

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

非圧縮Navier-Stokes方程式に対する差分近似の標準形

岸 恭子, 高橋 匡康

2006年3月

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

正誤表 (JAXA-RR-05-032)

修正箇所	3ページ右段 4～6行目
誤	$\Delta_h \phi_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta x^2}$ $+ \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}$ $+ \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z^2} - \frac{\phi_{i,j,k-1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z^2}$
正	$\Delta_h \phi_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}$ $+ \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}$ $+ \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}$

非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する差分近似の標準形

岸 恭子*

高橋 匡康*

On the standard form of finite difference approximation for incompressible Navier-Stokes equations

by

Kyoko KISHI* Tadayasu TAKAHASHI*

ABSTRACT

The purpose of this paper is to formulate the consistency criteria for finite difference approximations for partial differential operators and to determine the standard form of finite difference approximation for incompressible Navier-Stokes equations. If the standard difference approximation is employed as the discrete Laplace operator, then difference approximations for divergence operator div_h and gradient operator grad_h , which are consistent with well-known properties of partial differential operators, are necessarily given by one-sided differencing. It is shown that the standard form of difference approximation for Navier-Stokes equations is reduced to finite differencing of nonlinear terms.

概 要

本稿の目的は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系に対する差分近似の適合性の基準を定式化すること、さらにこの視点から標準的な差分近似を構成することである。Laplace 作用素 Δ に対する差分近似の標準形として、5点中心差分を採用するとき、 $\Delta_h = \text{div}_h(\text{grad}_h)$ を満足することのできる差分作用素としての発散作用素 div_h 、及び勾配作用素 grad_h は、それぞれ逆向きの片側差分によって与えられる。これらの結果に基づき、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系に適合する差分近似の標準形は、非線形項の空間離散化に帰着されることを示す。

* 総合技術研究本部計算科学研究グループ (Computational Science Research Group, Institute of Aerospace Technology)

1. はじめに

非圧縮性完全流体の基礎方程式として、速度場 $\mathbf{v} = (u, v, w)^t$ に対する連続の式と非圧縮 Navier-Stokes 方程式がある：

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & (1.1) \\ \mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mu \Delta \mathbf{v} - \operatorname{grad} P. & (1.2) \end{cases}$$

但しここで $(u, v, w)^t$ は縦ベクトルを表すものとする。また、 P は圧力、 $\mu > 0$ は粘性係数を表す ([1])。また、上記の方程式系から圧力を消去することによって、渦度 $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ の運動を記述する渦度方程式

$$\boldsymbol{\omega}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (1.3)$$

が得られる。

本稿は、上記方程式系に対する適切な離散近似問題を定式化することを目的としている。特に、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2) の近似解の収束に関する厳密な理論解析を行うため、基準となる差分近似法について述べる。

本稿に述べる研究の背景として、作用素論の分野における近似解の収束性に関する議論がある。線形の発展方程式の解を差分法によって近似する場合、差分近似が適合性 (consistency) と安定性 (stability) を満足しているならば、Lax の同値定理によって差分近似解が元の方程式の解へ収束 (convergence) することが保証されている。しかしながら、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2) に代表される非線形発展問題において差分近似解の収束性を示すためには、線形の場合と比較してより強い適合条件・安定条件が要求される。従って、Lax の同値定理と同じ枠組みで議論するためには、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2) に対する差分近似の適合性・安定性をどのように定義するかを議論する必要があり、このことは理論的・応用的に重要な課題である。

本稿の目的は、このような背景を考慮して方程式系(1.1)–(1.2) の陰的差分近似に対して要求される適合性の基準を定式化し、それらの適合性の基準を満足する標準的な差分近似を与えることである。

我々が求める差分近似では、等間隔格子系と不等間隔格子系のいずれを採用するかということは本質的な問題であり、実際の数値計算では不等間隔格子系が用いられることが多いが、ここでは等間隔格子系を対象に議論を進める。

また、スタガード格子では速度と圧力の定義点が異なり、各格子点上で方程式系(1.1)–(1.2) を近似的に成立させることが難しい。一方、非スタガード格子では、速度と圧力の定義点が等しいために、各格子点上で方程式系(1.1)–(1.2) を正確に近似することができる。ここでは特に理論解析の厳密さを重視して、非スタガード格子を採用する ([2], [3])。尚、一般的な数値計算法に関しては参考文献 [8]、キャビティ問題などの具体的な数値解析例に関しては、[4], [5], [6] を参照されたい。

2. 微分演算子と差分演算子

本節では、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2) に現れる div , Δ , grad , rot 等の微分演算子に対する適切な差分演算子 div_h , Δ_h , grad_h , rot_h について論じる。

まず初めに、3次元実空間 \mathbb{R}^3 上の直交座標系における物理領域 Ω を考える。簡単のため $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ とし、 Ω を近似する計算領域 Ω_h を構成する。 x 方向の格子間隔を Δx , y 方向の格子間隔を Δy , z 方向の格子間隔を Δz とする等間隔格子を考え、内部格子点の集合を

$$\Omega_h^0 = \{(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) : 1 \leq i, j, k \leq N-1\},$$

境界格子点の集合を

$$\Gamma_h = \{(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) : i, j, k = 0 \text{ or } N\},$$

境界の外側に設けた仮想格子点の集合を

$$\Gamma_h^* = \{(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) : i, j, k = -1 \text{ or } N+1\},$$

と定めると、計算領域 Ω_h は $\Omega_h = \Omega_h^0 \cup \Gamma_h \cup \Gamma_h^*$ で与えられる。但し i, j, k はそれぞれ x 方向、 y 方向、 z 方向の格子番号とする。

2.1. ベクトル場と微分演算子

以下では、微分演算子に対する議論を厳密に行うために、 \mathbb{R}^3 における任意のベクトル $\mathbf{v} = (u, v, w)^t$ 及び任意のスカラー量 ϕ を対象とし、これに対して定められるベクトル場の基本的な性質について述べる。

任意の微分可能なベクトル量 $\mathbf{v} = (u, v, w)^t$ に対して、 \mathbf{v} の回転を

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

で表す. また \mathbf{v} の発散を

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = u_x + v_y + w_z$$

で表す.

次に, 任意の微分可能なスカラー量 ϕ に対して, ϕ の勾配を

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

で表す. また ϕ に対する Laplace 作用素を

$$\Delta \phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

で表す.

これらの微分演算子については, 以下の演算に関する基本的性質が知られている:

$$\Delta = \operatorname{div}(\operatorname{grad}) \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}) = 0 \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}) = 0. \quad (2.3)$$

また, 通常関数空間 \mathcal{L}^2 に属する任意のベクトル $\mathbf{v} = (u, v, w)^t$ に対する重要な事実として, スカラーポテンシャル ϕ 及びベクトルポテンシャル Ψ を用いた次のような分解定理が知られている (Helmholtz の定理):

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \Psi. \quad (2.4)$$

この定理は, 任意のベクトルが渦なしベクトル, すなわち $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ を満たすベクトルと, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ を満足する湧き出しなしベクトルとの和で表せることを示している.

2.2. 離散ベクトル場と差分演算子

任意のベクトル $\mathbf{v} = (u, v, w)^t$ 及びスカラー量 ϕ に対する 1 階の微分演算子 div , grad , rot , 及び 2 階の微分演算子 Δ に対して, これらを近似する差分演算子をそれぞれ div_h , grad_h , rot_h , 及び Δ_h で表すものとする. 本節では, 作用素論の知見に基づき差分 Laplace 作用素 Δ_h を標準的 7 点中心差分で近似することを前提とし, 最小のステンシルで (2.1) ~ (2.3) 式に適合する差分演算子 div_h , grad_h , rot_h を定める.

等間隔格子に定められた計算領域 $\Omega_h \subset \mathbb{R}^3$ の空間位置 $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ における任意の離散的ベクトル

を $\mathbf{v}_{i,j,k} = (u_{i,j,k}, v_{i,j,k}, w_{i,j,k})^t$, 離散のスカラー量を $\phi_{i,j,k}$ とする.

差分 Laplace 作用素 Δ_h として標準的 7 点中心差分

$$\begin{aligned} \Delta_h \phi_{i,j} &= \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta x^2} \\ &+ \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} \\ &+ \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \end{aligned}$$

を採用する.

発散作用素 div を前進差分:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^+ \mathbf{v}_{i,j,k} &= \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\Delta x} \\ &+ \frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}}{\Delta y} \\ &+ \frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{\Delta z} \end{aligned}$$

により近似する. また, 勾配作用素 grad を後退差分:

$$\operatorname{grad}^- \phi_{i,j,k} = \begin{pmatrix} \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{\Delta x} \\ \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta y} \\ \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j,k-1}}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

によって近似する. 回転作用素 rot を前進差分:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}^+ \mathbf{v}_{i,j,k} &= \begin{pmatrix} \frac{w_{i,j+1,k} - w_{i,j,k}}{\Delta y} - \frac{v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k}}{\Delta z} \\ \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{\Delta z} - \frac{w_{i+1,j,k} - w_{i,j,k}}{\Delta x} \\ \frac{v_{i+1,j,k} - v_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k}}{\Delta y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

によって近似する.

