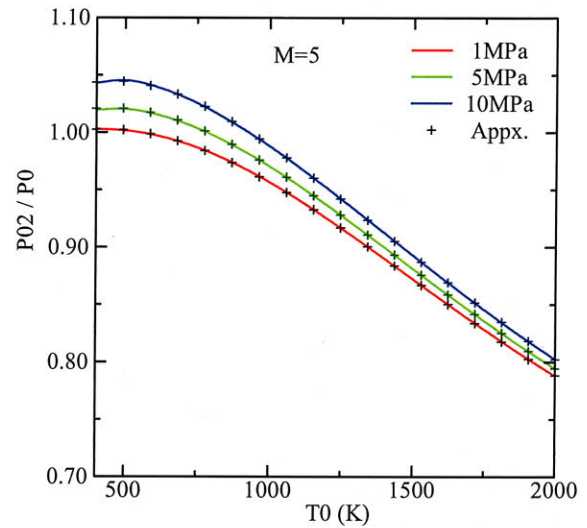
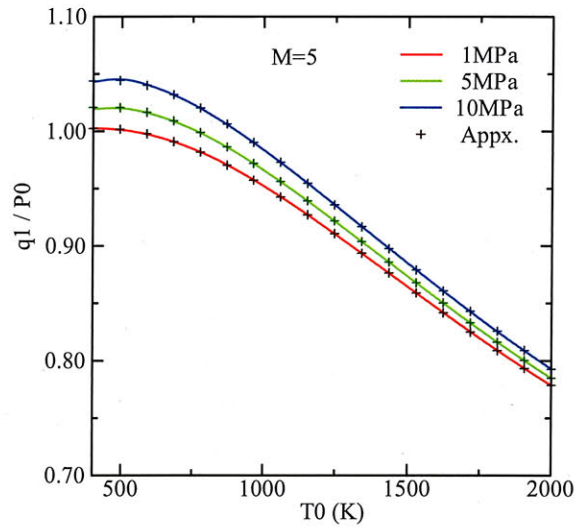


図 8.16 $(q_1/P_0)_{\text{Real}} / (q_1/P_0)_{\text{Perf}}$

図 8.17 $(P_{02}/P_0)_{\text{Real}} / (P_{02}/P_0)_{\text{Perf}}$

参考文献

- (1) 関根英夫、平林則明、小山忠勇、津田尚一、永井伸治、穂積弘一、渡利實；
0.5 m 極超音速風洞マッハ数 5 および 7 ノズル校正試験 JAXA-RR-05-043 (2006)
- (2) 小山忠勇、永井伸治、津田尚一、平林則明、関根英夫、穂積弘一、渡利實；
1.27 m 極超音速風洞マッハ数校正試験 JAXA-RR-05-041 (2006)
- (3) 山崎喬、中北和之、関根英夫、渡利實；
0.44 m 極超音速衝撃風洞 ターンテーブル型模型支持装置環境下でのマッハ数校正試験
JAXA-RR-05-050 (2006)
- (4) E.H.Kennard ; Kinetic Theory of Gases, McGraw-Hill (1938)
- (5) Ames Research Staff ; Equations, tables, and charts for compressible flow, NACA Report 1135 (1953)
- (6) R.E.Randall ; Thermodynamic properties of air: Tables and Graphs derived from the Beattie-Bridgeman equation of state assuming variable specific heats, AEDC-TR-57-8 (1957)
- (7) R.E.Randall, Thermodynamic properties of gases: Equations derived from the Beattie-Bridgeman equation of state assuming variable specific heats, AEDC-TR-57-10 (1957)
- (8) A.H.Boudreau ; Performance and Operational Characteristics of AEDC/VKF Tunnel A, B, and C, AEDC-TR-80-48 (1981)
- (9) J.A.Beattie and O.C.Bridgeman ; A New Equation of State for Fluids, Proc. American Acad. of Arts and Sciences, Vol.63, No.5 (1928)
- (10) Benjamin Chu 著, 飯島俊郎, 上平恒訳 ; デバイ分子間力, 培風館 (1969)

