

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

再突入宇宙機の軌道と誘導

田中 俊輔

2005年3月

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

宇宙航空研究開発機構研究開発報告
JAXA Research and Development Report

再突入宇宙機の軌道と誘導

田中 俊輔

Shunsuke TANAKA

2005年3月

March 2005

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

© 2003 JAXA

献 辞

われわれを再突入宇宙工学の世界へお導きいただいた

故田中俊輔氏に

心からの感謝の念をもって本資料を捧げます。

平成17年3月

まえがき

本資料は大気圏外に投入された宇宙機が再び地球に帰還する場合の再突入の問題に関して記述したものである。

この問題に関しては1960年代以降多くの研究がなされ数多くの論文が発表されている。これらの研究の成果はボストーク、マーキュリー、ジェミニあるいはスペースシャトル等で実現されている。ここではこれらの多くの論文をサーベイし、また筆者が1982-87年にかけて行った再突入宇宙機の解析結果も合わせて、再突入に関する宇宙機のダイナミックス、飛行環境、宇宙機の軌道、軌道制御/誘導についてまとめたものである。

資料をまとめるに当たって、発表された論文の結果を比較検討するとき、それぞれ様々な記号、座標、定義が用いられており、しばしば混乱することから、ここでは、全体を通して極力同一記号、同一座標で記述した。また本資料をもとに再突入問題に関する解析、シミュレーションができるようになるべく詳細に記した。

第4,5章は宇宙機の飛行中の飛行環境、宇宙機の概要について記した。第6,7章は代表的な再突入軌道であるケプラー軌道、弾道軌道、揚力軌道に関して、弾道係数、揚抗比を一定として、飛行状態量(高度、速度、経路角、飛行時間、飛行距離、空力荷重、空力加熱率)を求めた。第8章では弾道係数、揚抗比一定として飛行すると過大な空力荷重、空力加熱率を発生する場合がある。これを避けるための軌道の制御について記した。第9,10章では空力荷重、空力加熱率等を最小とする最適軌道、宇宙機を目標点への誘導するための種々の誘導則について記述した。本章の最後にはスペースシャトルの誘導について記した。

また付録として再突入問題を考察するとき基本となる宇宙機の運動方程式、空力特性、空力加熱率、再突入宇宙機の軌道を考察するときしばしば現れる指数積分関数、楕円積分関数について記載した。

宇宙航空研究開発機構

航法・誘導・軌道力学・軌道ユニット

田中俊輔

目 次

1. まえがき	1
2. 目次	3
3. 再突入宇宙機の飛行環境	5
4. 再突入宇宙機の軌道の概要	9
5. 再突入宇宙機のケプラー軌道	20
6. 再突入宇宙機の弾道軌道	28
6-1. 1次オーダーの解	28
6-2. 2次オーダーの解	40
6-3. 厳密解	47
6-4. 初期経路角零の解	53
6-5. その他の解析解	58
6-6. 再突入関数	68
7. 再突入宇宙機の揚力飛行軌道	73
7-1. 1次および2次の近似解析解	73
7-2. スキップ軌道	78
7-3. 一定速度近似解	92
7-4. 高次近似解	97
7-5. 振動軌道	101
7-6. 平衡滑空軌道	106
7-7. 3次元揚力軌道	121
7-8. Z関数による軌道の解	131
7-9. フゴイド振動とその制動	140
8. 再突入宇宙機の軌道制御	157
8-1. 弾道飛行の軌道制御	157
8-2. 揚力飛行の軌道制御	173
8-3. Z関数による軌道制御	179
8-4. 等高度・等高度変化率軌道制御	186

8-5. 等経路角軌道制御	199
8-6. 等再突入関数軌道制御	205
8-7. その他の軌道制御	232
9. 再突入宇宙機の誘導	251
9-1. 再突入宇宙機の誘導/制御とダイナミックス	251
9-2. 固定ゲインによる誘導	258
9-3. Z関数を用いた固定ゲインによる誘導	261
9-4. 可変ゲインによる誘導	267
10. 最適軌道にもとづく誘導	272
10-1. 最適軌道の近似解	279
10-2. 間接法	294
10-3. 直接法	311
10-4. Λ マトリックス誘導	329
10-5. 線形フィードバック誘導	343
11. クローズドフォーム誘導	352
11-1. クローズドフォーム誘導	352
11-2. クローズドフォーム誘導(スペースシャトルの誘導)	366
12. あとがき	397
付録- 1 再突入宇宙機の運動方程式(その1)	399
付録- 2 再突入宇宙機の運動方程式(その2)	431
付録- 3 再突入宇宙機の運動方程式(ベクトル表示)	439
付録- 4 再突入宇宙機の空力特性	445
付録- 5 再突入宇宙機の空力加熱率	455
付録- 6 再突入宇宙機の大気モデル	479
付録- 7 再突入宇宙機の重力加速度	498
付録- 8 ケプラー軌道(2体問題)	501
付録- 9 再突入宇宙機の軌道(f, g級数法)	509
付録-10 積分指数関数について	514
付録-11 楕円積分関数について	523

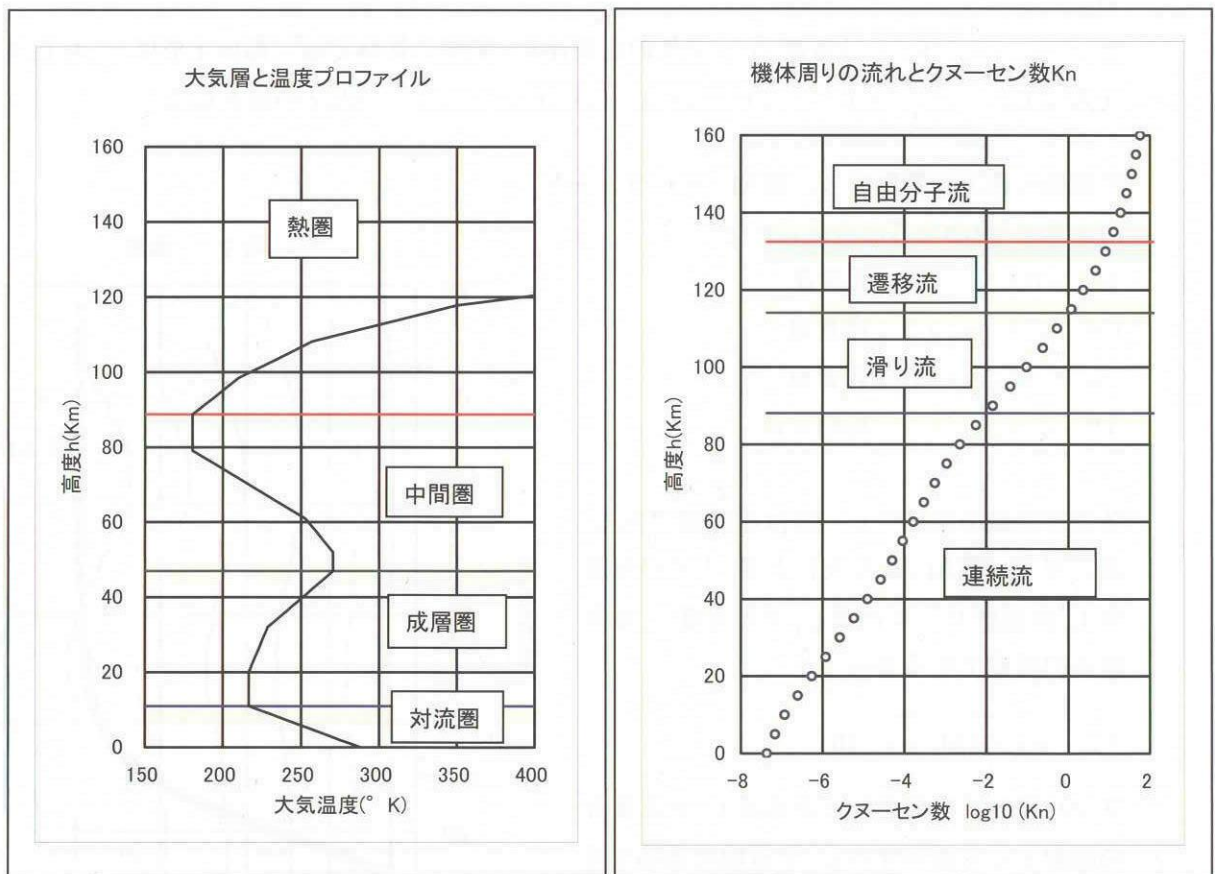
3. 再突入宇宙機の飛行環境

宇宙機が大気圏に突入後、宇宙機を取巻く大気、着地までに宇宙機が遭遇する、マッハ数、レイノルズ数、動圧、加熱率等について分類、記述する。

1) 大気の種類による分類

大気は高度に関する温度傾斜が不連続になる高度を境に幾つかの層に分けそれぞれ固有の名称で呼ぶ。また境界高度を界面と称する。航空機の飛行範囲が精々対流圏の範囲であるのに対し再突入宇宙機の場合地球を取り巻く大気層のすべての大気圏を通過することになる。

0 Km	≦	対流圏 (Troposphere)	≦ 11.0 Km
11.0 Km	≦	成層圏 (Stratosphere)	≦ 47.0 Km
47.0 Km	≦	中間圏 (Mesosphere)	≦ 88.743 Km
88.743 Km	≦	熱圏 (Thermosphere)	



2) 大気の希薄性による分類(クヌーセン数 K_n)

地球表面では空気は連続体として取扱われるが、高高度では稀薄流として分子運動論で取扱われる。稀薄性の指標としてはクヌーセン数 K_n が用いられる。クヌーセン数 K_n は気体粒子間の平均自由行程(Mean Free Path) ℓ と機体の代表長 L との比 $K_n = \ell/L$ と定義され次式で表される。

$$K_n \propto M_\infty / R_{e_\infty}$$

クヌーセン数により機体周りの空気流の特性を分類すると次の通り。

$1.0 \leq K_n$: 希薄流(自由分子流)

$0.1 \leq K_n \leq 1.0$: 遷移流

$0.01 \leq K_n \leq 0.1$: 滑り流

$K_n \leq 0.01$: 連動流

3) 等マッハ曲線

マッハ数 M_∞ は宇宙機の世界速度 V_∞ と音速 a_∞ の比として次式で表される。

$$M_\infty = V_\infty / a_\infty \quad : \text{マッハ数}$$

ただし $a_\infty = \sqrt{\gamma R T_\infty}$ は音速, γ : 空気の比熱比 R : 空気の気体定数, 海面上では γ, R, T_∞ を代入して $a_\infty = \sqrt{\gamma R T_\infty} \approx \sqrt{1.4 \times 287.05 \times 288.16} = 340.3$ m/sec の値となる

宇宙機の世界速度範囲はマッハ数 M_∞ をパラメータ

にとると、次のように分けられる。

$M_\infty \leq 0.8$: 亜音速

$0.8 \leq M_\infty \leq 1.2$: 遷音速

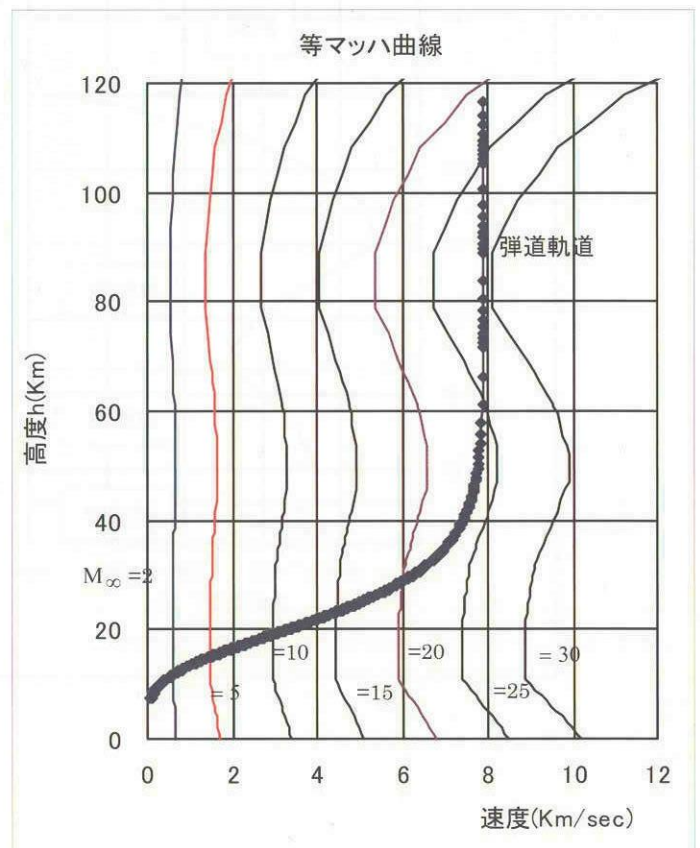
$1.2 \leq M_\infty \leq 5.0$: 超音速

$5.0 \leq M_\infty$: 極超音速

各速度領域の境界マッハ数は概略値である。次にマッハ数 M_∞ を与えたとき、上式から温度 T_∞ は速度 V_∞^2 に比例し、また温度 T_∞ は高度 h の関数であるから

$$V_\infty = \sqrt{\gamma R M_\infty^2 T_\infty(h)}$$

マッハ数 M_∞ を与えたとき速度 V_∞ と高度 h の関数として図示すると、宇宙機の遭遇するマッハ数の領域が得られる。



4) 等レイノルズ数 R_e 曲線

レイノルズ数 R_e は機体を取り巻く気体の粘性効果を表す重要なパラメータであり、臨界レイノルズ数以下では層流、以上では乱流となり、機体に加わる空気力、空力加熱率に大きな影響を及ぼす。レイノルズ数 R_e は機体に加わる慣性力 $\rho(V^2/L)$ と粘性力 $\mu(V/L^2)$ の比と定義され、次式で表される。(空力加熱率参照)

$$R_e = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 / L}{\mu_\infty V_\infty / L^2} = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty} = \frac{V_\infty L}{\nu_\infty}$$

ここで L : 機体代表長さ, ν : 動粘性係数 $=\mu/\rho$
上式から大気の動粘性係数 $\nu_\infty(h)$ は高度の関数として与えられているので

$$V_\infty = \nu_\infty(h) R_{e\infty} / L$$

速度 V_∞ と高度 h の関数として図示すると、宇宙機の遭遇するレイノルズ数 $R_{e\infty}$ の範囲が得られる。

ただし $L=1$ 単位代表長とする。

5) 等動圧曲線

宇宙機を速度 V_∞ 、大気密度を ρ_∞ とすれば機体を受ける動圧 q_∞ は次式で表される。

$$q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2 / 2 : \text{動圧}$$

大気密度の指数関数近似 $\rho_\infty = \rho_{SL} e^{-\beta h}$ を用いると上式は次のように表される。

$$\rho_\infty = 2q_\infty / V_\infty^2$$

$$h = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\rho_{SL}}{2q_\infty} V_\infty^2 \right)$$

動圧 q_∞ を与えたとき速度 V_∞ と高度 h の関数として図示すると、宇宙機の遭遇する動圧の範囲が得られる。

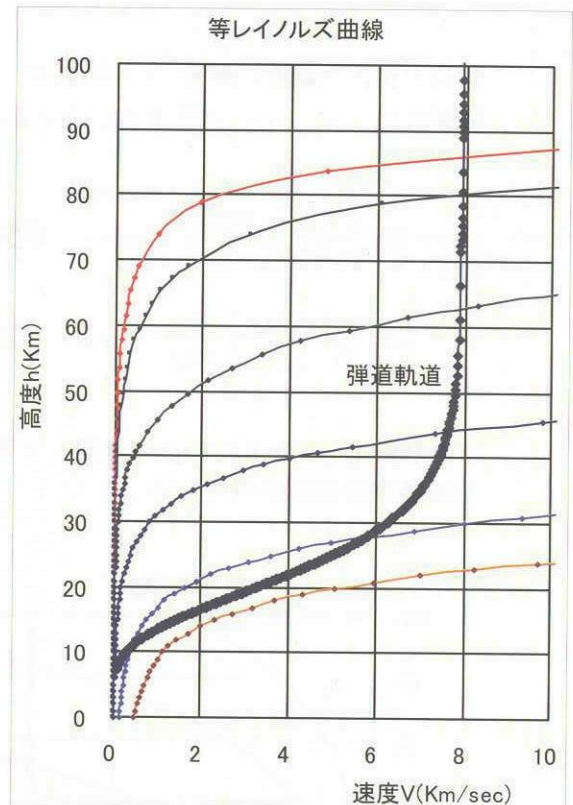
ただし $\rho_{SL} = 1.225 \text{ Kg/m}^3$

6) 等澱点空力加熱率曲線

宇宙機を速度 V 、大気密度を ρ とすれば機体を受ける澱点空力加熱率 \dot{Q} は一般に次式で表される。

$$\dot{Q} = \frac{C}{\sqrt{R_n}} \rho^{1/2} V^a \quad (a=3)$$

ここで C : 定数, R_n : 機体ノーズ曲率半径, 指数の定数は $a=3$ である。極超音速で飛行する宇宙機の澱点 (Stagnation Point) 近傍では空気は高温高压となり、空気を構成する酸素、窒素分子の解離、電離現象が現れる。このような実在気体効果が現れる場合には指数係数 a は 3. からずれて $a=3.15$ 程度の値をとる。実在効果を含めたこの問題に関しては



Fay, Riddell, Kemp, Detra (1958, 1959, 1963) 等の研究があり実験結果とも比較検討がなされている。(付録-4 再突入宇宙機の空力加熱の項参照)

Detra, Hidalgo (1961) によれば澱点加熱率を具体的に次式で与えている。

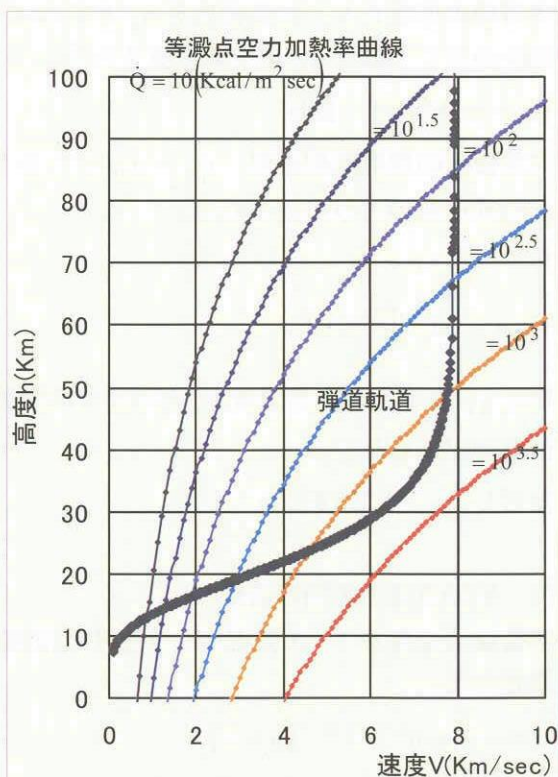
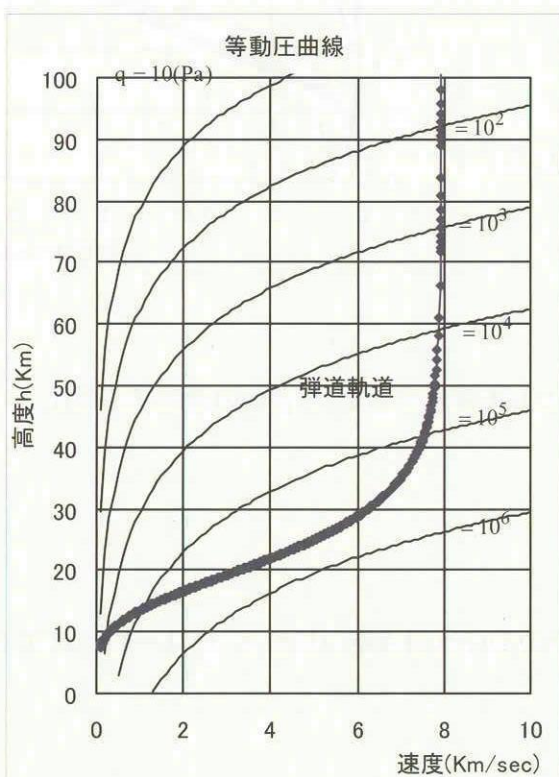
$$\dot{Q} = \frac{26357}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{7925} \right)^{3.15} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

ここで ρ_{SL} : 海面上密度 = 1.225Kg/m^3 , 7925m/sec は再突入速度である。大気密度の指数関数近似 $\rho_{\infty} = \rho_{SL} e^{-\beta h}$ を用いると高度 h は次のように表される。

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \dot{Q}^2 \left(\frac{\sqrt{R_N}}{26357} \right)^2 \left(\frac{7925}{V} \right)^{6.3} \quad : \text{密度}$$

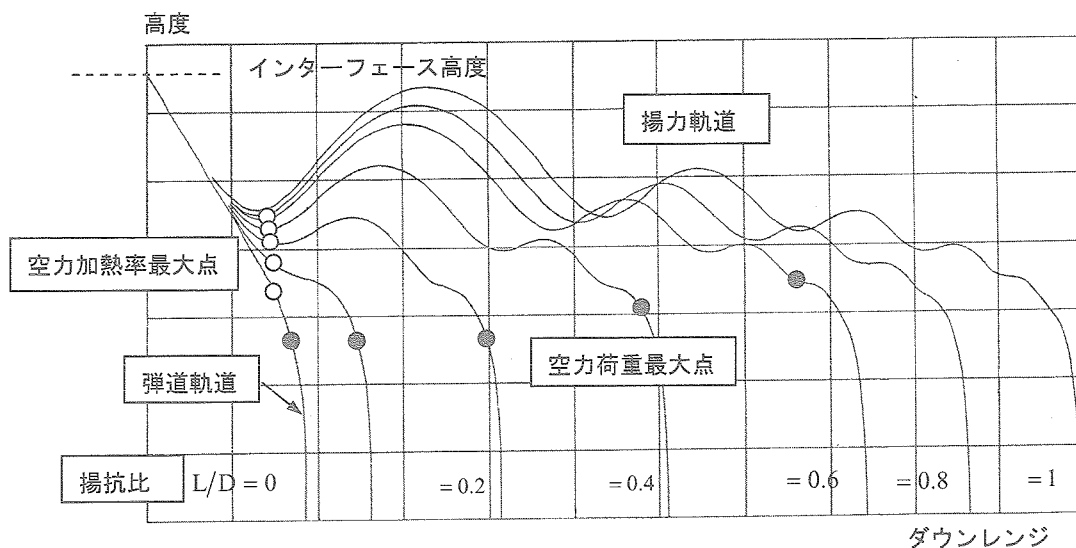
$$h = \frac{2}{\beta} \ln \left\{ \frac{1}{\dot{Q}} \left(\frac{26357}{\sqrt{R_N}} \right) \left(\frac{V}{7925} \right)^{3.15} \right\} \quad : \text{高度}$$

空力加熱率 \dot{Q} を与えたとき速度 V と高度 h の関数として図示すると、宇宙機の遭遇する空力加熱率の範囲が得られる。ただしノーズ半径 $R_n = 1$



4. 再突入宇宙機の軌道の概要

宇宙機が地球を周回する軌道から地球上に帰還する場合の問題について考えると、再突入後の宇宙機には、地球を取巻く大気により空気力(揚力, 抗力)が発生し、この空気力により機体に加わる最大荷重が問題となる。エネルギー的には周回時には宇宙機は大きなエネルギー(位置エネルギー, 速度エネルギー)を持つが地表ではほぼ零となる。このため宇宙機の持つ大きなエネルギーを消散させる必要があり、消散したエネルギーの一部は熱となって機体に流入する。この場合機体に流入する加熱率が問題となる。このような空力荷重, 加熱率の最大値あるいは最大値が発生する条件を求めるには大気突入時の条件(インターフェース条件)を初期値として、機体特性, 空力特性等多くのパラメータを設定し、宇宙機の運動方程式を数値積分しなければならない。揚抗比 L/D をパラメータとして数値積分により得られた軌道, 空力加熱率最大点, 空力加重最大点の例を示す。



再突入宇宙機の軌道の例

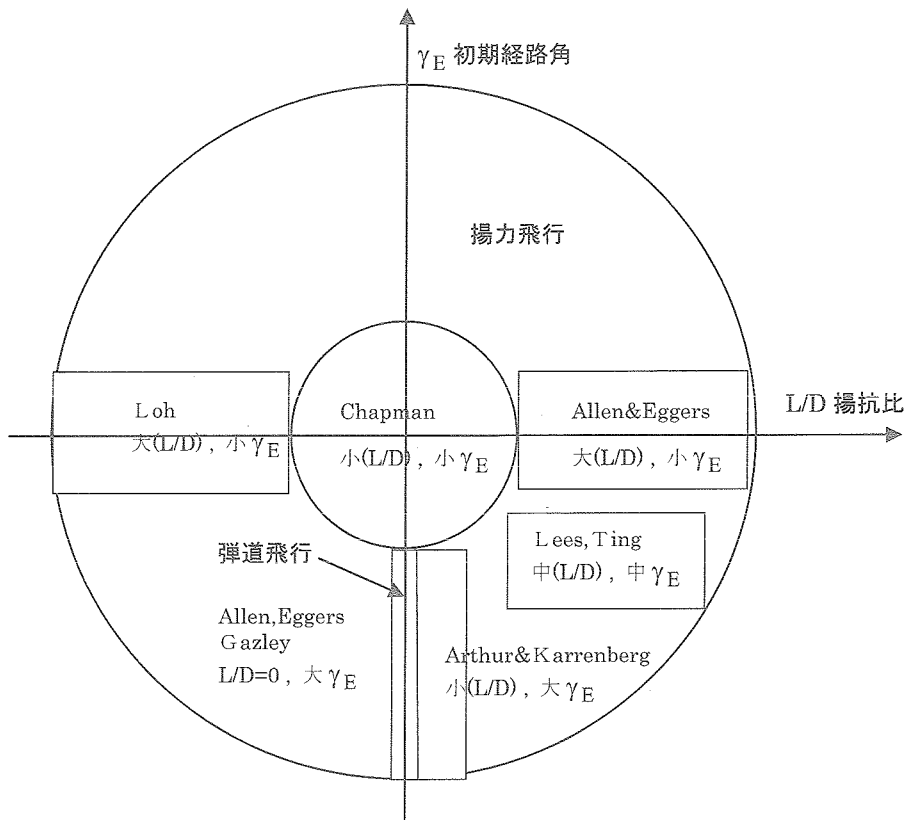
解析解が得られている範囲

宇宙機を(擬似)質点とみなすと、大気圏を飛行時の宇宙機の運動を表す運動方程式はニュートンの法則から容易に記述できるが、この運動方程式を解くときに、問題を複雑にしているのは、空気力が非線形であることである。このため再突入時点から地表に至る全期間にわたって、運動方程式を解析的に解くことはできず、上記例のように数値解析に依らねばならない。

再突入軌道の初期段階では、再突入軌道の全体(高度, 飛行時間, 飛行距離)を把握し、機体に

加わる空気力の最大概略値,あるいは空力加熱率の最大概略値を見積もることが必要となる。このため特別の仮定を設けて,運動方程式を解析的に解く試みが1960年代から多くの研究者によって行われてきた。飛行面内運動(2次元)ではAllen&Eggers, Chapman, Loh, Arther, Cohen等による,弾道飛行,平衡滑空飛行,スキップ飛行等が解析的に解かれている。宇宙機の形状を規定する重要なパラメータの1つに揚力と抗力の比で表される,揚抗比 L/D また再突入時のインターフェース条件の1つである経路角 γ_E がある。このパラメータで解析的に解かれている,飛行面内軌道を分類すると,図のように分類できる。

解析解の範囲



再突入宇宙機の機体コンフィギュレーション

再突入宇宙機の機体コンフィギュレーションを分類すると機体が無揚力機体形状(軸対称弾道形状)と揚力機体形状とに分類できる。

無揚力機体形状は抵抗係数,弾道係数から概略次のように分類できる。

	抵抗係数 C_D	弾道係数 $\Delta = m/C_D A$	例
(a) 低抗力 (LowDrag) 円錐	0.1-0.5	1000-10000	大陸弾道弾
(b) 球	1.0		ポストーク, ポスホート
(c) 高抗力 (HighDrag) カプセル			マーキュリ, ジェミニ注)
(d) 高抗力 (HighDrag) 円錐	1.5-1.75	50-500	アポロ 火星プローブ

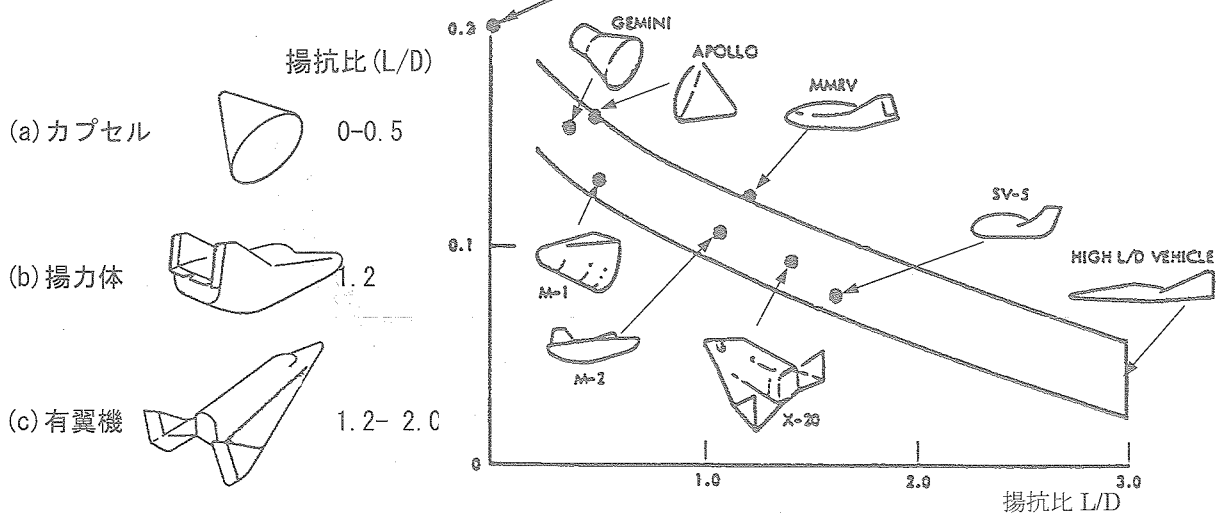
注) ジェミニの場合

$$\frac{m}{C_D A} = \frac{2178}{1.55 \times (2.286/2)^2 \pi} = 342.7 \text{ Kg/m}^2$$

無揚力弾道機体形状の特性を表わすパラメータは抵抗係数 C_D , と弾道係数 $m/C_D A$ である。

(a) は大陸間弾道弾, (b) は旧ソ連ポストーク宇宙船 (c) はマーキュリー宇宙船 (d) 火星探査機に代表される形状である。抗力係数 C_D は (a) 低抗力係数では $C_D \approx 0.1 \sim 0.5$, (b) 球抗力係数では $C_D \approx 1.0$, (c) (d) 高抗力係数では $C_D \approx 1.5 \sim 1.75$ 程度の値をとる。機体の加速度(減速度)は動圧に比例し比例係数は $C_D A/m$ で表される。この比例係数の逆数 $\Delta = m/C_D A$ を弾道係数と称し, 再突入後の軌道を決める重要なパラメータである。(a) 低抗力円錐の場合には $\Delta = 1000 \sim 10000 \text{ Kg/m}^2$ (c) (d) 高抗力円錐の場合には $\Delta = 50 \sim 500 \text{ Kg/m}^2$ 程度の値をとる。

揚力機体形状は揚抗比から概略次の
 体積効率 = $\frac{(\text{体積})^{2/3}}{\text{濡面積}}$
 ように分類できる。



これらの機体特性を表わすパラメータは弾道係数 $m/C_D A$ と揚抗比 L/D または抗力係数 C_D と揚力係数 C_L である。揚力機体形状に軸対象のカプセルが分類されているのは、後で述べるように、機体重心を機体形状中心からずらすことにより (CG オフセット), 揚力を発生させたもの (ジェミニ, アポロ回収船) である。また右図は揚抗比に対する体積効率をプロットしたものである。ポストークのような球体形状が最も体積効率が良く, スペースプレーンのような有翼機になると体積効率が悪くなる傾向を示す。