このとき, Δ_h , div^+ 及び grad^- は (2.1) 式に述べた微分演算子の性質に適合する.

Theorem 2.1. \mathbb{R}^3 における任意の離散のスカラー量 $\phi_{i,j,k}$ に対して, 次が成立する:

$$\Delta_h \phi_{i,j,k} = \operatorname{div}^+(\operatorname{grad}^- \phi_{i,j,k}).$$

Proof.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^+(\operatorname{grad}^-\phi_{i,j,k}) &= \left(\frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta y^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{\Delta z^2} - \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) \end{aligned}$$

であるから, $\Delta_h = \operatorname{div}^+(\operatorname{grad}^-\phi_{i,j,k})$ は 7 点中心差分に等しい. \square

作用素論における基本的な知識として, Laplace 作用素 Δ は自己随伴性, 及び消散性を持つ. 特に, 離散的 Laplace 作用素 Δ_h を 7 点中心差分によって定めると, Δ_h は連続モデルにおける Laplace 作用素 Δ の持つこれらの性質に適合することが知られている. このことから, 本稿では Laplace 作用素 Δ に対する標準的差分近似として上記の 7 点中心差分を採用する. さらに Theorem 2.1 は, (2.1) 式への適合性を考慮すると $\operatorname{div}_h, \operatorname{grad}_h$ はそれぞれ逆向き of 片側差分によって定式化されることを述べている. 従って, 我々は $\operatorname{div}^+, \operatorname{grad}^-$ を微分演算子 $\operatorname{div}, \operatorname{grad}$ に対する標準的差分近似として採用する.

Remark. Theorem 2.1 は, \mathbb{R}^2 においても同様に成立する. 一方, div 及び grad に対して通常用いられている中心差分を採用した場合, 差分 Laplace 作用素 Δ_h のステンシルは \mathbb{R}^2 における標準的 5 点差分とはならない. このことを示すために, div_h 及び grad_h を以下の中心差分によって定める:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^0 \mathbf{v}_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}, \\ \operatorname{grad}^0 \phi &= \begin{pmatrix} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これらの差分演算子によって $\Delta_h = \operatorname{div}^0(\operatorname{grad}^0)$ を定めると,

$$\begin{aligned} \Delta_h \phi_{i,j} &= \operatorname{div}^0(\operatorname{grad}^0 \phi_{i,j}) \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+2,j} - \phi_{i,j}}{2\Delta x} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-2,j}}{2\Delta x} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{\phi_{i,j+2} - \phi_{i,j}}{2\Delta y} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-2}}{2\Delta y} \right) \end{aligned}$$

となり, このステンシルは以下の図 1 に模式されるように, \mathbb{R}^2 における標準的な 5 点中心差分 Δ_h に整合しない. 従って, この意味で $\operatorname{div}, \operatorname{grad}$ に対して中心差分を用いた差分近似は, (2.1) 式に対する適合性を持たないことがわかる.

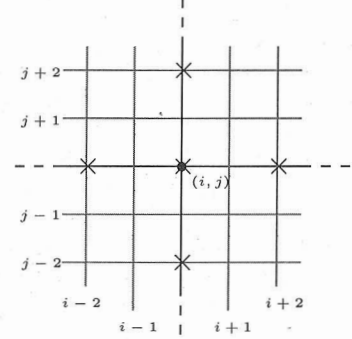


図 1: $\operatorname{div}^0, \operatorname{grad}^0$ によって定まる Δ_h のステンシル

次に, 微分演算子の基本的性質 (2.2) に対応する次の Theorem を示す.

Theorem 2.2. 任意の離散的ベクトル $\mathbf{v}_{i,j,k}$ に対し,

$$\operatorname{div}^+(\operatorname{rot}^+ \mathbf{v}_{i,j,k}) = 0$$

が成立する.

Proof. 連続モデルにおける発散及び回転の定義より

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) &= (w_y - v_z)_x + (u_z - w_x)_y + (v_x - u_y)_z \\ &= \{(w_y)_x - (w_x)_y\} + \{(v_z)_x - (v_x)_z\} \\ &\quad + \{(u_z)_y - (u_y)_z\} \end{aligned}$$

であるから, 離散モデルにおいて

$$(w_y)_x = (w_x)_y, \quad (v_z)_x = (v_x)_z, \quad (u_z)_y = (u_y)_z$$

に対応する差分式が成立していることを示せばよい. まず初めに, $(w_y)_x, (w_x)_y$ における 1 階の偏微分をそれぞれ前進差分によって近似し, これらが等しくなることを示す. $(w_y)_x$ に対する差分近似式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{w_{i+1,j+1,k} - w_{i+1,j,k}}{\Delta y} - \frac{w_{i,j+1,k} - w_{i,j,k}}{\Delta y} \right) \\ = \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{w_{i+1,j+1,k} - w_{i,j+1,k}}{\Delta x} - \frac{w_{i+1,j,k} - w_{i,j,k}}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

となり, これは $(w_x)_y$ に対する差分近似と等しい. よって離散的に $(w_y)_x = (w_x)_y$ が成立していることがわかる.

同様にして, 離散的に $(v_z)_x = (v_x)_z, (u_z)_y = (u_y)_z$ が成立していることを示すことができる. 従って, 任意のベクトル $\mathbf{v}_{i,j,k}$ に対して $\operatorname{div}^+(\operatorname{rot}^+ \mathbf{v}_{i,j,k}) = 0$ が成り立つことが証明される. \square

また, grad^- , 及び rot^+ を用いて, 任意の離散的ベクトル $\mathbf{v}_{i,j,k}$ を

$$\mathbf{v}_{i,j,k} = \text{grad}^- \phi_{i,j,k} + \text{rot}^+ \Psi_{i,j,k} \quad (2.5)$$

と表すと, Theorem 2.1 及び Theorem 2.2 から, この差分演算子による分解は Helmholtz 分解(2.4) に適合することがわかる.

2.3. 離散的渦度ベクトル

流体の運動方程式の1つである渦度方程式 (1.3) は, 速度ベクトル \mathbf{v} の回転として定められる渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ を用いて記述される. 本節では, 前節で述べた離散的 Helmholtz 分解(2.5) に基づき, 離散的渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_{i,j,k}$ を定めるための差分演算子 rot_h について述べる.

\mathbb{R}^3 における速度場を $\mathbf{v} = (u, v, w)^t$ とし, Helmholtz の定理により

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi + \text{rot } \Psi$$

と表すと, $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ で定められる渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ とベクトルポテンシャル Ψ の間には, 方程式

$$\Delta \Psi - \text{grad}(\text{div } \Psi) = -\boldsymbol{\omega} \quad (2.6)$$

が成立する. このことは,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \text{rot } \mathbf{v} \\ &= \text{rot}(\text{grad } \phi) + \text{rot}(\text{rot } \Psi) \\ &= -\Delta \Psi + \text{grad}(\text{div } \Psi) \end{aligned}$$

となることから示すことができる. 但しここでは微分演算子 rot , grad に関する基本的性質 (2.3) 及び

$$\text{rot}(\text{rot } \Psi) = -\Delta \Psi + \text{grad}(\text{div } \Psi) \quad (2.7)$$

が成立することを用いている.

渦度ベクトルとベクトルポテンシャルの関係式 (2.6) に適合する差分近似を与えるためには, 離散的な速度ベクトルに対する回転 rot を近似する差分演算子を適切に定める必要がある. このとき (2.6) に対応する次の Theorem を示すことができる.

Theorem 2.3. 離散的な速度ベクトル $\mathbf{v}_{i,j,k}$ に対する Helmholtz 分解を

$$\mathbf{v}_{i,j,k} = \text{grad}^- \phi_{i,j,k} + \text{rot}^+ \Psi_{i,j,k}$$

で定める. さらに, 離散的な渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_{i,j,k}$ を

$$\boldsymbol{\omega}_{i,j,k} = \text{rot}^- \mathbf{v}_{i,j,k}$$

で定義する. このとき, $\mathbf{v}_{i,j,k}$ に対するベクトルポテンシャル $\Psi_{i,j,k}$ と渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_{i,j,k}$ の間に, 次の等式が成立する:

$$\Delta_h \Psi_{i,j,k} + \text{grad}^+(\text{div}^- \Psi) = -\boldsymbol{\omega}_{i,j,k}.$$

この Theorem に対する証明を与えるための準備として, まず (2.3) 式に対応する次の Lemma を示す.