Appendix

```

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c   Program for Hypersonic Flows of                               c
c   Perfect Gas,                                                  c
c   Thermally Perfect Gas, and                                    c
c   Real Gas                                                       c
c   Programmed by Watari on January in 2007                       c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

open(1,status='unknown',file='ThermPe_Ratio.dat')
open(2,status='unknown',file='RealGas_Ratio.dat')

write(1,' ( a27)') 'Thermally Perfect / Perfect'
write(1,' (a121)') 'M1      T1_T0      r1_r0
&P1_P0      q1_P0      M2      P2_P1
&r2_r1      T2_T1      P02_P0      Re      '

write(2,' ( a18)') 'Real Gas / Perfect'
write(2,' (a121)') 'M1      T1_T0      r1_r0
&P1_P0      q1_P0      M2      P2_P1
&r2_r1      T2_T1      P02_P0      Re      '

T0 = 1200.
P0 = 10.0e6

do 100 i=0,110
xM1 = 1.6+0.1*i

call Perfect(xM1,P0,T0,
&      r0,h0,r1,P1,T1,q1,a1,xM2,r2,P2,T2,r02,P02,T02,h02)

call ThermPe(xM1,P0,T0,
& r0s,h0s,r1s,P1s,T1s,q1s,a1s,xM2s,r2s,P2s,T2s,r02s,P02s,T02s,h02s)

call RealGas(xM1,P0,T0,
& r0q,h0q,r1q,P1q,T1q,q1q,a1q,xM2q,r2q,P2q,T2q,r02q,P02q,T02q,h02q)

Re1 = Reyno(r1 , T1 , a1 , xM1, 1.0)
Re1s= Reyno(r1s, T1s, a1s, xM1, 1.0)
Re1q= Reyno(r1q, T1q, a1q, xM1, 1.0)

tT1 = T1s / T1
tr1 = r1s / r1
tP1 = P1s / P1
tq1 = q1s / q1
tM2 = xM2s/ xM2
tP2 = (P2s/P1s)/(P2/P1)
tr2 = (r2s/r1s)/(r2/r1)
tT2 = (T2s/T1s)/(T2/T1)
tP02 = P02s/ P02

```

```

tRe = Re1s/ Re1

gT1 = T1q / T1
gr1 = r1q / r1
gP1 = P1q / P1
gq1 = q1q / q1
gM2 = xM2q/ xM2
gP2 = (P2q/P1q)/(P2/P1)
gr2 = (r2q/r1q)/(r2/r1)
gT2 = (T2q/T1q)/(T2/T1)
gP02 = P02q/ P02
gRe = Re1q/ Re1

write(1, '(f6.3, 10e12.5)') xM1, tT1, tr1, tP1, tq1,
&
tM2, tP2, tr2, tT2, tP02, tRe
write(2, '(f6.3, 11e12.5)') xM1, gT1, gr1, gP1, gq1,
&
gM2, gP2, gr2, gT2, gP02, gRe
100 continue

close(1)
close(2)
stop
end

subroutine Perfect(xM1, P0, T0,
&
r0, h0, r1, P1, T1, q1, a1, xM2, r2, P2, T2, r02, P02, T02, h02)
data R / 287.05287 /, gam/ 1.4 /

r0 = P0/(R*T0)
h0 = 3.5*R*T0

xMM1= xM1*xM1
T1 = 1./(1.+0.5*(gam-1)*xMM1)*T0
r1 = 1./(1.+0.5*(gam-1)*xMM1)**(1./(gam-1.))*r0
P1 = 1./(1.+0.5*(gam-1)*xMM1)**(gam/(gam-1.))*P0
q1 = 0.5*gam*xMM1*P1
a1 = sqrt(gam*R*T1)

xMM2= ((gam-1.)*xMM1+2.)/(2.*gam*xMM1-(gam-1.))
xM2 = sqrt(xMM2)
r2 = (gam+1.)*xMM1/((gam-1.)*xMM1+2.)*r1
P2 = (2.*gam*xMM1-(gam-1.))/(gam+1.)*P1
T2=(2.*gam*xMM1-gam+1.)*((gam-1.)*xMM1+2.)/((gam+1.)*2*xMM1)*T1

T02 = T0
r02 = (1.+0.5*(gam-1)*xMM2)**(1./(gam-1.))*r2
P02 = (1.+0.5*(gam-1)*xMM2)**(gam/(gam-1.))*P2
h02 = h0
return
end

