

一様デルタ相関加振の適用による拡散音場加振時の構造振動応答計算法

赤城 弘樹^{*1}, 安藤 成将^{*1}, 施 勤忠^{*1}

Equivalent modeling for vibroacoustic analysis of diffuse acoustic excitation using uniformly distributed delta correlated excitation

Hiroki AKAGI^{*1}, Shigemasa ANDO^{*1} and Qinzhong SHI^{*1}

^{*1} Japan Aerospace Exploration Agency
2-1-1 Sengen, Tsukuba-shi, Ibaraki 305-8505, Japan

Abstract

In space engineering application, diffuse acoustic field is one of the critical design consideration of spacecraft structure. Diffuse acoustic field has equal probability of mutually uncorrelated plane waves from all incident angles over a half-space. Some prediction methods for vibroacoustic response have been developed based on the assumption that the diffuse acoustic excitation can be regarded as a uniformly distributed delta correlated excitation (rain-on-the-roof excitation). This is because a normalized cross-correlation in diffuse acoustic excitation, which is expressed by a sinc function, may be written simply by delta function. In previous researches, it has been assumed that a sinc function can be described by separation of variables, while the application of an exact formula to a simplified normalized cross-correlation in diffuse acoustic excitation has never been discussed, despite its necessity. This paper provides the exact analytical method for a structure subjected to diffuse acoustic excitation applying uniformly distributed delta correlated excitation, based on joint acceptance theory. The method is applied to diffuse acoustic excitation of a flat panel for which several boundary conditions are assumed, so that the results can be compared with those of direct calculation in the diffuse acoustic field, to validate the method for structural designing.

Key words : Random vibration, Sound and acoustics, Space engineering, Spectrum analysis, Structural design, Joint acceptance, Diffuse acoustic field

1. 緒 言

航空機や自動車などの機械構造物の設計において、音響励起の構造振動応答や、構造振動による音響放射を数値解析により求める問題は、重要な課題の1つとされてきた。これは、解析対象の音響環境が広帯域なランダム振動環境であり、高精度な音場のモデル化が困難なためである。この音響問題の一例として、ロケットに搭載される宇宙機が、ロケット打上げ時に曝されるランダム振動環境における音響振動解析がある。宇宙機は、このランダム振動環境に対する設計検証として、音圧の空間分布が均一である拡散音場加振による地上音響試験が要求されるため、宇宙機設計における音響問題の数値解析では、入力条件は拡散音場音圧が前提とされている。

拡散音場は、互いに無相関で様々な入射角を持つ平面音波が一様に入射する音場である。この拡散音場における加振力は、互いに無相関で同一の振幅を持つ一様デルタ相関力と良く似ていとされ、拡散音場加振を一様デルタ相関加振として仮定した拡散音場加振時の構造振動応答計算に関する研究がいくつか行われてきた。これは、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルが sinc 関数で表現されることに対し、一様デルタ相関力は正規化クロススペクトルをデルタ関数にて表現することが可能であり、音場に対する数式上の扱いが容易であることによる。Ichchou らは、有限要素法 (Finite Element Analysis, FEA) を用いた音響振動応答解析について、拡散

音場における加振力の正規化クロススペクトルが変数分離できるとした仮定の下、一様デルタ相関加振による拡散音場加振時の構造振動応答の近似式を導き、解析解と比較してコインシデンス周波数以上でよく一致することを示した (Ichchou, et al., 2009). さらに, Rochambeau らは, Ichchou らの近似解に音響放射効率を適用して一様デルタ相関加振と拡散音場加振における構造振動応答の漸近解を提案し、解析解と比較して中周波数から高周波数においてよく一致することを示した (Rochambeau, et al., 2011). しかし、先行研究においては、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルの厳密式を用いた、一様デルタ相関加振と拡散音場加振における構造振動応答の漸近解の導出に関する研究は行われておらず、厳密式と変数分離式の関係については議論されていない。そこで、本研究では、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルの厳密式を用いて、一様デルタ相関加振の適用による拡散音場加振時の構造振動応答の漸近解を導出し、従来検討されていなかった加振力の正規化クロススペクトルの厳密式と変数分離式による構造振動応答の解析精度について評価し、拡散音場加振時の音響振動解析における一様デルタ相関加振の適用について明確にする。

本稿では、まず、物理座標系において拡散音場および一様デルタ相関加振のジョイントアクセプタンス（振動応答のし易さ）を示し、各音場における構造振動応答の違いについて述べる。次に、ジョイントアクセプタンスの波数空間表現を用いて、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルの厳密式を用いた、一様デルタ相関加振の適用による拡散音場加振時の構造振動応答の漸近解を導出し従来手法の解析精度を評価する。さらに、導出した漸近解を複数の境界条件を与えた平板構造の音響振動解析に適用し、設計における有効性を示す。

2. ジョイントアクセプタンスと正規化クロススペクトル

2.1 ジョイントアクセプタンス

図1に示す、物理座標点 \mathbf{x} 、固有角振動数 ω における音圧パワースペクトル密度 $S_p(\mathbf{x}, \omega)$ を受ける表面積 A の平板構造を考える。音響振動応答解析に用いられるジョイントアクセプタンス $j_{rr}(\omega)$ 、 $j_{rs}(\omega)$ は、ある音場中において構造がどの程度加振されやすいかを構造モードに対して示す指標であり、式(1)、(2)で表される(安藤他, 2010)。ここで、 $\varphi_r(\mathbf{x})$ は構造の r 次モードの物理座標点 \mathbf{x} における表面モード形状、 $C_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$ は加振力の正規化クロススペクトルである。また、このジョイントアクセプタンスを用いて、周辺にバップルを配置した平板構造の物理座標点 \mathbf{x} における応答加速度パワースペクトル密度 $S_a(\mathbf{x}, \omega)$ は、式(3)、(4)にて求められる。