Lemma 2.4. 回転を表す偏微分演算子 rot に対し, 後退差分によって近似した差分演算子 rot^- を

$$\begin{aligned} \text{rot}^- \mathbf{v}_{i,j,k} &= \begin{pmatrix} \frac{w_{i,j,k} - w_{i,j-1,k}}{\Delta y} - \frac{v_{i,j,k} - v_{i,j,k-1}}{\Delta z} \\ \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{\Delta z} - \frac{w_{i,j,k} - w_{i-1,j,k}}{\Delta x} \\ \frac{v_{i,j,k} - v_{i-1,j,k}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{\Delta y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で定める. このとき, 任意の離散的スカラー量 $\phi_{i,j,k}$ に対して

$$\text{rot}^-(\text{grad}^- \phi_{i,j,k}) = 0$$

が成立する.

Proof. rot , grad の定義により

$$\text{rot}(\text{grad } \phi) = \begin{pmatrix} (\phi_z)_y - (\phi_y)_z \\ (\phi_x)_z - (\phi_z)_x \\ (\phi_y)_x - (\phi_x)_y \end{pmatrix}$$

であるから, このベクトルの各成分を後退差分により近似して得られる離散的なベクトルが $(0,0,0)^t$ に等しいことを示せばよい. まず初めに, 上式右辺の第1成分: $(\phi_z)_y - (\phi_y)_z$ の第1項 $(\phi_z)_y$ を後退差分を用いて近似すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j,k-1}}{\Delta z} - \frac{\phi_{i,j-1,k} - \phi_{i,j-1,k-1}}{\Delta z} \right) \\ = \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta y} - \frac{\phi_{i,j,k-1} - \phi_{i,j-1,k-1}}{\Delta y} \right) \end{aligned}$$

となり, これは第1成分の第2項 $(\phi_y)_z$ を後退差分によって近似した式に等しい. 従って, $(\phi_z)_y - (\phi_y)_z = 0$ が離散的に成立する. 第2, 3成分についても同様に示すことができ, $\text{rot}^-(\text{grad}^-) = 0$ を得る. \square

次に, (2.7) 式に対応する以下の Lemma が得られる.

Lemma 2.5. 任意の離散的ベクトル $\mathbf{v}_{i,j,k}$ に対して

$$\begin{aligned} \text{rot}^- (\text{rot}^+ \mathbf{v}_{i,j,k}) \\ = \text{grad}^+ (\text{div}^- \mathbf{v}_{i,j,k}) - \Delta_h \mathbf{v}_{i,j,k} \end{aligned}$$

が成立する.

Proof. まず, $\text{rot} (\text{rot} \mathbf{v}) + \Delta \mathbf{v}$ の第 1 成分は

$$\begin{aligned} (v_x - u_y)_y - (u_z - w_x)_z + \Delta u \\ = \{(v_x)_y + (w_x)_z\} + \{\Delta u - (u_y)_y - (u_z)_z\} \end{aligned}$$

となるから, $\text{rot}^- (\text{rot}^+ \mathbf{v}_{i,j,k})$ の演算の順序に注意し前進または後退差分を適切に用いて上式の各偏微分を近似する. このとき, $\{\Delta u - (u_y)_y - (u_z)_z\}$ 部分に対する差分は

$$\begin{aligned} \Delta_h u - \left(\frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k}}{\Delta y^2} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} \right) \\ - \left(\frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{\Delta z^2} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) \\ = \left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \right) \end{aligned}$$

となる. 次に $\{(v_x)_y + (w_x)_z\}$ に対する差分は, x による偏微分を前進差分, y 及び z による偏微分を後退差分で近似し

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{v_{i+1,j,k} - v_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{v_{i+1,j-1,k} - v_{i,j-1,k}}{\Delta x} \right) \\ + \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{w_{i+1,j,k} - w_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{w_{i+1,j,k-1} - w_{i,j,k-1}}{\Delta x} \right) \\ = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{v_{i+1,j,k} - v_{i+1,j-1,k}}{\Delta y} - \frac{v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}}{\Delta y} \right) \\ + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{w_{i+1,j,k} - w_{i+1,j,k-1}}{\Delta z} - \frac{w_{i,j,k} - w_{i,j,k-1}}{\Delta z} \right) \end{aligned}$$

となる. 従って, $\text{rot} (\text{rot} \mathbf{v}) + \Delta \mathbf{v}$ の第 1 成分は, 上の 2 式の和をとれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{\Delta x} \right) \\ + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{v_{i+1,j,k} - v_{i+1,j-1,k}}{\Delta y} - \frac{v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}}{\Delta y} \right) \\ + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{w_{i+1,j,k} - w_{i+1,j,k-1}}{\Delta z} - \frac{w_{i,j,k} - w_{i,j,k-1}}{\Delta z} \right) \\ = \frac{1}{\Delta x} (\text{div}^- \mathbf{v}_{i+1,j,k} - \text{div}^- \mathbf{v}_{i,j,k}) \end{aligned}$$

となることがわかる.

同様の方法で第 2, 3 成分について計算すれば

$$\begin{aligned} \text{rot}^- (\text{rot}^+ \mathbf{v}_{i,j,k}) + \Delta_h \mathbf{v}_{i,j,k} \\ = \begin{pmatrix} \frac{\text{div}^- \mathbf{v}_{i+1,j,k} - \text{div}^- \mathbf{v}_{i,j,k}}{\Delta x} \\ \frac{\text{div}^- \mathbf{v}_{i,j+1,k} - \text{div}^- \mathbf{v}_{i,j,k}}{\Delta y} \\ \frac{\text{div}^- \mathbf{v}_{i,j,k+1} - \text{div}^- \mathbf{v}_{i,j,k}}{\Delta z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, 従って

$$\begin{aligned} \text{rot}^- (\text{rot}^+ \mathbf{v}_{i,j,k}) + \Delta_h \mathbf{v}_{i,j,k} \\ = \text{grad}^+ (\text{div}^- \mathbf{v}_{i,j,k}) \end{aligned}$$

を得る. □

これらの Lemma を用いて, Theorem 2.3 の証明を与えることができる.

Proof of Theorem 2.3. 離散的渦度ベクトルの定義及び Helmholtz 分解 (2.5) から

$$\begin{aligned} \omega_{i,j,k} &= \text{rot}^- \mathbf{v}_{i,j,k} \\ &= \text{rot}^- (\text{grad}^- \phi_{i,j,k}) + \text{rot}^- (\text{rot}^+ \Psi_{i,j,k}) \end{aligned}$$

となる. Lemma 2.4, 及び Lemma 2.5 を用いて

$$\omega_{i,j,k} = \text{grad}^+ (\text{div}^- \Psi_{i,j,k}) - \Delta_h \Psi_{i,j,k}$$

を得る. □

Remark. $\text{div}^- \Psi_{i,j,k} = 0$ と仮定すると, 離散的 Poisson 方程式:

$$\Delta_h \Psi_{i,j,k} = -\omega_{i,j,k}$$

が成立する. ベクトルポテンシャル-渦度法 (または Ψ - ω 法ともいう) による解析では, この Poisson 方程式と渦度方程式 (1.3) とを組み合わせた方程式系を解くことが一般的である.

2 次元流体に対しては rot が定義されないため, 渦度 ω はスカラー量 $v_x - u_y$, ベクトルポテンシャル Ψ は流れ関数 ψ で定義される. このとき, Theorem 2.3 と同様にして次の Corollary を示すことができる.

Corollary 2.6. 連続の式 (1.1) に対する差分近似を $\text{div}^+ \mathbf{v} = 0$ によって定める. また, $\psi_{i,j}$ に対する Laplace 作用素 Δ_h を標準的 5 点差分:

$$\begin{aligned} \Delta_h \psi_{i,j} &= \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ &\quad + \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \end{aligned}$$

により定める. 離散的 Poisson 方程式

$$\Delta_h \psi_{i,j} = -\omega_{i,j}$$

の解を $\{\psi_{i,j}\}$ とし, 離散的速度場 $\mathbf{v}_{i,j} = (u_{i,j}, v_{i,j})$ を

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y}, \quad v_{i,j} = -\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta x}$$

で定義すると, 離散的渦度場 $\omega_{i,j}$ と離散的速度場との間に次の等式が成立する:

$$\omega_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}.$$

Proof.

$$\begin{aligned} \omega_{i,j} &= -\Delta_h \psi_{i,j} \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y} - \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \\ &= \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \end{aligned}$$

となり, 求める式が得られる. \square

本節で導入した差分演算子 $\text{div}_h, \text{grad}_h$ 及び rot_h は, 微分演算子 $\text{div}, \text{grad}, \text{rot}$ の性質を適切に近似するように定められている. まず初めに, 作用素論の立場から離散的 Laplace 作用素 Δ_h を標準 7 点中心差分によって定めた. このとき, (2.1) への適合性をもつ差分演算子

$\text{div}_h, \text{grad}_h$ は, Theorem 2.1 に示したようにそれぞれ逆向きの片側差分によって定められている必要がある. また, (2.2) に対する適合性を考慮すると, Helmholtz 分解における非回転部分を記述する偏微分演算子 rot に対する差分演算子が div_h と同様に定まることが Theorem 2.2 よりわかる. さらに, ここで定めた Helmholtz 分解に基づく考察により流体の渦度ベクトルを定義する際に用いられる回転作用素 rot の空間離散近似について, 上で定めた rot_h と逆方向の片側差分で与えられている必要があることを Theorem 2.3 で示した.