```

```

subroutine ThermPe(xM1, P0, T0,
&      r0, h0, r1, P1, T1, q1, a1, xM2, r2, P2, T2, r02, P02, T02, h02)
data R / 287.05287 /, gam/ 1.4 /
data theta / 3055.5555 /

r0 = P0/(R*T0)
h0 = 3.5*R*(1.+(gam-1.)/gam*(theta/T0)/(exp(theta/T0)-1.))*T0

expT0= exp(theta/T0)
xMM1 = xM1*xM1
T1 = 1./(1.+0.5*(gam-1)*xMM1)*T0

do 100 iter=1,10
T1x = T1
if(T1x.lt.50.) T1x=50.
expT1= exp(theta/T1x)

gam1 = 1.+(gam-1.)/(1.+(gam-1.)*(theta/T1)**2*expT1/(expT1-1.))**2)
T1 = 1./((gam-1.)/gam*(0.5*gam1*xMM1-theta/T1*(1./(expT0-1.)
&      -1./(expT1-1.))+1.))*T0
100 continue

r1 = (expT0-1.)/(expT1-1.)*(T1/T0)**(1./(gam-1.))
&      *exp(theta/T1x*expT1/(expT1-1.))-theta/T0*expT0/(expT0-1.))*r0
P1 = (expT0-1.)/(expT1-1.)*(T1/T0)**(gam/(gam-1.))
&      *exp(theta/T1x*expT1/(expT1-1.))-theta/T0*expT0/(expT0-1.))*P0

q1 = (gam/(gam-1.))*(T0/T1-1.)
&      +theta/T1*(1./(expT0-1.))-1./(expT1-1.))*P1
a1 = sqrt(gam1*R*T1)

T2 = (2.*gam*xMM1-gam+1.)*((gam-1.)*xMM1+2.)/((gam+1.))**2*xMM1)*T1

do 200 iter=1,20
T2x = T2
if(T2x.lt.50.) T2x=50.
expT2= exp(theta/T2x)
gam2 = 1.+(gam-1.)/(1.+(gam-1.)*(theta/T2)**2*expT2/(expT2-1.))**2)
xMM2 = 0.5/gam2*((T1/T2)*(1.+gam1*xMM1)**2/(gam1*xMM1)*
&      (1.-sqrt(1.-4.*T2/T1*(gam1*xMM1)/(1.+gam1*xMM1)**2))-2.)
T2 = (2.*(gam/(gam-1.))+theta/T1/(expT1-1.))+gam1*xMM1)
&      /(2.*(gam/(gam-1.))+theta/T2/(expT2-1.))+gam2*xMM2)*T1
200 continue
xM2 = sqrt(xMM2)

r2 = sqrt((gam1*T1*xMM1)/(gam2*T2*xMM2))*r1
P2 = (1.+gam1*xMM1)/(1.+gam2*xMM2)*P1

T02 = T0
expT02= exp(theta/T02)
r02 = (expT2-1.)/(expT02-1.)*(T02/T2)**(1./(gam-1.))