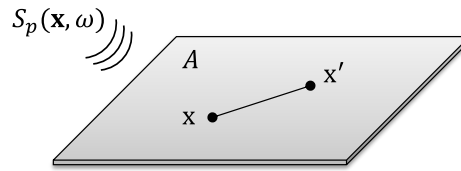


Fig. 1 Flat Panel in Acoustic Field

$$j_{rr}(\omega) = \frac{1}{A^2} \int_A \int_{A'} \varphi_r(\mathbf{x}) C_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \varphi_r(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \quad (1)$$

$$j_{rs}(\omega) = \frac{1}{A^2} \int_A \int_{A'} \varphi_r(\mathbf{x}) C_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \varphi_s(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \quad (2)$$

$$S_a(\mathbf{x}, \omega) = \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{A^2 S_p(\mathbf{x}, \omega) j_{rr}(\omega)}{\Lambda_r^2 |Z_r(\omega)|^2} \varphi_r^2(\mathbf{x}) + \sum_{r \neq s} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A^2 S_p(\mathbf{x}, \omega) j_{rs}(\omega)}{\Lambda_r \Lambda_s Z_r(\omega) Z_s^*(\omega)} \varphi_r(\mathbf{x}) \varphi_s(\mathbf{x}) \right) \omega^4 \quad (3)$$

$$Z_r(\omega) = -\omega^2 + j2\zeta_r \omega_r \omega + \omega_r^2 \quad (4)$$

ここで、構造の r 次モードについて、 ω_r を固有角振動数、 ζ_r を減衰比、 Λ_r をモード質量とする。 j は虚数単位である。なお、本稿で対象とする平板構造では、ジョイントアクセプタンスのクロスモード成分である $j_{rs}(\omega)$ の影響は無視できると仮定して、 $j_{rr}(\omega)$ のみを考える。本仮定の妥当性は著者らの先行研究にて示されている(赤城他,

2013). 本仮定の下では, 各音場における構造振動応答の違いを検討するためには, 振動応答のし易さの指標となるジョイントアクセプタンス $j_{rr}(\omega)$ を比較すれば良く, 応答加速度パワースペクトル密度を計算する必要はない. 本稿では, 各音場におけるジョイントアクセプタンスに着目し, 構造振動応答の違いを検討する.

2・2 拡散音場加振の正規化クロススペクトル

拡散音場 (Diffuse Acoustic Field, DAF) は場所によらず均質な音圧パワースペクトル $S_p(\mathbf{x}, \omega) = S_p(\omega)$ を有し, 拡散音場における加振力の正規化クロススペクトル $C_p^{DAF}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$ は, 式 (5) に示す sinc 関数にて表すことができ, 構造上 2 点間の距離 $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ にのみに依存する (Morrow, 1971). なお, $\text{sinc}(0)$ は同一点の相関を意味し, 値は 1 となる.

$$C_p^{DAF}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \frac{\sin(k_0|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)}{k_0|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} = \text{sinc}(k_0|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \quad (5)$$

ここで, k_0 は音場の波数 ($= \omega/c_0$), c_0 は空気中の音速である. 式 (1), 式 (5) より, 拡散音場加振を受ける構造のジョイントアクセプタンスは式 (6) に示す数値積分により求められる.

$$j_{rr}^{DAF}(\omega) = \frac{1}{A^2} \int_A \int_{A'} \varphi_r(\mathbf{x}) \text{sinc}(k_0|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varphi_r(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \quad (6)$$

2・3 一様デルタ相関加振の正規化クロススペクトル

互いに無相関で同一の振幅を持つ加振力が, 平板構造全体に一様に作用している加振を考える. この場合, 構造上の異なる 2 点間の加振力の相関がデルタ関数で表現できることから, 本稿では一様デルタ相関加振 (Uniformly Distributed Delta correlated excitation, UDD) と呼び, この加振力を一様デルタ相関力と呼ぶ. 一様デルタ相関力の正規化クロススペクトル $C_p^{UDD}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$ は, 式 (7) で表される. また, この加振は, 雨粒が屋根に降る場合と類似していることから, Rain On the Roof 加振とも呼ばれる.

$$C_p^{UDD}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} = \mathbf{x}') \\ 0 & (\mathbf{x} \neq \mathbf{x}') \end{cases} \quad (7)$$

ここで, 同一点の相関のみ値を持つというデルタ関数の性質から, 一様デルタ相関加振におけるジョイントアクセプタンスの数値積分は, 物理座標における同一点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ の成分のみ計算すればよく, 積分計算は 1 重積分となり, 式 (8), (9) にて表すことができる. なお, 式 (8) の式展開においては, \hat{m} を構造の面密度とし, モード質量 Λ_r は式 (10) を用いた (Fahy, 1985). また, 式 (9) に示すジョイントアクセプタンスのクロスモード成分 $j_{rs}(\omega)$ は, モードの直交性より 0 となる.

$$\begin{aligned} j_{rr}^{UDD}(\omega) &= \frac{1}{A^2} \int_A \int_{A'} \varphi_r(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi_r(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{A^2} \int_A \varphi_r^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{\Lambda_r}{\hat{m}A^2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} j_{rs}^{UDD}(\omega) &= \frac{1}{A^2} \int_A \int_{A'} \varphi_r(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi_s(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{A^2} \int_A \varphi_r(\mathbf{x}) \varphi_s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Lambda_r = \int_A \hat{m} \varphi_r^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (10)$$

2・4 拡散音場加振および一様デルタ相関加振における構造振動応答の比較

本節では、ジョイントアクセプタンスを用いて、拡散音場加振および一様デルタ相関加振における構造振動応答を比較する。本比較では、四辺単純支持平板を対象モデルとして表 1 に示す解析用パラメータを用いて、各加振におけるジョイントアクセプタンスを式 (6), (8) により算出し、構造モード別に比較する。固有角振動数 ω_{mn} とモード形状 φ_{mn} は、式 (11), (12) に示す矩形単純支持平板の一般的な解析解により求める。ここで、 D は曲げ剛性、 L_x , L_y は平板の二辺の長さ、 ω_{mn} と φ_{mn} は、それぞれ x 方向 m 次、 y 方向 n 次の固有角振動数とモード形状である。四辺単純支持平板に対する、各加振におけるジョイントアクセプタンスの計算結果を図 2 (a) に示す。また、図 2 (a) の結果を用いて、 j_{rr}^{DAF} と j_{rr}^{UDD} の割合を算出した結果を図 2 (b) に示す。

Table 1 Parameters used for analysis

| Parameters | Symbol | Value | Parameters | Symbol | Value |
|-----------------|--------|--------------------------|--------------------|----------|--|
| Area | A | 1.0×0.7 m | Structural Density | ρ_s | 2.68×10 ³ kg/m ³ |
| Mass | M | 18.76 kg | Sonic speed | c_0 | 340 m/s |
| Material | - | Aluminium | Air density | ρ_a | 1.21 |
| Thickness | t | 0.01 m | Element length | - | 0.02 m |
| Poisson's ratio | ν | 0.33 | Mode number | - | 36 (20-2000Hz) |
| Young's modulus | E | 7.06×10 ¹⁰ Pa | Boundary condition | - | Simple support |