大気圏再突入時の速度範囲

大気圏再突入インターフェース条件を (r_E, V_E, γ_E) とすると, 再突入速度 V_E により軌道は次のように分類できる。

a) 速度範囲

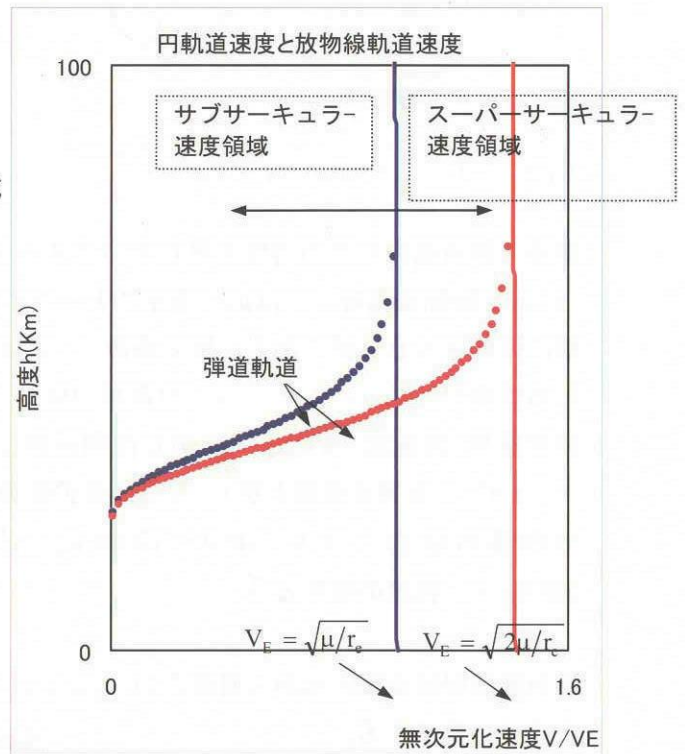
$$\sqrt{\frac{\mu}{r_e}} \leq \frac{V}{V_E} : \text{スーパーサーキュラー速度領域}$$

$$\frac{V}{V_E} \leq \sqrt{\frac{\mu}{r_e}} : \text{サブサーキュラー速度領域}$$

ここで

r_e : 地球平均半径 μ : 重力定数
 $\sqrt{\mu/r_e}$ は第 1 宇宙速度 (円周速度),
 $\sqrt{2\mu/r_e}$ は第 2 宇宙速度 (放物線速度, 脱出速度)

周回円軌道速度およびスーパーサーキュラー速度からの弾道軌道の例を右図に示す。

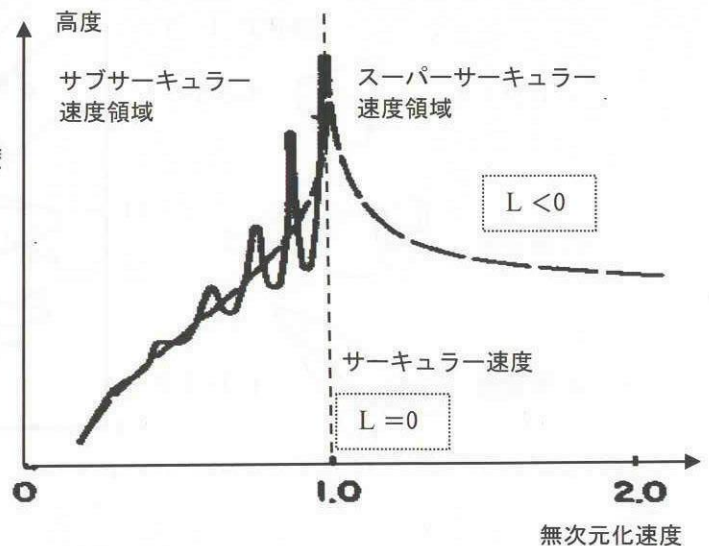


b) 揚力の方向

速度座標系での運動方程式で速度ベクトルに垂直方向の加速度 $V dy/dt$ を 0 とおくと揚力と重力, 遠心力の差が釣り合って次式で表される。

$$\frac{L}{m} = \underline{g} - \underline{g} \hat{V}^2 = g(1 - \hat{V}^2)$$

揚力 重力 遠心力
 $\hat{V} = \sqrt{gr}$: 無次元化速度



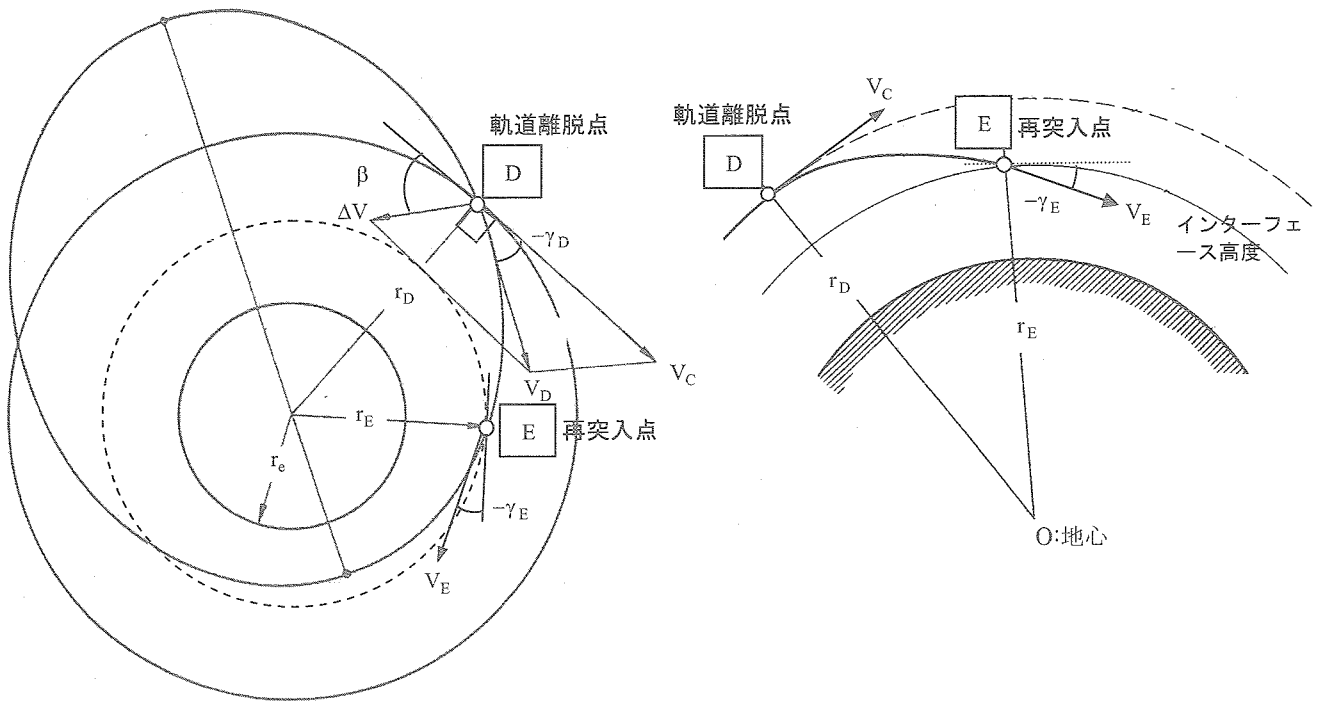
これから

- $L=0$: 0 サーキュラー速度(円周速度 $\hat{V}=1$)の場合
- $L>0$: 正揚力 サブサーキュラー速度($\hat{V}<1$)の場合
- $L<0$: 負揚力 スーパーサーキュラー速度($\hat{V}>1$)の場合

以上からスーパーサーキュラー速度の場合 負揚力でなければ平衡滑空飛行は維持できないことがわかる。

再突入インターフェース条件

円軌道速度の場合についてインターフェース高度までの空気力を無視すれば大気圏再突入インターフェース条件(r_E, V_E, γ_E)は次のように容易に求めることができる。



軌道離脱点 D 点の高度を $r_D (=h_D)$, D 点での円周速度を $V_C (= \sqrt{gr_D})$ とし, 水平面に対して β 方向に ΔV だけ減速したとすれば, 減速後の速度 V_D は ベクトル三角形の第 1, 第 2 余弦則から

$$V_D \cos \gamma_D = V_C - \Delta V \cos \beta$$

$$V_D^2 = V_C^2 + (\Delta V)^2 - 2V_C \Delta V \cos \beta$$

また E 点の高度を $r_E (=h_E)$ (再突入インターフェース高度) とし, 点 D-E 間で空気力による減速が無いと仮定すれば, ケプラー楕円軌道から両点間のエネルギー, 角運動量保存則から

$$V_E^2 = V_D^2 - \frac{2\mu}{r_D} + \frac{2\mu}{r_E}$$

$$\cos \gamma_E = \frac{r_D V_D \cos \gamma_D}{r_E V_E}$$

インターフェース条件 (r_E, V_E, γ_E) が得られる。

マーキュリーの例では減速量と方向は次の通り。

$$\beta = 34^\circ \quad : \text{減速方向}$$

$$\Delta V = 150 \text{ m/sec} \quad : \text{減速量}$$

軌道離脱点高度を $h_D = 206.18 \text{ Km}$ とし再突入高度, 経路角を次の値とすれば

$$h_E = 122 \text{ Km} \quad : \text{再突入高度} \quad \gamma_E = -1.6^\circ \quad : \text{再突入経路角}$$

再突入速度は次の値となる。

$$V_E = 7758.52 \text{ m/sec} \quad (\hat{V}_E = V_E / (\mu/r_E) = 0.98) \quad : \text{再突入速度}$$

大気密度は不連続ではなく, インターフェース高度を境に, これより以上では空気力を 0 とおくこの仮定は実際とは異なるがインターフェース高度近傍では大気密度は非常に小さいことから, 近似的な解を与える。

再突入回廊 (Reentry Corridor)

この場合再突入の条件初期経路角が重要なパラメータとなる。初期経路角が小さすぎる場合には宇宙機はスキップアウトし大気圏外に出る。初期経路角が大きすぎる場合には空気力により発生する, 空力荷重, または空力加熱により機体が破壊する。これより安全に再突入後, 飛行するには極めて限られた初期経路角の範囲に限られる。これを再突入回廊 (Reentry Corridor) と呼ばれる。文献) から再突入回廊の幅は次式で与えられる。

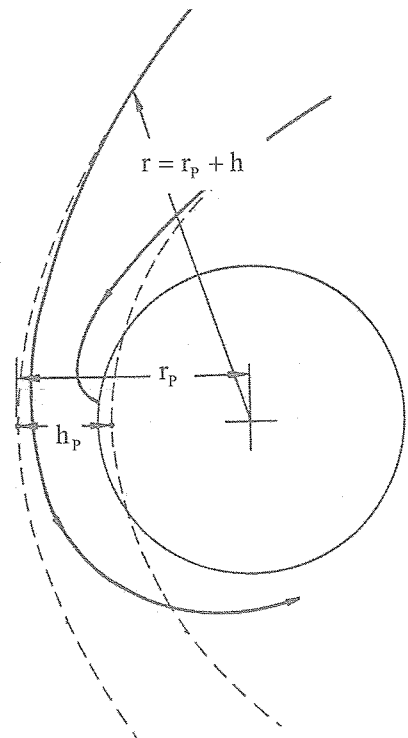
$$\hat{V} = V / \sqrt{gr} \quad : \text{無次元化速度}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \hat{V}^2 (2 - \hat{V}^2)} \cos^2 \eta$$

$$\frac{r}{r_p} = \frac{\hat{V}^2 \cos^2 \eta}{1 + \varepsilon}$$

$$\tan^2 \eta = \frac{r/r_p}{1 + \varepsilon} \left\{ 2 - \frac{r(1 - \varepsilon)}{r_p} \right\} - 1$$

ここで ε 離心率 $r = r_p + h$ $h \ll r_p, \eta \ll 1$ から近似的に次式で与えられる。



$$h_p = h - r_p \eta^2 + r_p \left(\frac{\hat{V}^2}{1+\varepsilon} - 1 \right)$$

飛行範囲

速度ベクトルに垂直方向の運動方程式は次式で表される (7.6 項平衡滑空軌道参照)

$$V \frac{dy}{dt} = \frac{C_L A}{2m} \rho V^2 - g \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right)$$

平衡滑空飛行の条件 $dy/dt \ll 1$ から
密度は近似的に次式で表される

$$\rho = \frac{2m}{C_L A r} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right)$$

ここで C_L は揚力係数, A は基準面積。
いま宇宙機の持つ揚力係数の最大値
を C_{Lmax} とし, 等温大気モデルを用い
ると高度 h は次式で表される。

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{2m}{C_{Lmax} A \rho_{SL} r} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \right\}$$

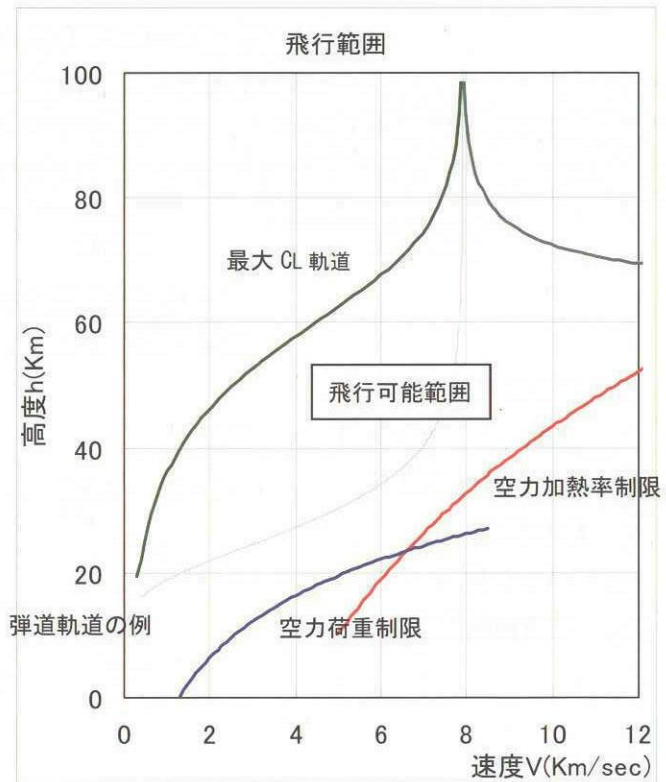
上式が飛行できる上限となる。

また宇宙機の構造上の空力荷重制限値

G_{LMT} , 耐熱上の空力加熱率制限値

$(dQ/dt)_{LMT}$ が与えられたとき

G_{LMT} , $(dQ/dt)_{LMT}$ 一定軌道が得られるからこの間が飛行可能範囲となる。



運動方程式について

最初に宇宙機の大気圏内の運動方程式と解析解を求める際の種々の仮定の特徴について述べる。簡単のために再突入宇宙機の運動を 2 次元 (飛行面内) に限る。また飛行時間は短いことから, 地球の自転の影響を無視すると, 2 次元の速度座標系運動方程式は次のように表される。(式の導出は宇宙機の運動方程式の項参照)。以下運動方程式の各項についてそのオーダを調べる。

速度座標系での運動方程式は次式で表される。(付録-1 宇宙機の運動方程式(その 1)参照)

飛行面内速度ベクトル方向運動方程式

$$\dot{V} = \underbrace{-D/m}_{\text{抗力項}} - \underbrace{g \sin \gamma}_{\text{重力項}} - \underbrace{r \omega_e^2 \cos \varphi (\sin \psi \sin \varphi \cos \gamma - \cos \varphi \sin \gamma)}_{\text{地球自転による遠心力}}$$

飛行面内速度ベクトルに垂直方向運動方程式

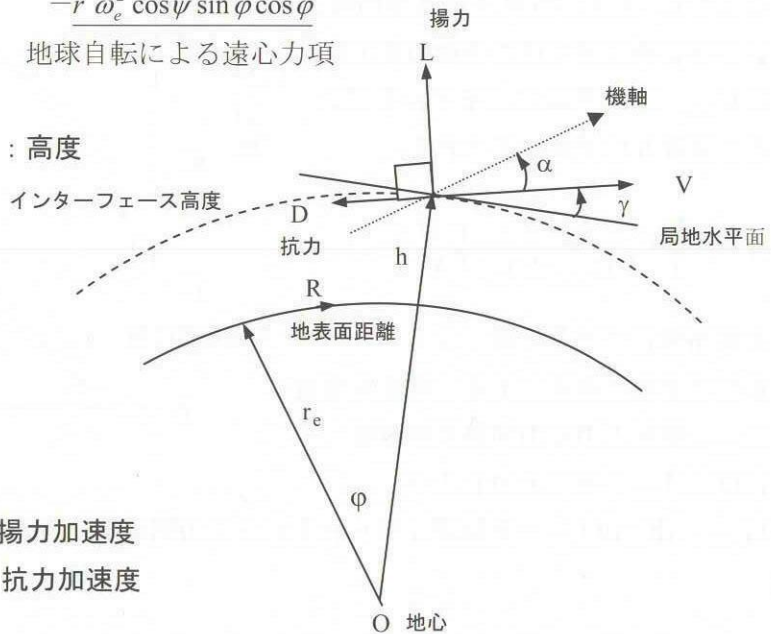
$$V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos \gamma}{r} = \underbrace{L \cos \phi_B / m}_{\text{揚力項}} - \underbrace{g \cos \gamma}_{\text{重力項}} + \underbrace{2 \omega_e V \cos \varphi \cos \psi}_{\text{コリオリ力項}} + \underbrace{r \omega_e^2 \cos \varphi (\sin \psi \sin \varphi \sin \gamma + \cos \varphi \cos \gamma)}_{\text{地球自転による遠心力項}}$$

飛行面外方向運動方程式

$$V \cos \gamma \dot{\psi} + \frac{V^2 \cos^2 \gamma \cos \psi \tan \varphi}{r} = - \underbrace{L \sin \phi_B / m}_{\text{揚力項}} - \underbrace{2 \omega_e V (\sin \varphi \cos \gamma - \cos \varphi \sin \psi \sin \gamma)}_{\text{コリオリ力項}} - \underbrace{r \omega_e^2 \cos \psi \sin \varphi \cos \varphi}_{\text{地球自転による遠心力項}}$$

ここで各記号は

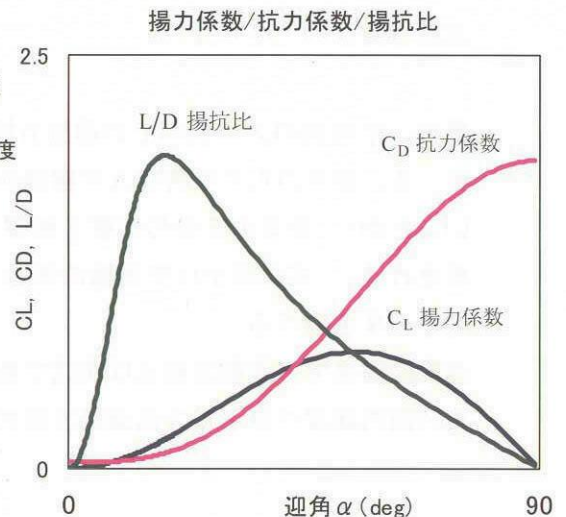
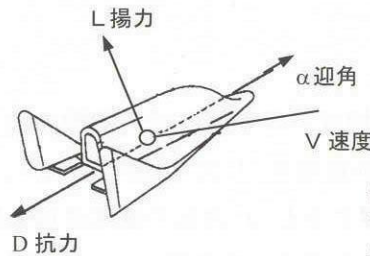
- V : 速度 r : 地心距離 h : 高度
- γ : 経路角 ψ : 方位角
- φ : 地心緯度
- φ_B : バンク角
- ω_e : 地球自転角速度



空気力

- $L/m = (1/2) \rho V^2 (C_L A/m)$: 揚力加速度
- $D/m = (1/2) \rho V^2 (C_D A/m)$: 抗力加速度
- C_L : 揚力係数
- C_D : 抗力係数
- L/D : 揚抗比 = C_L/C_D

- m / C_D A : 弾道係数
- A : 基準面積
- m : 機体質量
- ρ(h) : 大気密度
- g(h) : 重力加速度



大気密度 $\rho(h)$ は高度の関数として推定できるものとする。例えば U. S. 標準大気モデル等、各種の大気モデルがテーブル化されている。(大気モデルの項参照)

重力加速度 $g(h)$ は高度の関数として表すことができる。例えば地球を球形と仮定すれば $g(h) = \mu / (r - r_e)^2$ で表される。(重力モデルの項参照) 機体の特性値 L/D : 揚抗比, $m/C_D A$: 弾道係数と, 再突入条件(インターフェース条件) (r_E, V_E, γ_E) が与えられると, 微分方程式の初期値問題として, 数値積分を行うと再突入軌道を求めることができる。

大気密度について

大気の厚さを dr , 単位面積の大気の層について力の釣り合いを考えると $dp = -\rho g dh$ で表される。一方理想気体の状態方程式は $p = \rho R_{gas} T$, R_{gas} : 気体定数 $(m/sec)^2 / K^\circ$ で表されるから, 両辺の対数をとって微分すると, 次式を得る。

$$dp/\rho = -\beta dh$$

$$\beta(h) = - \left\{ g_0 / R_{gas} + dT(h)/dr \right\} / T(h)$$

ここで p : 大気圧力 (N/m^2) , T : 大気温度 (K°) dT/dh : 温度勾配 (K°/m)

飛行環境の項で述べたように, 大気層は(高度によっては)温度勾配があるが, 第 1 次近似として等温大気を仮定すれば $T = 一定$, $dT/dh = 0$ から

$$\beta(h) = g_0 / T_0 R_{gas} : 一定 \quad (m^{-1})$$

となる。 β の逆数 β^{-1} はスケール高度と呼ばれ, 距離の次元を持ち, Chapman (1959) は $\beta^{-1} = 7.163 Km$, Regan (1984) は $\beta^{-1} = 6.70 Km$ 等の値を推奨している。スケール高度は飛行高度全般にわたって, 同じ値とせず, 高度によって値を変更することもある。ここでは簡単のために飛行高度全般にわたって一定とする。 高度 $h (Km)$

この場合積分して大気密度は高度の指数関数として次式で表され, 密度と高度は 1 対 1 に対応する。したがって密度が得られると下式から直ちに高度に変換できる。

$$\rho = \rho_{SL} e^{-\beta h}$$

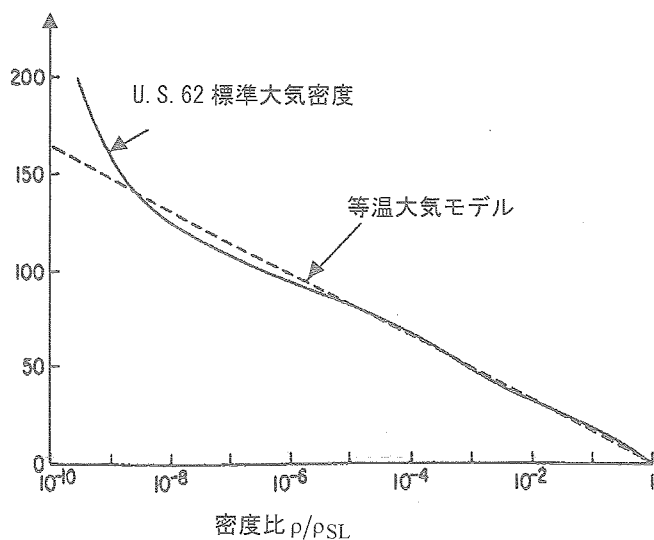
ρ_{SL} : 海面上 ($h = 0$) 密度 = $1.225 Kg/m^3$

重力加速度について

地球を球形と仮定し $g_0 = -\mu / r_e^2$ と置くと

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 = \frac{1}{(r_e + h)^2} \approx 1 - (h/r_e)^2$$

インターフェース高度を $h = 120 Km$ とすると右辺第 2 項は $(h/r_e)^2 \approx 0.00035$, であり, 地球



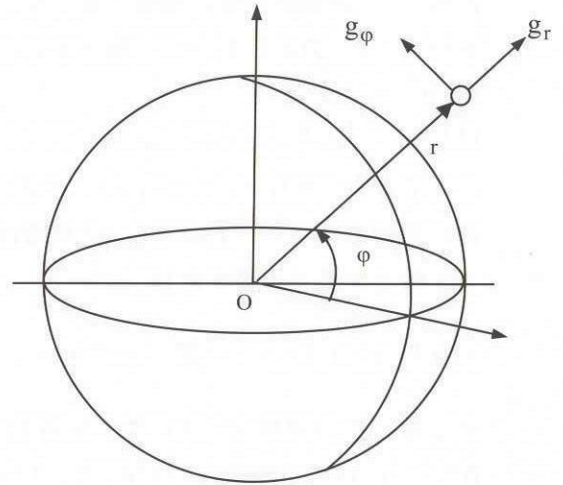
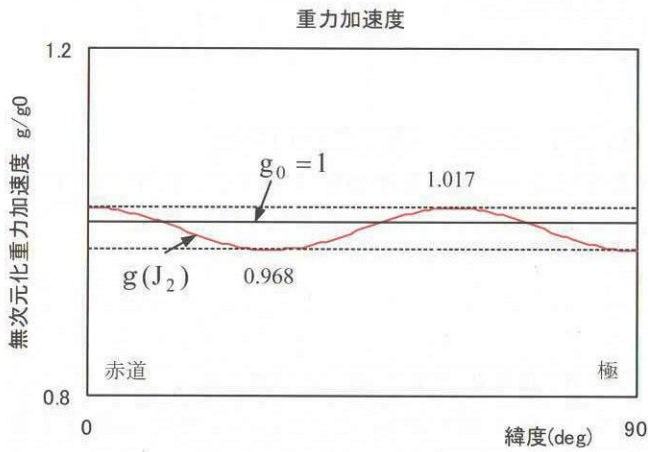
を平坦モデルとした場合の重力加速度 g_0 の差は約 0.04%程度の小さいものである。地球を楕円体と仮定して最も支配的なルジャンドル関数の係数のうち最も支配的な J_2 項 ($J_2 = 0.0108263$) までを考慮すると

$$g_r = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 J_2 (3 \sin^2 \varphi - 1) - \dots \right\}$$

$$g_\varphi = \frac{3\mu}{r^2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 J_2 \sin \varphi \cos \varphi + \dots$$

赤道面では $\varphi = 0$ と置いて、球形モデルの重力加速度との比をとると $g/g_0 = \sqrt{g_r^2 + g_\varphi^2}$

で表され、球形モデルとした場合の重力加速度の差は約 3.2%程度にすぎない。以上から再突入宇宙機の運動を考えると、重力加速度は一般に一定と仮定する場合が多い。



地球自転の影響

地球自転の影響が最も表れる軌道として赤道面軌道 (方位角 $\psi = 90$, 緯度 $\varphi = 0$) と極軌道 (方位角 $\psi = 0$) を考えると

赤道軌道の場合

$$\dot{V} = -\frac{D}{m} - g \left(1 - \frac{r \omega_c^2}{g} \right) \sin \gamma$$

$$V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos \gamma}{r} = \frac{L}{m} - g \left(1 - \frac{r \omega_c^2}{g} \right) \cos \gamma$$

極軌道の場合

$$\dot{V} = -\frac{D}{m} - g \left(1 - \frac{r \omega_c^2}{g} \right) \sin \gamma$$

$$V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos \gamma}{r} = \frac{L}{m} + 2 \omega_E V \cos \varphi - g \left(1 - \frac{r \omega_e^2}{g} \right) \cos \gamma$$

で表される。(運動方程式の項参照)ここで地球自転角速度 $\omega_e = 7.292111585 \times 10^{-5}$ rad/sec とすれば地球自転の影響は右辺第3項で表され, 重力加速度との比を取ると

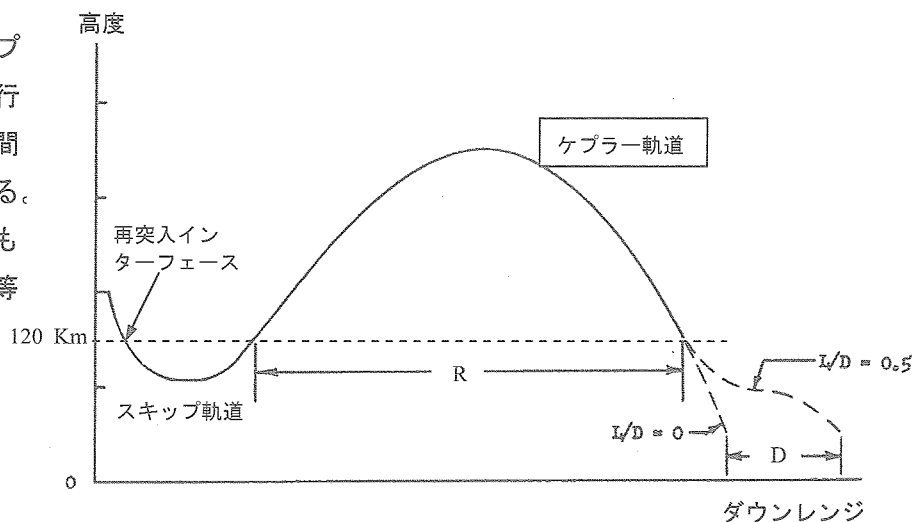
$$r_e \omega_e^2 / g = (6.378 \times 10^6) (7.29212 \times 10^{-5})^2 / 9.81 = 0.00346$$

で表され, 重力加速度の0.3%程度の影響しかない。

5. 再突入宇宙機のケプラー軌道

アポロ宇宙船の場合のようにスーパーサーキュラ速度 $v_E > \sqrt{gR}$ で大気圏に突入する場合にはエネルギー消散の目的から突入後スキップ飛行を行い、再び大気圏外に出て、再度大気圏に突入する軌道を取る。このような場合には飛行の大部分は空気力が無視できるケプラー軌道を飛行する。

このような場合にはケプラー軌道を飛行中の飛行距離、最高高度、飛行時間の見積もりが必要となる。ここではこれらの見積もりに必要な衝突方程式等を導出する。



空気力を無視して次の条件を設ける。

条件： (1) $L = D = 0$: 空気力を無視

(2) 球形地球モデル $g = -\mu/r^2$ $\mu = 398600.9 \text{ Km}^3/\text{sec}^2$: 重力定数

このとき宇宙機の運動方程式を極座標系で表すと次のように表される。

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = 0 \quad (2)$$

(2)式から $(r^2 \dot{\phi})/dt = 0$ 積分して次式を得る。

$$r^2 \dot{\phi} = H \quad \text{: 角運動量(一定)} \quad (3)$$

$r\dot{\phi} = V \cos \gamma$ から

$$V r \cos \gamma = H \quad \text{: 角運動量一定} \quad (4)$$

すなわち角運動量は保存される。

(1) 式の両辺に dr/dt を掛けて積分を行うと

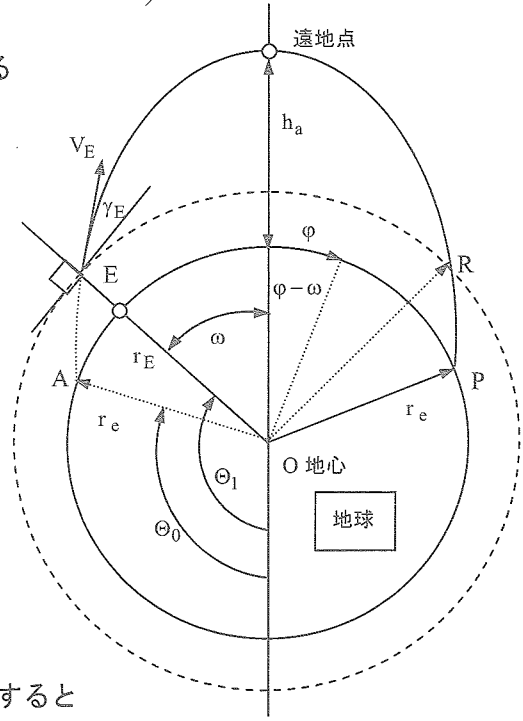
$$\ddot{r} \dot{r} - (r\dot{\phi}^2)\dot{r} + \frac{\mu}{r^2}\dot{r} = \ddot{r}\dot{r} - \frac{h^2}{r^3}\dot{r} + \frac{\mu}{r^2}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}\right) = 0$$

これより右辺()は一定となり次のように表される

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2 - \frac{\mu}{r} = \text{const} \quad (5)$$

ここで r 方向, ϕ 方向の速度 V_r , V_ϕ およびトータル速度 V は次式で表され $V_r = \dot{r} = V \sin \gamma$
 $V_\phi = r\dot{\phi} = V \cos \gamma$ $V^2 = V_r^2 + V_\phi^2$
 これらの速度 V を用いると

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = E : \text{一定} \quad (6)$$



となりエネルギーは保存される。

次に $1/r$ を u と置き, 独立変数を r から u に変換すると

$$u \equiv 1/r$$

u の ϕ に関する微係数は角運動量の関係式(3)を用いて次式で表される。

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\phi} = -\frac{(dr/dt)}{r^2(d\phi/dt)} = -\frac{1}{H} \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\phi}\right) \frac{dt}{d\phi} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{H} \frac{dr}{dt}\right) \frac{dt}{d\phi} = -\frac{r^2}{H^2} \frac{d^2r}{dt^2}$$

これを(1)式に代入すると ϕ に関する 2 階微分方程式となる。

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{H^2} \quad (5)$$

右辺は定数でありこの微分方程式の解は一般解 $C_1 \cos \phi + C_2 \sin \phi$ と特別解 μ/H^2 の和として次式で与えられる。

$$u = \frac{\mu}{H^2} + C_1 \cos \phi + C_2 \sin \phi \quad (6)$$

C_1, C_2 : 積分定数

1) 衝突方程式 (Hit Equation)

初期条件は $\varphi = 0$ において

$$u = u_E = 1/r_E$$

$$du/d\varphi = (du/d\varphi)_E = -V_{rE}/r_E V_{\varphi E} = -\tan \gamma_E / r_E$$