```

```

& *exp(theta/T02*expT02/(expT02-1.))-theta/T2*expT2/(expT2-1.))*r2
P02 = (expT2-1.)/(expT02-1.)*(T02/T2)**(gam/(gam-1.))
& *exp(theta/T02*expT02/(expT02-1.))-theta/T2*expT2/(expT2-1.))*P2
h02 = h0
return
end

subroutine RealGas(xM1,P0,T0,
& r0,h0,r1,P1,T1,q1,a1,xM2,r2,P2,T2,r02,P02,T02,h02)
data R / 287.05287 / , gam/ 1.4 /

call density(P0,T0,r0,e1,e2,e3)
h0 = 3.5*R*T0*funcJ(P0,T0)

xMM1 = xM1*xM1
T1 = 1./(1.+0.5*(gam-1.)*xMM1)*T0
P1 = 1./(1.+0.5*(gam-1.)*xMM1)**(gam/(gam-1.))*P0

do 100 iter=1,10
T1 = funcJ(P0,T0)/(0.5*(gam-1.)*funcI(P1,T1)*xMM1+funcJ(P1,T1))*T0
P1 = (T1/T0)**(gam/(gam-1.))*(funcE(T1)/funcE(T0))
& *(funcD(P1,T1)/funcD(P0,T0))
& /(funcF(P1,T1)/funcF(P0,T0))*P0
100 continue

r1 = (T1/T0)**(1./(gam-1.))*(funcE(T1)/funcE(T0))
& /(funcF(P1,T1)/funcF(P0,T0))*r0
q1 = gam/(gam-1.)/funcD(P1,T1)
& *(funcJ(P0,T0)/(T1/T0)-funcJ(P1,T1))*P1
a1 = sqrt(gam*R*T1*funcI(P1,T1))

P2 = (2.*gam*xMM1-gam+1.)/(gam+1.)*P1
T2 = (2.*gam*xMM1-gam+1.)*((gam-1.)*xMM1+2.)/((gam+1.))*2*xMM1*T1

do 200 iter=1,40
xMM2= xMM1*T2/T1/(P2/P1)**2*(funcD(P2,T2)/funcD(P1,T1))*2
& /(funcI(P2,T2)/funcI(P1,T1))
P2 = (1.+gam*funcI(P1,T1)/funcD(P1,T1)*xMM1)
& /(1.+gam*funcI(P2,T2)/funcD(P2,T2)*xMM2)*P1

T2 = (2*funcJ(P1,T1)+(gam-1.)*funcI(P1,T1)*xMM1)
& /(2*funcJ(P2,T2)+(gam-1.)*funcI(P2,T2)*xMM2)*T1
200 continue

xM2 = sqrt(xMM2)
r2 = (P2/P1)/(T2/T1)/(funcD(P2,T2)/funcD(P1,T1))*r1

T02 = T0
P02 = (1.+0.5*(gam-1)*xM2*xM2)**(gam/(gam-1.))*P2

```

```

do 300 iter=1, 10
  T02 = (0.5*(gam-1.)*funcI(P2, T2)*xMM2+funcJ(P2, T2))
&      /funcJ(P02, T02)*T2
  P02 = (T02/T2)**(gam/(gam-1.))*(funcE(T02)/funcE(T2))
&      *(funcD(P02, T02)/funcD(P2, T2))
&      /(funcF(P2, T2)/funcF(P02, T02))*P2
300 continue

  r02 = (T02/T2)**(1./(gam-1.))*(funcE(T02)/funcE(T2))
&      /(funcF(P02, T02)/funcF(P2, T2))*r2
  h02 = 3.5*R*T02*funcJ(P02, T02)
  return
end

function funcI(P, T)
  data gam/ 1.4      /

  call specific(P, T, cv, cp, gamma, rho, e1, e2, e3)

  funcI = gamma/gam*(1.+2.*e1*rho+3.*e2*rho*rho+4.*e3*rho*rho*rho)
  return
end

function funcJ(P, T)
  data R / 287.05287  /, gam/ 1.4      /
  data A0 / 1.57222e+2  /, B0 / 1.59228e-3  /,
&  a / 6.66814e-4  /, b /-3.80199e-4  /, c / 1.49868e+3  /
  data thetaN2 / 3394.3  /, thetaO2 / 2273.4  /

  call density(P, T, rho, e1, e2, e3)

  Tx = T
  if(Tx.lt.50.) Tx=50.

  GN2 = (thetaN2/T)/(exp(thetaN2/Tx)-1.)
  GO2 = (thetaO2/T)/(exp(thetaO2/Tx)-1.)
  G = 0.78088*GN2+0.20950*GO2

  funcJ = 1.+(gam-1)/gam*(G+rho*(B0-2.*A0/(R*T)-4.*c/(T*T*T))
&      +rho*rho*(3.*A0*a/(2.*R*T)-5.*B0*c/(2.*T*T*T)-B0*b)
&      +rho*rho*rho*2.*B0*b*c/(T*T*T))
  return
end

function funcD(P, T)

  call density(P, T, rho, e1, e2, e3)

  funcD = 1.+e1*rho+e2*rho*rho+e3*rho*rho*rho
  return
end