これらのことから, 差分演算子 div_h を定めれば $\text{grad}_h, \text{rot}_h$ も必然的に定まることがわかる. 従って, これらの差分演算子を各微分演算子に対する“標準的差分近似”として定め, これを用いた解析を行うことを提案する.

Remark. 本節では div_h を前進差分 div^+ で定めたが, 後退差分 div^- を用いても標準的差分近似を構成することができる. この場合, $\text{grad}_h = \text{grad}^+, \text{rot}_h = \text{rot}^-$ のように定めれば各 Theorem などの結論を満足させることができるからである. また, div^+ では div_h における x, y, z による各偏微分を全て同方向の片側差分で近似したが, 各成分毎に前進・後退を組み合わせることができる差分演算子に対しても同様の議論から (2.1), (2.2) が成立するような grad_h 及び rot_h を定めることができる.

表 2.1, 2.2 に, (2.1)~(2.3), (2.6), (2.7) 等の基本的性質に適合する差分近似の組み合わせをまとめた.

Δ_h	$\text{div}_h \mathbf{v}$			$\text{grad}_h \phi$			$\text{rot}_h \Psi$			$\omega = \text{rot}_h \mathbf{v}$		
	u_x	v_y	w_z	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	v_x, w_x	w_y, u_y	u_z, v_z	v_x, w_x	w_y, u_y	u_z, v_z
7-point central	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-
	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+
	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+
	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-
	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-
-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+

表 2.1: \mathbb{R}^3 における差分演算子 (+ は前進差分, - は後退差分を表す)

Δ_h	$\text{div}_h \mathbf{v}$		$\text{grad}_h \phi$		$\mathbf{v}_x - \mathbf{u}_y$	
	u_x	v_y	ϕ_x	ϕ_y	v_x	u_y
5-point central	+	+	-	-	-	-
	+	-	-	+	-	+
	-	+	+	-	+	-
	-	-	+	+	+	+

表 2.2: \mathbb{R}^2 における差分演算子

3. 差分近似の適合条件と標準形

前節の結果から、非圧縮 Navier-Stokes 方程式における連続の式、運動方程式の粘性項・圧力勾配についての標準的差分近似が定まる。従って、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系の空間離散化に対する適合性の議論は、残る非線形項に集約されることが判る。

本節では、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2)の近似可解性のための関数解析的視点から、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する差分近似における適合性の基準を明らかにし、前節の結果を用いてこれに応ずる差分近似を標準形として定める。

Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2)の解に対して、次の3つの関数解析的性質が成立する：

- (i) 発散作用素 div と Laplace 作用素 Δ との可換性

$$(\Delta u)_x + (\Delta v)_y = \Delta(u_x + v_y)$$

- (ii) Helmholtz 分解との適合性

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{grad} P \, dx = - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{v}) P \, dx = 0$$

- (iii) 圧力 Poisson 方程式の成立

$$\Delta P = -\text{div}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

よく知られているように、 $\mathbf{w} = \mathbf{v}_t - \mu \Delta \mathbf{v}$ とおいたとき(1.2)は $\mathbf{w} + \text{grad} P = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ と書け、連続の式(1.1)と可換性条件(i)より $\text{div} \mathbf{w} = 0$ 。また $\text{rot}(\text{grad} P) = 0$ であるから、Helmholtz 分解(ii)を適用すれば \mathbf{w} は移流項を表すベクトル $-(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ のソレノイダル部分であり、 $\text{grad} P$ は非回転部分であることになる。故に、スカラー場 P は $\text{grad} P$ のポテンシャルとなるので、 P を定めるための圧力の Poisson 方程式(iii)が導出される。ここで、(iii)にも可換性条件(i)が適用される。

さらに、次の2つの関数解析的要件が方程式系(1.1)–(1.2)に対するエネルギー法 (energy method) に関わる基準として知られている。

- (iv) \mathcal{L}^2 -エネルギー式

$$\int_{\Omega} \partial_t |\mathbf{v}|^2 + 2|\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx \equiv 0$$

(但し $\int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, dx$ は \mathbf{v} に対する \mathcal{L}^2 -ノルムを表す)

- (v) 積分量の保存則

$$\partial_t \int_{\Omega} \mathbf{v} \, dx \equiv 0.$$

非圧縮 Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2)に対する差分近似がこれらの基準に適合するように構成することは、対象とする差分近似が安定性を満足することを示唆している。とくに、基準(iv)は差分近似の安定性に関するものであり、基準(v)は差分近似が保存型であることを要求している。

しかしながら、(i)–(v)のすべての基準に適合する差分近似を構成することは、一般的には困難である。このことは、前節で述べた微分演算子の基本的性質(2.1), (2.2)等に対応する性質が、離散モデルにおいては必ずしも成立しないことが大きな要因であり、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2)の可解性に関する従来からの困難性を示唆している。

以下では、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2)に対する差分近似の標準形を定式化する。第2節の結果から、非圧縮 Navier-Stokes 方程式系(1.1)–(1.2)における微分作用素の標準形は、移流項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ を除いてほぼ全て定まることがわかった。すなわち、連続の式に対する差分近似を

$$\text{div}^+ \mathbf{v}_{i,j,z} = 0$$

とし、圧力勾配は

$$\text{grad}^- P_{i,j,z},$$

粘性項は

$$\Delta_h \mathbf{v}_{i,j,z} = \text{div}^+ (\text{grad}^-)$$

で定めるものとする. さらに本稿では、非線形作用素 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ を近似する差分作用素 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)_h$ の一例として、以下のような差分近似を紹介する ([3]).

離散的な速度ベクトル $\mathbf{v}_{i,j,z} = (u_{i,j,z}, v_{i,j,z}, w_{i,j,z})$ と任意の離散的なスカラー量 $\phi_{i,j,z}$ に対して、差分演算子 $C^{(u)}$, $C^{(v)}$ 及び $C^{(w)}$ を

$$C^{(u)}(\phi_{i,j,k}) = \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{u_{i+1,j,k} + u_{i,j,k}}{2} \phi_{i+1,j,k} - \frac{u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{2} \phi_{i-1,j,k} \right),$$

$$C^{(v)}(\phi_{i,j,k}) = \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{v_{i,j+1,k} + v_{i,j,k}}{2} \phi_{i,j+1,k} - \frac{v_{i,j,k} + v_{i,j-1,k}}{2} \phi_{i,j-1,k} \right),$$

$$C^{(w)}(\phi_{i,j,k}) = \frac{1}{2\Delta z} \left(\frac{w_{i,j,k+1} + w_{i,j,k}}{2} \phi_{i,j,k+1} - \frac{w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{2} \phi_{i,j,k-1} \right)$$

と定める. このとき、非線形作用素 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ を近似する差分作用素 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)_h$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v} \cdot \nabla)_h \mathbf{v}_{i,j,k} \\ &= \begin{pmatrix} C^{(u)}(u_{i,j,k}) + C^{(v)}(u_{i,j,k}) + C^{(w)}(u_{i,j,k}) \\ C^{(u)}(v_{i,j,k}) + C^{(v)}(v_{i,j,k}) + C^{(w)}(v_{i,j,k}) \\ C^{(u)}(w_{i,j,k}) + C^{(v)}(w_{i,j,k}) + C^{(w)}(w_{i,j,k}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

このとき、(1.1)–(1.2) に対する標準的な陰的差分近似は次のように表される:

$$\begin{cases} \text{div}^+ \mathbf{v}_{i,j,k}^{n+1} = 0 & (3.1) \\ \frac{\mathbf{v}_{i,j,k}^{n+1} - \mathbf{v}_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)_h \mathbf{v}_{i,j,k}^{n+1} = \mu \Delta_h \mathbf{v}_{i,j,k}^{n+1} - \text{grad}^- P_{i,j,k}^{n+1} & (3.2) \end{cases}$$

次節以降では、ここで定めた標準的差分近似が、本節の冒頭で述べた適合性の基準 (i)–(v) を満足していることを示す.

4. 発散作用素と Laplace 作用素の可換性

本節以降では簡単のため、主に \mathbb{R}^2 で議論を進める.

本節では、適合性の基準 (i) で述べた発散作用素 div 、及び Laplace 作用素 $\Delta = (\Delta, \Delta)$ の基本的性質

$$\Delta (\text{div}) = \text{div} (\Delta) \quad (4.1)$$

に適合する差分近似について述べる.

まず初めに、第 2 節に定めた標準的差分演算子 div_h , Δ_h が、適合条件 (i) で述べた発散作用素 div と Laplace 作用素 Δ との可換性

$$\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial (\Delta u)}{\partial x} + \frac{\partial (\Delta v)}{\partial y}$$

に適合することを示す ([7]).