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\hat{m}}} \left\{ \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right\} \quad (11)$$

$$\varphi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y \hat{m}}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (12)$$

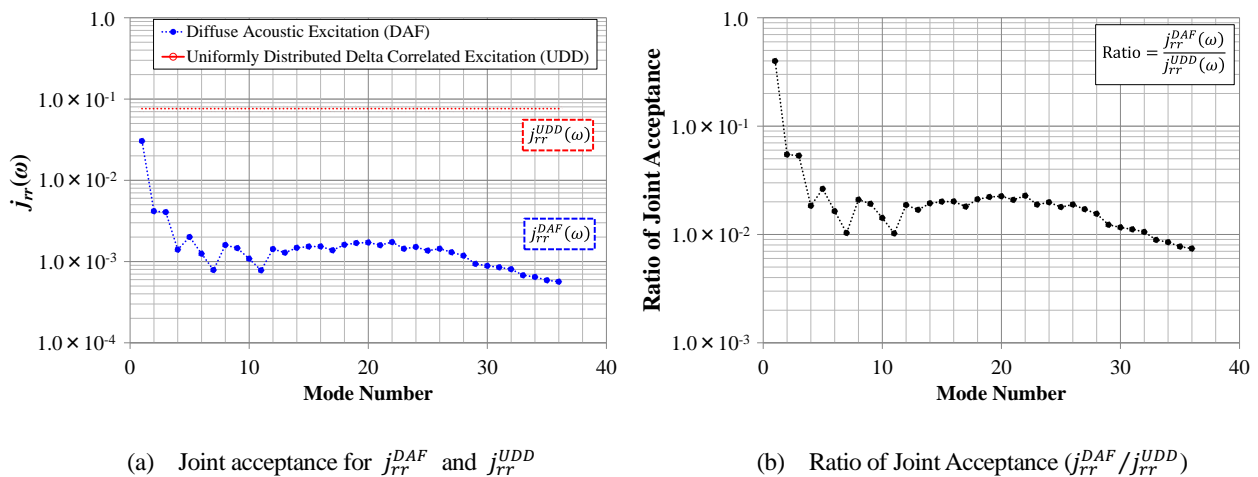


Fig. 2 The figure (a) shows the comparison of joint acceptance for diffuse acoustic excitation (DAF) and uniformly distributed delta correlated excitation (UDD) are plotted with the dashed line-closed circle (blue) and solid line-open circle (red). In UDD, the joint acceptance is uniform values, regardless of structural modes. On the other hand, in DAF, it is a different values depending on the modes. The figure (b) shows the ratio of joint acceptance between DAF and UDD.

図 2 (a) より、一様デルタ相関加振のジョイントアクセプタンスは、構造モードに依らず一律の値を持つことに対し、拡散音場加振のジョイントアクセプタンスは、構造モードに依って異なることが分かる。すなわち、一様デルタ相関加振では対象周波数範囲の構造モードが均一に励起されることに対し、拡散音場加振では構造特性に依って、加振されやすいクリティカルなモードのみが顕著に励起されることを意味している。この結果から、ジョイントアクセプタンスを用いて構造の応答のし易さを表現することで、構造振動応答の特徴が把握しやすくなることが分かる。また、図 2 (b) に示す、各加振のジョイントアクセプタンスの割合 ($j_{rr}^{DAF}/j_{rr}^{UDD}$) が、本モ

デルにおける各加振の構造振動応答の関係を表している。本稿では、式 (13) におけるジョイントアクセプタンスの漸近解 (α は関係性を表すパラメータ) を導出して、一様デルタ相関加振の適用による拡散音場加振時の構造振動応答計算法を明確にすることを目的としている。

$$j_{rr}^{DAF}(\omega) = \alpha j_{rr}^{UDD}(\omega) \quad (13)$$

3. 一様デルタ相関加振の適用による拡散音場加振のジョイントアクセプタンスの計算法

3.1 従来手法 (変数分離による近似式)

平板構造の構造表面の 2 点間の距離ベクトルを $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = (x' - x, y' - y) = (\zeta, \chi)$ とする。拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルである sinc 関数が変数分離できると仮定すると、正規化クロススペクトルは式 (14) となる。

$$\begin{aligned} C_p^{DAF}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) &= \frac{\sin(k_0 |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)}{k_0 |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \\ &\doteq \frac{\sin(k_0 \zeta)}{k_0 \zeta} \frac{\sin(k_0 \chi)}{k_0 \chi} \end{aligned} \quad (14)$$

Ichchou らは、式 (14) を用いて、各加振のジョイントアクセプタンスの関係性を表すパラメータ α (Ichchou らはこれを equivalent excitation function と呼んでいる) を求め、式 (15) に示す近似式を提案した (Ichchou, et al., 2009)。

$$j_{rr}^{DAF}(\omega) = \frac{\pi^2}{k_0^2} j_{rr}^{UDD}(\omega) \quad (15)$$

さらに、Rochambeau らは、sinc 関数が変数分離できるとする式 (14) の仮定を前提とし、式 (15) の近似式に音響放射効率 σ_{rad} を取り込み、式 (16) に示す漸近解を提案した (Rochambeau, et al., 2011)。式 (16) を用いることで中周波数から高周波数 (とくに、コインシデンス周波数以上) において、解析解と比較し良い精度で一致するとされている。

$$j_{rr}^{DAF}(\omega) = \frac{\pi^2}{k_0^2} \sigma_{rad} j_{rr}^{UDD}(\omega) \quad (16)$$

しかし、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルの厳密式を用いた、一様デルタ相関加振と拡散音場加振における構造振動応答の漸近解の導出に関する研究は行われておらず、変数分離式や音響放射効率の関係については議論されていない。ここで、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルについて、sinc 関数の変数分離 (Separation of variables) と厳密式 (Exact formula) による計算結果の 3 次元プロットを図 3 に示す。