と置く。この初期条件から積分定数は次式で得られる。

$$C_1 = u_E - \mu/H^2 = -(\mu/H^2 - 1/r_E)$$

$$C_2 = (du/d\varphi)_E = -(dr/dt)_E/H = -\tan \gamma_E / r_E$$

次に $u \rightarrow 1/r$ に戻し積分定数を代入すると次の関係式を得る。

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{H^2} - \left(\frac{\mu}{H^2} - \frac{1}{r_E} \right) \cos \varphi - \left(\frac{\tan \gamma_E}{r_E} \right) \sin \varphi$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{H^2} (1 - \cos \varphi) + \frac{\cos(\varphi + \gamma_E)}{r_E \cos \gamma_E} \quad (7)$$

ここでパラメータ λ を次式で定義する。

$$\lambda \equiv \frac{r V^2}{\mu}$$

宇宙機の運動エネルギーは $V^2/2$ 、位置エネルギーは μ/r であるから λ は速度エネルギーと位置エネルギーの比の 2 倍を意味する。

位置 $r = r_E$ では λ の値は $\lambda_E = r_E V_E^2 / \mu$ また角運動量は $H = r_E V_E \cos^2 \gamma_E$ であるから上式は次のようにあらわされる。

$$\frac{r_E}{r} = \frac{(1 - \cos \varphi)}{\lambda_E \cos^2 \gamma_E} + \frac{\cos(\varphi + \gamma_E)}{\cos \gamma_E} \quad ; \text{衝突方程式} \quad (8)$$

(7) (8) 式を衝突方程式 (Hit Equation) と称する。

E 点がペリジ点として、位置 $r_E = r_P$ 、パラメータ $\lambda_E = \lambda_P = r_P V_P^2 / \mu$ 、経路角 $\gamma_E = \gamma_P = 0$ と置くと $\lambda_P r_P / r = 1 + \cos \varphi (\lambda_P - 1)$ または

$$r = \frac{\lambda_P r_P}{1 + \cos \varphi (\lambda_P - 1)} \quad (9)$$

ただし

$$V_P^2 / \mu = (1 + e) / a (1 - e)$$

$$\lambda_P = r_P V_P^2 / \mu = 1 + e$$

を代入するとケプラーの標準形となる。

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi} = \frac{H^2/\mu}{1+e\cos\varphi} \quad : \text{ケプラーの標準形}$$

いま軌道上位置を ω (アポジ引数), その点の地心距離, 速度, 経路角 (r_E, V_E, γ_E) が与えられ
ると

$$r = \frac{H^2/\mu}{1-e\cos(\varphi-\omega)} = \frac{H^2/\mu}{1-e(\cos\varphi\cos\omega + \sin\varphi\sin\omega)}$$

衝突方程式から

$$r = \frac{r_E \lambda_E \cos^2 \gamma_E}{1-\cos\varphi + \lambda_E \cos \gamma_E \cos(\varphi + \gamma_E)} = \frac{H^2/\mu}{1-e \left[\cos\varphi \left\{ (1/e) (1-\lambda_E \cos^2 \gamma_E) \right\} + \sin\varphi \left\{ (1/e) \lambda_E \cos \gamma_E \sin \gamma_E \right\} \right]}$$

両式を比較して次の関係式を得る

$$e \sin \omega = \lambda_E \cos \gamma \sin \gamma_E$$

$$e \cos \omega = 1 - \lambda_E \cos^2 \gamma_E$$

両式から, 離心率, アポジ引数, 軌道長半径はそれぞれ次のようにあらわされる。

$$e = \sqrt{\lambda_E (\lambda_E - 2) \cos^2 \gamma_E + 1} \quad : \text{離心率} \quad (10)$$

$$\tan \omega = \frac{\lambda_E \sin \gamma_E \cos \gamma_E}{1 - \lambda_E \cos^2 \gamma_E} \quad : \text{アポジ引数} \quad (11)$$

$$a = r_E / (2 - \lambda_E) \quad : \text{軌道長半径} \quad (12)$$

2) 最高到達点

初期点 E, の状態量を与えられたとき, 最高到達点は $r_a = a(1+e)$ から e, a を代入して次式で表される。

$$r_a = \frac{r_E}{(2-\lambda_E)} \left(1 + \sqrt{1 - \lambda_E (2 - \lambda_E) \cos^2 \gamma_E} \right) \quad (13)$$

初期点 E に於ける周回円速度は $\sqrt{\mu/r_E}$ で表されるので, E 点での速度をこの周回円速度で無次元化して

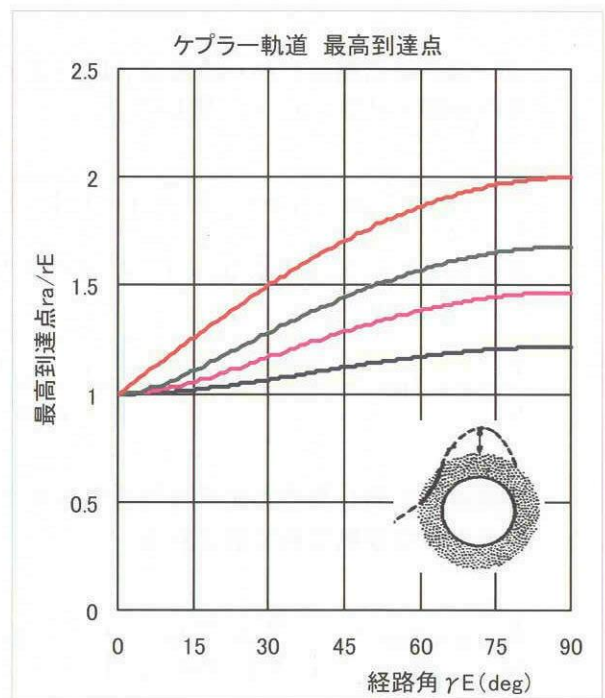
$$\bar{V}_E = V_E / \sqrt{\mu/r_E} \quad : \text{無次元化速度}$$

$$\lambda_E = V_E^2 / (\mu/r_E) = \bar{V}_E^2 \quad \text{となることから}$$

上式は次のようにも表される。

$$\frac{r_a}{r_E} = \frac{1}{(2-\bar{V}_E^2)} \left(1 + \sqrt{1 - \bar{V}_E^2 (2 - \bar{V}_E^2) \cos^2 \gamma_E} \right) \quad (14)$$

(14) 式を右図に示す。



3) 飛行距離

次に衝突方程式を用いて飛行距離(飛行地心角)を求める。三角公式

$$\sin \varphi = 2 \tan^2(\varphi/2) / \{1 + \tan^2(\varphi/2)\}$$

$$\cos \varphi = \{1 - \tan^2(\varphi/2)\} / \{1 + \tan^2(\varphi/2)\}$$

を用いて(7)式衝突方程式を変形すると $\tan(\varphi/2)$ に関する2次方程式が得られる。

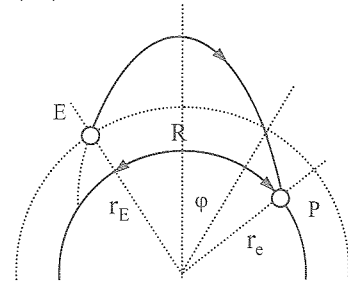
$$\left(\frac{\mu}{h^2} - \frac{1}{r_E} - \frac{1}{r} \right) \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2 \left(\frac{\tan \gamma_E}{r_E} \right) \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r} \right) = 0 \quad (15)$$

ここで係数 a, b, c を次のようにおくと

$$a(r) = 2 / r_E \lambda_E \cos^2 \gamma_E - 1 / r_E - 1 / r \quad (16)$$

$$b = \tan \gamma_E / r_E \quad (17)$$

$$c(r) = 1 / r_E - 1 / r \quad (18)$$



(15)式は

$$a(r) \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2b \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + c(r) = 0 \quad (19)$$

で現され、地心角 φ は r の関数として次式で表される。

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{b + \sqrt{b^2 - a(r)c(r)}}{a(r)} \quad (20)$$

(20)式から初期点 E から地表点 P に到達するまでの飛行距離 E-P は $r = r_e$ と置いて

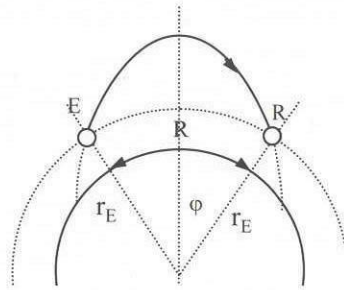
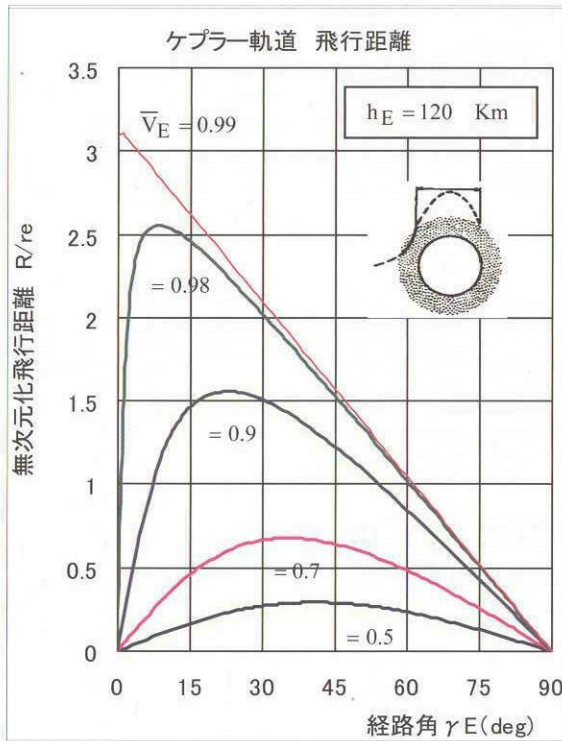
$$\frac{R}{r_e} = \varphi = 2 \tan^{-1} \left\{ \left(b + \sqrt{b^2 - a(r_e)c(r_e)} \right) / a(r_e) \right\} \quad (21)$$

または a, b, c, $\lambda_E = V_E^2 / (\mu / r_E) = \bar{V}_E^2$ を代入して

$$\frac{R}{r_e} = \varphi = 2 \tan^{-1} \left\{ \frac{\tan \gamma_E + \sqrt{\tan^2 \gamma_E + \left(2 / \lambda_E \cos^2 \gamma_E - 1 - r_E / r_e \right) (1 - r_E / r_e)}}{2 / \bar{V}_E^2 \cos^2 \gamma_E - 1 - r_E / r_e} \right\} \quad (22)$$

初期点 E と同じ高度の点 R に到達するまでの飛行距離は $r = r_E$ と置くと次のような簡単な形で表される。

$$\frac{R}{r_e} = \varphi = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\sin \gamma_E \cos \gamma_E}{1 / \bar{V}_E^2 - \cos^2 \gamma_E} \right) \quad (23)$$



4) 飛行時間

近地点からの角度 $\Theta = \pi - \omega + \phi$ および角運動量保存に関する(3)式 $r^2 \dot{\phi} = h$ から

$$\frac{dt}{d\Theta} = \frac{r^2}{H} \tag{24}$$

$r = (h^2/\mu) / (1 + e \cos \Theta)$ を代入して積分すると次式を得る。

$$t = -\frac{H^3}{\mu} \int_0^{\Theta} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \tag{25}$$

次に被積分関数 $1/(1 + e \cos \Theta)^2$ を展開すると次式で表される。

$$\frac{1}{(1 + e \cos \Theta)^2} = \frac{1}{(1 - e^2)} \left\{ \frac{1}{(1 + e \cos \Theta)} - \frac{d}{d\Theta} \left(\frac{e \sin \Theta}{1 + e \cos \Theta} \right) \right\}$$

(17)式に代入して、ただし $h = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$

$$t = \sqrt{\frac{a^3 (1 - e^2)}{\mu}} \left\{ \int_0^{\Theta} \frac{d\Theta}{(1 + e \cos \Theta)} - \left[\frac{e \sin \Theta}{1 + e \cos \Theta} \right]_0^{\Theta} \right\} \tag{26}$$

上式の第2項の積分は $\xi = \tan(\Theta/2)$ と置くと

$$\int_0^\Theta \frac{d\Theta}{(1+e \cos \Theta)} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{(1+e) + (1+e)\xi^2} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \xi \right) \quad (27)$$

$$F(\Theta) \equiv \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\Theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \Theta}{1+e \cos \Theta} \right\} \quad (28)$$

と置く。

$$\Theta_1 = \pi - \omega = \pi - \tan^{-1} \left(\frac{\lambda_E \sin \gamma_E \cos \gamma_E}{1 - \lambda_E \cos \gamma_E} \right) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \cos^{-1} \left\{ \left(\frac{a(1-e^2)}{r_e} - 1 \right) \frac{1}{e} \right\} \\ &= \cos^{-1} \left\{ \left(\frac{r_E \lambda_E (2 - \lambda_E) \cos^2 \gamma_E}{r_e (2 - \lambda_E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_E (2 - \lambda_E) \cos^2 \gamma_E}} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

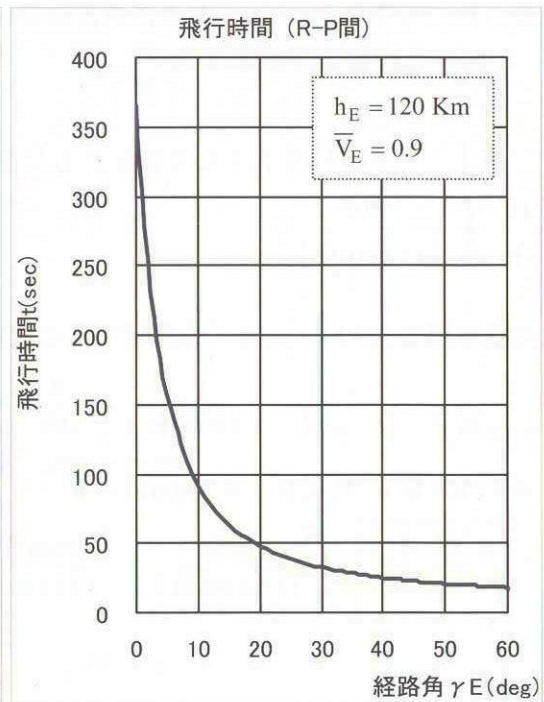
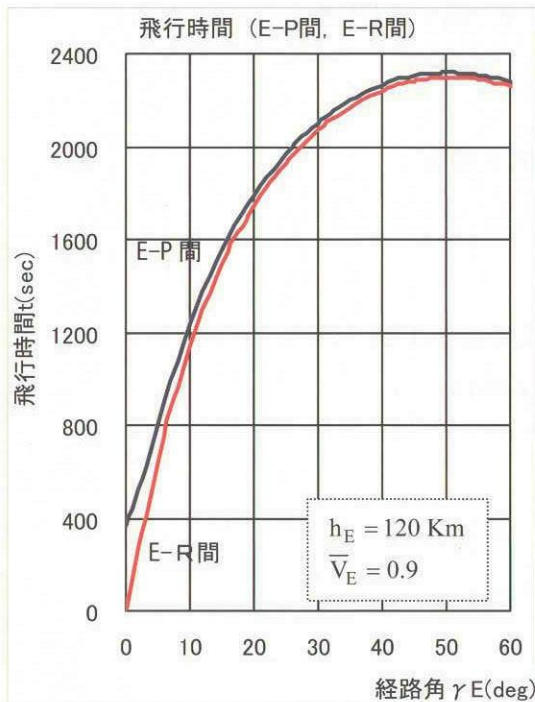
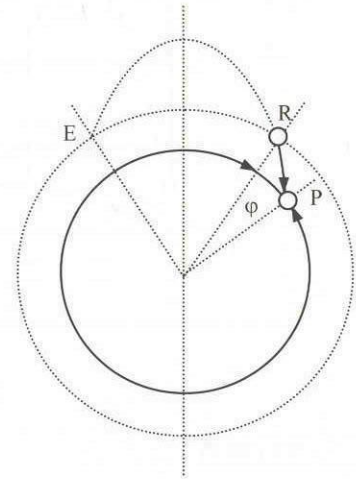
とすると高度 h_E から地表面間 (E-P 間) の飛行時間 T_{EP} 同じ高度間 (E-R 間) T_{ER} あるいは高度 h_E から地表面間 (R-P 間) の飛行時間 T_{RP} はそれぞれ次式で表される。

$$T_{EP} = 2\pi\sqrt{a^3/\mu} - F(\Theta_0) - F(\Theta_1) \quad (31)$$

$$T_{ER} = 2\pi\sqrt{a^3/\mu} - 2F(\Theta_1) \quad (32)$$

$$T_{RP} = F(\Theta_1) - F(\Theta_0) \quad (33)$$

ここで $2\pi\sqrt{a^3/\mu}$ は楕円軌道1周の飛行時間である。



5) 初期速度と初期経路角

$r = r_p = r_c$ $\varphi = \varphi_p$ と置けば無次元化速度 $\bar{V}_E = V_E / \sqrt{\mu/r_E}$ で表すと初期経路角 γ_E と初期速度 V_E の関係は

$$\bar{V}_E^2 = \frac{1 - \cos \varphi}{(r_E/r_c) \cos^2 \gamma_E - \cos \gamma_E \cos(\varphi + \gamma_E)} \quad (34)$$

$\gamma_E = 0$ の時 $\bar{V}_E(0) = 1$

$\varphi = 5, 15, 30, 60, 90, 120, 160, 180$ のとき $V_E(\gamma_E, \varphi)$ を図示する。

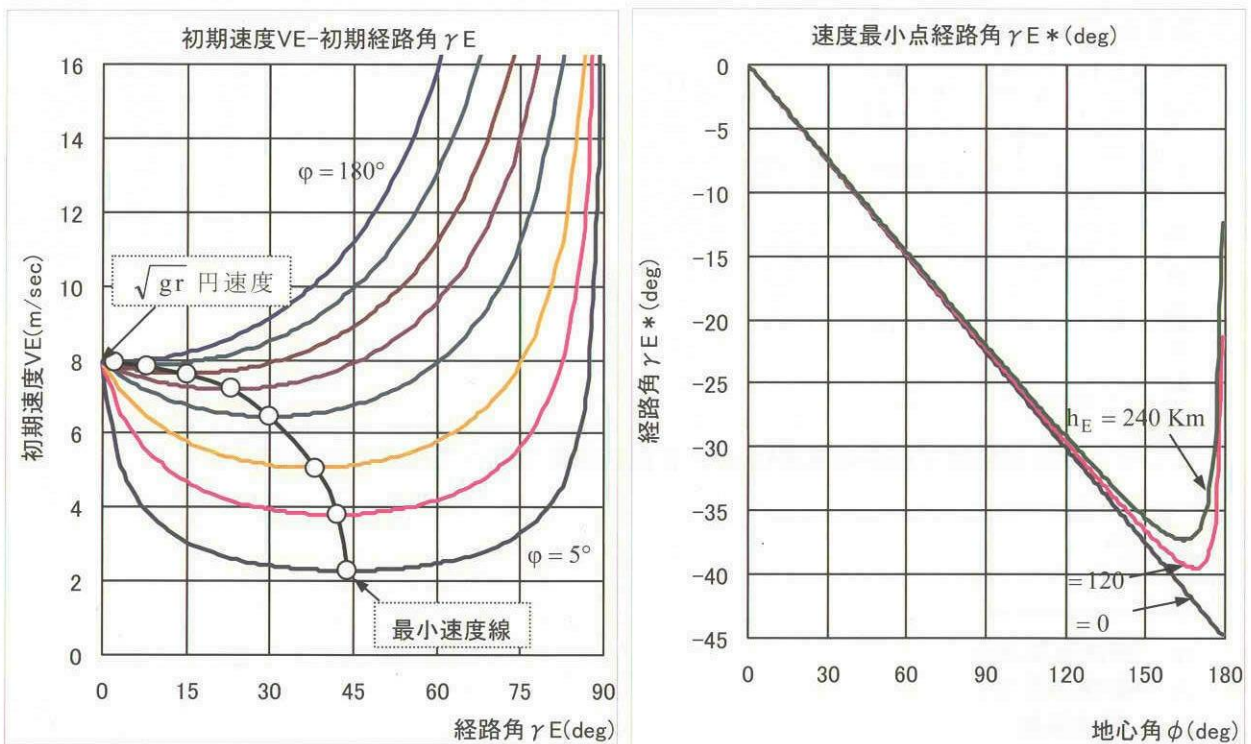
これより同じ飛行地心角(飛行距離) φ に対して2つの経路角があることがわかる。経路角は小さい方をアンダー・ロフテッド軌道, 大きい方をオーバー・ロフテッド軌道と称している。また速度が最小となる経路角があり, また速度が最小となる経路角, 最適(エネルギー最小)経路角が存在する。

これは $dV_E/d\gamma_E = 0$ から求めることができ、

極小点を与える条件は $(r_E/R_e) \sin 2\gamma_E^* + \cos \varphi \sin 2\gamma_E^* + \sin \varphi \cos 2\gamma_E^* = 0$ から

$$\tan 2\gamma_E^* = -\frac{\sin \varphi}{(r_E/r_c) + \cos \varphi} = -\frac{\sin \varphi}{(1 + h_E/r_c) + \cos \varphi} \quad (35)$$

$h_E/R_e = 0, 0.02, 0.05$ のとき $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ の範囲で $\gamma_E^*(\varphi)$ を下図に示す。



空気力を無視した場合の軌道のさらに詳細な解析法を 付録-9 再突入宇宙機の軌道 (f, g 級数法) に示す。

6. 再突入宇宙機の弾道軌道

6-1 1次オーダーの解

宇宙機の大気圏再突入軌道の代表的な軌道である弾道軌道(揚力がない状態での飛行)の軌道特性について記す。弾道軌道についてはGazley, Allen, Eggers, Lohらにより古くから検討されている。空気力が支配的な範囲では解析的に軌道を求めることができ、空力荷重、空力加熱の推定が容易にできる。このような仮定から導出されたGazley, Allen, Eggersの解では経路角が一定と成る、すなわち直線軌道となる特徴があり1次オーダーの解とされている。

弾道飛行の場合を考え、次の仮定を設定する

- 仮定 1) $L/D = 0$
 2) $D/m \gg g \sin \gamma$
 3) $(gr - V^2/2) \cos \gamma \approx 0$

1)は弾道飛行の条件 2)は空気力(抗力)が重力成分より十分大きいとする。3)は重力と遠心力の差の法線方向の成分を無視したもので、平坦地球を仮定したのと等価である。

速度座標系運動方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma = -\frac{\rho V^2}{2\Delta} \quad (1)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (3)$$

$$\frac{ds}{dt} = V \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \quad (5)$$

ここで Δ は弾道係数で機体の翼面積 m/A を抵抗係数で割って次式で定義される

$$\Delta = \frac{m}{C_D A}$$

m : 機体質量 (Kg)

A : 基準面積 (m^2)

C_D : 抵抗係数

各種機体形状に対する弾道係数のオーダーは4.項参照。

等温大気モデル $\rho = \rho_{SL} \exp(-\beta h)$, と(5)式から密度の時間変化率は次のように表わされる。

$$\frac{dp}{dt} = -\rho\beta V \sin\gamma \quad (6)$$

独立変数を (6) 式 $dp/dt = -\rho\beta V \sin\gamma$ を用いて時刻 t から密度の関数で表すと

$$\frac{d(V^2/gr)}{d\rho} = \frac{1}{\Delta\beta} \frac{(V^2/gr)}{\sin\gamma} \quad (7)$$

$$\frac{d\cos\gamma}{d\rho} + \frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{ds}{d\rho} = -\frac{1}{\beta \sin\gamma_E} \frac{1}{\rho} \quad (9)$$

$$\frac{dx}{d\rho} = -\frac{1}{\beta \tan\gamma_E} \frac{1}{\rho} \quad (10)$$

仮定 3) から (8) 左辺第 2 項は 0 となるから

$$\frac{d\cos\gamma}{d\rho} = 0 \quad (11)$$

$$(9) \text{ から } \cos\gamma = \cos\gamma_E \text{ または} \\ \gamma = \gamma_E \quad (12)$$

すなわち経路角 γ は一定となる。ただし (3) の仮定による一定経路角飛行は弾道飛行の全飛行領域に亘って適当な仮定ではない。

$$\frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) = 0$$

上式で経路角が一定で速度が小さくなると、この仮定が成り立たなくなる。従って再突入後の速度の大きい範囲(領域 A) についてのみ成り立つ仮定である。

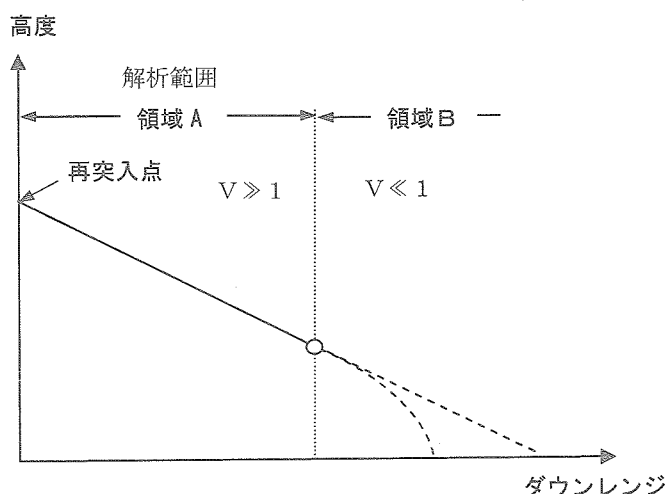
領域 B については次項に示す。

以下数式を簡易に表現する為に密度の逆数の次元を持つパラメータ a を定義する。これを弾道パラメータと称する。弾道パラメータは弾道係数 Δ と初期経路角の正接 $\sin\gamma_E$ の積に逆比例する。

$$a \equiv -\frac{1}{2\Delta\beta\sin\gamma_E} > 0 \quad (13) \quad \text{: 弾道パラメータ}$$

一の符号は初期経路角 $\gamma_E < 0$ と定義したことからパラメータ a を正で定義するために付加した。文献によっては初期経路角 $\gamma_E > 0$ と定義して $a \equiv 1/\Delta\beta\sin\gamma_E$ で定義する場合もあるので注意を要する。

(7)-(10) は容易に積分できる。



(2) 速度, 密度(高度), 高度変化率

(10) 式を積分して 密度(高度)対速度の関係式が次のように求めることができる。

$$\bar{V}^2 / \bar{V}_E^2 = (V/V_E)^2 = \exp\{-2a(\rho - \rho_E)\} \quad (14)$$

インターフェース高度に置ける密度 ρ_E は非常に小さく高度の低下にともなって密度は指数関数的に増加することから $\rho_E \ll \rho$ と近似すると ρ_E の項は無視できる。

$$\frac{V}{V_E} = \exp\{-a(\rho - \rho_E)\} \approx \exp(-a\rho) \quad (15)$$

(13) 式から逆に密度を求めて海上面密度との比を求めると

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_E}{\rho_{SL}} \left\{ 1 + \frac{1}{a\rho_E} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \quad (16)$$

(6) 式 $\rho = \rho_{SL} e^{-\beta h}$ を用いると高度 h は速度の関係数として次式で表される。

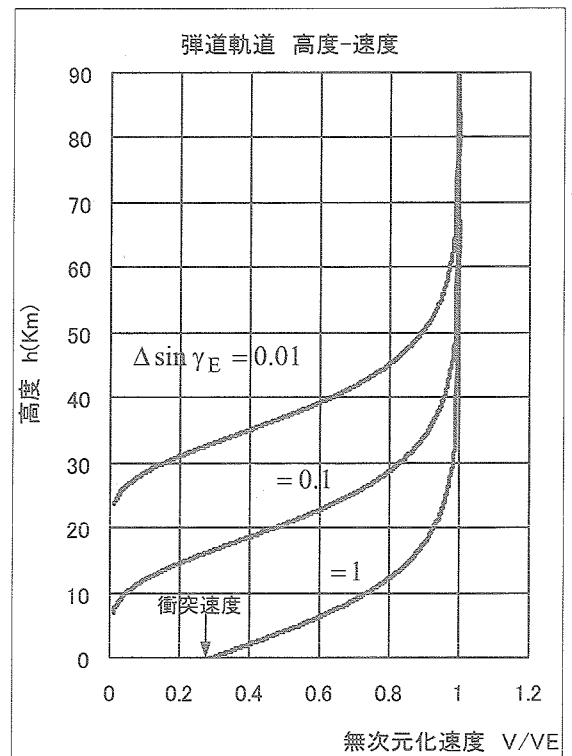
$$h = h_E - \frac{1}{\beta} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{a\rho_E} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \quad (17)$$

$h_E = 120\text{Km}$, $\beta^{-1} = 7.16\text{Km}$, $V_E = 7910\text{m/sec}$ の時

$$\Delta \sin \gamma_E = 0.01$$

$$\Delta \sin \gamma_E = 0.1$$

$\Delta \sin \gamma_E = 1$ の場合について右図に示す。



$a=1?$ の場合には十分に減速できずに地表面 ($h=0$) に速度 $V=0.3 \times V_E$ で衝突することになる。

高度変化率は (3) 式 $\dot{h} = V \sin \gamma_E$ から次式で表され速度に比例する。

$$\frac{dh}{dt} = V_E \sin \gamma_E \left(\frac{V}{V_E} \right) \quad (18)$$

(3) 加速度/抗力加速度/空力荷重

仮定 2) から重力を無視したことから加速度と抗力加速度, 空力荷重は等しく次式で表される。

$$G = -\frac{dV}{dt} = \frac{D}{m} = \frac{\rho_E V_E^2}{2\Delta} \left(\frac{\rho}{\rho_E}\right) \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \quad (19)$$

に(13)(14)式を代入して加速度/抗力加速度を密度の関数、あるいは速度の関数で表すと次式となる。

$$\frac{G}{g} = -\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{\rho_E V_E^2}{2\Delta g} \left(\frac{\rho}{\rho_E}\right) \exp\left\{2a\rho_E \left(1 - \frac{\rho}{\rho_E}\right)\right\} \approx \frac{V_E^2}{2\Delta g} \rho \exp(-2a\rho) \quad (20)$$

$$= \frac{\rho_E V_E^2}{2\Delta g} \left\{ \frac{2}{\lambda_E \rho_E} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) + 1 \right\} \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \approx -\frac{\beta V_E^2}{g} \sin\gamma_E \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \quad (21)$$

周回円軌道 $V_E^2 = gr$ からの再突入の場合には

$$\frac{G}{g} = -\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = -\beta r \sin\gamma_E \left(\frac{V}{\sqrt{gr}}\right)^2 \ln\left(\frac{\sqrt{gr}}{V}\right) \quad (22)$$

空力荷重(加速度)が最大となる密度、高度は(19)式を密度で微分して $d(-dV/dt)/d\rho = 0$ とおくと

$$\rho_{D\max} = -\Delta\beta \sin\gamma_E = 1/2a \quad (23)$$

$$h_{D\max} = -\frac{1}{\beta} \ln\left(-\frac{\Delta\beta \sin\gamma_E}{\rho_{SL}}\right) = \frac{1}{\beta} \ln(2a\rho_{SL}) \quad (24)$$

空力荷重が最大となる速度は(20)式を速度で微分して $d(-dV/dt)/dV = 0$ と置き、次式で得られる。

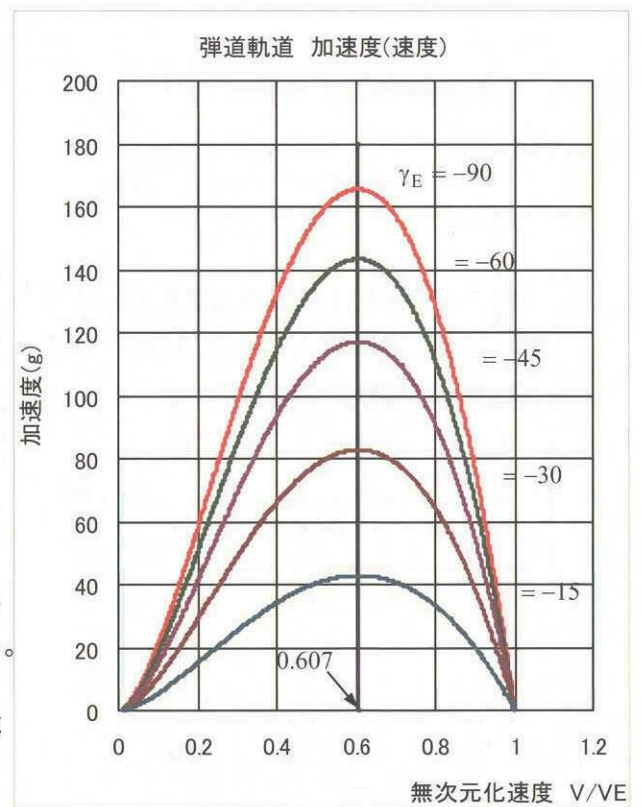
また $a\rho_E \ll 1$ から次のように近似できて機体形状とは無関係に次式で表される。

$$\frac{V_{D\max}}{V_E} = \exp\left(-\frac{1}{2} - a\rho_E\right) \approx \frac{1}{e^{1/2}} = 0.607 \quad (25)$$

$$\left(\frac{G}{g}\right)_{\max} = \left(-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g}\right)_{\max} = -\frac{\beta V_E^2 \sin\gamma_E}{2eg} \quad (26)$$