Proposition 4.1 (可換性). 等間隔格子において、発散作用素 $\text{div}_h = \text{div}^+$ と Laplace 作用素 $\Delta_h = \text{div}^+ (\text{grad}^-)$ の間に、次の可換性が成立する:

$$\text{div}_h (\Delta_h \mathbf{v}_{i,j}) = \Delta_h (\text{div}_h \mathbf{v}_{i,j}).$$

Proof. 任意の離散的なスカラー量 $\phi_{i,j}$ に対して、

$$\Delta^{(x)} \phi_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\Delta^{(y)} \phi_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

と定める. このとき

$$\Delta_h u_{i,j} = \Delta^{(x)} u_{i,j} + \Delta^{(y)} u_{i,j},$$

$$\Delta_h v_{i,j} = \Delta^{(x)} v_{i,j} + \Delta^{(y)} v_{i,j}$$

が成立するから、

$$\begin{aligned} & \text{div}_h (\Delta_h \mathbf{v}_{i,j}) \\ &= \frac{\Delta_h u_{i+1,j} - \Delta_h u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\Delta_h v_{i,j+1} - \Delta_h v_{i,j}}{\Delta y} \\ &= \frac{\Delta^{(x)} u_{i+1,j} - \Delta^{(x)} u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\Delta^{(y)} u_{i+1,j} - \Delta^{(y)} u_{i,j}}{\Delta x} \\ &\quad + \frac{\Delta^{(x)} v_{i,j+1} - \Delta^{(x)} v_{i,j}}{\Delta y} + \frac{\Delta^{(y)} v_{i,j+1} - \Delta^{(y)} v_{i,j}}{\Delta y} \end{aligned}$$

と表すことができる. ここで

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta^{(x)} u_{i+1,j} - \Delta^{(x)} u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\Delta^{(x)} v_{i,j+1} - \Delta^{(x)} v_{i,j}}{\Delta y} \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{u_{i+2,j} - u_{i+1,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{\Delta y} \right) \\ &\quad - \frac{2}{\Delta x^2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j}}{\Delta y} \right) \\ &= \frac{\text{div}_h u_{i+1,j} - 2 \text{div}_h u_{i,j} + \text{div}_h u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta^{(y)} u_{i+1,j} - \Delta^{(y)} u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\Delta^{(y)} v_{i,j+1} - \Delta^{(y)} v_{i,j}}{\Delta y} \\
&= \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+2} - v_{i,j+1}}{\Delta y} \right) \\
&\quad - \frac{2}{\Delta y^2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \\
&= \frac{\operatorname{div}_h v_{i,j+1} - 2 \operatorname{div}_h v_{i,j} + \operatorname{div}_h v_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

が成立する。従って

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div}_h (\Delta_h v_{i,j}) \\
&= \frac{\operatorname{div}_h v_{i+1,j} - \operatorname{div}_h v_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{\operatorname{div}_h v_{i,j} - \operatorname{div}_h v_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\
&\quad + \frac{\operatorname{div}_h v_{i,j+1} - \operatorname{div}_h v_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{\operatorname{div}_h v_{i,j} - \operatorname{div}_h v_{i,j-1}}{\Delta y^2} \\
&= \Delta_h (\operatorname{div}_h v_{i,j})
\end{aligned}$$

を得る。 \square

Remark. Proposition 4.1 で述べた発散作用素 div_h と Laplace 作用素 Δ_h の可換性は、 Δx および Δy が各々一定値となる等間隔格子のもとでなければ成立することができない。すなわち

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} \neq 1, \quad \frac{y_j - y_{j-1}}{y_{j+1} - y_j} \neq 1$$

とすると、発散作用素 div_h と Laplace 作用素 Δ_h は可換ではない。

一般の不等間隔格子において発散作用素 div_h と Laplace 作用素 Δ_h の可換性を満足させるためには次の Proposition で述べるような粘性項に対するモデル化が必要となる。ここでは特に x 方向の格子間隔を一定としても一般性を失わないため、 y 方向にのみ不等間隔な格子を考え、 div_h と Δ_h が可換となるための条件を与える。

Proposition 4.2 (等比の場合の可換性). x 方向の格子間隔を一様に h , y 方向の格子間隔を

$$y_{j+1} - y_j = h_j \quad (j = 0, \dots, N)$$

とする。さらに $\delta < 1$ なる正の数 δ に対して $h_{j-1} = \delta h_j$ が成立していると仮定し、差分演算子 $\Delta_{h,\delta} = (\Delta_{h,\delta}, \Delta_{h,\delta})^t$ を次のように定義する：

$$\left\{ \begin{aligned}
& \Delta_{h,\delta} u_{i,j} \\
&= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h^2} \\
&\quad + \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_j} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_{j-1}} \right) \\
& \Delta_{h,\delta} v_{i,j} \\
&= \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h^2} - \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h^2} \\
&\quad + \frac{1}{\delta} \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_{j-1}} \right)
\end{aligned} \right.$$

このとき、 $\operatorname{div}_h = \operatorname{div}^+$ と $\Delta_{h,\delta} = (\Delta_{h,\delta}, \Delta_{h,\delta})^t$ は次の意味で可換である：

$$\operatorname{div}_h (\Delta_{h,\delta} v_{i,j}) = \Delta_h (\operatorname{div}_h v_{i,j}).$$

Proof. Proposition 4.1 の証明と同様に、任意の離散的スカラー量 $\phi_{i,j}$ に対して

$$\Delta^{(x)} \phi_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{h^2} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(y)} \phi_{i,j} &= \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{h_j} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{h_{j-1}} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(y,\delta)} \phi_{i,j} &= \frac{1}{\delta} \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{h_j} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{h_{j-1}} \right)
\end{aligned}$$

と定めれば、

$$\left\{ \begin{aligned}
& \Delta_{h,\delta} u_{i,j} = \Delta^{(x)} u_{i,j} + \Delta^{(y)} u_{i,j} \\
& \Delta_{h,\delta} v_{i,j} = \Delta^{(x)} v_{i,j} + \Delta^{(y,\delta)} v_{i,j}
\end{aligned} \right.$$

が成立する。このことを用いると、

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div}_h (\Delta_{h,\delta} v_{i,j}) \\
&= \frac{\Delta_{h,\delta} u_{i+1,j} - \Delta_{h,\delta} u_{i,j}}{h} + \frac{\Delta_{h,\delta} v_{i,j+1} - \Delta_{h,\delta} v_{i,j}}{h_j} \\
&= \frac{\Delta^{(x)} u_{i+1,j} + \Delta^{(y)} u_{i+1,j}}{h} - \frac{\Delta^{(x)} u_{i,j} + \Delta^{(y)} u_{i,j}}{h} \\
&\quad + \frac{\Delta^{(x)} v_{i,j+1} + \Delta^{(y,\delta)} v_{i,j+1}}{h_j} - \frac{\Delta^{(x)} v_{i,j} + \Delta^{(y,\delta)} v_{i,j}}{h_j} \\
&= \frac{\Delta^{(x)} u_{i+1,j} - \Delta^{(x)} u_{i,j}}{h} + \frac{\Delta^{(x)} v_{i,j+1} - \Delta^{(x)} v_{i,j}}{h_j} \\
&\quad + \frac{\Delta^{(y)} u_{i+1,j} - \Delta^{(y)} u_{i,j}}{h} + \frac{\Delta^{(y,\delta)} v_{i,j+1} - \Delta^{(y,\delta)} v_{i,j}}{h_j}
\end{aligned}$$

となる. 以下, 上の差分式が $\Delta_h(\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j})$ に等しいことを示す. まず, $\Delta^{(x)}$ と div_h の定義から

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta^{(x)}u_{i+1,j} - \Delta^{(x)}u_{i,j}}{h} + \frac{\Delta^{(x)}v_{i,j+1} - \Delta^{(x)}v_{i,j}}{h_j} \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{u_{i+2,j} - u_{i+1,j}}{h} + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{h_j} \right) \\ & \quad - \frac{2}{h^2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} \right) \\ & \quad + \frac{1}{h^2} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + \frac{v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j}}{h_j} \right) \\ &= \frac{\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i+1,j} - \operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j}}{h^2} - \frac{\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j} - \operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i-1,j}}{h^2} \end{aligned}$$

を得る. 次に, δ に対する仮定から

$$\frac{2}{h_{j+1} + h_j} = \frac{2\delta}{h_j + h_{j-1}}, \quad \delta h_j = h_{j-1}$$