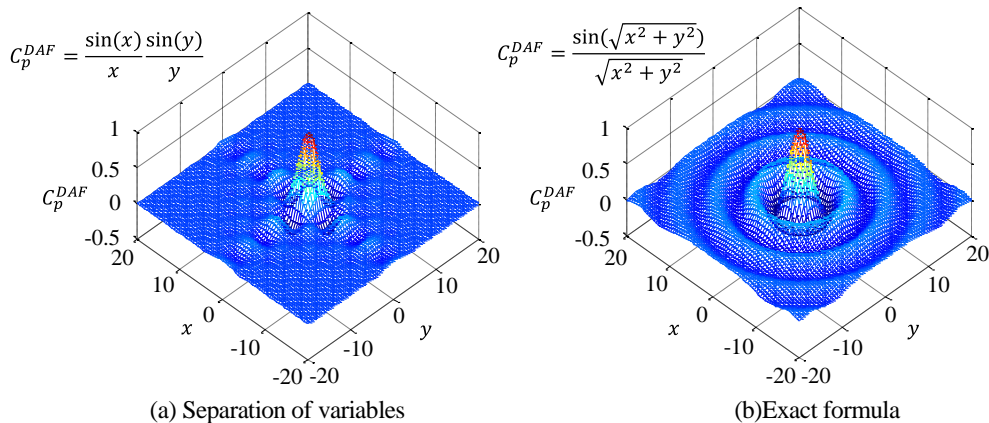


Fig. 3 The figure (a) shows the cross spectrum in diffuse acoustic excitation based on separation of variables of sinc function. The figure (b) shows the results based on exact formula of sinc function. This results shows that the approximate assumption is good agreement with on the axis and the near field from origin of the coordinate axis.

図3 (a), (b) の比較より, x - y 平面の各軸上および座標原点近傍では変数分離の仮定が成り立つが, 座標原点から離れるにつれて変数分離による近似誤差が現れることが読み取れる. 実際には, 正規化クロススペクトルの変数である $k_0|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ (波数と構造2点間の距離の積) の値により近似誤差が変動する. 3.2 節以降では, 拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルの厳密式を用いて, 一様デルタ相関加振による拡散音場加振時のジョイントアクセプタンスの漸近解を導出し, Rochambeau らの従来手法の解析精度を評価する.

3・2 正規化クロススペクトルの厳密式を用いたジョイントアクセプタンスの関係式の導出

本節では, 拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルについて, 変数分離の仮定を前提としない厳密式を用いて, 一様デルタ相関加振と拡散音場加振におけるジョイントアクセプタンスの関係式を導出する. まず, ジョイントアクセプタンス $j_{rr}(\omega)$ の変数を, 物理座標から波数空間 (波数, wavenumber) に変換することを考える. ある関数を時間領域から周波数領域に変換するフーリエ変換と同様に, 物理座標の関数 $f(\mathbf{x})$ を波数空間の関数 $\tilde{F}(\mathbf{k})$ に変換する波数変換 (Wavenumber transform) の関係式は式 (17), (18) で定義される (Fahy, 1985). 本稿では平板構造を想定して, 2次元における式展開を考える.

$$\tilde{F}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (17)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (18)$$

式 (18) から, 物理座標点 \mathbf{x} におけるモード形状 $\varphi_r(\mathbf{x})$ をモード形状の波数変換 $\tilde{\varphi}_r(\mathbf{k})$ で表すと, 式 (19) となる.

$$\varphi_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_r(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (19)$$

したがって, 式 (1), (19) より, ジョイントアクセプタンス $j_{rr}(\omega)$ は波数変換を用いて式 (20) となる.

$$\begin{aligned} j_{rr}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \int_A \int_{A'} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_r(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \right) C_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \varphi_r(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_r(\mathbf{k}) \left[\int_A \int_{A'} C_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \varphi_r(\mathbf{x}') e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \right] d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (20)$$

ここで, 式 (20) において $e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}')}$ であることを利用すると, ジョイントアクセプタンスの波数変換は式 (21) となる. $\tilde{C}_p(\mathbf{k})$ は加振力の正規化クロススペクトル $C_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$ の波数変換である.

$$\begin{aligned} j_{rr}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_r(\mathbf{k}) \left[\int_A C_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \left\{ \int_{A'} \varphi_r(\mathbf{x}') e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right\} e^{j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} d\mathbf{x} \right] d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_r(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}_r^*(\mathbf{k}) \left[\int_A C_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) e^{-j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} d\mathbf{x} \right] d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}_r(\mathbf{k})|^2 \tilde{C}_p(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tilde{C}_p(\mathbf{k}) = \int_A C_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) e^{-j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (22)$$

$$\int_{A'} \varphi_r(\mathbf{x}') e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} d\mathbf{x}' = \tilde{\varphi}_r^*(\mathbf{k}) \quad (23)$$

平板構造の表面上 2 点間の距離を r とすると、式 (22) より、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルの波数変換は式 (24) となる。

$$\begin{aligned}\widehat{C}_p^{DAF}(\mathbf{k}) &= \int_A \frac{\sin(k_0|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)}{k_0|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} e^{-j\mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ &= \int_A \frac{\sin(k_0r)}{k_0r} e^{-jk_x\zeta} e^{-jk_y\chi} d\zeta d\chi\end{aligned}\quad (24)$$

ここで、2 次元フーリエ変換に供される関数 $f(r)$ が距離のみに依存する場合、2 次元フーリエ変換の結果も距離のみに依存する。このことを考慮し、以降では、 ζ, χ と k_x, k_y を式 (25) に示す極座標変換を用いて式展開を行う。

$$\begin{aligned}\zeta &= r \cos \theta, \quad \chi = r \sin \theta \\ k_x &= |\mathbf{k}| \cos \varphi, \quad k_y = |\mathbf{k}| \sin \varphi\end{aligned}\quad (25)$$

この時、 $k_x\zeta + k_y\chi = r|\mathbf{k}| \cos(\theta - \varphi)$ であるから、 $f(r)$ の波数変換は式 (26) となる。

$$\begin{aligned}F(\mathbf{k}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{-jk_x\zeta} e^{-jk_y\chi} dk_x dk_y \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r) e^{-j|\mathbf{k}|r \cos(\theta - \varphi)} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{-j|\mathbf{k}|r \cos(\theta - \varphi)} d\theta \right) f(r) r dr\end{aligned}\quad (26)$$

なお、極座標に変換することにより、積分区間が変更になっている。ここで、第 1 種 0 次ベッセル関数の定義は、式 (27) で表されることを利用すると、式 (26) は式 (28) となる。

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jz \cos \beta} d\beta \quad (27)$$

$$F(\mathbf{k}) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(|\mathbf{k}|r) f(r) r dr \quad (28)$$