周回円軌道 $V_E^2 = gr$ からの再突入の場合には

$$\left(\frac{G}{g}\right)_{\max} = \left(-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g}\right)_{\max} = -\frac{\beta r \sin\gamma_E}{2e} \approx -\frac{930 \sin\gamma_E}{2 \times 2.7183}$$



この場合最大加速度は初期経路角の正接を定数倍した加速度 (g 単位) が加わることとなる。次に無次元化高度を次式で定義する。

空力荷重を高度の関数として表す場合には (19) 式 $G/g = (V_E^2/2\Delta g) \exp(-2a\rho)$ を用いて表すことができるがパラメータ V_E, Δ, γ_E を必要とすることから、パラメータの数を減らすため無次元化高度を次式で定義する。

$$\hat{h} \equiv \frac{2\Delta\beta}{\rho} \quad (27)$$

このとき

$$a\rho = -1/\hat{h} \sin \gamma_E$$

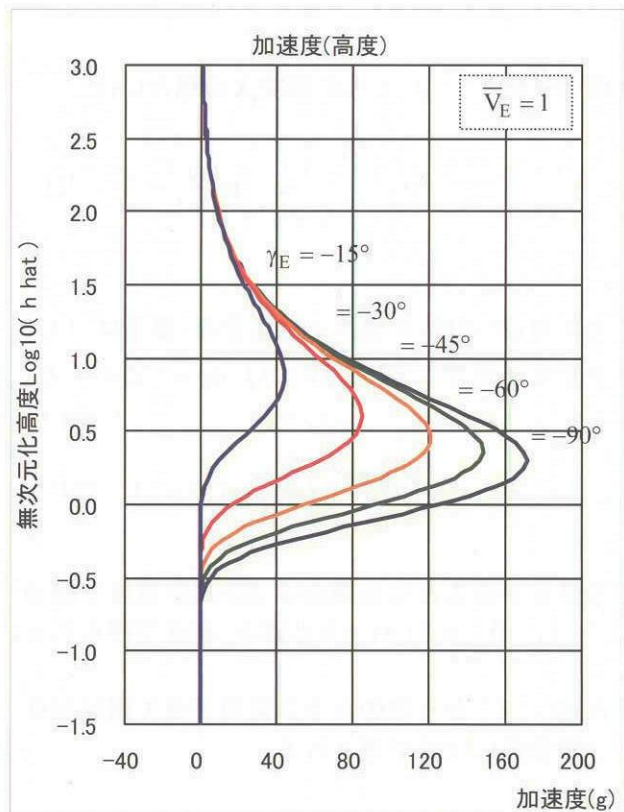
$$\rho V_E^2/2\Delta g = \beta V_E^2/\hat{h} g$$

で表されるから

$$\frac{G}{g} = \frac{\beta V_E^2}{\hat{h} g} \exp\left(\frac{2}{\hat{h} \sin \gamma_E}\right) \quad (28)$$

特に初期速度を周回円周速度 $V_E = \sqrt{gr}$ とすると経路角 γ_E のみをパラメータとして \hat{h} の関数で表される。

$$\frac{G}{g} = \frac{\beta r}{\hat{h}} \exp\left(\frac{2}{\hat{h} \sin \gamma_E}\right) \quad (29)$$



(4) 空力加熱率 :

空力加熱率は次式で表される。(付録-4 再突入宇宙機の空力加熱率参照)

$$dQ/dt = K_Q \rho^n V^3$$

ここで密度の指数 n は $n=1$ のとき平均空力加熱率を、また $n=1/2$ のとき澱点空力加熱率を表す。(13), (14) 式を代入して密度、あるいは速度の関数としてあらわすと次の通り。

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho_E^n V_E^3 \left(\frac{\rho}{\rho_E}\right)^n \exp\left\{3a\rho_E \left(1 - \frac{\rho}{\rho_E}\right)\right\} \approx K_Q V_E^3 \rho^n \exp(-3a\rho) \quad (30)$$

$$= K_Q \rho_E^n V_E^3 \left\{ \frac{1}{a\rho_E} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) + 1 \right\}^n \left(\frac{V}{V_E}\right)^3 \approx K_Q \rho_E^n V_E^3 \left(\frac{1}{a\rho_E}\right)^n \left(\ln\frac{V_E}{V}\right)^n \left(\frac{V}{V_E}\right)^3 \quad (31)$$

ここで無次元化するために

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_0 = K_Q \rho_E^n V_E^3$$

と置くと無次元化加熱率は次式で表される。

$$\left(\frac{d\hat{Q}}{dt}\right) = \left(\ln\frac{V_E}{V}\right)^n \left(\frac{V}{V_E}\right)^3 \quad (32)$$

$n=1$ のとき、平均空力加熱率は無次元化高度の関数として次式で得られる。

$$\left(\frac{d\hat{Q}}{dt}\right)_{\text{avg}} = \left(\ln\frac{V_E}{V}\right) \left(\frac{V}{V_E}\right)^3 \quad (33)$$

$n=1/2$ のとき澱点空力加熱率が無次元化高度の関数として次式で得られる。

$$\left(\frac{d\hat{Q}}{dt}\right)_{\text{avg}} = \left(\ln\frac{V_E}{V}\right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_E}\right)^3 \quad (34)$$

加熱率の最大値

加熱率が最大となる密度、高度は $d(-dQ/dt)/d\rho=0$ と置いて次式で表される。

$$\rho_{Q\text{max}} = -(2n/3) \Delta\beta \sin\gamma_E = n/3a \quad (35)$$

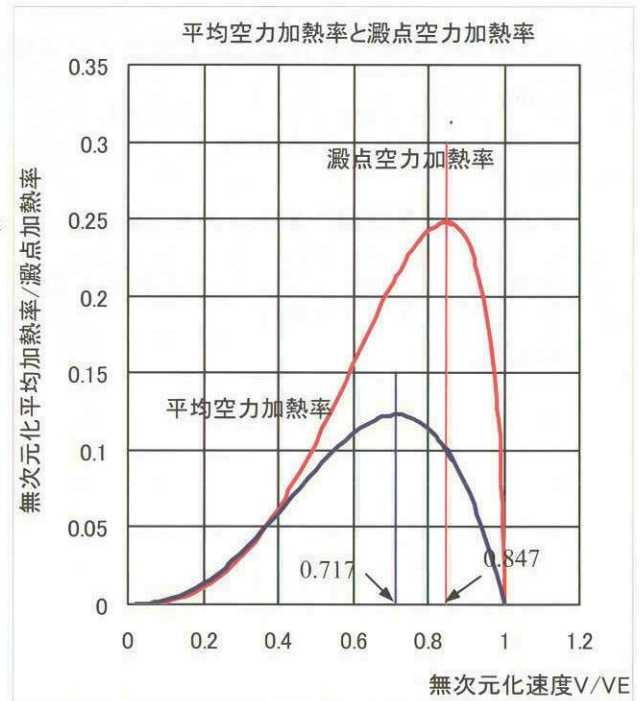
$$h_{Q\text{max}} = -\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{n}{3a\rho_{SL}}\right) \quad (36)$$

加熱率が最大となる速度は

$d(-d\hat{Q}/dt)/d(V/V_E)=0$ と置いて次式で表される。これより加熱率が最大となる速度は $V_{Q\text{max}}/V_E$ は機体の形状には無関係に定数となる。

$$\frac{V_{Q\text{max}}}{V_E} = \exp\left(-\frac{n}{3} + a\rho_E\right) \approx \frac{1}{e^{n/3}} \quad (37)$$

$$\left(\frac{d\hat{Q}}{dt}\right)_{\text{max}} \approx \left(\frac{n}{3}\right)^n \frac{1}{e^n} \quad (38)$$



$(V/V_E)_{\text{max } n=1/2} = 1/e^{2/3} = 0.8465$: 澱点空力加熱率最大時の速度

$(V/V_E)_{\text{max } n=1} = 1/e^{1/3} = 0.7165$: 平均空力加熱率最大時の速度

これより再突入後、最初に澱点空力加熱率が最大となり続いて平均空力加熱率が最大値と

なる。

(29)式から加熱率を 抗力加速度の場合と同様に無次元化高度で表すと $\hat{h} = 2\Delta\beta/\rho$ から

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho_{SL}^n V_E^3 \left(\frac{2\Delta\beta}{\rho_{SL} \hat{h}} \right)^n \exp\left(\frac{3}{\hat{h} \sin \gamma_E} \right) \quad (39)$$

ここで

$$\left(\frac{dQ}{dt} \right)_0 = K_Q \rho_{SL}^n V_E^3 \left(\frac{2\Delta\beta}{\rho_{SL}} \right)^n$$

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = \frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_0} : \text{無次元化加熱率}$$

と置くと

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = \frac{1}{\hat{h}^n} \exp\left(\frac{3}{\hat{h} \sin \gamma_E} \right) \quad (40)$$

$n=1$ のとき、平均空力加熱率は無次元化高度の関数として次式で得られる。

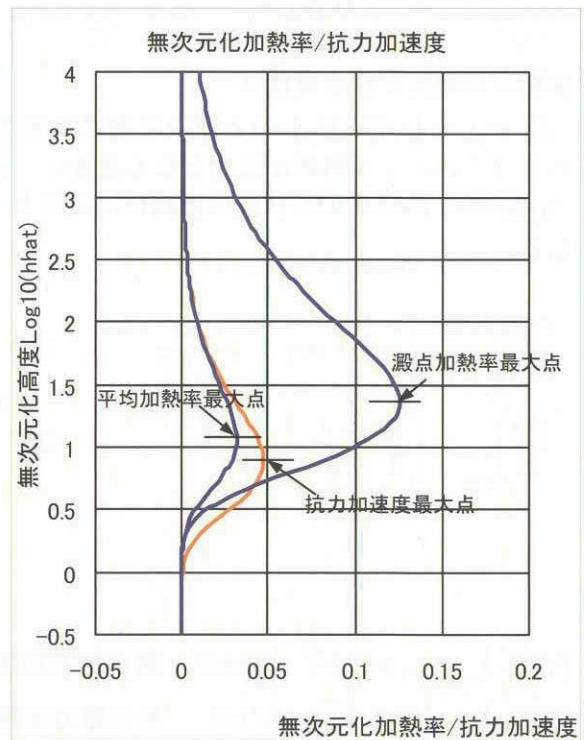
$$\left(\frac{d\hat{Q}}{dt} \right)_{\text{avg}} = \frac{1}{\hat{h}} \exp\left(\frac{3}{\hat{h} \sin \gamma_E} \right) \quad (41)$$

$n=1/2$ のとき澱点空力加熱率が無次元化高度の関数として次式で得られる。

$$\left(\frac{dQ}{dt} \right)_{\text{stg}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{h}}} \exp\left(\frac{3}{\hat{h} \sin \gamma_E} \right) \quad (42)$$

(41) (42) 式を右図に示す。また (29) 式空力

加重 $\frac{G}{\beta_{rg}} = \frac{1}{\hat{h}} \exp\left(\frac{2}{\hat{h} \sin \gamma_E} \right)$ をあわせて図示した。



(5) 飛行距離/レンジ :

飛行距離/レンジは(3) (5) 式の独立変数を t から密度に変換すると

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{1}{\cos\gamma_E} \frac{dx}{d\rho} = -\frac{1}{\beta \sin\gamma_E} \frac{1}{\rho} \quad (43)$$

上式を積分すると飛行距離/レンジは次式で表される。

$$\frac{s}{r} = \frac{1}{\cos\gamma_E} \frac{x}{r} = -\frac{1}{\beta r \sin\gamma_E} \ln\left(\frac{\rho_{SL}}{\rho_E} \frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \approx -\frac{1}{\beta r \sin\gamma_E} \ln\left\{\frac{1}{a\rho_E} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right)\right\} \quad (44)$$

(6) 式 $\ln(\rho/\rho_{SL}) = -\beta h$ を用いると

$$\frac{x}{r} = -\frac{1}{\beta r \tan\gamma_E} \left\{ \ln\left(\frac{\rho_{SL}}{\rho_E}\right) + \ln\left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \right\} = -\frac{h - h_E}{r \tan\gamma_E}$$

$$\frac{h_E - h}{x} = -\tan\gamma_E$$

仮定の通り高度 h 対ダウンレンジ x は直線となる。

(6) 飛行時間 t

飛行時間 t は以下に導出するように積分指数関数で表される。

$d\rho/dt = -\rho\beta V \sin\gamma_E$, $V/V_E = \exp(-a\rho)$ から

$$\frac{dt}{d(a\rho)} = -\frac{1}{\beta V_E \sin\gamma_E} \frac{1}{a\rho} \left(\frac{V_E}{V}\right) \approx -\frac{1}{\beta V_E \sin\gamma_E} \frac{\exp(a\rho)}{a\rho} \quad (45)$$

上式を積分すると

$$t - t_E = -\frac{1}{\beta V_E \sin\gamma_E} \int_{a\rho_E}^{a\rho} \frac{\exp(a\rho)}{(a\rho)} d(a\rho) \quad (46)$$

右辺の積分は積分指数関数 $\bar{E}_i(Z)$ で表される。積分指数関数は

$$\bar{E}_i(Z) = \int_{-\infty}^Z \frac{e^u}{u} du = 0.5772 + \ln Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^n}{n n!} \quad (47)$$

で定義される。(補足参照) この積分指数関数を用いると次式で表される。

$$t - t_E = -\frac{1}{\beta V_E \sin\gamma_E} \left\{ \bar{E}_i(a\rho) - \bar{E}_i(a\rho_E) \right\} \quad (48)$$

積分指数関数を級数展開して密度または高度で表すと次の通り。

$$t = -\frac{1}{\beta V_E \sin\gamma_E} \left\{ \ln\left(\frac{\rho}{\rho_E}\right) + a(\rho - \rho_E) + \frac{a^2}{4}(\rho^2 - \rho_E^2) + \frac{a^3}{18}(\rho^3 - \rho_E^3) + \frac{a^4}{96}(\rho^4 - \rho_E^4) + \dots \right\} \quad (49)$$

ここで係数 $-1/\beta V_E \sin\gamma_E$ は時間の単位を持つことから $t_0 = -1/\beta V_E \sin\gamma_E$ と置くと

$$\frac{t}{t_0} = \beta(h_E - h) + a\rho_{SL} e^{-\beta h} + \frac{(a\rho_{SL})^2}{4} e^{-2\beta h} + \frac{(a\rho_{SL})^3}{18} e^{-3\beta h} + \frac{(a\rho_{SL})^4}{96} e^{-4\beta h} + \dots \quad (50)$$

ただし $\rho_E \ll \rho$

飛行時間の速度による評価を行うと(13)式から速度は密度の関数として $a\rho = \ln(V_E/V)$ で表されるから(42)式の $a\rho$ を消去すると速度が $V_1 \rightarrow V_2$ 間の飛行時間は次式で表される。こ

の場合機体形状に無関係に飛行時間が算出できる。

$$\frac{t}{t_0} = \bar{E}_i \left\{ \ln \left(\frac{V_E}{V_2} \right) \right\} - \bar{E}_i \left\{ \ln \left(\frac{V_E}{V_1} \right) \right\} \quad (51)$$

また(45)式を用いると任意の速度間の飛行時間が得られる。再突入時の速度 V_E から任意の速度 V 間の飛行時間は、 $V_1 \rightarrow V_E$ 、 $V_2 \rightarrow V$ と置いて次の指数関数で表される。

$$\frac{t}{t_0} = \bar{E}_i \left\{ \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \right\} - \bar{E}_i(0) = \bar{E}_i \left\{ \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \right\}, \quad (52)$$

ただし $\bar{E}_i(0) = 0$ である。

また空力荷重が最大 $(D/m)_{\max}$ となる時点からマッハ数が1となる $M_\infty = 1$ 時点間の飛行時間は $V_2 \rightarrow V_E e^{-1/2}$ 、 $V_1 \rightarrow 304.8$ (音速) と置くと次式で与えられる。空力荷重が最大となる時点の速度 V_E/V_1 は $V_E/V_1 = e^{1/2}$ から

$$\frac{t}{t_0} = \bar{E}_i \left\{ \ln \left(\frac{V_E}{V_{M=1}} \right) \right\} - \bar{E}_i \left(\frac{1}{2} \right)$$

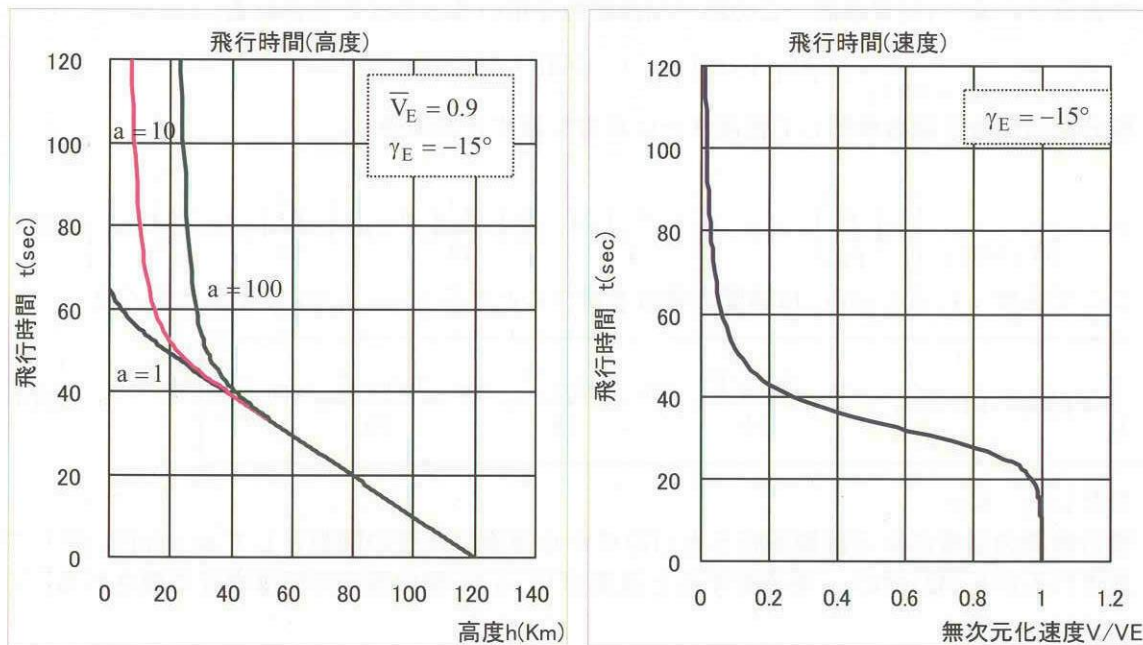
$$\ln(V_E/V_2) = \ln(V_E/V_{M=1}) = \ln(7910/304.8) = \ln 26.0 = 3.26$$

$$\ln(V_E/V_1) = 1/2$$

以上より $\gamma_E = -15^\circ$ の場合飛行時間は次の通り。

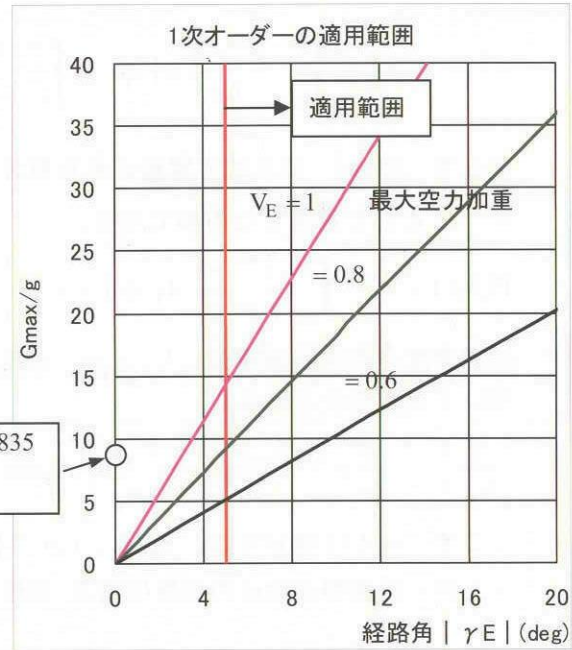
$$t = -7160/7910 * \sin(-15^\circ) * (\bar{E}_i(3.26) - \bar{E}_i(0.5)) = 20.476 - 9.087 = 42.3 \text{ sec}$$

飛行時間に関して(44)式(46)式の結果を下図に示す。



適用範囲

1次オーダーの解では初期経路角 $\gamma_E = 0$ では (17) 式 $dh/dt = V_E \sin \gamma_E (V/V_E)$ から高度は変化率は0となり高度低下はないことになる。また空力荷重の最大値は (24) 式 $(G/g)_{max} = -\beta r \sin \gamma_E / 2e$ から0となる。したがって1次オーダーの解は $\gamma_E \ll 1$ の場合には適用できない。 $\gamma_E \ll 1$ の場合に (24) 式を適用すると空力荷重等は過小評価することになる。初期経路角 $\gamma_E = 0$ とした解析では最大空力荷重は $(G/g)_{max} \approx 0.835$ となる。(6-4) 項参照



(II) 垂直弾道飛行軌道と終端速度

直線弾道軌道と特別な例として経路角が $\gamma = -90^\circ$ の垂直弾道軌道について重力加速度の影響を含めて考える。

$\gamma = -90^\circ$ $g = \text{一定}$ の場合運動方程式は次式で表される。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\rho V^2}{2\Delta} + g \quad (53)$$

$d\rho/dt = \rho\beta V$ を用いて独立変数を

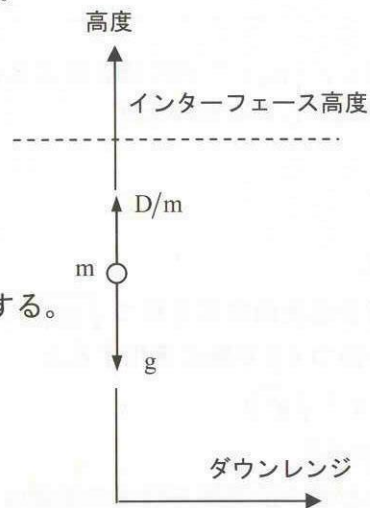
密度に変換する。

$$\frac{dV^2}{d\rho} + \frac{V^2}{\Delta\beta} = \frac{2g}{\rho\beta} \quad (54)$$

右辺を無視すると, (7) 式で $\gamma_E = -90$ と置いた場合と一致する。

$b = 1/\Delta\beta$ $c = g/\beta$: 定数

$$\frac{dV^2}{d\rho} + bV^2 = \frac{2c}{\rho} \quad (55)$$



定数係数1階常微分方程式であるからこれを解くと

$$V^2 = 2ce^{-bp} \left\{ \int_{bp_E}^{bp} \frac{e^{bp} - 1}{bp} d(bp) + \int_{bp_E}^{bp} \frac{d(bp)}{bp} + \text{const} \right\} \quad (56)$$

ここで $E(bp)$ は次式で定義される積分指数関数であり対数項を除くために $e^{bp} - 1$ として定義したものである。

$$E(bp) \equiv e^{-bp} \int_{ap_E}^{ap} \frac{e^{bp} - 1}{ba\rho} d(bp) = e^{-bp} \left\{ 0.577 + (bp) + \frac{(bp)^2}{212} + \frac{(bp)^3}{313} \dots \right\} \quad (57)$$

初期速度を円周回速度とし $V_E^2 = gr$ 速度を V_E で無次元化すると $\ln(\rho/\rho_E) = -\beta(h - h_E)$ を用いて次式で表される。

$$\left(\frac{V}{V_E} \right)^2 = \frac{2}{\beta r} e^{-bp} \left\{ E(bp) + \ln\left(\frac{\rho}{\rho_E}\right) + \text{const} \right\} = \frac{2}{\beta r} e^{-bp} \left\{ E(bp) + \ln\left(\frac{\rho}{\rho_E}\right) + \text{const} \right\} \quad (58)$$

ここで const は積分定数。 $\text{const} = (\beta r/2)e^{bp_E} - E(bp_E)$

以上から垂直弾道軌道の速度は密度(高度)の関数として次式で表される。

$$\left(\frac{V}{V_E} \right)^2 = \frac{2e^{-bp}}{\beta r} \left\{ E(bp) - E(bp_E) \right\} + e^{-b(\rho - \rho_E)} + \frac{2e^{-bp}}{\beta r} (h - h_E) \quad (59)$$

級数展開すると $\hat{\rho}_E \ll \hat{\rho}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{V_E} \right)^2 &= e^{-bp} \left[1 + \frac{2}{\beta r} \left\{ bp + \frac{(bp)^2}{4} + \frac{(bp)^3}{18} + \frac{(bp)^4}{96} + \dots \right\} + \frac{2}{\beta r} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_E}\right) \right] \quad (60) \\ &\approx e^{-bp} \left[1 + \frac{2}{930} \left\{ bp + \frac{(bp)^2}{4} + \frac{(bp)^3}{18} + \frac{(bp)^4}{96} + \dots \right\} + \frac{2}{930} (h - h_E) \right] \end{aligned}$$

ただし $\rho = \rho_{SL} e^{-\beta h}$ (60) 式を無次元化速度 V/V_E を高度 h の関数として右図に示す。

別解)

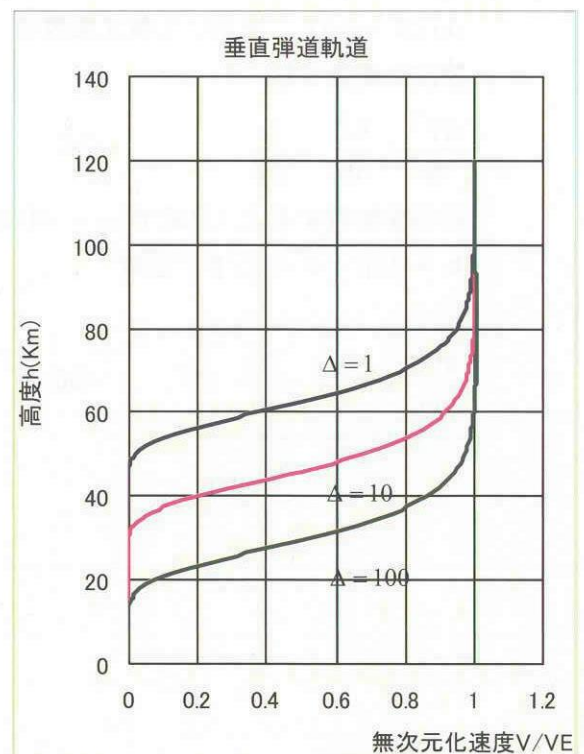
速度を速度の次元を持つ $\sqrt{g/\beta}$ また密度を密度の次元を持つ $\Delta\beta$ で無次元化すると

$$\hat{V} = V / \sqrt{g/\beta}$$

$$\hat{\rho} = \rho / \Delta\beta$$

このときには運動方程式の係数はさらにシンプルとなり次式で表される。

$$\frac{d\hat{V}^2}{d\hat{\rho}} + \hat{V}^2 = \frac{2}{\hat{\rho}} \quad (61)$$



この定数係数1階常微分方程式の解は次式で表される。

$$\hat{V}^2 = 2 e^{-\hat{\rho}} \left\{ \int_{\hat{\rho}_E}^{\hat{\rho}} \frac{e^{\hat{\rho}}}{\hat{\rho}} d\hat{\rho} + \text{const} \right\} \quad (62)$$

これより垂直弾道軌道の速度は次式で表される。

$$\hat{V}^2 = 2 e^{-\hat{\rho}} \{ \bar{E}_i(\hat{\rho}) + C \}$$

積分定数は $\text{const} = (1/2) e^{\hat{\rho}_E} \hat{V}_E^2 - \bar{E}_i(\hat{\rho}_E)$

積分定数Cを代入し $V_E^2 = gr$ を用いて無次元化すると次のように近似できる

$$\left(\frac{V}{V_E} \right)^2 = e^{-(\hat{\rho}-\hat{\rho}_E)} + \frac{2 e^{-\hat{\rho}}}{\beta r} \{ \bar{E}_i(\hat{\rho}) - \bar{E}_i(\hat{\rho}_E) \} \quad (63)$$

級数展開を行うと

$$\left(\frac{V}{V_E} \right)^2 = e^{-\hat{\rho}} \left\{ 1 + \frac{2}{\beta r} \left(\hat{\rho} + \frac{\hat{\rho}^2}{4} + \frac{\hat{\rho}^3}{18} + \frac{\hat{\rho}^4}{96} + \dots \right) + \frac{2}{\beta r} \ln \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_E} \right) \right\} \quad (64)$$

ここで $\hat{\rho} = \rho / \Delta\beta = b\rho$ であるから(55)式と一致する。

終端速度

終端速度は $dV/d\rho = 0$ となる速度, すなはち速度変化率が0となり一定速度で降下する速度とすれば(55)式または(61)式から次式で表される。

$$\frac{dV^2}{d\rho} = -bV^2 + \frac{2c}{\rho} = 0 \quad (65)$$

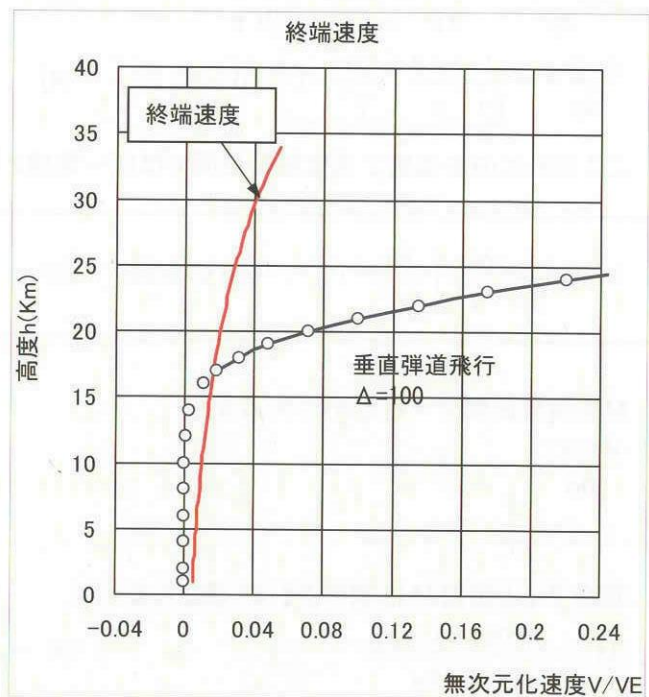
$b = 1/\Delta\beta$ $c = g/\beta$: 定数

$$V = \sqrt{\frac{2\Delta g}{\rho}} \quad (66)$$

周回円速度で無次元化すると $V_E = \sqrt{gr}$ とおいて

$$\frac{V}{V_E} = \sqrt{\frac{2\Delta}{r\rho}} \quad (67)$$

となり, 密度の $\sqrt{\quad}$ に逆比例することがわかる。(67)式を右図に示す。



6-2. 2次オーダーの解

Gazley, Allen&Eggers の1次オーダーの解では飛行経路角 γ は一定($d(\cos\gamma)/dp=0$)と仮定したものであり経路角が大きい場合に適用できる。これに対して Loh は仮定 1) 入射角 γ が小さく 2) 飛行経路角の余弦値 $\cos\gamma$ の密度 ρ に対する変化率はほぼ一定($d(\cos\gamma)/dp=\text{一定}$)のもとに2次オーダーの解を得ている。この結果について記す。

仮定

$$\frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \equiv M : \text{一定}$$

(1) 速度座標系運動方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin\gamma \approx -\frac{\rho V^2}{2\Delta} - g \sin\gamma \quad (1)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos\gamma \quad (2)$$

独立変数を6-1節(6)式 $dp/dt = -\rho\beta V \sin\gamma$ を用いて時刻 t から密度の関数で表すと

$$\frac{d(V^2/gr)}{d\rho} - \frac{1}{\Delta\beta} \frac{(V^2/gr)}{\sin\gamma} = \frac{2}{\beta r} \frac{1}{\rho} \quad (3)$$

$$\frac{d\cos\gamma}{d\rho} + \frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) = 0 \quad (4)$$

ここで(4)式の左辺第2項は積分区間でほぼ一定値となる。そこで

$$M \equiv \frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) : \text{Loh の定数} \quad (5)$$

Mを積分区間で一定と置く。(4)式から

$$\frac{d\cos\gamma}{d\rho} = -M$$

積分すると定数Mは次のようにも表される。

$$M = -\frac{\cos\gamma - \cos\gamma_E}{\rho - \rho_E} \quad (6)$$

(A) 重力項 $2/\rho\beta r$ を無視した場合

(6)式から $\sin\gamma (d\gamma/d\rho) = M$ を用いて(3)式の独立変数を密度 ρ から経路角 γ に変更すると次のように表される。

$$\frac{d(V^2/gr)}{d\gamma} - \frac{1}{\Delta\beta} \frac{(V^2/gr)}{M} = 0 \quad (7)$$

(5),(6)式を積分すると

$$\cos\gamma - \cos\gamma_E = -M(\rho - \rho_E) \quad (8)$$

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) = \frac{1}{2\Delta\beta} \frac{(\gamma - \gamma_E)}{M} \quad (9)$$

(2) 密度(高度)