が成立していることを考慮すると,

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta^{(y,\delta)}v_{i,j+1} - \Delta^{(y,\delta)}v_{i,j}}{h_j} \\ &= \frac{1}{h_j} \frac{1}{\delta} \frac{2}{h_{j+1} + h_j} \left(\frac{v_{i,j+2} - v_{i,j+1}}{h_{j+1}} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} \right) \\ & \quad - \frac{1}{h_j} \frac{1}{\delta} \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_{j-1}} \right) \\ &= \frac{1}{h_j} \frac{1}{\delta} \frac{2\delta}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{v_{i,j+2} - v_{i,j+1}}{h_{j+1}} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} \right) \\ & \quad - \frac{1}{h_{j-1}} \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_{j-1}} \right) \\ &= \frac{1}{h_j} \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{v_{i,j+2} - v_{i,j+1}}{h_{j+1}} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} \right) \\ & \quad - \frac{1}{h_{j-1}} \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_{j-1}} \right) \end{aligned}$$

となる. 従って

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta^{(y)}u_{i+1,j} - \Delta^{(y)}u_{i,j}}{h} + \frac{\Delta^{(y,\delta)}v_{i,j+1} - \Delta^{(y,\delta)}v_{i,j}}{h_j} \\ &= \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left\{ \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h} + \frac{v_{i,j+2} - v_{i,j+1}}{h_{j+1}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} \right) \right\} \frac{1}{h_j} \\ & \quad - \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left\{ \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_j} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{h} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_{j-1}} \right) \right\} \frac{1}{h_{j-1}} \\ &= \frac{2}{h_j + h_{j-1}} \left(\frac{\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j+1} - \operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j}}{h_j} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j} - \operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j-1}}{h_{j-1}} \right) \end{aligned}$$

を得る. 以上により

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_h(\Delta_{h,\delta} \mathbf{v}_{i,j}) \\ &= \Delta^{(x)}(\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j}) + \Delta^{(y)}(\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j}) \\ &= \Delta_h(\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{i,j}) \end{aligned}$$

となり, 示すべき等式が得られた. \square

本節で述べた Proposition 4.1 ~ 4.2 は, 工学的応用計算において重要視されている格子依存性の側面を述べている.

5. Helmholtz 分解と圧力 Poisson 方程式

本節では, 第 3 節で述べた適合性の基準 (ii) Helmholtz 分解及び (iii) 圧力 Poisson 方程式の成立について述べ, さらに標準的差分近似 (3.1)-(3.2) がこれらの性質を満足することを示す.

5.1. Helmholtz 分解への適合性

$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ を満足する速度ベクトル $\mathbf{v} \in \mathcal{L}^2$ 及び圧力 P に対して, 境界 $\Gamma = \partial\Omega$ 上で $\mathbf{v} \equiv 0$ を仮定すると, Helmholtz の定理から $(\mathbf{v}, \operatorname{grad} P)_{\mathcal{L}^2} = 0$ が成立する. (但し $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{L}^2}$ は \mathcal{L}^2 -内積を表すものとする)

計算領域 Ω_h 上の離散的 \mathcal{L}^2 -内積を $(\cdot, \cdot)_h$ で定める. このとき, 第 2 節で定めた差分近似の標準形 div^+ 及び grad^- を用いた離散近似が, 第 3 節で述べた基準 (ii) に適合することを示す.

Proposition 5.1. $\operatorname{div}^+ \mathbf{v}_{i,j} = 0$ を満足する離散的な速度ベクトル及び離散的な圧力 $P_{i,j}$ に対して, 境界格子点 Γ_h 及び仮想境界格子点 Γ_h^* 上 $\mathbf{v}_{i,j} = 0$ を仮定すると

$$(\mathbf{v}_{i,j}, \operatorname{grad}^- P_{i,j})_h = 0$$

が成立する.

Proof. $(\mathbf{v}_{i,j}, \operatorname{grad}^- P_{i,j})_h$ を表す数値積分は

$$\sum_{i,j=0}^N (\mathbf{v}_{i,j} \cdot \operatorname{grad}^- P_{i,j}) \Delta x \Delta y$$

で得られる. これが 0 に等しいことを示すためには, 次の等式が成立することを示せばよい:

$$\sum_{i,j} \Delta x \Delta y \{ \mathbf{v}_{i,j} \cdot \operatorname{grad}^- P_{i,j} + (\operatorname{div}^+ \mathbf{v}_{i,j}) P_{i,j} \} = 0.$$

上記の離散方程式左辺は、各項のキャンセルングにより

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^N \Delta x \Delta y \left(u_{i,j} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \\ & + \sum_{i,j=0}^N \Delta x \Delta y P_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right) \\ & = \sum_{i,j=0}^N \{ \Delta y (u_{i+1,j} P_{i,j} - u_{i,j} P_{i-1,j}) \\ & \quad + \Delta x (v_{i,j+1} P_{i,j} - v_{i,j} P_{i,j-1}) \} \\ & = \Delta y \sum_{j=0}^N (u_{N+1,j} P_{N,j} - u_{0,j} P_{0,j}) \\ & \quad + \Delta x \sum_{i=0}^N (v_{i,N+1} P_{i,N} - v_{i,0} P_{i,0}) \end{aligned}$$

となる。\$\Gamma_h \cup \Gamma_h^*\$ 上 \$\mathbf{v}_{i,j} = 0\$ を仮定しているため、上式の値は 0 となり、

$$\sum_{i,j} \mathbf{v}_{i,j} \cdot \text{grad}^- P_{i,j} = - \sum_{i,j} (\text{div}^+ \mathbf{v}_{i,j}) P_{i,j}$$

が成立する。任意の \$i, j\$ に対して \$\text{div}^+ \mathbf{v}_{i,j} = 0\$ であるから \$(\mathbf{v}_{i,j}, \text{grad}^- P_{i,j})_h = \sum_{i,j} \mathbf{v}_{i,j} \cdot \text{grad}^- P_{i,j} = 0\$ を得る。□

5.2. 離散的圧力 Poisson 方程式の成立

Navier-Stokes の運動方程式 (1.2) に発散を作用させ、さらに連続の式 (1.1) を用いると次の圧力 Poisson 方程式が得られる：

$$\begin{aligned} \Delta P &= \text{div}(\text{grad} P) \\ &= \mu \text{div}(\Delta \mathbf{v}) - \text{div}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{v}_t \\ &= -\text{div}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

標準的な差分近似(3.1)-(3.2) に応ずる離散的圧力 Poisson 方程式は次の命題で与えられる：

Proposition 5.2. 任意の時間ステップ数 \$n\$ に対して、標準的差分 Laplace 作用素 \$\Delta_h, \text{div}_h = \text{div}^+\$, 及び \$(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)_h\$ による次の離散的圧力 Poisson 方程式が得られる。

$$\Delta_h P_{i,j}^{n+1} = -\text{div}^+((\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)_h \mathbf{v}_{i,j}^{n+1}).$$

Proof. \$\mathbf{v}^n = \mathbf{v}_{i,j}^n, P^n = P_{i,j}^n\$ とする。(3.2) に対して発散作用素 \$\text{div}^+\$ を作用させると、次が得られる：

$$\begin{aligned} & \frac{\text{div}^+ \mathbf{v}^{n+1} - \text{div}^+ \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \text{div}^+((\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)_h \mathbf{v}^{n+1}) \\ & = \mu \text{div}^+(\Delta_h \mathbf{v}^{n+1}) - \text{div}^+(\text{grad}^- P^{n+1}). \end{aligned}$$

Theorem 2.1 より \$\text{div}^+(\text{grad}^-) = \Delta_h\$, また Theorem 4.1 より \$\text{div}^+(\Delta_h) = \Delta_h(\text{div}^+)\$ であるから

$$\begin{aligned} & \Delta_h P^{n+1} \\ & = \mu \Delta_h(\text{div}^+ \mathbf{v}^{n+1}) - \text{div}^+((\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)_h \mathbf{v}^{n+1}) \\ & \quad - \frac{\text{div}^+ \mathbf{v}^{n+1} - \text{div}^+ \mathbf{v}^n}{\Delta t} \end{aligned}$$

を得る。任意の時間ステップ \$n\$ において \$\text{div}^+ \mathbf{v}^n = 0\$ が成立しているとするれば

$$\Delta_h P^{n+1} = -\text{div}^+((\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)_h \mathbf{v}^{n+1})$$

を得る。□

Remark. 数値解析においては一般に任意の時間ステップ数 \$n\$ に対して離散的な連続の式 (3.1) が必ずしも成立しない。従って、時間微分項に対する発散 \$\text{div}^+ \mathbf{v}^{n+1}\$ 及び粘性項に対する発散 \$\text{div}^+(\Delta_h \mathbf{v}^{n+1})\$ の値が残り、Proposition 5.2 で示した圧力 Poisson 方程式のソース項 \$-\text{div}^+((\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)_h \mathbf{v}^{n+1})\$ と必ずしも一致しないため、適合条件 (iii) は満足されない。また、空間離散化に不等間隔格子を用いた場合には、(3.1) が成立していても第 4 節 Proposition 4.2 より \$\text{div}^+(\Delta_h \mathbf{v}^{n+1}) \neq 0\$ となり、やはりソース項を \$-\text{div}^+((\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)_h \mathbf{v}^{n+1})\$ で近似することはできない。いずれにしても、近似可解性に関するより厳密な解析が必要である。