これを 0 次のハンケル変換 (Hankel transform) という。また、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルを考える場合、式 (28) の $f(r)$ に sinc 関数を代入することになり、正規化クロススペクトルの波数変換 $\widehat{C}_p^{DAF}(\mathbf{k})$ は式 (29) となる。

$$\begin{aligned}\widehat{C}_p^{DAF}(\mathbf{k}) &= 2\pi \int_0^{\infty} J_0(|\mathbf{k}|r) \frac{\sin(k_0r)}{k_0r} r dr \\ &= \frac{2\pi}{k_0} \int_0^{\infty} J_0(|\mathbf{k}|r) \sin(k_0r) dr\end{aligned}\quad (29)$$

ここで、式 (29) における数値積分は、数学公式 (Alan and Daniel, 2007) として示されている式 (30) を使用することで、式 (31) と求めることが出来る。

$$\int_0^{\infty} J_0(ax) \sin(bx) dx = \begin{cases} 0 & (0 < b < a) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} & (0 < a < b) \end{cases} \quad (30)$$

$$\widehat{C}_p^{DAF}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{2\pi}{k_0\sqrt{k_0^2 - |\mathbf{k}|^2}} & (|\mathbf{k}| < k_0) \\ 0 & (k_0 < |\mathbf{k}|) \end{cases} \quad (31)$$

式 (31) は、構造の波の速度が音速を上回らないと音響加振出来ないことを意味している。さらに、式 (31) の $\widehat{C}_p^{DAF}(\mathbf{k})$ を式 (21) に代入すると、拡散音場加振時のジョイントアクセプタンスは式 (32) となる。

$$\begin{aligned} j_{rr}^{DAF}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \int \int_{|\mathbf{k}| < k_0} |\widetilde{\varphi}_r(\mathbf{k})|^2 \frac{2\pi}{k_0\sqrt{k_0^2 - |\mathbf{k}|^2}} dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \frac{2\pi}{k_0^2} \int \int_{|\mathbf{k}| < k_0} |\widetilde{\varphi}_r(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (|\mathbf{k}|/k_0)^2}} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (32)$$

一方、一様デルタ相関力の正規化クロススペクトルの波数変換は、式 (8)、(22) より式 (33) となる。

$$\begin{aligned} \widehat{C}_p^{UDD}(\mathbf{k}) &= \int_A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-j\mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta) \delta(\chi) e^{-jk_x \zeta} e^{-jk_y \chi} dk_x dk_y \\ &= \left(e^{-jk_x \zeta} \Big|_{\zeta=0} \right) \left(e^{-jk_y \chi} \Big|_{\chi=0} \right) = 1 \end{aligned} \quad (33)$$

式 (33) より、一様デルタ相関力の正規化クロススペクトルは波数によらず一様な値を持つことが分かる。式 (33) の $\widehat{C}_p^{UDD}(\mathbf{k})$ を式 (21) に代入すると、一様デルタ相関加振のジョイントアクセプタンスは式 (34) となる。

$$j_{rr}^{UDD}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}_r(\mathbf{k})|^2 dk_x dk_y \quad (34)$$

式 (32)、(34) より、各加振におけるジョイントアクセプタンスの関係式は式 (35) と表される。

$$j_{rr}^{DAF}(\omega) = \frac{2\pi}{k_0^2} \left(\int \int_{|\mathbf{k}| < k_0} |\widetilde{\varphi}_r(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (|\mathbf{k}|/k_0)^2}} dk_x dk_y \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}_r(\mathbf{k})|^2 dk_x dk_y \right) j_{rr}^{UDD}(\omega) \quad (35)$$

しかし、機械構造物の設計における音響振動解析の際に、その都度モード形状の波数変換を求め、数値積分を求めることは現実的ではない。そこで、3.3 節では、導出した式 (35) を元に、ジョイントアクセプタンスの漸近解を求め、従来手法との解析精度の比較を行う。

3・3 ジョイントアクセプタンスの漸近解の導出

本節では、音響による構造振動と、構造振動による音響放射の相反性を用いて、式 (35) にて示されたモード形状の波数変換を含む、一様デルタ相関加振と拡散音場加振におけるジョイントアクセプタンスの関係式の簡易化を考える。ここで、 $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k})$ を平板構造の物理座標 \mathbf{x} における時間平均された速度成分 $\overline{v(\mathbf{x})}$ の波数変換とすると、バッフルを持つ平板構造における音響放射パワー P_{rad} は式 (36) 1 行目となる (Cremer, et al., 1987)。さらに、音響放射パワーを各モード成分の総和として表すと、式 (36) 2 行目となる。

$$\begin{aligned}
P_{rad} &= \frac{\rho c_0}{8\pi^2} \int \int_{|\mathbf{k}| < k_0} \frac{|\tilde{v}(\mathbf{k})|^2}{\sqrt{1 - (|\mathbf{k}|/k_0)^2}} dk_x dk_y \\
&= \frac{\rho c_0}{8\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \int \int_{|\mathbf{k}| < k_0} \frac{|\tilde{v}_r(\mathbf{k})|^2}{\sqrt{1 - (|\mathbf{k}|/k_0)^2}} dk_x dk_y
\end{aligned} \tag{36}$$

式 (36) は、構造振動による音響放射は振動の主モード成分が支配的であり、クロスモード成分の影響は無視できると仮定している。本仮定は式 (6) の導出時に用いた、ジョイントアクセプタンスのクロスモード成分の影響は無視できるとする仮定と相反関係があり、平板構造では解析結果に影響しないとする。一方、音響放射効率 σ_{rad} を用いて音響放射パワーは、各モード成分の重ね合わせとして式 (37) にて示される (Fahy, 1985)。 $\langle \overline{v(\mathbf{x})} \rangle^2$ は物理座標 \mathbf{x} における速度成分 $v(\mathbf{x})$ の時間・空間二乗平均であり式 (38) である。

$$\begin{aligned}
P_{rad} &= \rho c_0 \sigma_{rad} A \langle \overline{v(\mathbf{x})} \rangle^2 \\
&= \rho c_0 \sigma_{rad} A \sum_{r=1}^{\infty} \langle \overline{v_r(\mathbf{x})} \rangle^2
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\langle \overline{v(\mathbf{x})} \rangle^2 = \frac{1}{A} \int_A |\overline{v(\mathbf{x})}|^2 d\mathbf{x} \tag{38}$$