定数 M の定義(5)式を代入して $\cos\gamma$, $\gamma - \gamma_E$ について解くと

$$\cos\gamma = \frac{\cos\gamma_E}{1 + (1/\beta r)(1/\rho)(gr/V^2 - 1)(\rho - \rho_E)} \quad (10)$$

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) = \frac{\gamma - \gamma_E}{2\Delta\beta} \frac{1}{\frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1\right)} \quad (11)$$

(10) (11) 式が Loh の 2 次オーダーの解である。密度 ρ (高度 h) を指定して逐次近似法により速度 V 、経路角 γ が得られる。

ここで $\rho_E \ll \rho$ と近似すれば(14)(15)式から

$$\cos\gamma \approx \frac{\cos\gamma_E}{1 + (1/\beta r)(gr/V^2 - 1)} \quad (12)$$

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) \approx -\frac{\rho}{2\Delta\beta} \left(\frac{\gamma - \gamma_E}{\cos\gamma - \cos\gamma_E}\right) \quad (13)$$

(12) 式から 経路角 γ は速度の関数として表されるから

$$\gamma \approx \cos^{-1} \left\{ \frac{\cos\gamma_E}{1 + (1/\beta r)(gr/V^2 - 1)} \right\} \quad (14)$$

(13)式から密度 ρ は次式で表され、上記の経路角を代入すれば速度の関数で表される。

$$\rho = -2\Delta\beta \ln\left(\frac{V}{V_E}\right) \left(\frac{\cos\gamma - \cos\gamma_E}{\gamma - \gamma_E}\right)$$

これより高度 h は次式で表される。

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ -\frac{2\Delta\beta}{\rho_{SL}} \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \left(\frac{\cos \gamma - \cos \gamma_E}{\gamma - \gamma_E} \right) \right\} \quad (15)$$

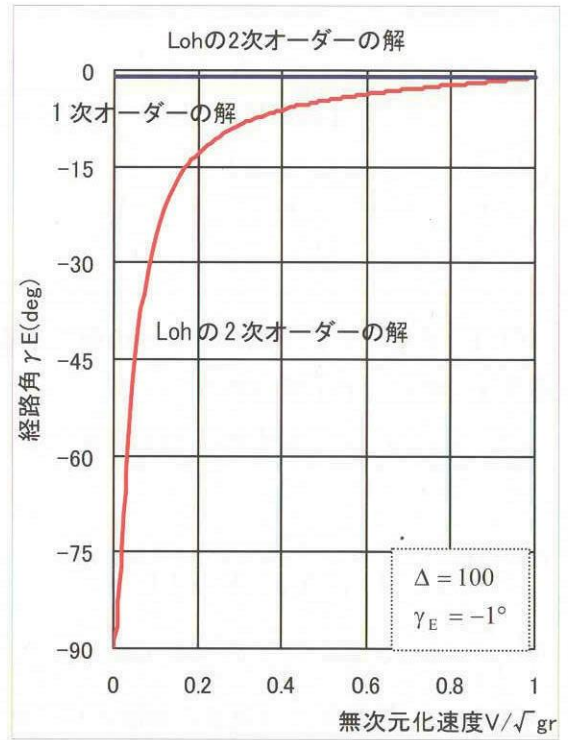
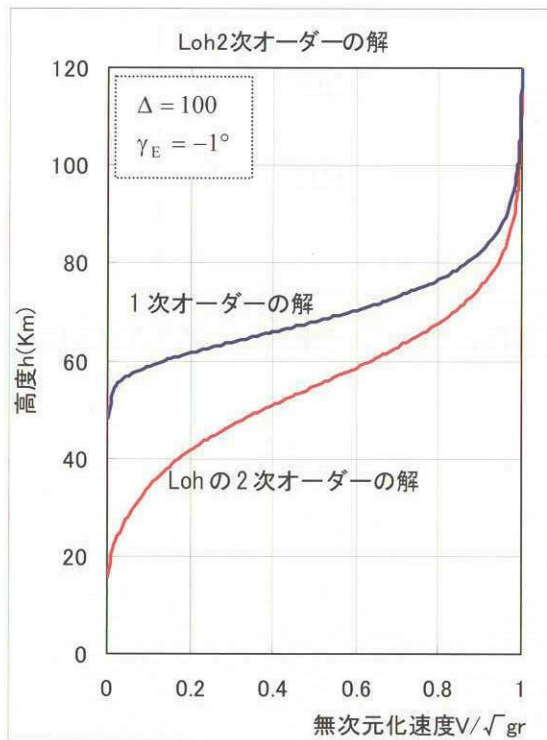
ここで経路角が初期経路角に近いときには $\gamma \approx \gamma_E$

$$\frac{\cos \gamma - \cos \gamma_E}{\gamma - \gamma_E} \approx -2 \left(\sin \frac{\gamma + \gamma_E}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_E}{2} \right) \frac{1}{\gamma - \gamma_E} \approx -\sin \frac{\gamma + \gamma_E}{2}$$

と近似すると(13)(14)式は次式となり, Allen の 1 次オーダーの解と一致する。

$$\ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \approx \frac{\rho}{2\Delta\beta \sin \gamma_E} \quad : 1 \text{ 次オーダーの解}$$

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_E}{\rho_{SL}} \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \right\} : 1 \text{ 次オーダーの解}$$



(3) 加速度/抗力加速度:

(1)式から

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{D}{m} = \frac{\rho V^2}{2\Delta} \quad (16)$$

加速度/抗力加速度が最大値をとる条件は $d(-dV/dt)/dt = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{dV}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{D}{m} \right) \approx -\frac{\rho V^3}{2\Delta^2} (\Delta\beta \sin\gamma + \rho) = 0$$

から最大値をとる条件は次式で表される。

$$\rho_{\max} = -\Delta\beta \sin\gamma_{\max} \quad (17)$$

(12),(13)式に(17)および $V_E = \sqrt{gr}$ を代入して次式を得る。

$$\gamma_{\max} = \cos^{-1} \left\{ \frac{\cos\gamma_E}{1 + (1/\beta r) (V_E^2/V_{\max}^2 - 1)} \right\} \quad (18)$$

$$\ln \left(\frac{V_{\max}}{V_E} \right) = \frac{\sin\gamma_{\max}}{2} \left(\frac{\gamma_{\max} - \gamma_E}{\cos\gamma_{\max} - \cos\gamma_E} \right) \quad (19)$$

(18)式は速度の関数であるから(19)式に代入して逐次近似法(ニュートンラフソン法)により γ_{\max}, V_{\max} を求めて(20)式から ρ_{\max} を得る。これより加速度/抗力加速度が最大値は次式で表される。

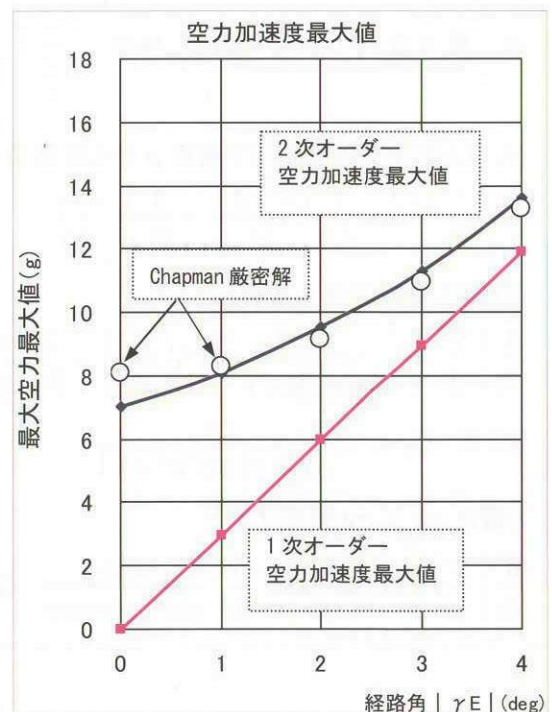
$$\frac{1}{g} \left(-\frac{dV}{dt} \right)_{\max} = \left(\frac{D}{mg} \right)_{\max} = \frac{\rho_{\max} V_{\max}^2}{2\Delta g} = -\frac{\beta \sin\gamma_{\max} V_{\max}^2}{2g} \quad (20)$$

1次オーダーの解は

$$\frac{1}{g} \left(-\frac{dV}{dt} \right)_{\max} = -\frac{\beta r \sin\gamma_E}{2e}$$

で表されるから1次オーダーの適用範囲外で

2次オーダーの解とChapmanの数値解(厳密解)をあわせて示すと図の通り。2次オーダーの解は $\gamma_E = 0$ 近傍を除いて厳密解と良く一致している。



(4) 空力加熱率:

空力加熱率を次式で定義する。

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho^n V^3 \quad (21)$$

加速度/抗力加速度が最大値をとる条件は $d(dQ/dt)/dt = 0$ から

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dQ}{dt} \right) = -K_Q V^4 \rho^n \frac{3}{2\Delta} \left(\frac{2n}{3} \Delta \beta \sin \gamma + \rho \right) = 0$$

次式をえる。

$$\rho_{\max} = - \left(2n/3 \right) \Delta \beta \sin \gamma_{\max} \quad (22)$$

$$\gamma_{\max} = \cos^{-1} \left\{ \frac{\cos \gamma_E}{1 + (1/\beta r) \left(gr/V_{\max}^2 - 1 \right)} \right\} \quad (23)$$

$$\ln \left(\frac{V_{\max}}{V_E} \right) = \frac{n \sin \gamma_{\max}}{3} \left(\frac{\gamma_{\max} - \gamma_E}{\cos \gamma_{\max} - \cos \gamma_E} \right) \quad (24)$$

(23)(24)式から逐次近似法(ニュートンラフソン法)により γ_{\max}, V_{\max} を求めて(22)式から ρ_{\max} を求めると空力加熱率の最大値は次式で得られる。

$$\frac{1}{K_Q} \frac{dQ}{dt} = \rho_{\max}^n V_{\max}^3 = \left(-\frac{2n}{3} \Delta \beta \sin \gamma_{\max} \right)^n V_{\max}^3 \quad (25)$$

(B) 重力項 $2/\rho\beta r$ を考慮した場合

(A)項と同様に独立変数を密度 ρ から経路角 γ に変更すると次のように表される。

$$\frac{d(V^2/gr)}{d\gamma} - \frac{1}{\Delta\beta} \frac{(V^2/gr)}{M} = \frac{2}{\beta r} \frac{1}{\rho} \frac{\sin \gamma}{M} \quad (26)$$

(8)(9)式の M を代入すると

$$\frac{d}{d\gamma} \left(\frac{V^2}{gr} \right) - \frac{r\rho}{\Delta \cos \gamma (gr/V^2 - 1)} \left(\frac{V^2}{gr} \right) = \frac{2}{\beta r} \frac{\sin \gamma}{\rho} \frac{\rho - \rho_E}{\cos \gamma_E - \cos \gamma} \quad (27)$$

$$\text{ここで } C_1 \equiv -\frac{r\rho}{\Delta \cos \gamma (gr/V^2 - 1)}$$

と置き、 $\rho_E \ll \rho$ と仮定すると

$$\frac{d}{d\gamma} \left(\frac{V^2}{gr} \right) + C_1 \left(\frac{V^2}{gr} \right) = \frac{2}{\beta r} \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma_E - \cos \gamma} \quad (28)$$

ここで γ の関数として

$$V^2/gr = (4/\beta r) F_1(\gamma) \exp(-C_1\gamma) \quad (29)$$

と置いて上記微分方程式に代入すると次の $F_1(\gamma)$ に関する微分方程式をうる。

$$\frac{dF_1}{d\gamma} = \exp(C_1\gamma) \left(\frac{1}{2} \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma_E - \cos \gamma} \right) \quad (30)$$

これを級数展開法により解く。

・ 大経路角 $\gamma \gg 1$ の場合:

右辺 $1/(\cos \gamma_E - \cos \gamma)$ を 2 項級数展開して級数展開法により $F_1(\gamma)$ を求めると次の通り。

$$F_1(\gamma) = C_{15}(-C_1 \sin \gamma - \cos \gamma) + (C_{16}/2)(-C_1 \sin 2\gamma - 2 \cos 2\gamma) - C_{17} \sin^2 \gamma (-C_1 \sin \gamma - 3 \cos \gamma) \quad (31)$$

C_{15}, C_{16}, C_{17} : 定数(付録参照)

・ 小経路角 $\gamma \ll 1$ の場合:

$$\frac{dF_1}{d\gamma} \approx \exp(C_1\gamma) \left(\frac{1}{2} \cot \frac{\gamma}{2} \right) \quad (32)$$

右辺 $\cot(\gamma/2)$ を 2 項級数展開して級数展開法により $F_1(\gamma)$ を求めると次の通り。

$$F_1(\gamma) = \left\{ \ln(-\gamma/2) - C_1\gamma + (-C_1\gamma)^3/18 \right\} \exp(C_1\gamma) - \left\{ (-C_1\gamma)^3/720C_1^4 - (-C_1\gamma)^2/240C_1^4 - (1/120C_1^4 + 1/12C_1^2)(-C_1\gamma - 1) \right\} \quad (33)$$

以上の $F_1(\gamma)$ から速度は次式で表される。

$$\frac{V^2}{V_E^2} = \frac{4}{\beta r} \frac{gr}{V_E^2} F_1(\gamma) + \left\{ 1 - \frac{4}{\beta r} \frac{gr}{V_E^2} F_1(\gamma_E) \right\} \exp \left\{ -\frac{r\rho(\gamma - \gamma_E)}{\Delta \cos \gamma (gr/V^2 - 1)} \right\} \quad (34)$$

$F_1(\gamma)$ は重力加速度の影響をあらわす。

$$\frac{4}{\beta r} \frac{gr}{V_E^2} F_1(\gamma) \ll 1$$

であるからこれを無視すると

$$\frac{V^2}{V_E^2} = \exp \left\{ -\frac{r\rho(\gamma - \gamma_E)}{\Delta \cos \gamma (gr/V^2 - 1)} \right\} \quad (35)$$

(12)式から $\cos \gamma (gr/V^2 - 1) \approx \beta r(\cos \gamma_E - \cos \gamma)$ を用いると次式を得る

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) = -\frac{\rho}{2\Delta\beta} \frac{\gamma - \gamma_E}{(\cos\gamma_E - \cos\gamma)} \quad (36)$$

上式は重力加速度を無視した解析解(17)式と一致する。

<補足>

$\gamma \gg 1$ γ が大きい場合には $1/(\cos\gamma_E - \cos\gamma)$ を三角級数展開して

$$F_1(\gamma) = C_{15} (C_1 \sin\gamma - \cos\gamma) + C_{16} (C_1 \sin\gamma/2 - \cos 2\gamma) - C_{17} \sin^2\gamma (C_1 \sin\gamma - 3\cos\gamma) + \dots$$

$\gamma \ll 1$ γ が小さい場合には $1/\cot\gamma$ を二項級数展開して

$$F_1(\gamma) = \left\{ \ln\left(\frac{\gamma}{2}\right) + C_1\gamma + \frac{(C_1\gamma)^2}{4} + \frac{(C_1\gamma)^3}{18} \right\} e^{-C_1\gamma} - \left(1 - \frac{1}{10C_1^2}\right) \frac{(1 - C_1\gamma)}{12C_1^2} + \frac{(C_1\gamma)^2 \{1 - (C_1\gamma)/3\}}{240C_1^4}$$

ここで係数は

$$C_1 = 1 / \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\cos\gamma_m}{\rho_m} \right) \left(\frac{m}{C_D A} \right) \left(\frac{1}{V_m^2 / gr} - 1 \right) \right\}$$

$$C_{15} = \left\{ 1 + (C_1^2 + 3^2) / \cos\gamma_E - 6 / \cos^2\gamma_E \right\} / \left\{ 2 \cos\gamma_E (C_1^2 + 1) (C_1^2 + 3^2) \right\}$$

$$C_{16} = 1 / \left\{ 2 \cos^2\gamma_E (C_1^2 + 2^2) \right\}$$

$$C_{17} = 1 / \left\{ 2 \cos^3\gamma_E (C_1^2 + 3^2) \right\}$$

6-3. 厳密解

AllenEggers, Gazley の 1 次オーダーの解では経路角は一定 $\gamma = \gamma_E$, Loh の 2 次オーダーの解では近似的に速度 gr/V^2 の関数で表わされることを示した。ここでは球形地球モデルを用いて弾道軌道の厳密解を求める。この場合経路角 γ の余弦値は指数積分関数で表わされることを示す。

(A) 一般解

仮定 球形モデル $g = -\mu/r^2$

極座標運動方程式：

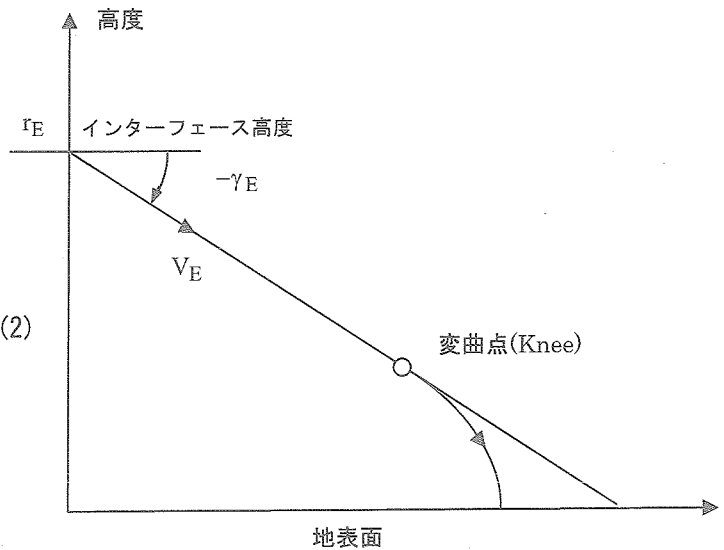
$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{D}{m} \sin \gamma + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(r \frac{d\phi}{dt} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(r \frac{d\phi}{dt} \right) + \frac{D}{m} \cos \gamma = 0 \quad (2)$$

$$\frac{ds}{dt} = V \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = V \sin \gamma \quad (4)$$

$$r \frac{d\phi}{dt} = V \cos \gamma \quad (5)$$



(1), (2) 式に (4), (5) 式を代入し, (4) 式を用いて独立変数を t , から r に変換すると

$$\frac{dV}{dr} V \sin^2 \gamma + \frac{d\gamma}{dr} V^2 \sin \gamma \cos \gamma - \frac{V^2 \cos^2 \gamma}{r} + \frac{D}{m} \sin \gamma + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dV}{dr} V \sin \gamma \cos \gamma - \frac{d\gamma}{dr} V^2 \sin^2 \gamma + \frac{V^2 \sin \gamma \cos \gamma}{r} + \frac{D}{m} \cos \gamma = 0 \quad (8)$$

上記 (7), (8) 式 両式から $d\gamma/dt$, $V(dV/dt)$ を求めると次の通り。

$$\frac{d\gamma}{dr} = \frac{1}{V^2 \tan \gamma} \left(\frac{V^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} \right) \quad (9)$$

$$V \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho V^2}{2\Delta \sin \gamma} - \frac{\mu}{r^2} = -\frac{\rho V^2}{2\Delta \sin \gamma} - \frac{V^2}{r} + V^2 \tan \gamma \frac{d\gamma}{dr} \quad (10)$$

(9) 式を r で微分して (10) 式を用いると次式を得る。

$$\tan \gamma \left(\frac{d^2 \gamma}{dr^2} \right) + \left(2 \tan^2 \gamma + \frac{1}{\cos^2 \gamma} \right) \left(\frac{d\gamma}{dr} \right)^2 - \left(\frac{\rho}{2\Delta \sin \gamma} + \frac{2}{r} \right) \left(\tan \gamma \frac{d\gamma}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} + \frac{\rho}{r \Delta \sin \gamma} = 0 \quad (11)$$

上式は γ に関する変数係数2階微分方程式である。(11)式を解くために

$$u \equiv \frac{1}{\cos^2 \gamma}$$

と置くと左辺第1項, 第2項の斜線部分は

$$\tan \gamma \left(\frac{d^2 \gamma}{dr^2} \right) + \left(2 \tan^2 \gamma + \frac{1}{\cos^2 \gamma} \right) \left(\frac{d\gamma}{dr} \right)^2 = \frac{1}{2u} \frac{d^2 u}{dr^2} \quad (12)$$

$$\left(\tan \gamma \frac{d\gamma}{dr} \right) = \frac{1}{2u} \frac{du}{dr} \quad (13)$$

であらわされ(11)式は次のように変形できる。

$$\frac{1}{2u} \frac{d^2 u}{dr^2} - \left(\frac{\rho}{2\Delta \sin \gamma} + \frac{2}{r} \right) \frac{1}{2u} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} + \frac{\rho}{r \Delta \sin \gamma} = 0 \quad (14)$$

ここで

$$F(r) \equiv \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r} \quad (15)$$

$$\frac{dF(r)}{dr} = \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r^2}$$

と置けば

(14)式は次のように1階斉次常微分方程式となる。

$$\frac{dF(r)}{dr} - \frac{\rho}{\Delta \sin \gamma} F(r) = 0 \quad (16)$$

(16)式を積分すると

$$F(r) = \exp \left\{ \int \frac{\rho}{\Delta \sin \gamma} dr \right\} + C \quad (17)$$

初期値を $r = r_E$, u_E , $(du/dr)_E$ として, (15)式の $F(r)$ を用いると

$$\frac{du}{dr} - \frac{2u}{r} = \left\{ \left(\frac{du}{dr} \right)_E - \frac{2u_E}{r_E} \right\} \exp \left(\int_{r_E}^r \frac{\rho}{\Delta \sin \gamma} dr \right) \quad (18)$$

さらに積分して

$$u - u_E = \int_{r_E}^r \frac{2u}{r} dr + \left\{ \left(\frac{du}{dr} \right)_E - \frac{2u_E}{r_E} \right\} \int_{r_E}^r \left\{ \exp \left(\int_{r_E}^r \frac{\rho}{\Delta \sin \gamma} dr \right) \right\} dr \quad (19)$$

ここで(9)(13)式から

$$\frac{du}{dr} = 2u \left(\tan \gamma \frac{d\gamma}{dr} \right) = \frac{2u}{r} - \frac{2\mu}{r^2 V^2 \cos^2 \gamma} \quad (20)$$

(19)式の係数は次の通り。

$$\left\{ \left(\frac{du}{dr} \right)_E - \frac{2u_E}{r_E} \right\} = -\frac{2\mu}{r_E^2 V_E^2 \cos^2 \gamma_E} \quad (21)$$

(19)式の u を(11)式の置換から $\cos^2 \gamma$ に戻すと(19)式は次のようになる。

$$\frac{1}{\cos^2 \gamma} = \frac{1}{\cos^2 \gamma_E} \left[1 + 2 \cos^2 \gamma_E \int_{r_E}^r \frac{1}{r \cos \gamma_E} dr - \frac{2\mu}{r_E^2 V_E^2} \int_{r_E}^r \left\{ \exp \left(\int_{r_E}^r \frac{\rho}{\Delta \sin \gamma_E} dr \right) \right\} dr \right] \quad (22)$$

ここで無次元化定数 b を定義する。

$$b \equiv -\frac{1}{\Delta \beta \sin \gamma_E} = 2a \quad (23)$$

(22)式の積分項は次式で表される。

$$\frac{d(b\rho)}{dr} = -\beta b\rho$$

$$\int_{r_E}^r \frac{\rho_{SL} (\rho/\rho_{SL})}{\Delta \sin \gamma_E} dr = \frac{\rho_{SL}}{\Delta \sin \gamma_E} \int_{r_E}^r \left\{ e^{-\beta(r-r_{SL})} - e^{-\beta(r_E-r_{SL})} \right\} dr = b\rho \quad (24)$$

ただし $e^{-\beta(r_E-r_{SL})} \approx 0$

(22)式は次式で表される。

$$\frac{1}{\cos^2 \gamma} = \frac{1}{\cos^2 \gamma_E} \left[1 + 2 \cos \gamma_E \ln \left(\frac{r}{r_E} \right) + \frac{2\mu}{\beta r_E^2 V_E^2} \int_{b\rho_E}^{b\rho} \frac{\exp(b\rho)}{(b\rho)} d(b\rho) \right] \quad (25)$$

ここで右辺第3項は積分指数関数で次式で定義される。

$$\bar{E}_i(Z) = \int_{-\infty}^Z \frac{e^z}{z} dz$$

この積分指数関数を用いると経路角の余弦値は次式で表される。

$$\cos \gamma = \frac{\cos \gamma_E}{\left[1 + 2 \cos \gamma_E \ln \left(\frac{r}{r_E} \right) + \frac{2}{\beta V_E^2} \frac{\mu}{r_E^2} \left\{ \bar{E}_i(b\rho) - \bar{E}_i(b\rho_E) \right\} \right]^{1/2}} \quad (26)$$

(10)式から

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r} - \tan \gamma \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\rho}{2\Delta \sin \gamma} \quad (27)$$

(13)式から左辺第2,3項は次式で表される。

$$\frac{d \ln(r \cos \gamma)}{dr} = \frac{1}{r} - \tan \gamma \frac{d\gamma}{dt} \quad (28)$$

(27)式に代入して次式が得られる

$$\frac{d \ln(Vr \cos \gamma)}{dr} = -\frac{\rho}{2\Delta \sin \gamma} \quad (29)$$

(29)式を積分して次式を得る。

$$\frac{V}{V_E} \frac{r \cos \gamma}{r_E \cos \gamma_E} = \exp \left(\int_{r_E}^r -\frac{\rho}{2\Delta \sin \gamma_E} dr \right)$$

以上から速度は次式で与えられる。

$$\frac{V}{V_E} = \frac{r_E \cos \gamma_E}{r \cos \gamma} \exp \left(\frac{\rho - \rho_E}{2\Delta \beta \sin \gamma_E} \right) = \frac{r_E \cos \gamma_E}{r \cos \gamma} \exp \{ -b(\rho - \rho_E)/2 \} \quad (30)$$

レンジR:

地球の平均半径を r_e とすれば,地表面に沿ったレンジは次式で表される。

$$dR = r_e d\phi \quad (31)$$

積分して

$$R = r_e \int_{r_E}^r \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \frac{dr}{r} = -r_e \int_{r_E}^r \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}} dr \quad (32)$$

ここで被積分項を考えて(26)式から $1/\cos^2 \gamma - 1$ を求めると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos^2 \gamma} - 1 \\ &= \frac{\sin^2 \gamma_E}{\cos^2 \gamma_E} \left[1 + \frac{2 \cos \gamma_E}{\sin^2 \gamma_E} \ln \left(\frac{r}{r_E} \right) + \frac{2\mu}{\beta r_E^2 V_E^2 \sin^2 \gamma_E} \{ \bar{E}_i(b\rho) - \bar{E}_i(b\rho_E) \} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

上式を(32)式に代入してレンジRは次式で表される。

$$R = -\frac{r_e}{\tan \gamma_E} \int_{r_E}^r \frac{dr}{r \left[1 + \frac{2 \cos \gamma_E}{\sin^2 \gamma_E} \ln \left(\frac{r}{r_E} \right) + \frac{2\mu/r_E^2}{\beta V_E^2 \sin^2 \gamma_E} \{ \bar{E}_i(b\rho) - \bar{E}_i(b\rho_E) \} \right]^{1/2}} \quad (34)$$

(B) 平坦地球の場合

地球を平坦と仮定すれば $r/r_E \rightarrow 1$ $\mu/r_E^2 \rightarrow g$ と近似でき平坦地球モデルでは経路角, 速度, レンジは次のように表される。

$$\cos \gamma = \frac{\cos \gamma_E}{\left[1 + \frac{2g}{\beta V_E^2 \sin^2 \gamma_E} \{ \bar{E}(b\rho) - \bar{E}(b\rho_E) \} \right]^{1/2}} \quad (35)$$

または

$$\tan \gamma = \tan \gamma_E \left[1 + \frac{2g}{\beta V_E^2 \sin^2 \gamma_E} \{ \bar{E}_i(b\rho) - \bar{E}_i(b\rho_E) \} \right]^{1/2}$$

速度およびレンジは次式で表される。

$$\frac{V}{V_E} \approx \frac{\cos \gamma_E}{\cos \gamma} \exp(-b\rho/2) \quad (36)$$

$$R = -\frac{r_e}{\tan \gamma_E} \int_{r_e}^r \frac{dr}{r \left[1 + \frac{2g}{\beta V_E^2 \sin^2 \gamma_E} \{ \bar{E}_i(b\rho) - \bar{E}_i(b\rho_E) \} \right]^{1/2}} \quad (37)$$

また (35) 式右辺のアンダーラインの項を無視すると

$$\cos \gamma = \cos \gamma_E \quad (35)$$

$$\frac{V}{V_E} \approx \exp(-b\rho/2)$$

直線弾道軌道の場合と一致する。

(C) 弾道軌道の変曲点

直線弾道軌道から垂直弾道軌道への変曲点を求める。

$$ds = r dy$$

$$ds = \left\{ (dx)^2 + (dy)^2 \right\}^{1/2}$$

曲率を次式で定義すると

$$\alpha \equiv \frac{1}{r} : \text{極率}$$

ここで

$$\frac{1}{r} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dy} \frac{dy}{ds}$$

$d\gamma/dy$, $dy/ds = \sin \gamma$ より曲率は次式で表される。

$$\alpha = -\frac{g}{V^2} \cos \gamma$$

曲率の高度に対する変化率は

$$\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{g \cos \gamma}{V^3} \left(\frac{dV}{dy} \right) + \frac{g \sin \gamma}{V^2} \left(\frac{d\gamma}{dy} \right)$$

曲率が最大となる条件は

$$\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{g \cos \gamma}{V^3} \frac{\rho}{\Delta \sin \gamma} \left(V^2 + \frac{3g \Delta \sin \gamma}{\rho} \right) = 0$$

から曲率が最大となる速度は次式で表される。

$$V_{\text{KNEE}} = \sqrt{-\frac{3g \Delta \sin \gamma}{\rho}}$$

6-4. 初期経路角零の解

弾道飛行に関する Allen&Eggers の 1 次オーダーの解は経路角 $|\gamma_E| > 5^\circ$ 以上の場合にしか適用できないことを示した。ここでは $|\gamma_E| \ll 5^\circ$ の範囲のうち特に $\gamma_E = 0$ の場合について級数展開法で求めた結果を示す。

仮定 1) $D/m \gg g \sin \gamma$, 2) $\gamma \ll 1$ のもとに
周回円軌道上で抵抗 D が加わった場合について考えると

速度座標系運動方程式は次式で表される。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \approx -\frac{1}{2} \frac{\rho V^2}{\Delta} \quad (1)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \approx g \left(\frac{V^2}{gr} - 1 \right) \quad (2)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \beta V \sin \gamma = -\rho \beta V \gamma \quad (3)$$

(1) 式を用いて独立変数を t から速度 V に変換すると (2), (3) 式は次のようになる。

$$V \frac{d\gamma}{dV} = \frac{2\Delta}{\rho r} \frac{(1 - V^2/gr)}{V^2/gr} \quad (4)$$

$$\frac{d\rho}{dV} = 2\Delta\beta \frac{1}{V} \gamma \quad (5)$$

(5) 式から経路角 γ は次式で近似できる。

$$\gamma = \frac{1}{2\Delta\beta} V \frac{d\rho}{dV} \quad (6)$$

(6) を速度 V で微分して

$$\frac{d\gamma}{dV} = \frac{1}{2\Delta\beta} \frac{d}{dV} \left(V \frac{d\rho}{dV} \right) \quad (7)$$

(4) 式に代入すると次式を得る。

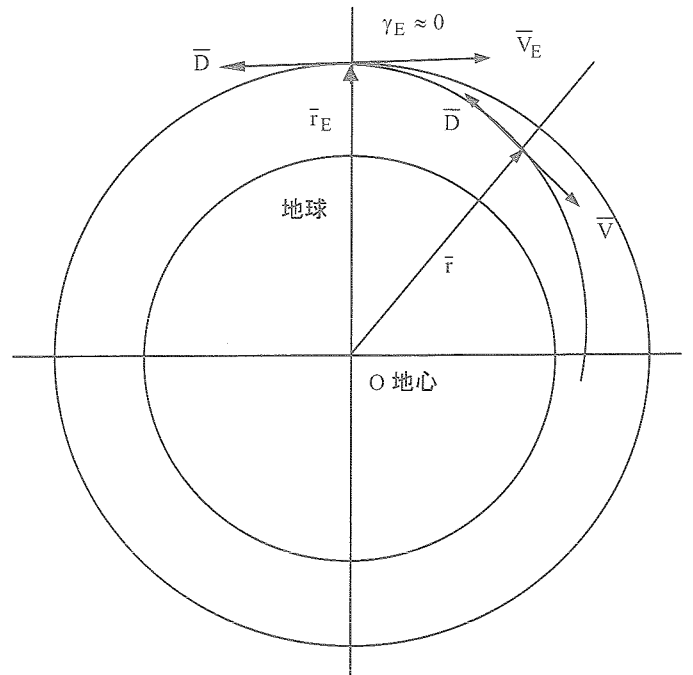
$$\frac{\rho\beta r}{(2\Delta\beta)^2} \frac{Vd}{dV} \left(V \frac{d\rho}{dV} \right) = \frac{(1 - V^2/gr)}{V^2/gr} \quad (8)$$