6. \$\mathcal{L}^2\$-エネルギー不等式への適合性

非圧縮性流体に対する \$\mathcal{L}^2\$-エネルギー等式は、\$\Gamma\$ 上 \$\mathbf{v} = 0\$ と仮定し、時刻 \$t = 0\$ における速度ベクトルを \$\mathbf{v}_0\$ とすると、次のような式で表すことができる：

$$\|\mathbf{v}\|^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}\|^2 dt = \|\mathbf{v}_0\|^2$$

但し \$\|\cdot\|\$ は \$\mathcal{L}^2\$-ノルムを表し、\$\nabla \mathbf{v}\$ は \$\mathbf{v}\$ の各成分に対する一階微分の総和を表すものとする。

このことを示すために、Navier-Stokes の運動方程式 (1.2) に対し、\$\mathbf{v}\$ との \$\mathcal{L}^2\$-内積をとる。時間微分項については

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_t, \mathbf{v})_{\mathcal{L}^2} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\mathbf{v}|^2)_t dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\|\mathbf{v}\|^2) \end{aligned}$$

が成立する。また、部分積分により \$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v})_{\mathcal{L}^2} = -((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v})_{\mathcal{L}^2}\$ が成立していることがわかるから

$$((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v})_{\mathcal{L}^2} = 0$$

を得る. 粘性項については部分積分から

$$(\Delta v, v)_{\mathcal{L}^2} = -\|\nabla v\|^2$$

となる. 最後に, 5.1 節で述べた Helmholtz 分解により

$$(\text{grad } P, v)_{\mathcal{L}^2} = 0$$

が成立することがわかる. 従って,

$$(\|v\|^2)_t = -2\mu\|\nabla v\|^2$$

となり, この両辺を時間 t について積分することによって, \mathcal{L}^2 -エネルギー等式

$$\|v\|^2 = -2\mu \int_0^t \|\nabla v\|^2 dt + \|v_0\|^2$$

を得る. この等式は, 方程式系 (1.1)-(1.2) の解に対する \mathcal{L}^2 -ノルムの有界性を示すものであり, 解の安定性とも関連する基本的な結果である.

本節では, 標準的な差分近似 (3.1)-(3.2) に対して, 上記の \mathcal{L}^2 -エネルギー等式に対応する不等式を導く.

Proposition 6.1. 離散的 \mathcal{L}^2 -内積を $(\cdot, \cdot)_h$ で, また離散的 \mathcal{L}^2 -ノルムを $\|\cdot\|_h$ で定める. このとき, 任意の時間ステップ数 n に対して不等式

$$\frac{(\|v^{n+1}\|_h)^2 - (\|v^n\|_h)^2}{\Delta t} + 2\mu(\|\nabla v^{n+1}\|_h)^2 \leq 0$$

が成立する. また, 上記不等式を離散的時間 Δt に関する数値積分を行うと

$$(\|v^n\|_h)^2 + 2\mu \sum_{\ell=0}^n (\|\nabla v^\ell\|_h)^2 \Delta t \leq (\|v_0\|_h)^2$$

が成立する.

Proof. 離散的 \mathcal{L}^2 -内積は, 数値積分を用いることにより

$$(\mathbf{u}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j})_h = \sum_{i,j} (\mathbf{u}_{i,j} \cdot \mathbf{v}_{i,j}) \Delta x \Delta y$$

で与えられる.

任意の時間ステップ n に対して $\text{div}^+ v^n = 0$ を満足し, 境界 Γ で値 0 をとる離散的ベクトル $v^n = (v_{i,j})^n = (u^n, v^n)^t$ に対して, 時間離散項と v^{n+1} との離散的 \mathcal{L}^2 -内積は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t}, v^{n+1} \right)_h \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} u^{n+1} + \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} v^{n+1} \right) \Delta x \Delta y \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left((\|v^{n+1}\|_h)^2 - \sum_{i,j} (v^{n+1} \cdot v^n) \Delta x \Delta y \right) \end{aligned}$$

となる. このとき, Cauchy-Schwarz の公式及び相加平均・相乗平均の不等式を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (v^{n+1} \cdot v^n) \Delta x \Delta y &\leq \{(\|v^{n+1}\|_h)^2\}^{\frac{1}{2}} \{(\|v^n\|_h)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{(\|v^{n+1}\|_h)^2 + (\|v^n\|_h)^2}{2} \end{aligned}$$

が成立する. 従って

$$\frac{1}{2} \frac{(\|v^{n+1}\|_h)^2 - (\|v^n\|_h)^2}{\Delta t} \leq \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t}, v^{n+1} \right)_h$$

を得る.

次に, $\text{div}^+ v_{i,j} = 0$ を満足し, 境界 $\Gamma_h \cup \Gamma_h^*$ で値 0 をとる離散的ベクトル $v_{i,j}$ に対して

$$((v \cdot \nabla)_h v_{i,j}, v_{i,j})_h = 0$$

を示す. 第 3.2 節で導入した差分スキーム

$$(v \cdot \nabla)_h = \begin{pmatrix} C^{(u)}(u_{i,j}) + C^{(v)}(u_{i,j}) \\ C^{(u)}(v_{i,j}) + C^{(v)}(v_{i,j}) \end{pmatrix}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} & ((v \cdot \nabla)_h v_{i,j}, v_{i,j})_h \\ &= \sum_{i,j} \left\{ u_{i,j} \left(C^{(u)}(u_{i,j}) + C^{(v)}(u_{i,j}) \right) \right. \\ & \quad \left. + v_{i,j} \left(C^{(u)}(v_{i,j}) + C^{(v)}(v_{i,j}) \right) \right\} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

と表すことができる. ここで, 境界上 $v_{i,j} = 0$ を仮定すると

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} u_{i,j} C^{(u)}(u_{i,j}) \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} u_{i+1,j} u_{i,j} \right. \\ & \quad \left. - \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} u_{i,j} u_{i-1,j} \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{u_{N+1,j} + u_{N,j}}{2} u_{N+1,j} u_{N,j} \right. \\ & \quad \left. - \frac{u_{1,j} + u_{0,j}}{2} u_{1,j} u_{0,j} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る. 同様にして

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} u_{i,j} C^{(v)}(u_{i,j}) &= 0, \\ \sum_{i,j} v_{i,j} C^{(u)}(v_{i,j}) &= 0, \\ \sum_{i,j} v_{i,j} C^{(v)}(v_{i,j}) &= 0, \end{aligned}$$

が成立することが示される. 従って,

$$((\mathbf{v} \cdot \nabla)_h \mathbf{v}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j})_h = 0$$

を得る.

離散的粘性項 $\Delta_h \mathbf{v}_{i,j}$ と $\mathbf{v}_{i,j}$ の内積は, Proposition 4.1 の証明で導入した $\Delta_{(x)} u_{i,j}$, $\Delta_{(y)} u_{i,j}$, $\Delta_{(x)} v_{i,j}$, $\Delta_{(y)} v_{i,j}$ を用いると,

$$\begin{aligned} & (\Delta_h \mathbf{v}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j})_h \\ &= \sum_{i,j} (u_{i,j} \Delta_h u_{i,j} + v_{i,j} \Delta_h v_{i,j}) \Delta x \Delta y \\ &= \Delta x \Delta y \sum_{i,j} u_{i,j} (\Delta_{(x)} u_{i,j} + \Delta_{(y)} u_{i,j}) \\ &\quad + \Delta x \Delta y \sum_{i,j} v_{i,j} (\Delta_{(x)} v_{i,j} + \Delta_{(y)} v_{i,j}) \end{aligned}$$

と表すことができる. ここで, $\Gamma_h \cup \Gamma_h^*$ 上 $u_{i,j} \equiv 0$ と仮定しているから,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} u_{i,j} (\Delta_{(x)} u_{i,j}) \\ &= \sum_{i,j} \left\{ u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - u_{i-1,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right\} \\ &\quad + \sum_{i,j} \left\{ u_{i-1,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} - u_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right\} \\ &= - \sum_{i,j} \left\{ \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right\}^2 \end{aligned}$$

となる. 同様にして,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} u_{i,j} (\Delta_{(y)} u_{i,j}) &= - \sum_{i,j} \left\{ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \right\}^2, \\ \sum_{i,j} v_{i,j} (\Delta_{(x)} v_{i,j}) &= - \sum_{i,j} \left\{ \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} \right\}^2, \\ \sum_{i,j} v_{i,j} (\Delta_{(y)} v_{i,j}) &= - \sum_{i,j} \left\{ \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} \right\}^2, \end{aligned}$$

を示すことができ, 従って ∇_h をこれらの後退差分の和で定義すると

$$(\Delta_h \mathbf{v}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j})_h = -\|\nabla_h \mathbf{v}_{i,j}\|^2$$

となる. 最後に, Proposition 5.1 により

$$(\text{grad } P_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j})_h = 0.$$

以上のことから不等式

$$\frac{(\|\mathbf{v}^{n+1}\|_h)^2 - (\|\mathbf{v}^n\|_h)^2}{\Delta t} + 2\mu(\|\nabla \mathbf{v}^{n+1}\|_h)^2 \leq 0$$

が成立する. また, この不等式に対して Δt に関する数値積分を行うことにより

$$(\|\mathbf{v}^n\|_h)^2 + 2\mu \sum_{\ell=0}^n (\|\nabla \mathbf{v}^\ell\|_h)^2 \Delta t \leq (\|\mathbf{v}_0\|_h)^2$$

を得る. \square

7. 積分量保存則

速度ベクトル \mathbf{v} に対する次の積分保存則が成立する:

$$\partial_t \int_{\Omega} \mathbf{v} \, dx \equiv 0.$$

本節では, 差分近似の標準形を用いて上の性質が成立することを示す.