また、構造振動の r 次成分について、モード変位を $q_r(t)$ とすると、物理座標とモード形状の関係から $\overline{v_r(\mathbf{x})}$ は式 (39) となる。また、パーセバルの定理 (Parseval's theorem) より、波数変換したモード形状の絶対値二乗を含む数値積分について式 (40) が成り立つ。

$$\overline{v_r(\mathbf{x})} = j\omega_r \varphi_r(\mathbf{x}) \overline{q_r(t)} \tag{39}$$

$$\int_A |\varphi_r(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}_r(\mathbf{k})|^2 dk_x dk_y \tag{40}$$

以上より、音響放射パワーの r 次成分 P_{rad}^r について、式 (37) から式 (40) より式 (41) が、式 (36), (39) より式 (42) が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}_r(\mathbf{k})|^2 dk_x dk_y = \frac{4\pi^2 P_{rad}^r}{\rho c_0 \sigma_{rad} (\omega_r \overline{q_r(t)})^2} \tag{41}$$

$$\int \int_{|\mathbf{k}| < k_0} |\tilde{\varphi}_r(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (|\mathbf{k}|/k_0)^2}} dk_x dk_y = \frac{8\pi^2 P_{rad}^r}{\rho c_0 (\omega_r \overline{q_r(t)})^2} \tag{42}$$

したがって、式 (41), (42) より、式 (35) の波数領域による積分計算は式 (43) と簡易化される。式 (43) は、先行研究においては議論されていなかった、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルの厳密式を用いた、一様デルタ相関加振と拡散音場加振におけるジョイントアクセプタンスの関係式を簡易化したものであり、数式上の扱いが容易な、一様デルタ相関力の正規化クロススペクトル (デルタ関数) のみを用いて、拡散音場におけるジョイントアクセプタンスの漸近解を求める計算式である。

$$j_{rr}^{DAF}(\omega) = \frac{4\pi}{k_0^2} \sigma_{rad} j_{rr}^{UDD}(\omega) \tag{43}$$

拡散音場加振におけるジョイントアクセプタンスについて、従来手法である Rochambeau らの漸近解（式（16））の精度検証を行うため、本稿の導出手法（式（43）、以下、提案手法）と従来手法の誤差量（Error）を式（44）に示すデシベル値（dB）にて求めた。この結果、従来手法は拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルの厳密式を用いた提案手法と比較し、各構造モードに対し約 1dB（25%）程度の低負荷な構造振動応答予測となることがわかった。この誤差量は、近似値である音響放射効率の精度によらず存在するため、詳細設計や設計マージンの低減を行う際には注意が必要である。4 章では、機械構造物の設計における提案手法の有効性を検証するため、導出した漸近解を複数の境界条件を与えた平板構造の音響振動解析に適用し、解析解との比較を行う。

$$\begin{aligned} \text{Error[dB]} &= 10 \log \left(\frac{\pi^2}{k_0^2} \sigma_{rad} j_{rr}^{UPD}(\omega) / \frac{4\pi}{k_0^2} \sigma_{rad} j_{rr}^{UPD}(\omega) \right) \\ &= 10 \log \left(\frac{\pi}{4} \right) \cong -1 [\text{dB}] \end{aligned} \quad (44)$$

4. 複数の境界条件を与えた平板構造による計算手法の有効性検証

本節では、一様な平板構造を対象として、一様デルタ相関加振の適用による拡散音場加振におけるジョイントアクセプタンスの簡易式（式（43）、提案手法）、物理座標でのモード形状を含む数値積分により計算を行うジョイントアクセプタンスの厳密式（式（6）、数値積分）および、Rochambeau らの漸近解（式（16）、従来手法）を適用し、計算結果を比較する。なお、計算結果の比較では、複数の境界条件を与えてモード形状を変化させた平板構造モデルを対象として、モード形状を必要とせずにジョイントアクセプタンスの漸近解を求める提案手法の有効性の検証および適用範囲を明確にする。本章で対象とする平板構造は 2.4 節と同一とし、平板構造全周が同一の条件である SSSS（四辺単純支持）、CCCC（四辺固定端）、境界条件が混在する SCSC（単純支持と固定端の混在、短辺が S、長辺が C）の 3 種類の境界条件に対し固有値解析を行い、ジョイントアクセプタンスの算出を行った。ここで、境界条件の表記は、単純支持（Simple support）を S、固定端（Clamped）を C とした。解析用の構造数学モデルの作成、境界条件の適用、固有値解析は MSC Software 社の Patran/MS Nastran を用いた。なお、構造数学モデルの要素は四辺シェル要素（CQuad4）とし、解析周波数の上限は宇宙機の設計評価周波数と合わせ 2kHz とする。解析周波数上限は平板構造のコインシデンス周波数（本モデルでは 1172Hz）以上であり、構造の曲げ波長より音波長が短いため、構造数学モデルの要素サイズは、式（44）で表される平板の曲げ波長 λ よりも十分小さくなるように一辺 20mm の正方形とした。

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (44)$$

提案手法によるジョイントアクセプタンスの計算に必要な音響放射効率 σ_{rad} は、境界条件による影響は受けないとする仮定の下、宇宙機開発で使用されている式（45）の近似式を用いた（Mark, 1989）。 f_c は平板のコインシデンス周波数である。コインシデンス周波数以上の周波数では構造の曲げ波長が音波長よりも大きくなり、構造振動により構造表面における空気の体積変化が生じることから、音響を効率的に放射する（ $\sigma_{rad} = 1$ ）。一方、コインシデンス周波数以下の周波数では構造の曲げ波長が音波長よりも小さくなり、構造表面における空気の体積変化が生じにくく、構造振動による放射音響が小さくなる（ $\sigma_{rad} < 1$ ）。図 4（a）から（c）に、各境界条件における計算結果を示す。

$$\sigma_{rad} = \begin{cases} (f/f_c)^2 & (f < f_c) \\ 1 & (f > f_c) \end{cases} \quad (45)$$

図 4（a）から（c）の結果より、提案手法（式（43））は、500Hz 以上の高周波数において、数値積分（式（6））と比較して安全側の予測結果となっている。とくに、境界条件に依らず、コインシデンス周波数以上では、拡散