ここで

$$\hat{V} \equiv \ln(\sqrt{gr}/V) \quad (9) : \text{無次元化速度}$$

$$\hat{\rho} \equiv \rho\sqrt{\beta r} / 2\Delta\beta \quad (10) : \text{無次元化密度}$$

と置き (8) 式に代入し, $-d\hat{V} = dV/V$ を用いると次の微分方程式を得る。



$$\hat{\rho} \frac{d^2 \hat{\rho}}{d\hat{V}^2} = e^{2\hat{V}} - 1 \quad (11)$$

この2階微分方程式を級数展開法により解く。

$$\hat{\rho} = \hat{V}^{3/2} (a + b\hat{V} + c\hat{V}^2 + \dots) \quad (12)$$

と置くと

$$\hat{\rho}' = (1/2)(3a\hat{V}^{1/2} + 5b\hat{V}^{3/2} + 7c\hat{V}^{5/2} + \dots) \quad (13)$$

$$\hat{\rho}'' = (1/4)(3a\hat{V}^{-1/2} + 15b\hat{V}^{1/2} + 35c\hat{V}^{3/2} + \dots) \quad (14)$$

ここで $(\quad)' = d(\quad)/d\hat{V}$, $(\quad)'' = d^2(\quad)/d\hat{V}^2$ である。(11)式の右辺指数関数を展開して

$$(1/4)\{3a^2\hat{V} + 18ab\hat{V}^2 + (38ac + 15b^2)\hat{V}^3 + \dots\} = 2\hat{V} + \frac{(2\hat{V})^2}{2!} + \frac{(2\hat{V})^3}{3!} + \dots \quad (15)$$

両式の係数を比較すると

$$a = \sqrt{8/3}, \quad b/a = 1/6, \quad c/a = 1/24 \quad (16)$$

上記係数を代入して解は次の通り。

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{8}{3}} \hat{V}^{3/2} \left(1 + \frac{\hat{V}}{6} + \frac{\hat{V}^2}{24} + \dots \right) \quad (17)$$

(9), (10)式からもとの物理量にもどすと速度対密度の関係が得られる。

速度対高度

$$\rho = \frac{2\Delta\beta}{\sqrt{\beta r}} \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\ln \frac{\sqrt{gr}}{V} \right)^{3/2} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\ln \frac{\sqrt{gr}}{V} \right) + \frac{1}{24} \left(\ln \frac{\sqrt{gr}}{V} \right)^2 + \dots \right\} \quad (18)$$

これより $\rho = \rho_{SL} \exp(-\beta h)$ から高度を求めると次の通り。

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{2\Delta\beta}{\rho_{SL}} \frac{1}{\sqrt{\beta r}} \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\ln \frac{\sqrt{gr}}{V} \right)^{3/2} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\ln \frac{\sqrt{gr}}{V} \right) + \frac{1}{24} \left(\ln \frac{\sqrt{gr}}{V} \right)^2 + \dots \right\} \right] \quad (19)$$

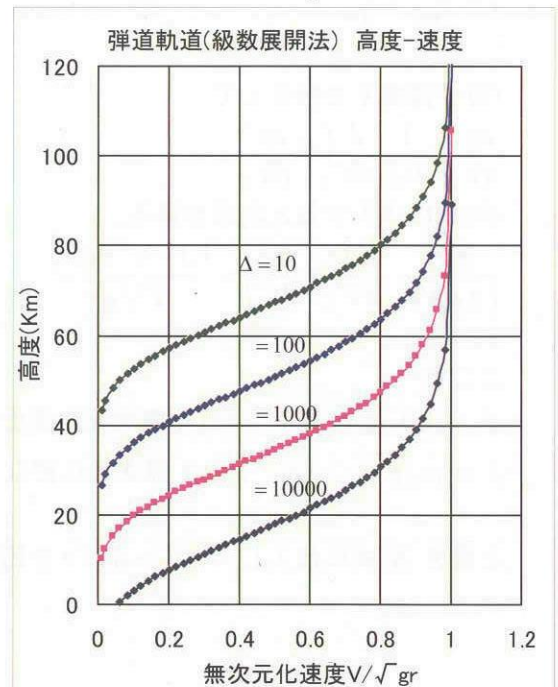
上式から高度は無次元化速度 V/\sqrt{gr} の関数で表される。ここで $\rho_{SL} = 1.225 \text{Kg/m}^3$, $1/\beta = 7.16 \text{Km}$, $\beta r = 930$ は定数。

経路角：

経路角は (6)式および $dV/V = -d\hat{V}$ から

$$\gamma = -\frac{2\Delta\beta}{\sqrt{\beta r}} \frac{d\hat{\rho}}{d\hat{V}} \quad (20)$$

(13)式を用いて次式で表される。



$$\gamma = -\frac{\Delta\beta}{\sqrt{\beta r}} \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\ln \frac{\sqrt{gr}}{V} \right)^{1/2} \left\{ 3 + \frac{5}{6} \left(\ln \frac{\sqrt{gr}}{V} \right) + \frac{7}{24} \left(\ln \frac{\sqrt{gr}}{V} \right)^2 + \dots \right\} \quad (21)$$

抗力加速度/空力加熱率

澱点空力加熱率, 平均加熱率, 抗力加速度を無次元化密度, 速度 $\hat{\rho}, \hat{V}$ で表すと次の通り。

① 抗力加速度

無次元化の定義(9)(10)式から $V = \sqrt{gr} e^{-\hat{V}}$ $\rho = (2\Delta\beta/\sqrt{\beta r}) \hat{\rho}$

$$-\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{D}{mg} = \frac{\rho V^2}{2\Delta} = \sqrt{\beta r} \hat{\rho} e^{-2\hat{V}} \quad : \text{抗力加速度} \quad (22)$$

② 平均加熱率

平均空力加熱率は $\dot{Q}_{\text{avg}} = K_{\text{avg}} \rho V^3$ に代入して

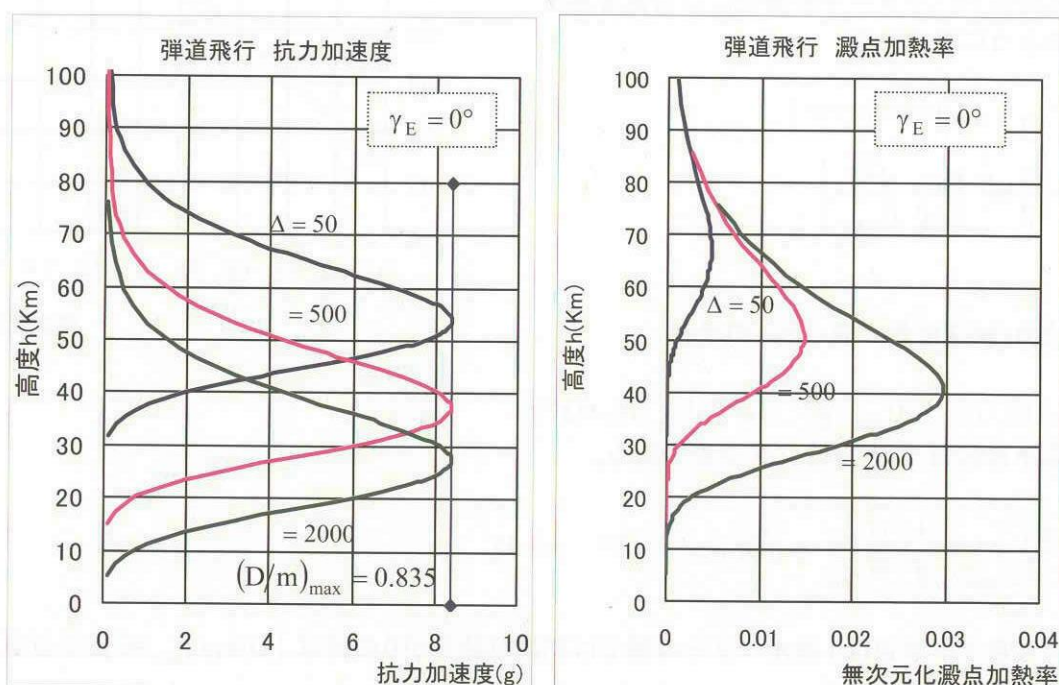
$$\frac{\dot{Q}_{\text{avg}}}{K_{\text{avg}} (gr)^{3/2}} = \left(\frac{2\Delta\beta}{\sqrt{\beta r}} \right) \hat{\rho} e^{-3\hat{V}} \quad : \text{平均加熱率} \quad (23)$$

③ 澱点空力加熱率

澱点空力加熱率は $\dot{Q}_{\text{stg}} = K_{\text{stg}} \rho^{1/2} V^3$ に代入して

$$\frac{\dot{Q}_{\text{stg}}}{K_{\text{stg}} (gr)^{3/2}} = \left(\frac{2\Delta\beta}{\sqrt{\beta r}} \right)^{1/2} \hat{\rho}^{1/2} e^{-3\hat{V}} \quad : \text{澱点空力加熱率} \quad (24)$$

を得る(17)式から $\hat{\rho}$ は無次元化速度の関数 $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{V})$ であることから抗力加速度/空力加熱率(22)-(24)式は無次元化速度の関数であり, 高度 h も(19)式から $h = h(\hat{V})$ の関数である。これより抗力加速度/澱点空力加熱率(22), (24)式を高度の関数として図示すると次の通り。



これらの最大値を求める。 \hat{V} について微分し0と置くと。

$$d(D/m)/d\hat{V} = K_3 e^{-2\hat{V}} (\hat{\rho}' - 2\hat{\rho}) = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\rho}'/\hat{\rho} = 2 \quad (25)$$

$$d\dot{Q}_{\text{avg}}/d\hat{V} = K_2 e^{-3\hat{V}} (\hat{\rho}' - 3\hat{\rho}) = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\rho}'/\hat{\rho} = 3 \quad (26)$$

$$d\dot{Q}_{\text{stg}}/d\hat{V} = (1/2)K_1 e^{-3\hat{V}} (\hat{\rho}' - 6\hat{\rho}) = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\rho}'/\hat{\rho} = 6 \quad (27)$$

これらが最大となる条件は $\hat{\rho}'/\hat{\rho}$ が整数となることから一般に $\hat{\rho}'/\hat{\rho} = N$ と置いて抗力加速度/空力加熱率が最大となる条件を一般化して求める

これらのパラメータが十分大きくなる速度では $\hat{V} \ll 1$ と仮定すると

$$\hat{V} = \frac{3}{2N} \left(1 + \frac{5\hat{V}}{18} + \frac{7\hat{V}^2}{72} \right) \left(1 + \frac{\hat{V}}{6} + \frac{\hat{V}^2}{24} \right)^{-1} \approx \frac{3}{2N} \left(1 + \frac{5\hat{V}}{18} \right) \left(1 - \frac{\hat{V}}{6} \right) \approx \frac{3}{2N} \left(1 + \frac{\hat{V}}{9} \right) \quad (28)$$

$$\approx \frac{3}{2N} \left(1 + \frac{5\hat{V}}{18} \right) \left(1 - \frac{\hat{V}}{6} \right) \approx \frac{3}{2N} \left(1 + \frac{\hat{V}}{9} \right) \quad (29)$$

上式から \hat{V}_{max} $\hat{\rho}_{\text{max}}$ を求めると最大となる条件は

$$\hat{V}_{\text{max}} = \frac{3}{2N} \left(1 - \frac{1}{6N} \right)^{-1} \approx \frac{3}{2N} \left(1 + \frac{1}{9N} \right)$$

$$\hat{\rho}_{\text{max}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \hat{V}_{\text{max}}^{3/2} \left(1 + \frac{\hat{V}_{\text{max}}}{6} + \frac{\hat{V}_{\text{max}}^2}{24} + \dots \right)$$

$\hat{V}_{\text{max}}(N)$, $\hat{\rho}_{\text{max}}\{\hat{V}_{\text{max}}(N)\}$, $N=6, 3, 2$ に対応してそれぞれの空力パラメータが最大になる速度高度は次のように表される。

$$V_{\text{max}}/gr = e^{-(3/2N)\{1+1/6N\}}$$

$$h_{\text{max}} = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\rho_{\text{SL}}}{2\Delta\beta} \frac{\sqrt{\beta r}}{\hat{\rho}_{\text{max}}} \right)$$

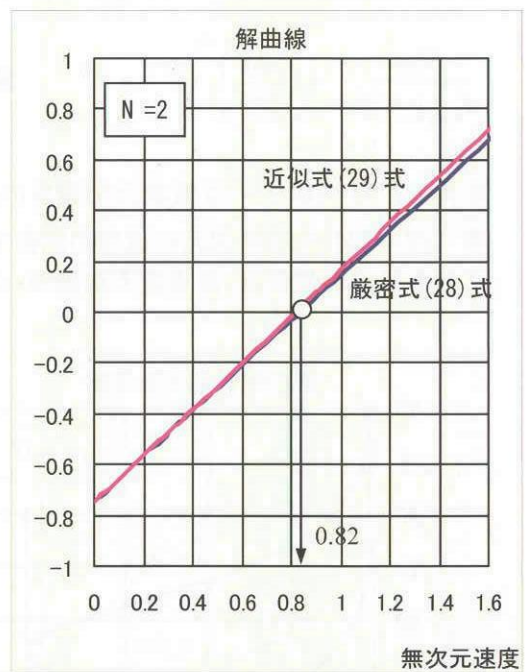
① 抗力/加速度最大値 : $N=2$ の場合

$$\hat{V}_{\text{max}} = 13/16 \quad (V_{\text{max}}/gr = e^{-13/16} \approx 0.4437)$$

となるから抗力/加速度は次式で表される。

$$-\frac{1}{g} \left(\frac{dV}{dt} \right)_{\text{max}} = \frac{1}{g} \left(\frac{D}{m} \right)_{\text{max}} = \sqrt{\beta r} \hat{\rho}_{\text{max}} e^{-2\hat{V}_{\text{max}}} \approx 8.35$$

ここで注目すべき点は1次オーダーの解では初期経路角が0の時は $(D/mg)_{\text{max}} = 0$ となるが、



これは 1 次オーダーの近似の適用外のため、初期経路角が 0 の時には上記のように $(D/mg)_{\max} \approx 8.35$ 程度の値をとる。これは Chapman の数値解析結果とも一致する。

② 平均空力加熱率最大値 : $N=3$ の場合

$$\hat{V}_{\max} = 19/36 \quad (V_{\max}/gr = e^{-19/36} = 0.5899)$$

$$\hat{\rho}_{\max} = \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\frac{19}{36}\right)^{3/2} \left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{19}{36}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{19}{36}\right)^2\right\} \approx 0.688$$

となるから平均空力加熱率は次式で表される。

$$\frac{\dot{Q}_{\text{avg}}}{K_{\text{avg}}(gr)^{3/2}} = (2\Delta\beta/\sqrt{\beta r}) \hat{\rho}_{\max} e^{-3\hat{V}_{\max}} \approx 1.22 \times 10^{-6} \Delta$$

③ 澱点空力加熱率最大値 : $N=6$ の場合

$$\hat{V}_{\max} = 37/144 \quad (V_{\max}/gr = e^{-37/144} = 0.7734)$$

$$\hat{\rho}_{\max} = \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\frac{37}{144}\right)^{3/2} \left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{37}{144}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{37}{144}\right)^2\right\} \approx 0.222$$

となるから澱点空力加熱率は次式で表される。

$$\frac{\dot{Q}_{\text{stg}}}{K_{\text{stg}}(gr)^{3/2}} = (2\Delta\beta/\sqrt{\beta r})^{1/2} \hat{\rho}_{\max}^{1/2} e^{-3\hat{V}_{\max}} \approx 6.40 \times 10^{-4} \sqrt{\Delta}$$

6-5. その他の解析解

(A) 抗力抵抗係数が増加する場合

これまでの弾道軌道に対する解析では抗力係数 C_D は一定と仮定した。 C_D 一定の仮定は極超音速領域ではほぼ成り立つが、超音速、亜音速と速度が低下してくると、 C_D は増加する。そこで C_D を速度の関数として(速度の冪乗)を与え、飛行パラメータに与える影響をみる。

(B) CG オフセットにより揚力を持つ場合

軸対称機体において、機体の構成上、質量中心 (CG) は形状中心である、空力中心 (CP) とは、厳密には一致しない場合が多い。これを CG オフセットと称している。CG オフセットがある状態では機体は微小迎角 (トリム角) が発生して質量中心 (CG) まわり静的に安定な状態 (トリム状態) を保って飛行する。この場合には僅かな揚力が発生し、弾道軌道からずれた軌道となる。そこでマーキュリーなどでは機軸周りに 15deg/sec 程度の角速度を与えて、トリム揚力の影響を打ちけして、平均的にゼロとし、軌道の分散を抑えている。ここでは角速度を与えることなく CG オフセットによる軌道の変動を見積もる。

(A) 抗力抵抗係数が増加する場合

仮定:

1) 遠心力-重力成分を無視 $(V^2/r - g) \approx 0$

2) 抗力係数を速度の関数とする。

$$\frac{C_D}{C_{Dhyp}} = k_j V^{m_j} \quad (1)$$

ただし $C_{Dhyp} = 0.0581$

音速 $V_{SOUND} = 304.8 \text{ m/sec}$ とし速度領域をマッハ数 $M = 10$ (または 3048 m/sec) で以下の領域に分ける。

a) 極超音速領域: ($V_B \geq 304.8 \times 10 \text{ m/sec}$)

$$k_1 = 2.867$$

$$m_1 = -0.1040$$

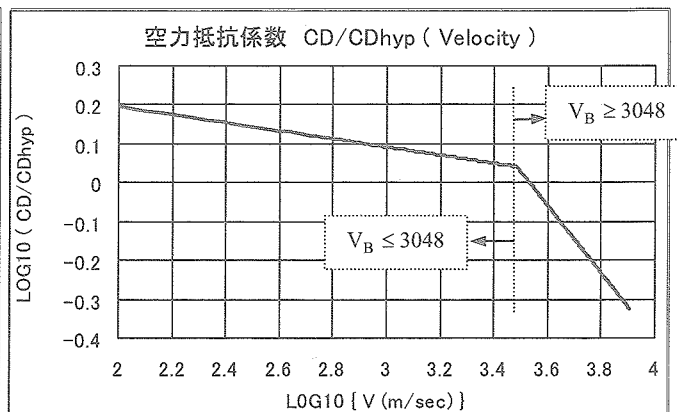
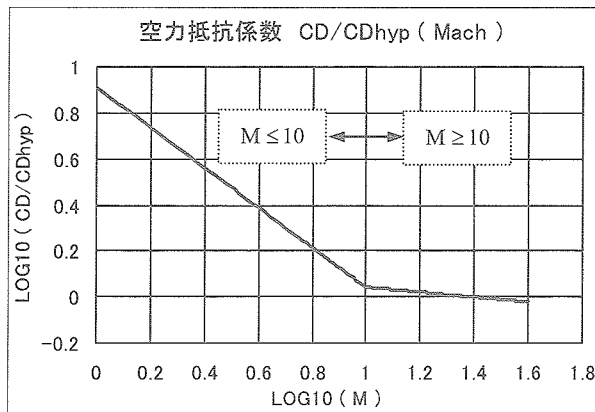
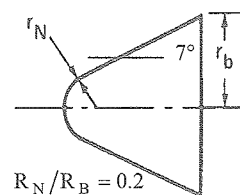
$$C_D/C_{Dhyp} = k_1 V^{m_1} = 2.867 V^{-0.1040} \quad (V_B \geq 304.8 \times 10 = 3048 \text{ m/sec})$$

b) 超音速領域: ($V_B \leq 304.8 \times 10 = 3048 \text{ m/sec}$)

$$k_2 = 3271.0$$

$$m_2 = -0.8683$$

$$C_D/C_{Dhyp} = k_2 V^{m_2} = 2.867 V^{-0.1040} \quad (V_B \leq 304.8 \times 10 = 3048 \text{ m/sec})$$



(2) 速度座標系運動方程式と仮定に基づく近似運動方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma = -\frac{C_D A \rho V^2}{2m} - g \sin \gamma \quad (2)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = g \left(\frac{V^2}{gr} - 1 \right) \cos \gamma = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (4)$$

海面上密度を $\rho_{SL} = 1.752 \text{ Kg/m}^3$ スケール高度を $1/\beta = 6.706 \text{ Km}$ とすれば大気密度は次式で表される。

$$\rho = \rho_{SL} e^{-\beta h} = 1.752 e^{-h/6.706} \quad (5)$$

(3) 式から経路変化率は 0

$$d\gamma/dt = 0 \rightarrow \gamma = \gamma_E : \text{一定} \quad (6)$$

これより経路角は一定(直線弾道軌道)となる。

(4), (5) 式から $d\rho/dt = -\rho\beta V \sin \gamma_E$ となり、これより独立変数を時間 t から密度に変換する。

ここで弾道係数を

$$\Delta_{hyp} \equiv \frac{m}{C_{Dhyp} A} \quad (7)$$

$$\Delta \equiv \frac{m}{C_D A} = \frac{m}{C_{Dhyp} k_j V^{m_j} A} = \frac{\Delta_{hyp}}{k_j V^{m_j}} \quad (8)$$

弾道パラメータを

$$a_{hyp} = -\frac{1}{2\Delta_{hyp}\beta \sin \gamma_E} \quad (9)$$

$$a = -\frac{C_D A}{2m\beta \sin \gamma_E} = -\frac{C_{Dhyp} A k_j V^{m_j}}{2m\beta \sin \gamma_E} = -\frac{k_j V^{m_j}}{2\Delta_{hyp}\beta \sin \gamma_E} = a_{hyp} k_j V^{m_j} \quad (10)$$

と定義すると

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\rho} = \frac{1}{2\Delta\beta \sin \gamma_E} = \frac{k_j V^{m_j}}{2\Delta_{hyp}\beta \sin \gamma_E} = -a_{hyp} k_j V^{m_j} \quad (11)$$

密度(高度)対速度:

(11)式から

$$\frac{1}{V^{m_j+1}} \frac{dV}{d\rho} = -a_{hyp} k_j : \text{一定} \quad (12)$$

上式の積分を行うと

$$\left(\frac{V_E}{V}\right)^{m_j} = 1 + a_{hyp} k_j m_j V_E^{m_j} (\rho - \rho_E) \quad (13)$$

$a_j = a_{hyp} k_j m_j V_E^{m_j}$ と置けば速度は密度の関数として次式で表される。

$$\left(\frac{V_E}{V}\right)^{m_j} = 1 + a_j (\rho - \rho_E) \quad (14)$$

または

$$\frac{V}{V_E} = \frac{1}{\{1 + a_j (\rho - \rho_E)\}^{1/m_j}} \quad (15)$$

これから密度を速度の関数として表すと

$$\frac{\rho}{\rho_E} = 1 + \frac{1}{a_j \rho_E} \left\{ \left(\frac{V_E}{V}\right)^{m_j} - 1 \right\} \quad (16)$$

海面上密度に対する比は次のとおり。

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_E}{\rho_{SL}} + \frac{1}{a_j \rho_{SL}} \left\{ \left(\frac{V_E}{V}\right)^{m_j} - 1 \right\} \quad (17)$$

これより高度 h は速度の関数として次式で表される。

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{\rho_E}{\rho_{SL}} + \frac{1}{a_j \rho_{SL}} \left\{ \left(\frac{V_E}{V}\right)^{m_j} - 1 \right\} \right] \quad (18)$$

極超音速領域では添字 j は $j=1$, 超音速領域では $j=2$ とする。

数値例

$$h_E = 120 \text{ Km}$$

$$\gamma_E = -30 \text{ deg}$$

$$\Delta_{hyp} = m/C_{Dhyp} = 100 \text{ kg/m}^2$$

$$a_{hyp} = -\frac{1}{2\Delta_{hyp}\beta \sin \gamma_E} = -\frac{6706}{2 \times 100 \times (-1/2)} = 67.06 \text{ m}^3/\text{Kg}$$

a) 極超音速領域 : $V_B \geq 304.8 \times 10 \text{ m/sec}$

$$a_1 = a_{\text{hyp}} k_1 m_1 V_E^{m_1} = 67.06 \times 2.867 \times (-0.104) \times 7925^{-0.104} = -0.1172 a_{\text{hyp}}$$

以上から極超音速領域での軌道は次式で表される。

$$h = -6.706 \times \ln \left[-\frac{1}{0.1172 \times 1.752 \times 67.06} \left\{ \left(\frac{7925}{V} \right)^{-0.104} - 1 \right\} \right] \quad (19)$$

b) 超音速領域 : $V_B \leq 304.8 \times 10 \text{ m/sec}$

切換高度・密度 h_B, ρ_B を求めると

$$h_B = -6.706 \times \ln \left[-0.07262 \left\{ \left(\frac{7925}{3048} \right)^{-0.1040} - 1 \right\} \right] = 33.40 \text{ Km}$$

$$\rho_B / \rho_{\text{SL}} = \exp(-33.4/6.706) = 0.00687$$

$$a_2 = a_{\text{hyp}} k_2 m_2 V_E^{m_2} = 67.06 \times 3271.0 \times (-0.8683) \times 7925^{-0.8683} = -1.169 a_{\text{hyp}}$$

以上から超音速領域での軌道は次式で表される。

$$h = -6.706 \times \ln \left[0.00687 - \frac{1}{1.169 \times 1.225 \times 67.06} \left\{ \left(\frac{3048}{V} \right)^{-0.8683} - 1 \right\} \right] \quad (20)$$

c) 抗力係数が一定の場合

比較のために $C_D = C_{D_{\text{hyp}}}$: 一定とした場合の軌道を求めると

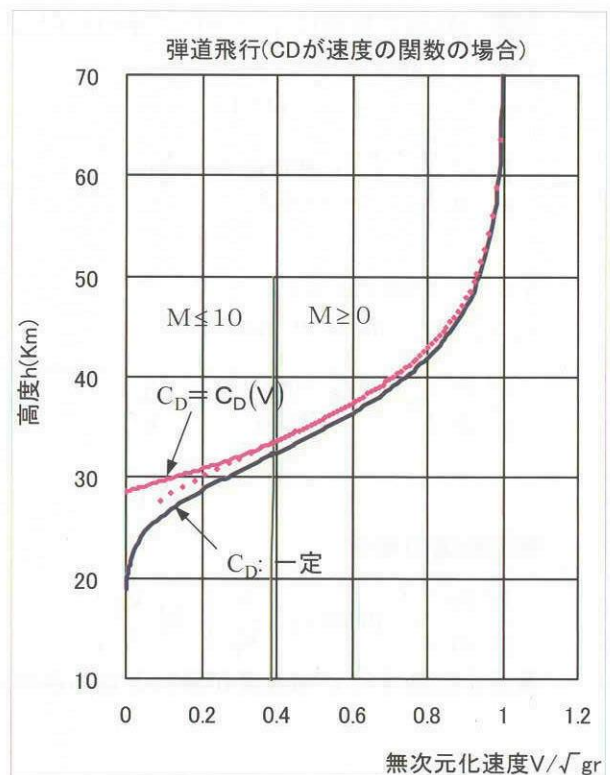
$$a_{\text{hyp}} = -\frac{1}{2\Delta_{\text{hyp}}\beta \sin \gamma_E} = -\frac{6706}{2 \times 100 \times (-1/2)} = 67.06 \text{ m}^3 / \text{Kg}$$

弾道パラメータを与えたとき弾道軌道は次式で表される。(6-1. 項参照)

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{1}{\rho_{\text{SL}} a_{\text{hyp}}} \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \right\}$$

$$h = -6.706 \times \ln \left\{ \frac{1}{1.752 \times 67.06} \ln \left(\frac{7925}{V} \right) \right\} \quad (21)$$

式(19), (20), (22) 式の結果を右図に示す。速度の低下にともない抵抗係数 C_D が大きくなることから、弾道係数 $\Delta = m/C_D A$ は小さくなる。この効果により軌道は C_D 一定の場合に比べて、高高度を飛行することがわかる。



加速度/抗力加速度：

$$\begin{aligned} -\frac{dV}{dt} &= \frac{D}{m} = \frac{\rho V^2}{2\Delta} \\ &= \frac{C_{Dhyp} A \rho_E V_E^2}{2m} \left(\frac{C_D}{C_{Dhyp}} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_E} \right) \left(\frac{V}{V_E} \right)^2 \end{aligned}$$

$$C_D/C_{Dhyp} = k_j V^{m_j}$$

$$\rho/\rho_E = 1 + \frac{1}{a_j \rho_E} \left\{ \left(\frac{V_E}{V} \right)^{m_j} - 1 \right\}$$

$$\Delta_{hyp} = m/C_{Dhyp} A$$

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \left(\frac{\rho_E V_E^2 V_E^{m_j} k_j}{2g \Delta_{hyp}} \right) \left(\frac{V}{V_E} \right)^{m_j+2} \left[1 + \frac{1}{a_j \rho_E} \left\{ \left(\frac{V_E}{V} \right)^{m_j} - 1 \right\} \right]$$

第1項が無視できる場合には次のように近似できる。

$$-\frac{dV}{dt} \approx -\frac{\beta V_E^2 \sin \gamma_E}{m_j} \left\{ \left(\frac{V_E}{V} \right)^{m_j} - 1 \right\} \left(\frac{V}{V_E} \right)^{2+m_j}$$

b) 極超音速領域：

$$C_D/C_{Dhyp} = k_2 V^{m_2} = 3271.0 V^{-0.8683} \quad (V_B \geq 304.8 \times 10 \text{ m/sec})$$

$$C_{Dhyp} : \text{極超音速領域での抗力係数} = 0.0581$$

周回円軌道の場合は $V_E^2 = gr$ $\beta r \approx 900$ と近似できるから

$$V \geq V_B = 3048 \text{ m/sec}$$

$$k_2 = 3271, \quad m_2 = -0.8683$$

$$-\frac{1}{g} \left(\frac{dV}{dt} \right) \approx \frac{-\beta V_E^2 \sin \gamma_E / g}{-0.8683} \left\{ \left(\frac{V_E}{V} \right)^{-0.8683} - 1 \right\} \left(\frac{V}{V_E} \right)^{2-0.8683}$$

$$V \leq V_B = 3048 \text{ m/sec}$$

$$k_1 = 2.867, \quad m_1 = -0.1040$$

$$-\frac{1}{g} \left(\frac{dV}{dt} \right) \approx \frac{-\beta V_E^2 \sin \gamma_E / g}{-0.1040} \left\{ \left(\frac{V_E}{V} \right)^{-0.1040} - 1 \right\} \left(\frac{V}{V_E} \right)^{2-0.1040}$$

弾道軌道の場合

$$-\frac{1}{g} \left(\frac{dV}{dt} \right) \approx -\beta r \sin \gamma_E \left(\frac{V}{V_E} \right)^2 \ln \left(\frac{V_E}{V} \right)$$

両式を比較すると加速度が最大となる条件は次式で与えられる。

$$\frac{d}{d(V/V_E)} \left(-\frac{dV}{dt} \right) = -2\beta \sin \gamma_E \left(\frac{V}{V_E} \right)^{m_j+1} \left\{ \left(\frac{V_E}{V} \right)^{m_j} - \frac{(m_j+2)}{2} \right\} = 0$$

加速度が最大となる速度, 密度は次式で表される。

$$\frac{V_{Dmax}}{V_E} = \left(\frac{2}{m_j+2} \right)^{1/m_j}$$

$$\rho_{Dmax} = -\frac{1}{a k_j V_E^{m_j}} \frac{m_j}{2}$$

最大加速度は次の通り。

$$\left(-\frac{dV}{dt} \right)_{max} = \beta V_E^2 \sin \gamma_E \frac{m_j}{2} \left(\frac{2}{m_j+2} \right)^{(m_j+2)/m_j}$$

周回円速度 $V_E = \sqrt{gr}$ の場合には

$$\frac{1}{g} \left(-\frac{dV}{dt} \right)_{max} = \beta r \sin \gamma_E \frac{m_j}{2} \left(\frac{2}{m_j+2} \right)^{(m_j+2)/m_j}$$

(B) CG オフセットを有する弾道飛行

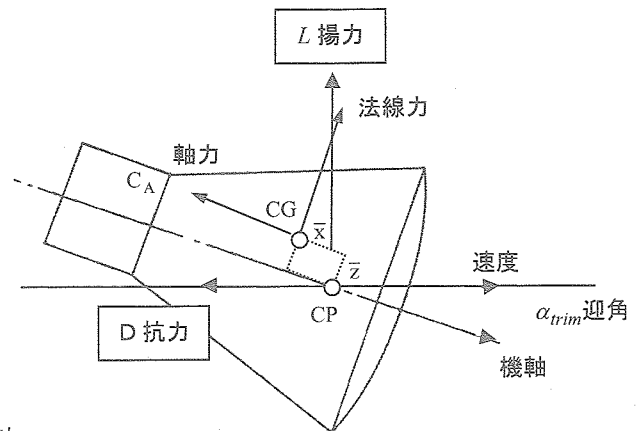
仮定 空気力が重力項に比べて支配的, 遠心力-重力は0とする。

- 1) $D/m \gg g \sin \gamma$
- 2) $(V^2/r - g) \approx 0$
- 3) 静的安定

(1) 運動方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \approx -\frac{C_D A}{2m} \rho V^2$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \approx \frac{C_L A}{2m} \rho V^2$$