```

```

function funcE(T)
data thetaN2 / 3394.3 /, theta02 / 2273.4 /

Tx = T
if(Tx.lt.50.) Tx=50.

GN2 = (thetaN2/T)/(exp(thetaN2/Tx)-1.)
G02 = (theta02/T)/(exp(theta02/Tx)-1.)
funcE= (exp(GN2)/(1.-exp(-thetaN2/Tx)))*0.78088
&      *(exp(G02)/(1.-exp(-theta02/Tx)))*0.20950
return
end

function funcF(P,T)
data A0 / 1.57222e+2 /, B0 / 1.59228e-3 /,
&      a / 6.66814e-4 /, b /-3.80199e-4 /, c / 1.49868e+3 /

call density(P,T,rho,e1,e2,e3)

funcF = exp(rho*(B0+2.*c/(T*T*T))+rho*rho*(B0*c/(T*T*T)-B0*b/2.))
&      -rho*rho*rho*(2.*B0*b*c/(3.*T*T*T))
return
end

subroutine density(P,T,rho,e1,e2,e3)
data R / 287.05287 /
data A0 / 1.57222e+2 /, B0 / 1.59228e-3 /,
&      a / 6.66814e-4 /, b /-3.80199e-4 /, c / 1.49868e+3 /

e1=B0-A0/(R*T)-c/(T*T*T)
e2=A0*a/(R*T)-B0*b-B0*c/(T*T*T)
e3=B0*b*c/(T*T*T)

g1=-e1/(R*T)
g2=(2.*e1*e1-e2)/(R*T)**2
g3=(5.*e1*(e2-e1*e1)-e3)/(R*T)**3
g4=(6.*e1*e3+3.*e2*e2+7.*e1*e1*(2.*e1*e1-3.*e2))/(R*T)**4
g5=(7.*e2*e3-28.*e1*(e2*e2+e1*e3)
&      +42.*e1*e1*e1*(2.*e2-e1*e1))/(R*T)**5
g6=(60.*e1*e1*(3.*e2*e2+2.*e1*e3)+66.*e1*e1*e1*e1*(2.*e1*e1-5.*e2)
&      -12.*e2*e2*e2+e3*(4.*e3-73.*e1*e2))/(R*T)**6

rho=P/(R*T)*(1.+g1*P+g2*P*P+g3*P*P*P+g4*P*P*P*P+g5*P*P*P*P*P
&      +g6*P*P*P*P*P*P)
return
end

subroutine specific(P,T,cv,cp,gamma,rho,e1,e2,e3)
data R / 287.05287 /, gam/ 1.4 /
data A0 / 1.57222e+2 /, B0 / 1.59228e-3 /,

```

```

&    a    / 6.66814e-4 /, b /-3.80199e-4 /, c / 1.49868e+3/
data thetaN2 / 3394.3 /, thetaO2 / 2273.4 /

Tx = T
if(Tx.lt.50.) Tx=50.

HN2 = (thetaN2/T)**2*exp(thetaN2/Tx)/(exp(thetaN2/Tx)-1. )**2
HO2 = (thetaO2/T)**2*exp(thetaO2/Tx)/(exp(thetaO2/Tx)-1. )**2
H   = 0.78088*HN2+0.20950*HO2

call density(P,T,rho,e1,e2,e3)

cvib = R*H

cv = R/(gam-1.)+cvib
&    +6.*R*c/(T*T*T)*rho*(1.+B0/2.*rho-B0*b/3.*rho*rho)

cp = R*((1.+2.*c/(T*T*T)*rho)*(1.+B0*rho-B0*b*rho*rho))**2
&    /(1.+2.*e1*rho+3.*e2*rho*rho+4.*e3*rho*rho*rho)+cv
gamma= cp/cv
return
end

function Reyno(rho,T,a,xM,xL)
xmu = (1.458e-6*T**1.5)/(T+110.4)
Reyno= rho*a*xM*xL/xmu
return
end

```


宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-06-011

発 行 平成19年2月28日
編集・発行 宇宙航空研究開発機構
〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1
URL : <http://www.jaxa.jp/>
印刷・製本 (株)ビー・シー・シー・

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記にお願いいたします。

宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター
〒305-8505 茨城県つくば市千現2-1-1
TEL:029-868-2079 FAX:029-868-2956

© 2007 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体に加工することを禁じます。