音場における音響加振条件（式（31））が成り立ち、式（45）における音響放射効率 $\sigma_{rad} = 1$ の近似条件が成り立つことから、提案手法（式（43））と数値積分（式（6））の周波数傾向がよく一致していると推察される．また、500Hz 以上かつコインシデンス周波数以下の周波数においても、境界での拘束が強くなるに従い（SSSS→SCSC→CCCC），周波数傾向がよく一致する傾向にある．500Hz 以下の低周波数において提案手法と数値積分の誤差が大きくなる事象については、境界条件の影響は受けけないという仮定の下に近似式として用いた式（45）の音響放射効率の近似精度が起因していると考えられる．一方、従来手法（式（16））は、数値積分（式（6））と比較して周波数傾向は概ね一致しているが、どの境界条件においても、低負荷予測となる周波数が存在し、危険側の予測結果となる可能性があることが分かる．

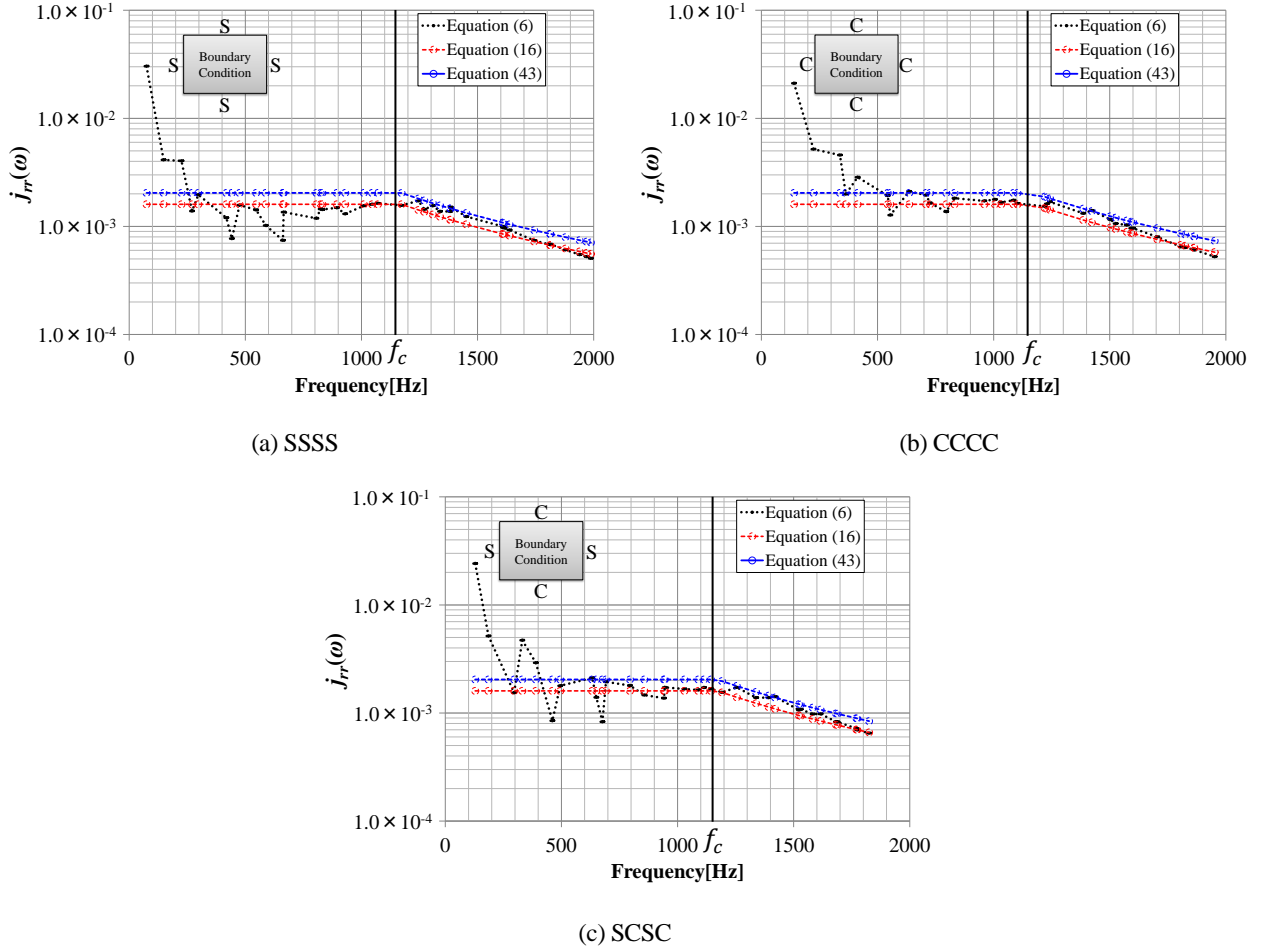


Fig.4 The figure shows the comparison of joint acceptance for diffuse acoustic excitation by equation (6), equation (16) and equation (43) are plotted with the dashed line-closed circle (black), dashed line-open circle (red) and solid line-open circle (blue), respectively. The equation (43) is found to provide good agreement with equation (6) for frequency ranges above the coincidence frequency.

ここで、境界条件の影響を考察するため、式（6）、（8）および式（43）から得られる、モード形状を用いた音響放射効率の計算式（式（46））と近似式（式（45））の比較結果を図5に示す．

$$\sigma_{rad} = \frac{k_0^2 \hat{m}}{4\pi\Lambda_r} \int_A \int_{A'} \varphi_r(\mathbf{x}) \text{sinc}(k_0|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varphi_r(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \quad (46)$$

この結果、500Hz 以下の周波数では、境界条件に依らず音響放射効率の近似誤差が大きく、提案手法の精度への影響が大きいことがよく分かる．また、500Hz 以上かつコインシデンス周波数以下の周波数においては、境界での拘束が強くなるに従い、解析的に求められる音響放射効率（式（46））と近似式（式（45））の精度が高くなる

ため、ジョイントアクセプタンスについては、提案手法（式（43））が数値積分（式（6））とよく一致していることが分かる。さらに、コインシデンス周波数以上においては、構造の個別モードが支配的なものではなく、各境界条件とも音響放射効率にばらつきが少なく、近似式との誤差も少ないため、漸近解に一致することが分かる。なお、500Hz 近傍は平板振動における音響放射の edge モードが現れる周波数帯であると考えられ（本モデルではコインシデンス周波数の半分が 586Hz）、Mark の近似式をコインシデンス周波数以下に適用する際に、適用下限の判断基準になり得ると推察される（Fahy, 1985）。