ピッチ軸周りの慣性能率を I_Y とすればピッチ軸周りの回転方程式は次式で表される。

$$I_Y \ddot{\theta} = C_{N\alpha} \alpha \bar{x} - C_A \bar{z} \quad (22)$$

ここで

空気力は揚力係数, 法線力係数を迎角で級数展開して1次項を用いると

$$C_L = C_{L\alpha} \alpha \quad (23) \text{ : 揚力係数}$$

$$C_N = C_{N\alpha} \alpha \quad (24) : \text{法線力係数}$$

これより揚力, 法線力は次式で表される。

$$L = C_L A q = C_{L\alpha} \alpha A q \quad : \text{揚力}$$

$$F_N = C_N A q = C_{N\alpha} \alpha A q \quad : \text{法線力}$$

$$C_{L\alpha} \quad : \text{揚力係数傾斜} \quad C_{N\alpha} \quad : \text{法線力係数傾斜}$$

$$C_N \quad : \text{法線力係数} \quad C_A \quad : \text{軸力係数}$$

q : 動圧

A : 基準面積

(22) 式からトリム角は CG 周りのモーメントを 0 と置いて $I_Y \ddot{\theta} = 0$ から次式で表される。

$$I_Y \ddot{\theta} = C_{N\alpha} \alpha q A \bar{x} - C_A q A \bar{z} = 0$$

$$\alpha_{\text{trim}} = \frac{C_A \bar{z}}{C_{N\alpha} \bar{x}} \quad (25) : \text{トリム角}$$

これよりトリム状態の諸量は次の通り。

$$C_{L\text{trim}} = C_{L\alpha} \alpha_{\text{trim}} \quad : \text{揚力係数}$$

$$L_{\text{trim}} = C_{L\alpha} \alpha_{\text{trim}} (\rho V^2 / 2) \quad : \text{揚力}$$

$$\left(\frac{L}{D} \right)_{\text{trim}} = \frac{C_{L\text{trim}}}{C_D} = \frac{C_{L\alpha} \alpha_{\text{trim}}}{C_D} \quad : \text{揚抗比}$$

解法 1 : 独立変数として時刻を用いた場合

- ① 直線弾道飛行経路に垂直方向の速度 :
トリム状態で発生する揚力加速度は

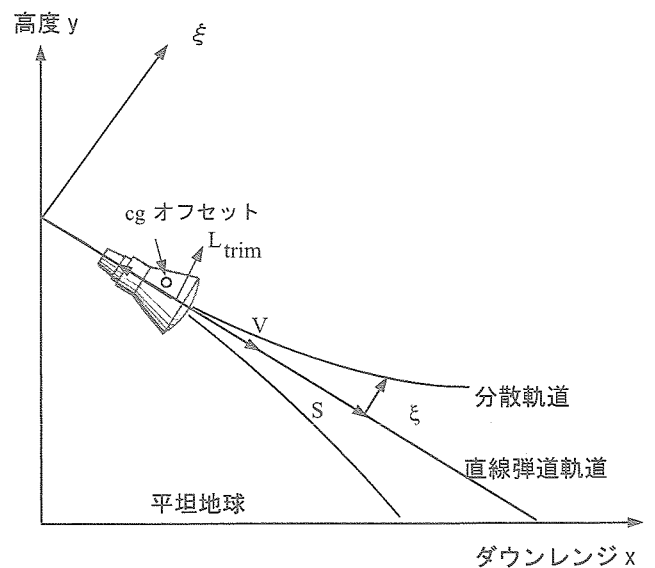
直線弾道飛行経路に垂直方向の位置, 速度を
 $\xi, \dot{\xi}$ とすれば

$$V \frac{dy}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \quad (26)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{C_L A}{2m} \rho V^2 = \frac{C_{L\text{trim}} A}{m} \frac{\rho V^2}{2} \quad (27)$$

(26) 式と (2) 式から $\rho V^2 / 2$ を消去して

$$\frac{d\xi}{dt} = - \left(\frac{L}{D} \right)_{\text{trim}} \frac{dV}{dt} \quad (28)$$



積分すると

$$\xi = \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{trim}} (V_E - V) \quad (29)$$

ここで V は直線弾道飛行の解である。

(直線弾道軌道の項参照)

$$\frac{V}{V_E} = \exp\{-a(\rho - \rho_E)\} \approx \exp(-a\rho) \quad (30)$$

$$\xi = \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{trim}} V_E \{1 - \exp(-a\rho)\} \quad (31)$$

② 直線弾道飛行経路に垂直方向の位置：

直線弾道飛行経路に垂直方向の位置 ξ は上式を積分して

$$\xi = \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{trim}} \left(V_E t - \int_0^t V dt \right) \quad (32)$$

(3) 式から右辺第 2 項は直線飛行経路に沿った飛行距離 s であるから次式で与えられる。

$$\xi = \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{trim}} (V_E t - s) \quad (33)$$

ここで直線弾道軌道に沿った飛行距離 s は $\rho/\rho_{SL} = e^{-\beta h}$ から

$$s = \frac{h}{\sin \gamma_E} = -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \quad (34)$$

$$\xi = \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{trim}} \left\{ V_E t + \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \right\} \quad (35)$$

ただし時刻 t は変動軌道における時刻で、直線弾道軌道での時刻でないことに注意する必要がある。ところで弾道飛行の飛行時間は

$$t - t_E = -\frac{1}{\beta V_E \sin \gamma_E} \{E_i(a\rho) - E_i(a\rho_E)\} \quad (36)$$

であらわされるから、これを代入すると

$$\xi = -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{trim}} \left\{ \bar{E}_i(a\rho) - \bar{E}_i(a\rho_E) - \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \right\} \approx -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{trim}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a\rho)^n}{n n!} \quad (37)$$

ただし $\bar{E}_i(a\rho)$ は次式で定義される積分指数関数である

$$\bar{E}_i(a\rho) \equiv \int_{\infty}^{\rho} \frac{e^u}{u} du = \gamma + \ln a\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a\rho)^n}{n n!}$$

解法 II: 独立変数として密度を用いた場合

① 直線弾道飛行経路に垂直方向の速度:

(28)式から

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{C_{Ltrim}}{C_D} \frac{dV}{dt} = \left(\frac{L}{D}\right)_{trim} \frac{C_D A}{2m} \rho V^2 \quad (38)$$

(4), (5)より $d\rho/dt = -\rho\beta V \sin\gamma_E$ を用いて時刻 t から密度に変数変換を行うと

$$\frac{d\xi}{d\rho} = -\left(\frac{L}{D}\right)_{trim} \frac{C_D A}{2m\beta \sin\gamma_E} V = \left(\frac{L}{D}\right)_{trim} aV = \left(\frac{L}{D}\right)_{trim} V_E a \exp(-a\rho) \quad (39)$$

(39)式を積分して直線弾道軌道垂直方向の速度を求めると次の通り。

$$\xi = \left(\frac{L}{D}\right)_{trim} V_E \{1 - \exp(-a\rho)\} \quad (40)$$

(31)式と一致する。

② 直線弾道飛行経路に垂直方向の位置:

$$\xi = \int_0^t \dot{\xi} dt = \int_0^t \left(\frac{L}{D}\right)_{trim} V_E \{1 - e^{-a\rho}\} dt \quad (41)$$

(41)式において(7), (30)式を用いて時刻 t から密度 ρ に変換すると

$$\frac{dt}{d\rho} = -\frac{1}{\rho\beta V \sin\gamma_E} = -\frac{1}{\beta V_E \sin\gamma_E} \frac{1}{\rho e^{-a\rho}}$$

次式を得る。

$$\xi = \int_0^{a\rho} \dot{\xi} dt = -\frac{1}{\beta \sin\gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right)_{trim} \int_{a\rho_E=0}^{a\rho} \left(\frac{e^{a\rho} - 1}{a\rho}\right) d(a\rho) \quad (42)$$

右辺の積分は積分指数関数で次式で表される。(付録 積分指数関数の項参照)

$$\int_{a\rho_E=0}^{a\rho} \left(\frac{e^{a\rho} - 1}{a\rho}\right) d(a\rho) = \bar{E}_i(a\rho) - 0.5772 - \ln(a\rho) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a\rho)^n}{n n!}$$

$$\xi(\rho) = -\frac{1}{\beta \sin\gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right)_{trim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a\rho)^n}{n n!} \quad (43)$$

(37)式と一致する。

具体的に Σ を展開すると次式で表される。

$$\xi(\rho) = -\frac{1}{\beta \sin\gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right)_{trim} a\rho \left\{ 1 + \frac{a\rho}{4} + \frac{(a\rho)^2}{18} + \dots \right\} \quad (44)$$

経路角：

(26) 式から

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{C_{Ltrim}A}{m} \quad (26)'$$

(7), (30) 式を用いて時刻 t から密度 ρ に変換すると

$$\frac{d\gamma}{d\rho} = -\frac{C_{Ltrim}A}{m} \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \quad (45)$$

右辺は定数であるから容易に積分できて次式得る。

$$\gamma - \gamma_E = -\frac{C_{Ltrim}A}{m\beta \sin \gamma_E} (\rho - \rho_E) \quad (46)$$

ここで

$$\rho - \rho_E = \Delta\beta \sin \gamma_E \ln\left(\frac{V}{V_E}\right)$$

を (46) 式に代入すると

$$\gamma = \gamma_E + \left(\frac{L}{D}\right)_{trim} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \quad (47)$$

上式は一定揚力飛行の結果と一致する(スキップ軌道参照)

6-6. 再突入関数 (Entry Function)

宇宙機が大気圏に突入し、地上に到達する間の動圧、抗力、空力荷重、空力加熱率(層流、乱流)、あるいはレノルズ数はそれぞれ個別に定義され、飛行期間において最大値を見積もられる。そこでこれらを一般化して再突入関数としてあらわし、その最大値、あるいは最大値で正規化しておくことと便利である。

一般化再突入関数 (Entry Function) は機体形状(弾道係数、揚坑比)、再突入条件(速度、高度、経路角)をパラメータとする係数 K と密度の a 乗、速度の b 乗の積であらわしたものである。

$$F = K(\text{機体形状, 再突入条件}) \rho^a V^b \quad : \text{一般化再突入関数 } a, b, K: \text{定数}$$

I) 再突入関数 F

いま密度 ρ を海面上密度 ρ_{SL} 、速度を再突入時の速度 V_E で無次元化すると次式で定義する。

$$F(\rho, V) = K \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^n \left(\frac{V}{V_E} \right)^m \quad (1)$$

II) 再突入関数の最大値

(1) 式は密度と速度の関数であるから、密度と速度の関係があれば1変数関数となる。

いま直線弾道軌道の場合について考えると(6-1項参照)

$$a \equiv -\frac{1}{2\Delta} \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} > 0 : \text{無次元化パラメータ}$$

$$a\rho_{SL} \equiv -\frac{1}{2\Delta} \frac{\rho_{SL}}{\beta \sin \gamma_E}$$

$$\frac{V}{V_E} = \exp\{-a(\rho - \rho_E)\} \quad (2)$$

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{1}{\lambda_E} \ln\left(\frac{V}{V_E}\right) + \frac{\rho_E}{\rho_{SL}} \quad (3)$$

(2), (3) 式から(1)式は速度の関数、あるいは密度の関数として次のように表される。

$$F(\rho) = K \rho_{SL}^n V_E^m \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^n \exp\{-ma(\rho - \rho_E)\} \approx K \rho_{SL}^n V_E^m \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^n \exp(-map) \quad (4)$$

$$F(V) = K \rho_{SL}^n V_E^m \left\{ \frac{1}{\lambda_E} \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) + \frac{\rho_E}{\rho_{SL}} \right\}^n \left(\frac{V}{V_E} \right)^m \approx K \rho_{SL}^n V_E^m \left\{ \frac{1}{\lambda_E} \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \right\}^n \left(\frac{V}{V_E} \right)^m \quad (5)$$

ただし右辺の近似式は $\rho_E/\rho_{SL} \ll 1$ と仮定した。再突入関数の最大値は(4)式を密度で微分して0と置か、または(5)式を速度で微分して0と置いて得られる。(4)式を用いると

$$\frac{1}{F(\rho)} \frac{dF(\rho)}{d\rho} = \frac{n}{\rho} \left(1 - a \rho \frac{m}{n} \right) = 0$$

より、再突入関数が最大となる密度、高度は次式で与えられる。

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_{SL}} = \frac{1}{a} \frac{n}{\rho_{SL} m} \quad (6)$$

$$h_{\max} = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1}{a \rho_{SL}} \frac{n}{m} \right) \quad (7)$$

再突入関数が最大となる速度は同様に(5)式を速度で微分することにより得られるが既に速度と密度の関係が得られているから(2)式に代入して

$$\frac{V}{V_E} = \exp \{ -a(\rho - \rho_E) \}$$

$$\frac{V_{\max}}{V_E} = \exp \left(-\frac{n}{m} + a \rho_E \right) \approx \frac{1}{e^{n/m}} \quad (8)$$

再突入関数の最大値は

$$F_{\max} = K \rho_{SL}^n V_E^m \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_{SL}} \right)^n \left(\frac{V_{\max}}{V_E} \right)^m \approx K \rho_{SL}^n V_E^m \left(\frac{1}{a \rho_{SL}} \frac{n}{m} \frac{1}{e} \right)^n \quad (9)$$

例) 動圧の場合

$$n=1, m=2$$

$$\rho V^2 = F(\rho, V) = \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right) \left(\frac{V}{V_E} \right)^2$$

より再突入関数が最大となる密度、高度は次式で与えられる。

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_{SL}} = \frac{1}{2a} \frac{1}{\rho_{SL}} \quad (10)$$

$$h_{\max} = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1}{2a \rho_{SL}} \right) \quad (11)$$

$$\frac{V_{\max}}{V_E} = \exp \left(-\frac{1}{2} + a \rho_E \right) \approx \frac{1}{e^{1/2}} \quad (12)$$

再突入関数の最大値は

$$\left(\rho V^2 \right)_{\max} = F_{\max} = V_E^2 \rho_{\max} \left(\frac{V_{\max}}{V_E} \right)^2 \approx \frac{V_E^2}{2a} \frac{1}{e} \quad (13)$$

III) 再突入関数の正規化

係数が未定であることから(9)式を用いて再突入関数をその最大値で正規化する。(4)式から再突入関数を密度の関数として表すと

$$F(\rho) = K \rho_{SL}^n V_E^m \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^n \exp\{-m a(\rho - \rho_E)\}$$

また最大値は(9)式から、次のように与えられるから

$$F_{max} = K \rho_{SL}^n V_E^m \left(\frac{\rho_{max}}{\rho_{SL}} \right)^n \left(\frac{V_{max}}{V_E} \right)^m$$

両式の比をとり、無次元化すると

$$\begin{aligned} \frac{F(\rho)}{F_{max}} &= \left(\frac{\rho_{SL} \rho}{\rho_{max} \rho_{SL}} \right)^n \left(\frac{V_E}{V_{max}} \frac{V}{V_E} \right)^m \\ &= \left(\frac{m a \rho}{n} \right)^n \exp\left\{ n \left(1 - \frac{m a \rho}{n} \right) \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{m a \rho}{n} \right) \exp\left[\left(1 - \frac{m a \rho}{n} \right) \right] \right\}^n \quad (14) \end{aligned}$$

ここで無次元密度 $\hat{\rho}$ を次のように定義すると

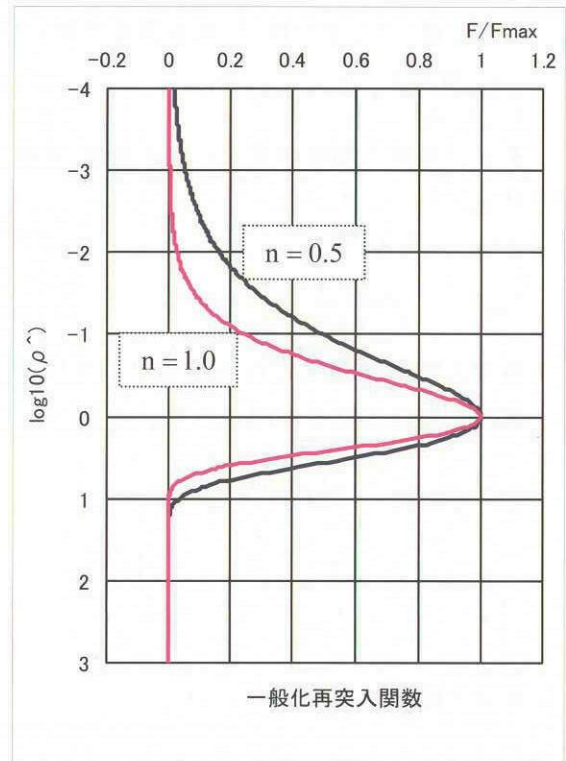
$$\hat{\rho} = \frac{m a \rho}{n} \quad (15)$$

正規化再突入関数はパラメータを n として、 $\hat{\rho}$ のみの関数としてシンプルな形で表すことができる。

$$\frac{F(\hat{\rho})}{F_{max}} = \left\{ \hat{\rho} \exp(1 - \hat{\rho}) \right\}^n \quad (16)$$

ただし $\hat{\rho}_{max} = m a \rho_{max} / n = 1$

澱点空力加熱率の場合 $n=0.5$ 、動圧、抗力加速度、平均空力加熱率等の場合 $n=1.0$ であるから $n=0.5, 1.0$ の場合について一般化再突入関数 F/F_{max} をプロットしたものが上図である。



第6章の参考文献

- 1) H. Julian Allen and A. J. Eggers, Jr. "A study of the Motion and Aerodynamic Heating Of Missiles Entering the Earths Atmosphere at High Supersonic Speeds"
NACA TN 4047 October 1957, NACA Report 1381 1958
Ronald Blum "Re-Entry Trajectory Flat Earth Approximation" ARS Journal April 1962
616-620
- 2) R. D. Linnell "Vertical Re-entry into the Earths Atmosphere for Both Light and Heavy Bodies" Jet Propulsion May 1958 329-330
- 3) William Squire "Some Comments on Generalized Trajectories for Free Falling Bodies Of High Drag" Jet Propulsion December 1958 838-839
- 4) W. H. T. Loh "Ballistic Re-Entry at Small Angles of Inclination"
Advances in the Astronautical Sciences Volume 9 Proceedings Fourth Annual Meeting of the American Astronautical Society 1-3 August 1961, ARS Journal May 1962
- 5) W. H. T. Loh "A Higher Order Theory of Ballistic Entry" Advances in the Astronautical Sciences Volume 11 Proceedings Eighth Annual Meeting of the American Astronautical Society 16-18 January 1962
- 6) George C. "Orbital Flight Hand Book" Space Flight Handbooks Volume 1 Part 2.
Mission Sequencing Problems NASA N63-21102 1963
Raymond W. Wolverton "Flight Performance Handbook for Orbital Operations"
Vehicles Design Considerations for Atmospheric Entry 6.4 Planetary Entry and Controlled Descent
- 7) Staff of Langley Research Center "Performance and Dynamics of Aerospace Vehicles"
Percy J. Bobbit 4. Problems of Atmospheric Entry NASA SP-258 1971
- 8) Alfred J. Eggers, Jr., H. Julian Allen, and Stanford E. Neice "A Comparative Analysis of The Performance of Long-Range Hypervelocity Vehicles" NACA TN 4046 October 1957
W. H. T. Loh "Ballistic Re-Entry at Small Angle of Inclination", Advances in the Astronautical Sciences Volume 9, 347-360 forth western meeting 1-3 August 1961 San Francisco, California
ARS Journal May 1962, 718-721
- 9) W. H. T. Loh "A Higher Order Theory of Ballistic Entry", Advances in the Astronautical Sciences Volume 11, 529-540 eighth annual meeting 16-18 January 1962 Washington D.C
- 10) Mildred M. Moe "An Approximation to the Re-Entry Trajectory" ARS Journal January 1960 50-53
- 11) R. D. Linnell "Vertical Re-entry into the Earths Atmosphere for Both Light and Heavy Bodies" Jet Propulsion May 1958 329-330
- 12) William Squire "Some Comments on Generalized Trajectories for Free Falling Bodies

- Of High Drag" Jet Propulsion December 1958 838-839
- 13) George C. "Orbital Flight Hand Book" SpaceFlight Handbooks Volume 1 Part 2. Mission Sequencing Problems NASA N63-21102 1963
- 14) Raymond W. Wolverton "Flight Performance Handbook for Orbital Operations" Vehicles Design Considerations for Atmospheric Entry 6.4 Planetary Entry and Controlled Descent
- 15) Frank J. Barbera "Closed-Form Solution for Ballistic Vehicle Motion" J. Spacecraft VOL. 18, NO. 1 Jan.-Feb. 1981 52-57
- 16) R. A. Norling "Nomal Dispersion of a Re-Entry Body" ARS Journal July 1960 652-654
A. Ambrosio "Estimation of Entry Vehicle Impact Displacement" ARS Journal December 1962 1931-1932
- 17) John J. Martin "A Method of Atmospheric Entry Scaling" Journal Spacecraft Rocket VOL. 3, NO. 12, December 1960
- 18) A. Ambrosio "A General Atmospheric Entry Function and its Characteristics" ARS Journal June 1962
- 19) John J. Martin "Atmospheric Reentry" Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J 1966

7. 再突入宇宙機の揚力飛行軌道

7-1. 1次および2次の近似解析解(Allen&Loh)

一定揚抗比飛行軌に関する Allen, Eggers の解析では独立変数として飛行距離 s を用いて 1 次オーダーの解を得ている。また Loh は弾道飛軌道の場合と同様に軌道パラメータの 1 部を定数と仮定して 2 次オーダーの解を得ている。これらの近似解を比較しながら示す。

(1) Allen, Eggers の 1 次オーダーの近似解

Allen の基礎方程式

$ds/dt = V$ を用いて運動方程式の独立変数を t から飛行距離 s に変換すると

$$\frac{1}{2} \frac{dV^2}{ds} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \quad (1)$$

$$V^2 \frac{d\gamma}{ds} = \frac{L}{m} + \frac{V^2}{r} \cos \gamma - g \cos \gamma \quad (2)$$

$$\frac{dh}{ds} = \sin \gamma \quad (3)$$

(2) 式を L/D で除し, (1) 式に加えると次式を得る。

$$\frac{dV^2}{ds} + \frac{2V^2}{(L/D)} \left(\frac{d\gamma}{ds} - \frac{\cos \gamma}{r} \right) + \frac{2g}{(L/D)} \left(\cos \gamma + \frac{L}{D} \sin \gamma \right) = 0 \quad (4)$$

仮定：左辺 2 項, 3 項に対して

$$\frac{d\gamma}{ds} \gg \frac{\cos \gamma}{r}$$

(2) 式に仮定を適用し, また (4) 式から次式を得る。

$$\frac{d\gamma}{ds} \approx \frac{L}{mV^2} = \frac{L}{D} \frac{\rho}{2\Delta} \quad (5)$$

$$\frac{d\rho}{ds} = -\rho\beta \sin \gamma \quad (6)$$

両式から経路角の密度に関する変化率で表すと

$$-\sin \gamma \frac{d\gamma}{d\rho} = \frac{1}{2\Delta\beta} \frac{L}{D}$$

または

$$\frac{d \cos \gamma}{d\rho} = \frac{1}{2\Delta\beta} \left(\frac{L}{D} \right) \quad (7)$$

また仮定 2) から第 3 項, 重力項を無視すると次式を得る。

$$\frac{dV^2}{ds} + \frac{2V^2}{(L/D)} \frac{d\gamma}{ds} = 0$$

または V^2 の経路角に関する変化率を求めると

$$\frac{1}{V^2} \frac{dV^2}{d\gamma} = -\frac{2}{(L/D)} \quad (8)$$

(7) (8) 式を積分して

$$\cos \gamma - \cos \gamma_E = \frac{1}{2\Delta\beta} \left(\frac{L}{D} \right) (\rho - \rho_E) \quad (9)$$

$$\gamma - \gamma_E = \left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \quad (10)$$

(9) (10) 式から経路角を消去すると, 密度は次式で表される。

$$\rho - \rho_E = \frac{2\Delta\beta}{L/D} \left[\cos \left\{ \gamma_E + \left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \right\} - \cos \gamma_E \right] \quad (11)$$

経路角 γ が小さい場合には $\cos \gamma - \cos \gamma_E = -(\gamma^2 - \gamma_E^2)/2$ から

$$\rho = -2\Delta\beta\gamma_E \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{2\gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \right\}$$

また定数 a は $a = -1/2\Delta\beta \sin \gamma_E \approx -1/2\Delta\beta\gamma_E$ と近似できるから, 上式の係数を $-2\Delta\beta\gamma_E = 1/a$ と置き換えると Lees の結果と一致する。

(2) Loh の 2 次オーダーの近似解

独立変数を $d\rho/dt = -\rho\beta V \sin \gamma$ によって時刻 t から密度の関数で表すと

$$\frac{d(V^2/gr)}{d\rho} + \frac{1}{\Delta\beta} \frac{(V^2/gr)}{\sin \gamma} = \frac{2}{\beta r \rho} \quad (12)$$

$$\frac{d \cos \gamma}{d\rho} + \frac{1}{\beta r} \frac{\cos \gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \frac{1}{\Delta\beta} \quad (13)$$

重力項を無視すると (12) 式右辺は 0。Loh の弾道飛行軌道の方程式と比べると (13) 式 L/D の項が追加されたものである。ここで弾道飛行軌道の場合と同じように M を次のように置く

$$\frac{1}{\beta r} \frac{\cos \gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \equiv M \quad : \text{Loh の定数} \quad (14)$$

重力項を無視して, M を, 積分区間で一定とすると (12) (13) 式から

$$\frac{d(V^2/gr)}{d\rho} + \frac{1}{\Delta\beta} \frac{(V^2/gr)}{\sin\gamma} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d\cos\gamma}{d\rho} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \frac{1}{\Delta\beta} - M \right\} \quad (16)$$

(16)式から

$$\sin\gamma = - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \frac{1}{\Delta\beta} - M \right\} / \left(\frac{d\gamma}{d\rho} \right) \quad (17)$$

(15)式に代入し、 V^2/gr の経路角に関する変化率が得られる。

$$\frac{d(V^2/gr)}{d\gamma} + \frac{(1/\Delta\beta)(V^2/gr)}{\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \frac{1}{\Delta\beta} - M \right\}} = 0 \quad (18)$$

(16), (18)式を積分すると $\ln\{(V^2/gr)/(V_E^2/gr)\} = \ln(V/V_E)$ から

$$\cos\gamma - \cos\gamma_E = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \frac{1}{\Delta\beta} - M \right\} (\rho - \rho_E) \quad (19)$$

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) = - \frac{(\gamma - \gamma_E)}{L/D - 2\Delta\beta M}$$

定数 M の定義(14)式を代入して $\cos\gamma$ について解くと

$$\cos\gamma = \frac{\cos\gamma_E + (1/2\Delta\beta)(L/D)\rho(1-\rho_E/\rho)}{1 + (1/\beta r)(gr/V^2 - 1)(1-\rho_E/\rho)}$$

ここで

$$\rho_E/\rho \ll 1, \quad \ln\{(V^2/gr)/(V_E^2/gr)\} = \ln(V/V_E) \text{ から}$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos\gamma_E + (1/2\Delta\beta)(L/D)\rho}{1 + (1/\beta r)(gr/V^2 - 1)} \quad (20)$$

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) = - \frac{\gamma - \gamma_E}{\frac{L}{D} - 2\Delta\beta \left\{ \frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \right\}} \quad (21)$$

上式が Loh の 2 次オーダーの近似解である。

(20)式から

$$\left\{ \frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \right\} = \frac{\cos\gamma_E - \cos\gamma}{\rho} + \frac{1}{2\Delta\beta} \frac{L}{D} \quad (22)$$

(21)式に代入して

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) = \frac{\rho(\gamma - \gamma_E)}{2\Delta\beta(\cos\gamma_E - \cos\gamma)} \quad (23)$$

$$\left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) = \frac{(\gamma - \gamma_E)}{\cos\gamma_E - \cos\gamma} \left[\cos\gamma_E - \cos\gamma \left\{ 1 + \frac{1}{\beta r} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \right\} \right] \quad (24)$$

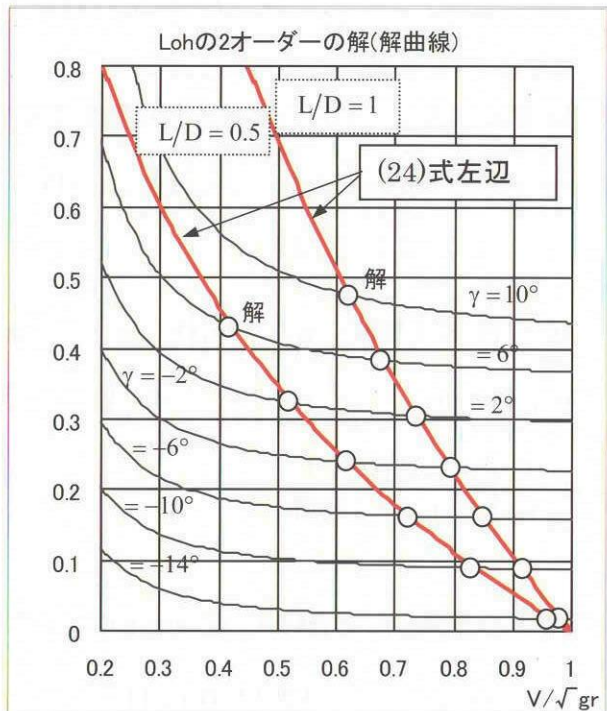
上式から経路角を与えて繰返し演算により速度をもとめることができる。繰返し演算のまえに(24)式の左辺をL/Dをパラメータとして V/V_E ($V_E = \sqrt{gr}$)の関数として、また経路角 γ_E をパラメータに右辺を V/\sqrt{gr} の関数として描くと右図の通り。両曲線の交点(○印)として解が求まる。

M = 0 の場合

M=0の場合には

$$\gamma - \gamma_E = -\left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V}{V_E}\right) \quad (25)$$

$$\rho = \frac{2\Delta\beta(\cos\gamma - \cos\gamma_E)}{(L/D)} \quad (26)$$



これはスキップ軌道に関する1次オーダーの解と一致する。

これより高度hは次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{2\Delta\beta}{\rho_{SL}} \frac{1}{(L/D)} (\cos\gamma - \cos\gamma_E) \quad \text{から}$$

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{2\Delta\beta}{\rho_{SL}} \frac{\cos\gamma - \cos\gamma_E}{L/D}\right) \quad (27)$$

M = (L/D)/2Δβ の場合

この場合には

$$\cos\gamma - \cos\gamma_E = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \frac{1}{\Delta\beta} - M \right\} (\rho - \rho_E) = 0$$

したがってこの場合経路角は初期経路角に等しい状態 $\gamma \approx \gamma_E$ である。(22)式を変形して

$$\frac{\gamma - \gamma_E}{\cos \gamma - \cos \gamma_E} = \frac{1}{2} \frac{L}{D} \left\{ \frac{\ln(V^2/gr) - \ln(V_E^2/gr)}{\cos \gamma - \cos \gamma_E + (\cos \gamma / \beta r)(V^2/gr - 1)} \right\} \quad (28)$$

上式で γ 、 γ_E が小さい場合には左辺は

$$\left(\frac{\gamma - \gamma_E}{\cos \gamma - \cos \gamma_E} \right) = \frac{\gamma - \gamma_E}{-2 \sin\{(\gamma - \gamma_E)/2\} \sin\{(\gamma + \gamma_E)/2\}} \approx -\frac{1}{\sin \gamma}$$

と近似できる。初速度が周回円軌道速度に近ければ $\ln(V_E^2/gr) \approx 0$ であり、また無次元化速度の対数を次式で近似すると

$$\ln(V^2/gr) \approx \frac{V^2/gr - 1}{V^2/gr} \quad \text{ただし } \ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 + \dots$$

経路角は速度の関数として次式で近似できる。

$$\gamma = -\frac{2}{\beta r} \frac{1}{(L/D)} \frac{gr}{V^2} \quad (29)$$

$$\rho = \frac{2\Delta\beta}{L/D} \frac{1}{\beta r} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \quad (30)$$