Proposition 7.1. 境界格子点 Γ_h 及び仮想境界格子点 Γ_h^* 上 $\mathbf{v}_{i,j} = 0$ 及び $P_{i,j} = \text{const.}$ を仮定すると, 任意の時間ステップ数 n に対して, 以下の数値積分保存則が成立する:

$$\begin{cases} \sum_{i,j} u_{i,j}^n \Delta x \Delta y = \text{const.} \\ \sum_{i,j} v_{i,j}^n \Delta x \Delta y = \text{const.} \end{cases}$$

Proof. 標準的差分近似 (3.1)-(3.2) を用いて

$$\sum_{i,j} (u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n) \Delta x \Delta y = 0$$

が成立することを示せばよい. 離散的運動方程式 (3.2) より上式左辺は次のように表される:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} (u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n) \Delta x \Delta y \\ &= \sum_{i,j} \left\{ \mu \Delta_h u_{i,j}^{n+1} - \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. - (C^{(u)}(u_{i,j}^{n+1}) - C^{(v)}(u_{i,j}^{n+1})) \right\} \Delta t \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

まず初めに, 粘性項に対する数値積分を計算すると, $\Gamma_h \cup \Gamma_h^*$ 上 $u_{i,j} \equiv 0$ であるから

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \Delta_h u_{i,j} \Delta x \Delta y \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \\ &\quad + \sum_{i,j} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta y \\ &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \sum_j \{ (u_{N+1,j} - u_{N,j}) - (u_{1,j} - u_{0,j}) \} \\ &\quad + \frac{\Delta x}{\Delta y} \sum_i \{ (u_{i,N+1} - u_{i,N}) - (u_{i,1} - u_{i,0}) \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る. 次に, 非線形項に対する数値積分を計算する. 第3節で定めた $C^{(u)}(u_{i,j})$ に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} C^{(u)}(u_{i,j}) \Delta x \Delta y \\ &= \sum_{i,j} \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} u_{i+1,j} - \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} u_{i-1,j} \right) \\ &= \sum_j \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{u_{N+1,j} + u_{N,j}}{2} u_{N+1,j} \right. \\ & \quad \left. + \frac{u_{N,j}^2 - u_{1,j}^2}{2} - \frac{u_{1,j} + u_{0,j}}{2} u_{0,j} \right) = 0 \end{aligned}$$

が成立する. $C^{(v)}(u_{i,j})$ に対する数値積分も同様に0となる. 最後に, 境界上 $P_{i,j}$ は一定であるから

$$\sum_{i,j} \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{\Delta x} \Delta x \Delta y = \sum_j (P_{N,j} - P_{0,j}) \Delta y = 0$$

を得る. 以上により, 任意の時間ステップ数 n に対して

$$\sum_{i,j} u_{i,j}^n \Delta x \Delta y = \text{const.}$$

が示された. $v_{i,j}$ に対する数値積分についても同様に示すことができる. \square

Remark. 一方, 領域 Ω において領域外からの流入または領域外への流出のない場合, 流れ関数 ψ (\mathbb{R}^3 ならばベクトルポテンシャル) を用いることにより上の積分保存則を示すことができる. このことは,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \, dx &= \int_{\Omega} \psi_y \, dx = \int_{\Gamma} \psi \, dx, \\ \int_{\Omega} v \, dx &= - \int_{\Omega} \psi_x \, dx = \int_{\Gamma} \psi \, dy \end{aligned}$$

となり, これらの境界における積分が一定となることから示すことができる.

以下に, Proposition 2.6 で定めた離散的流れ関数の標準形を用いて, 上の性質が離散的に満足することを示す.

Proposition 7.2. 任意の時間ステップ n に対して, 離散的流れ関数 $\psi_{i,j}$ によって離散的速度場 $v_{i,j} = (u_{i,j}, v_{i,j})$ を

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h}, \quad v_{i,j} = - \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h}$$

と定義する. このとき, $u_{i,j}, v_{i,j}$ に対する数値積分は, 時間ステップ n に拠らず一定である.

Proof. $u_{i,j}$ に対する数値積分は

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} u_{i,j} \Delta x \Delta y &= \sum_{i,j} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y} \Delta x \Delta y \\ &= \sum_i \frac{\psi_{i,N+1} - \psi_{i,0}}{\Delta y} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

となり, 境界上 $\psi_{i,j}$ は一定であるから上の和は0となる. $v_{i,j}$ に対する数値積分についても同様に示すことができる. \square

8. まとめ

数値シミュレーション技術における信頼性の向上を目指す上で, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式系 (1.1)–(1.2) に対する適切な近似問題を立てることが必要である.

本稿では, 特に数学的な視点から非圧縮性流体の運動を記述するために用いられる偏微分演算子 $\text{div}, \text{grad}, \text{rot}, \Delta$ に着目し, 作用素論の知見に基づいたこれらの基本的な性質を満足することのできる差分演算子を構成した.

Laplace 作用素 Δ のもつ自己随伴性・消散性などの性質を受け継ぐ差分近似作用素として, 最小のステンシルによって構成される標準的な差分は5点中心差分 (\mathbb{R}^3 の場合は7点中心差分)

$$\begin{aligned} \Delta_h \phi_{i,j} &= \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x^2} \right) \\ & \quad + \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \end{aligned}$$

であるということが知られている. 従って, Δ に対する差分作用素の標準形として上記の Δ_h を採用する. このとき, $\Delta_h = \text{div}_h(\text{grad}_h)$ を満足することのできる差分作用素 $\text{div}_h, \text{grad}_h$ を最小のステンシルで与えるためには, 表 2.1 にまとめたように $\text{div}_h, \text{grad}_h$ をそれぞれ逆向きの片側差分によって近似する必要があることがわかった.

従来は発散作用素や勾配作用素を中心差分で近似することが標準であるため, スタガード法を採用することになり連続モデルとの適合性が満足されていなかった. これに対して前進差分と後退差分を併用する差分作用素を採用することにより, Laplace 作用素の適切な近似を与えることができる.

さらに, ソレノイダルなベクトル \mathbf{v} に対する偏微分演算子の基本的性質を満足することを要求すれば, 必然的に Helmholtz 分解における rot および渦度の定義式 $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$ もまた片側差分によって決定される. これらの差分演算子は, 偏微分作用素 $\text{div}, \text{grad}, \text{rot}, \Delta$ を適切に近似した差分作用素としての必要条件を満足している. この意味から, 我々はこれらの前進差分・後退差分を組み合わせた形として定式化される差分近似を標準形として提案する.

参考文献

- [1] R. Temam, Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland, 1977.
- [2] S. Abdallah, Numerical solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables using a non-staggered grid. II, J. Comput. Phys., **70**, 193–202 (1987).
- [3] A. G. Churbanov, A. N. Pavlov and P. N. Vabishchevich, Operator-splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations on non-staggered grids. Part 1: First-order schemes, Int. J. Numer. Methods Fluids, **21**, 617–640 (1995).
- [4] U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin, High-Resolution solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, J. Comput. Phys., **48**, 387–411 (1982).
- [5] R. Iwatsu, K. Ishii, T. Kawamura, K. Kuwahara, J. M. Hyun, Simulation of transition to turbulence in a cubic cavity, AIAA-89-0040, (1989).
- [6] J. Kim and P. Moin, Application of a Fractional-Step method to incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., **59**, 308–323 (1985).
- [7] T. Takahashi, RANS と乱流モデルに対する数値解法の数学的問題点, 宇宙航空研究開発機構特別資料 JAXA-SP-03-002, 143–147 (2003).
- [8] 非圧縮性流体解析, 数値流体力学シリーズ1, 東京大学出版会, 2002.

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-05-032

発行 平成 18 年 3 月 23 日

編集・発行 宇宙航空研究開発機構

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町 7-44-1

URL : <http://www.jaxa.jp/>

印刷・製本 (有) ノースアイランド

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記にお願いいたします。

宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター

〒305-8505 茨城県つくば市千現 2-1-1

TEL : 029-868-2079 FAX : 029-868-2956

© 2006 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工することを禁じます。