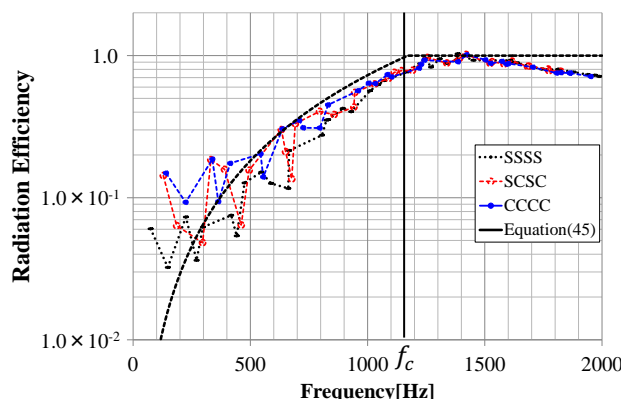


Fig.5 The figure shows the comparison of radiation efficiency for rectangular plate by equation (45) and equation (46) are plotted with solid line (black) and the other, the equation (46) is calculated with three boundary conditions (SSSS, SCSC, CCCC) are plotted with dashed line-closed circle (black), dashed line-open circle (red) and dashed line-closed circle (blue). The equation (46) (SSSS) is found to provide good agreement with equation (46) for frequency ranges above 500Hz.

以上から、提案手法である、一様デルタ相関加振の適用による拡散音場加振時のジョイントアクセプタンス（式（43））は、境界条件に依らず、構造のコインシデンス周波数以上において安全側の評価が可能であり、音響放射効率を Mark の近似式で与えることで効率的に計算することが可能であることから、平板モデルにて表現可能な機械構造物の設計において有効な簡易手法であるといえる。

5. 結 論

本稿は、一様デルタ相関加振の適用による拡散音場加振時の構造振動応答計算法に関する研究を行った。本研究の成果として結論を以下の通りまとめる。

- (1) 物理座標における拡散音場および一様デルタ相関加振のジョイントアクセプタンス（構造応答のし易さ）を示し、一様デルタ相関加振では対象周波数範囲の構造モードが均一に励起されることに対し、拡散音場加振では構造特性に依って、加振されやすいクリティカルなモードのみが顕著に励起されることを示した。
- (2) ジョイントアクセプタンスの波数空間表現を用いて、従来議論されていなかった、拡散音場における加振力の正規化クロススペクトルの厳密式による、拡散音場加振と一様デルタ相関加振における構造振動応答の関係式を理論的に導出した。さらに、この関係式に音響放射に関する相反性を適用し、ジョイントアクセプタンスの漸近解を導出し、従来手法は低負荷な予測結果となることを示した。本稿で導いた漸近解は、数式上の扱いが容易な、一様デルタ相関力の正規化クロススペクトルのみを用いて、拡散音場における構造振動応答計算が可能な簡易式である。
- (3) 一様デルタ相関加振の適用による拡散音場加振時のジョイントアクセプタンスの漸近解を、境界条件（SSSS, CCCC, SCSC）を与えた平板構造の音響振動解析に適用し、数値積分と比較した結果、境界条件に依らず、構造のコインシデンス周波数以上において周波数傾向が概ね一致しており、かつ安全側の予測結果となることから、対象とした平板構造に対し有効な計算式であることを示した。

文 献

- 赤城弘樹, 安藤成将, 施勤忠, 音響放射効率とパネル質量を用いたジョイントアクセプタンスの簡易式による宇宙機構体パネルの音響振動解析, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.79, No.808(2013), pp. 4880-4889.
- Alan, J. and Daniel, Z., Table of integrals, series, and products, Seventh Edition (2007), Academic Press. p.718.
- 安藤成将, 柳瀬恵一, 施勤忠, ジョイントアクセプタンスを用いた拡散音場負荷時の簡易音響振動解析, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.76, No.764(2010), pp. 818-824.
- Cremer, L., Heckl, M. and Ungar, E. E., Structure-borne sound : structural vibrations and sound radiation at audio frequencies, Second Edition(1987), Springer-Verlag, p.534.
- Fahy, F., Sound and structural vibration(1985), Academic Press.
- Ichchou, M.N., Hiverniau, B. and Troclet, B., Equivalent 'rain on the roof' loads for random spatially correlated excitations in the mid-frequency range, Journal of Sound and Vibration, Vol.322, Issues 4-5(2009), pp. 926-40.
- Mark, E. M., A modified VAPEPS method for predicting vibroacoustic response of unreinforced mass loaded honeycomb panels, NASA Technical Memorandum 101467(1989).
- Morrow, C.T., Point-to-point correlation of sound pressures in reverberation chambers, Journal of Sound and Vibration, No.16(1) (1971), pp. 29-42.
- Rochambeau, M., Ichchou, M.N. and Troclet, B., Modeling of random aerodynamic loads applied on fluid-structure coupled systems using rain-on-the-roof equivalent excitation, Engineering Computations, Vol.28, Issue 4(2011), pp.472-491.

References

- Akagi, H., Ando, S. and Shi, Q., Vibroacoustic analysis of spacecraft panel using simplified joint acceptance employing radiation efficiency and panel mass, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.79, No.808(2013), pp. 4880-4889 (in Japanese).
- Alan, J. and Daniel, Z., Table of integrals, series, and products, Seventh Edition (2007), Academic Press. p.718.
- Ando, S., Yanagase, K. and Shi, Q., Simplified vibroacoustic analysis of structure subjected to diffuse sound field excitation using joint acceptance, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.76, No.764(2010), pp. 818-824 (in Japanese).
- Cremer, L., Heckl, M. and Ungar, E. E., Structure-borne sound : structural vibrations and sound radiation at audio frequencies, Second Edition(1987), Springer-Verlag, p.534.
- Fahy, F., Sound and structural vibration(1985), Academic Press.
- Ichchou, M.N., Hiverniau, B. and Troclet, B., Equivalent 'rain on the roof' loads for random spatially correlated excitations in the mid-frequency range, Journal of Sound and Vibration, Vol.322, Issues 4-5(2009), pp. 926-40.
- Mark, E. M., A modified VAPEPS method for predicting vibroacoustic response of unreinforced mass loaded honeycomb panels, NASA Technical Memorandum 101467(1989).
- Morrow, C.T., Point-to-point correlation of sound pressures in reverberation chambers, Journal of Sound and Vibration, No.16(1) (1971), pp. 29-42.
- Rochambeau, M., Ichchou, M.N. and Troclet, B., Modeling of random aerodynamic loads applied on fluid-structure coupled systems using rain-on-the-roof equivalent excitation, Engineering Computations, Vol.28, Issue 4(2011), pp.472-491.