これより高度 h は次式で表される。

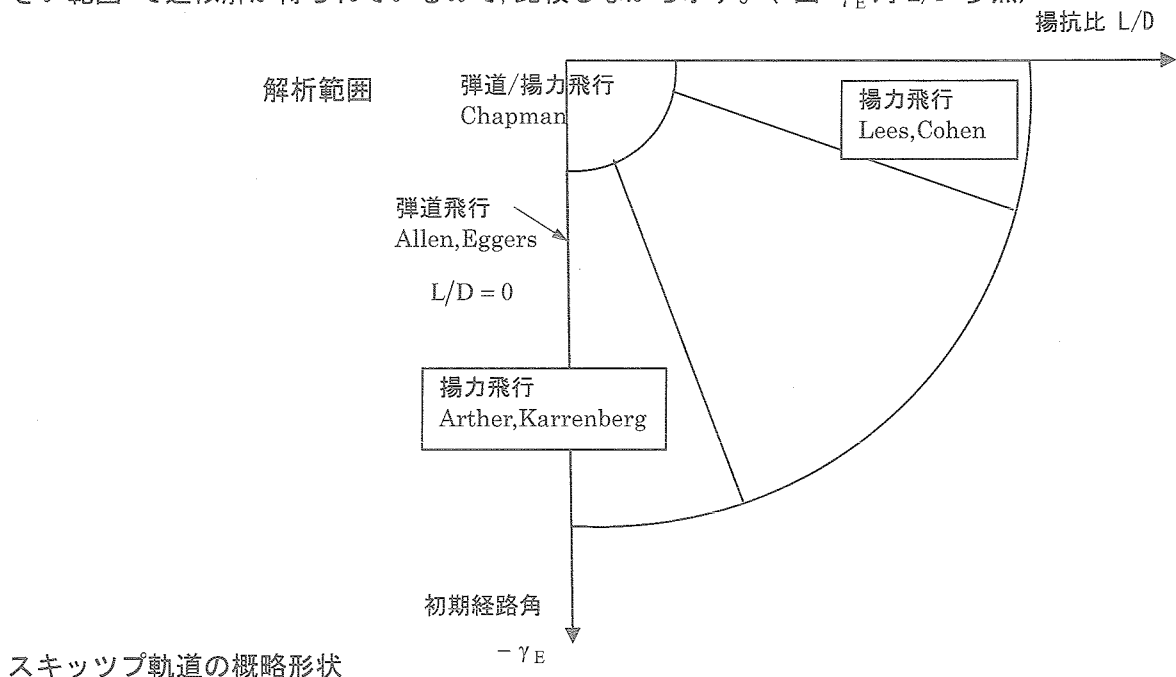
$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{1}{\beta r} \frac{2\Delta\beta}{\rho_{SL}} \frac{1}{L/D} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \quad (31)$$

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{2\Delta\beta}{\rho_{SL}} \right) - \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{1}{(L/D)\beta r} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \right\} \quad (32)$$

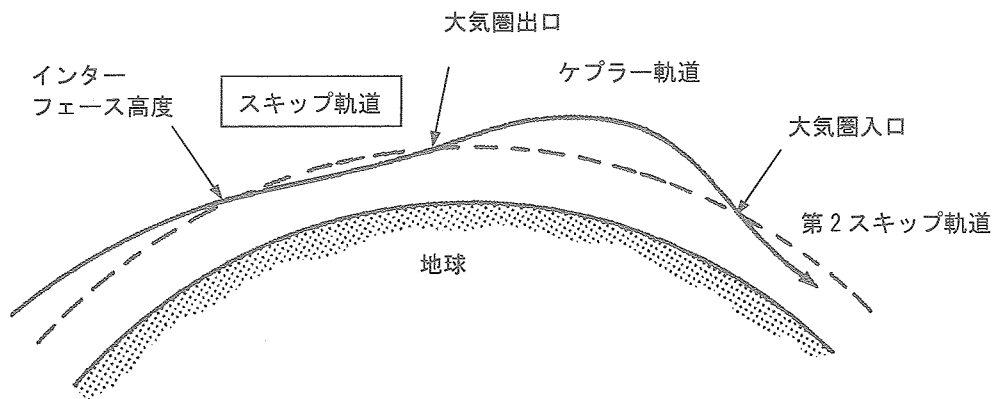
7-2. スキップ軌道

概要：

宇宙機が揚抗比一定で再突入した場合軌道は長周期の振動(Phugoid Motion)を行う。この軌道全般に亘って解析解は求めることができないが空気力が支配的と仮定すると再突入後の最初のスキップ軌道については解析解が得られる。スキップ軌道では宇宙機の空力加熱、空力荷重の緩和ができることから、ここではスキップ軌道について記述する。またこの軌道については 経路角が小さい範囲で Lees, Cohen(1959)が、また経路角が大きく、揚抗比が小さい範囲で近似解が得られているので、比較しながら示す。(図 γ_E 対 L/D 参照)



スキップ軌道の概略形状



仮定

空気が遠心力、重力に比べて十分大きいと仮定する。

$$i) \quad L/m \gg (V^2/r - g) \cos \gamma$$

$$ii) \quad D/m \gg g \sin \gamma$$

速度座標系運動方程式と仮定に基づく近似運動方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \approx -\frac{1}{2} \frac{\rho V^2}{\Delta} \quad (1)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \approx \frac{1}{2} \frac{\rho V^2}{\Delta} \left(\frac{L}{D} \right) \quad (2)$$

$$\frac{ds}{dt} = V \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = V \cos \gamma \quad (4)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (5)$$

$dp/dt = -\rho\beta V \sin \gamma$ を用いて (1) 式の経路角 γ についての独立変数を時刻 t から密度 ρ に変更する。また (2) 式の速度 V について独立変数を (1) 式を用いて時刻 t から経路角 γ に変更すると次式を得る。

$$\frac{d \cos \gamma}{d\rho} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta\beta} \left(\frac{L}{D} \right) \quad (6)$$

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\gamma} = -\frac{1}{(L/D)} \quad (7)$$

(6), (7) 式の右辺は定数であることから容易に積分でき、次式を得る。

$$\cos \gamma - \cos \gamma_E = \frac{1}{2\Delta\beta} \left(\frac{L}{D} \right) (\rho - \rho_E) \quad (8)$$

$$\gamma - \gamma_E = -\left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \quad (9)$$

または

$$\rho - \rho_E = \frac{2\Delta\beta(\cos \gamma - \cos \gamma_E)}{L/D} \quad (10)$$

$$\frac{V}{V_E} = \exp \left(-\frac{\gamma - \gamma_E}{L/D} \right) \quad (11)$$

Lees, Cohen (1959), Arthur (1961) の近似

Lees, Cohen (1959) の近似は再突入時の経路角 γ_E 及び経路角 γ が小さい $\gamma, \gamma_E \ll 1$ と仮定した場合である。Arthur (1961) の近似は再突入時の経路角 γ_E と経路角 γ の差が小さい $|\gamma - \gamma_E|$

≪1 と仮定した場合であり、初期経路角 γ_E 自身は必ずしも小さい必要はない。
両近似について (8) 式の $\cos \gamma - \cos \gamma_E$ は次のように表される。

$$\cos \gamma - \cos \gamma_E = -(\gamma^2 - \gamma_E^2)/2 \quad : \text{Lees, Cohen の近似} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma - \cos \gamma_E &= -2 \sin\left(\frac{\gamma - \gamma_E}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma + \gamma_E}{2}\right) \approx -(\gamma - \gamma_E) \sin\left(\gamma_E + \frac{\gamma - \gamma_E}{2}\right) \\ &\approx -\sin \gamma_E (\gamma - \gamma_E) \{1 + \cot \gamma_E (\gamma - \gamma_E)/2\} : \text{Arthur の近似} \end{aligned} \quad (13)$$

但し $\sin \gamma \approx -\sin \gamma_E \{1 + \cot \gamma_E (\gamma - \gamma_E)\}$

密度(高度)対速度 :

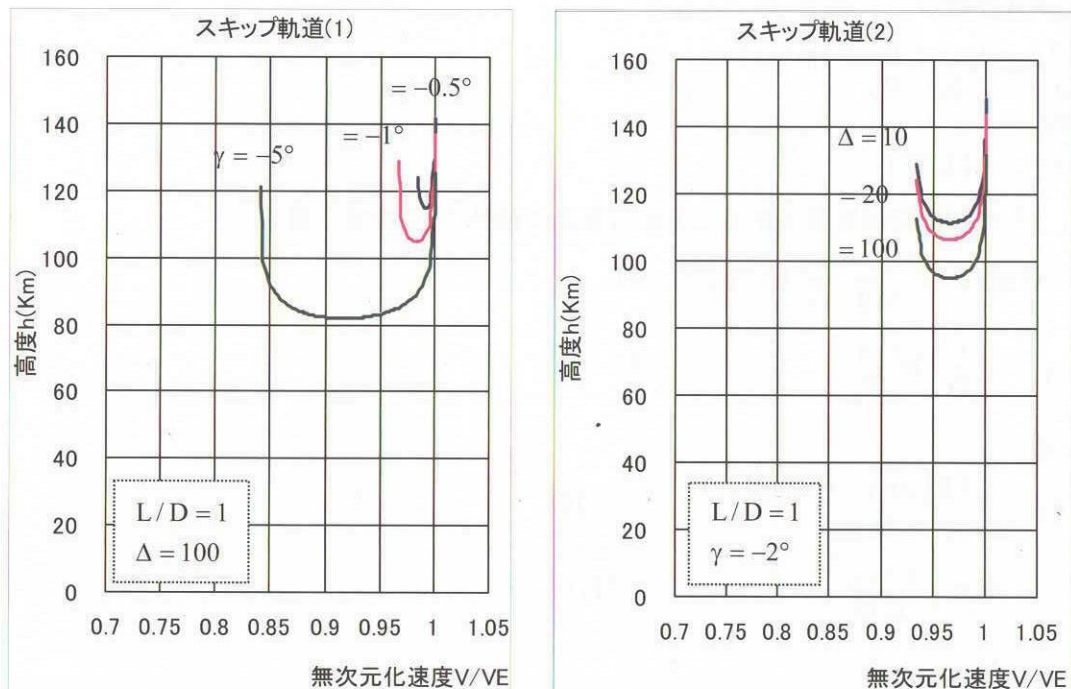
密度(高度)対速度は (10) 式から次式で表される。

$$\rho = \frac{2\Delta\beta}{L/D} \left[\cos \left\{ \gamma_E + \left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \right\} - \cos \gamma_E \right] + \rho_E \quad (14)$$

上式で右辺第 1 項を無視 $\rho_E/\rho_{SL} \ll 1$ して両辺の対数をとると高度 h は下式で表される。

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{2\Delta\beta}{L/D} \left[\cos \left\{ \gamma_E + \left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \right\} - \cos \gamma_E \right] \right] \quad (15)$$

(15) 式をパラメータ L/D , Δ , γ をパラメータとして下図に示す。



次に(12)(13)式に対応する Lees, Cohen(1959) と Arthur(1961) の近似結果は次の通り。

$$\rho \approx \frac{1}{a} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2\gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \quad (16)$$

$$\approx \frac{1}{a} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \quad (17)$$

ただし $a = -1/2\Delta\beta \sin \gamma_E$

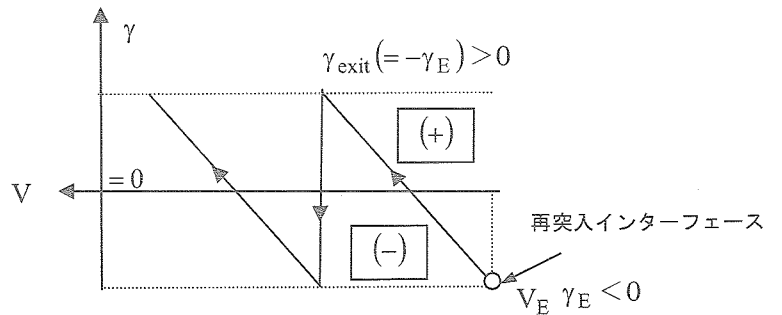
弾道飛行の結果と比較すると右辺 の部分が弾道飛行の結果であり の部分がスキップ飛行の結果である。これよりスキップ軌道での各種飛行状態量は弾道飛行での密度比 ρ/ρ_{SL} を(17)式の密度比で置き換えることにより得られる。

飛行経路角/飛行経路角変化率：

飛行経路角は(9)式から

$$\gamma = \gamma_E + \left(\frac{L}{D}\right) \ln \frac{V_E}{V} \quad (18)$$

スキップ軌道の場合にはこのように経路角は(-) → 0 → (+)と符号が変化する。



飛行経路角変化率は(18)式を微分して(1)式 dV/dt をもちいると次式で表される。

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\left(\frac{L}{D}\right) \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\rho_{SL} V_E}{2\Delta} \left(\frac{L}{D}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \left(\frac{V}{V_E}\right) \quad (19)$$

すなわち密度と速度の積で表される。これより飛行経路角変化率は(19)式に密度比 ρ/ρ_{SL} (14)-(17)式を代入して次式で表される。

$$\frac{d\gamma}{dt} = \beta V_E \left[\cos \left\{ \gamma_E + \left(\frac{L}{D}\right) \ln \left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} - \cos \gamma_E \right] \left(\frac{V}{V_E}\right) \quad (20)$$

$$\approx -\beta V_E \gamma_E \left(\frac{L}{D}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2\gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln \left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \ln \left(\frac{V_E}{V}\right) \left(\frac{V}{V_E}\right) \quad (21)$$

$$\approx -\beta V_E \sin \gamma_E \left(\frac{V}{V_E}\right) \ln \left(\frac{V}{V_E}\right) \left(\frac{L}{D}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln \left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \quad (22)$$

揚力加速度：

揚力加速度は仮定 1) から $L/m = V (d\gamma/dt)$ から(20)-(22)を代入して次式を得る。

$$\frac{L}{m} = \beta V_E^2 \left[\cos \left\{ \gamma_E + \left(\frac{L}{D}\right) \ln \left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} - \cos \gamma_E \right] \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \quad (23)$$

$$\approx -\beta V_E^2 \gamma_E \left(\frac{L}{D}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2\gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \quad (24)$$

$$\approx -\beta V_E^2 \sin \gamma_E \left(\frac{L}{D}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \quad (25)$$

加速度, 抗力加速度:

仮定 ii) から加速度と抗力加速度は等しい。抗力加速度 D/m は次式で定義され

$$\frac{D}{m} = \frac{C_D A}{2m} \rho V^2 = \frac{\rho_{SL} V_E^2}{2\Delta} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \quad (26)$$

(14)-(17) 式の ρ/ρ_{SL} を代入して次式を得る。

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{D}{m} = \frac{\beta V_E^2}{L/D} \left[\cos \left\{ \gamma_E + \left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} - \cos \gamma_E \right] \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \quad (27)$$

$$\approx -\beta V_E^2 \gamma_E \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2\gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \quad (28)$$

$$\approx -\beta V_E^2 \sin \gamma_E \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \quad (29)$$

①

②

①項は弾道飛行での加速度であり, ②項は経路角が負であるから $\{ \} \leq 1$ であり, 揚抗比 L/D が大きくなれば, より 1 に比べて小さくなる。したがってスキップ軌道では加速度は弾道飛行に比べて小さくなる。次に上式で βV_E^2 は加速度の単位 m/sec^2 を有するから, これを g 単位であらわすと $\beta V_E^2 \rightarrow \beta V_E^2/g = \beta r$ となる

空力荷重 G

空力荷重 G は次式で定義される。 $G = \sqrt{(L/m)^2 + (D/m)^2} = (D/m) \sqrt{1 + (L/D)^2}$

いま揚抗比 L/D が一定を仮定しているから空力荷重 G は抗力加速度を $\sqrt{1 + (L/D)^2}$ 倍した値に等しい。(27)-(29) 式をもちいて

$$G = \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2} \frac{D}{m} \quad (30)$$

初期速度を周回円軌道 $V_E^2 = gr$ とし, 空力荷重 G を g 単位で表すと次の通り。

$$\begin{aligned} \frac{G}{g} &= -\beta r \gamma_E \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2\gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2} \\ \frac{G}{g} &= -\beta r \sin \gamma_E \left(\frac{V^2}{gr}\right) \ln\left(\frac{\sqrt{gr}}{V}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{\sqrt{gr}}{V}\right) \right\} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

揚抗比 $L/D = 0$ の場合には

$$\frac{G}{g} = -\beta r \sin \gamma_E \left(\frac{V^2}{gr} \right) \ln \left(\frac{\sqrt{gr}}{V} \right) \quad (32)$$

となり弾道飛行軌道の場合に一致する。

最大空力荷重：

空力荷重の定義 $G = (\rho V^2 / 2\Delta) \sqrt{1 + (L/D)^2}$ を時刻 t で微分して(1)式 $\dot{V} = -\rho V^2 / 2\Delta$, $\dot{\rho} = -\rho \beta V \sin \gamma$ を用いると次式を得る。

$$dG/dt = -(1/2\Delta) \sqrt{1 + (L/D)^2} \beta \rho V^3 (\sin \gamma + \rho / \Delta \beta) \quad (33)$$

空力荷重 G が最大となる条件をうるために $dG/dt = 0$ と置くと次式が得られる。

$$\sin \gamma_{\max} = -\rho_{\max} / \Delta \beta \quad (34)$$

また空力荷重最大時においても (8) 式が成立からため次式を得る。

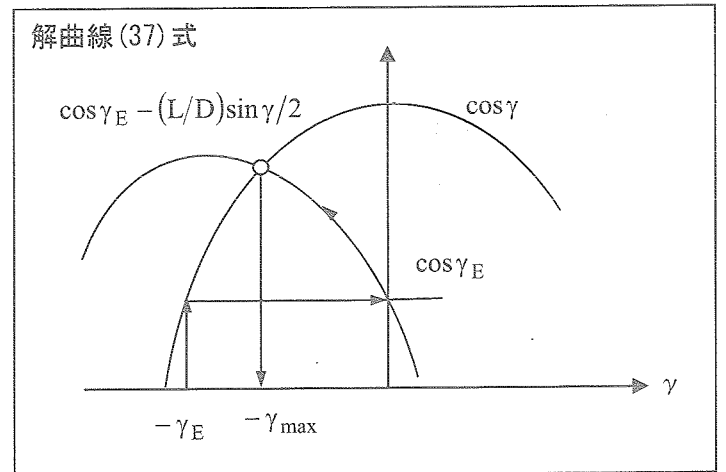
$$\left\{ (L/D) / 2\Delta \beta \right\} (\rho_{\max} - \rho_E) = \cos \gamma_{\max} - \cos \gamma_E \quad (35)$$

(41) 式から ρ_{\max} を消去すると右辺第 2 項は十分小さいから無視すると $\rho_E (L/D) / 2\Delta \beta \ll 1$

$$\cos \gamma_{\max} + \left\{ (L/D) / 2 \right\} \sin \gamma_{\max} = \cos \gamma_E - \rho_E (L/D) / 2\Delta \beta \approx \cos \gamma_E \quad (36)$$

これより最大空力荷重が最大となる条件を得る。

$$\cos \gamma_E - (L/D) \sin \gamma_{\max} / 2 = \cos \gamma_{\max} \quad (37)$$



両辺を 2 乗すると $\sin \gamma$ の 2 次式となり, 空力荷重 G が最大となる条件は

$$\left\{ 1 + \left(\frac{L/D}{2} \right)^2 \right\} \sin^2 \gamma_{\max} - 2 \left\{ \left(\frac{L/D}{2} \right) \cos \gamma_E \right\} \sin \gamma_{\max} - \sin^2 \gamma_E = 0 \quad (38)$$

これを解くと

$$\sin \gamma_{\max} = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \right\}^{-1/2} \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \left\{ \cos \gamma_E - \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \gamma_E}{\left\{ (L/D) / 2 \right\}^2}} \right\} \quad (39)$$

(39) 式から γ_{\max} を求めると空力荷重 G の最大値, および最大となる密度 (高度), 速度は次式

で与えられる。

$$\rho_{\max} = -\Delta\beta \sin \gamma_{\max} \quad : \text{密度} \quad (40)$$

$$\frac{V_{\max}}{V_E} = \exp\left\{-\frac{(\gamma_{\max} - \gamma_E)}{L/D}\right\} \quad : \text{速度} \quad (41)$$

空力荷重 G の最大値は $G_{\max} = (V_E^2/2\Delta)\sqrt{1+(L/D)^2} \rho_{\max} (V_{\max}/V_E)^2$ から

$$G_{\max} = -\frac{\beta V_E^2}{2} \sin \gamma_{\max} \exp\left\{-\frac{2(\gamma_{\max} - \gamma_E)}{L/D}\right\} \sqrt{1+(L/D)^2} \quad : \text{最大値} \quad (42)$$

Lees, Cohen (1959) の近似

Lees, Cohen の近似では $\sin \gamma_{\max} \approx \gamma_{\max}$ $\cos \gamma_{\text{Ex}} \approx 1$ と置くと (37) 式から

$$\gamma_{\max}^2 - 2\left\{\frac{L}{D}\right\} \gamma_{\max} - \gamma_E^2 = 0 \quad (43)$$

γ_{\max} に関する 2 次方程式となるからこの解は次の通り。

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{D}\right) \left\{1 - \sqrt{1 + \frac{\gamma_E^2}{\left\{\frac{L}{D}\right\}^2}}\right\} \approx -\frac{\gamma_E^2}{L/D} \quad (44)$$

$-\gamma_E \ll 1$ の場合

空力荷重の最大値, および最大となる密度速度は次式で得られる。

(11), (43) 式および $\rho_{\max} \gg \rho_E$ $|\gamma_E| \gg |\gamma_{\max}|$ から

$$\rho_{\max} = \frac{2\Delta\beta(\cos \gamma_{\max} - \cos \gamma_E)}{L/D} + \rho_E \approx -\frac{\Delta\beta(\gamma_{\max}^2 - \gamma_E^2)}{L/D} = -\Delta\beta\gamma_{\max} = \frac{\Delta\beta}{L/D}\gamma_E^2 \quad (45)$$

$$\frac{V_{\max}}{V_E} = \exp\left\{-\frac{(\gamma_{\max} - \gamma_E)}{L/D}\right\} \approx \exp\left(\frac{\gamma_E}{L/D}\right) \quad (46)$$

空力荷重 G の最大値は $G_{\max} = (V_E^2/2\Delta)\sqrt{1+(L/D)^2} \rho_{\max} (V_{\max}/V_E)^2$ から

$$G_{\max} = \frac{\beta V_E^2}{2} \frac{\gamma_E^2}{L/D} \exp\left(\frac{2\gamma_E}{L/D}\right) \sqrt{1+\left(\frac{L}{D}\right)^2} \quad : \text{最大値} \quad (47)$$

Arthur (1961) の近似 :

空力荷重最大の条件 (37) 式 $\cos \gamma_{\max} - \cos \gamma_E = \sin \gamma_{\max} (L/D)/2$ に対して Arthur の近似

$$\cos \gamma_{\max} - \cos \gamma_E \approx -\sin \gamma_E (\gamma_{\max} - \gamma_E) \{1 + \cot \gamma_E (\gamma_{\max} - \gamma_E)/2\}$$

$$\sin \gamma_{\max} \approx -\sin \gamma_E \{1 + \cot \gamma_E (\gamma_{\max} - \gamma_E)\}$$

を適用すると

$$(\gamma_{\max} - \gamma_E) \left\{ 1 + \frac{(\gamma_{\max} - \gamma_E)}{2} \cot \gamma_E \right\} = \frac{L/D}{2} \{1 + (\gamma_{\max} - \gamma_E) \cot \gamma_E\} \quad (48)$$

上式は $(\gamma_{\max} - \gamma_E)$ の 2 次方程式となるから

$$(\gamma_{\max} - \gamma_E)^2 + \frac{2}{\cot \gamma_E} \left\{ 1 - \frac{\cot \gamma_E}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \right\} (\gamma_{\max} - \gamma_E) - \frac{1}{\cot \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) = 0 \quad (49)$$

これを解いて次の解を得る

$$\gamma_{\max} - \gamma_E = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \left(1 + \frac{L \cot \gamma_E}{D \cdot 4} \right) \quad (50)$$

これより空力最大空荷重と最大時の密度, 速度は Arthur の近似

から次式を得る。さらに $\gamma_{\max} - \gamma_E \ll 1$ と近似すれば (10) 式から

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= \rho_E + \frac{2\Delta\beta(\cos \gamma_{\max} - \cos \gamma_E)}{L/D} = \rho_E - \frac{2\Delta\beta}{L/D} \sin \gamma_E (\gamma_{\max} - \gamma_E) \left\{ 1 + \frac{\cot \gamma_E}{2} (\gamma_{\max} - \gamma_E) \right\} \\ &\approx -\frac{2\Delta\beta}{L/D} \sin \gamma_E (\gamma_{\max} - \gamma_E) \quad (51) \end{aligned}$$

(50) 式を代入して

$$\rho_{\max} = -\Delta\beta \sin \gamma_E \left(1 + \frac{L \cot \gamma_E}{D \cdot 4} \right) \quad (52)$$

(11) 式から

$$\frac{V_{\max}}{V_E} = \exp \left(-\frac{1}{2} + \frac{L \cot \gamma_E}{D \cdot 8} \right) \approx \exp \left(-\frac{1}{2} \right) \quad (53)$$

空力荷重の最大値は

$$G_{\max} = (V_E^2 / 2\Delta) \sqrt{1 + (L/D)^2} \rho_{\max} (V_{\max} / V_E)^2 \quad (54)$$

に (52) (53) 式を代入して

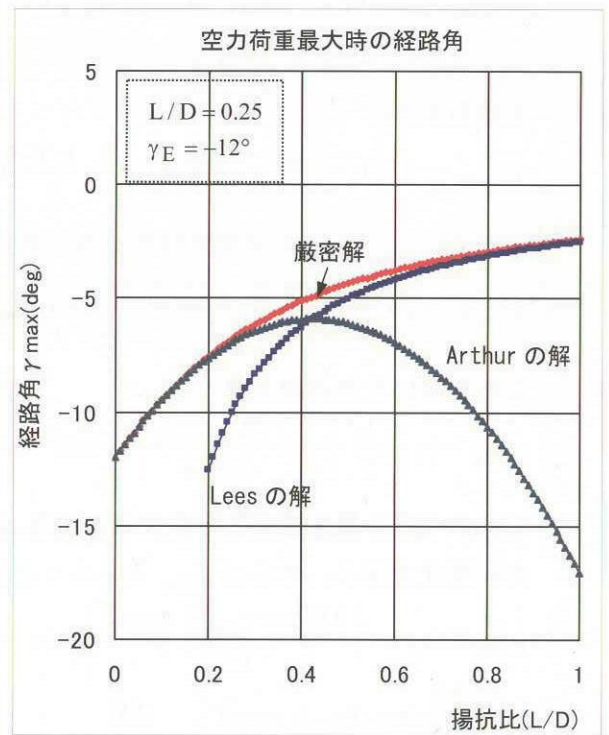
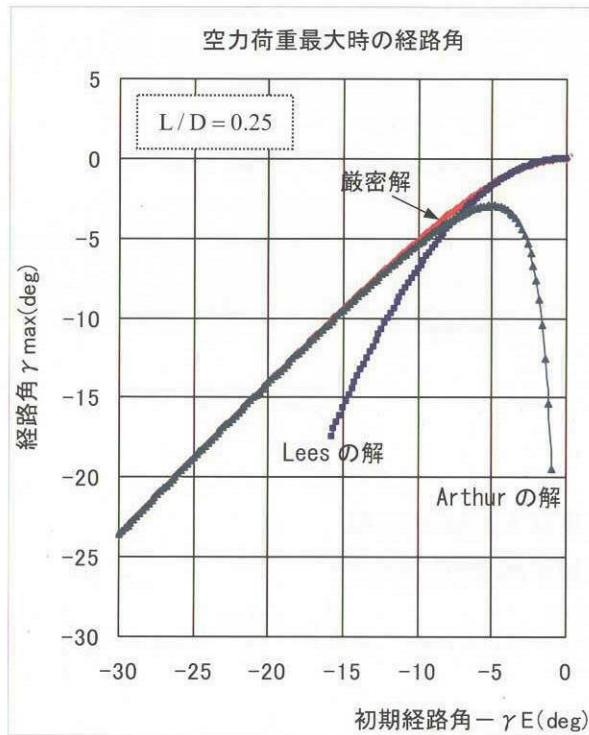
$$G_{\max} = -\frac{\beta V_E^2}{2} \frac{\sin \gamma_E}{e} \left(1 + \frac{L \cot \gamma_E}{D \cdot 4} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} \quad (55)$$

数値例 : 空力加重最大となる経路角 γ_{\max} の比較

揚抗力比 : $L/D=1/4$,

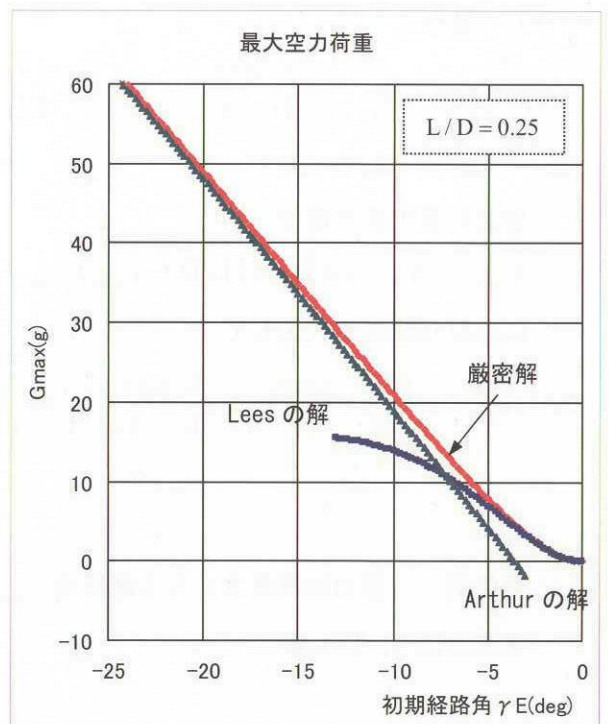
スケール高度： $1/\beta = 23500\text{ft} \times 0.3048 = 7162.8\text{m}$ (Arthur)

初期経路角： $\gamma_E = -12\text{ deg}$ として空力加重最大となる経路角 γ_{\max} を厳密解(39), Leesの解(44), Arthurの解(50)式を比較して下図に示す。



最大空力加重の比較：

上記 γ_{\max} をもちいて空力加重の最大値を厳密解(42)式, Leesの解(47)式, Arthurの解(55)式を比較して示す。



Arthur の近似の適用範囲

$$\left\{ \frac{(L/D) \ln(V/V_E)}{\tan \gamma_E} \right\}^2 \leq 0.1, \quad |\ln(V/V_E)| < 1/2 \quad (56)$$

から

$$|\tan \gamma_E| \geq 3.162(L/D) \ln(V/V_E) = 1.58(L/D)$$

$L/D=0.25$ のとき $|\tan \gamma_E| \geq 0.395$ したがって

$$\gamma_E \leq -\tan^{-1} 0.395 = -21.6 \text{ deg}$$

空力加熱率 :

空力加熱率は次式で定義

$$dQ/dt = K_Q \rho^n V^3 = K_Q \rho_E^n V_E^3 (\rho/\rho_E)^n (V/V_E)^3 \quad (57)$$

ρ/ρ_E を代入すると

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho_E^n V_E^3 \left(\frac{1}{a \rho_E} \right)^n \left(-\ln \frac{V}{V_E} \right)^n \left\{ 1 - \frac{1}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \right\}^n \left(\frac{V}{V_E} \right)^3 \quad (58)$$

$$\frac{d(dQ/dt)}{d(V/V_E)} = K_Q \rho_E^n V_E^3 \left(\frac{1}{a \rho_E} \right)^n \left(-\ln \frac{V}{V_E} \right)^n 3 \left(-\ln \frac{V}{V_E} \right)^{n-1} \left\{ 1 - \frac{1}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \right\}^{n-1} \left(\frac{V}{V_E} \right)^2 \times$$

$$\left[-\frac{n}{3} + \left(-\ln \frac{V}{V_E} \right) \left\{ 1 - \frac{n}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) + \frac{1}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{V}{V_E} \right) \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \right\} \right] = 0$$

(59)

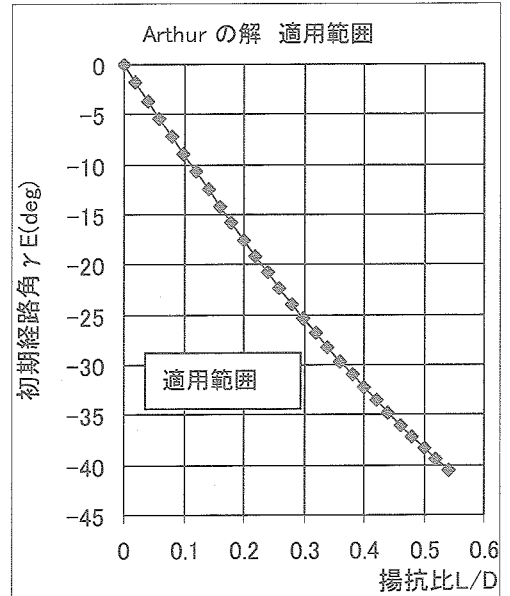
$$\ln \frac{V}{V_E} = -\frac{n}{3} + \frac{n}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) \left(\ln \frac{V}{V_E} \right) - \frac{1}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{V}{V_E} \right) \left\{ \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \right\}^2 \quad (60)$$

右辺第2項を無視すれば

$$\ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \left\{ 1 - \frac{n}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) \right\} = -\frac{n}{3} \quad (61)$$

$$\left(\frac{V}{V_E} \right)_{\max} = \exp \left(-\frac{n}{3} \right) \left\{ 1 - \frac{n}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) \right\}^{-1} \quad (62)$$

$-\frac{n}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D} \right) \ll 1$ のときには



$$\left(\frac{V}{V_E}\right)_{\max} = \exp\left(-\frac{n}{3}\right) \left\{1 + \frac{n}{2 \tan \gamma_E} \left(\frac{L}{D}\right)\right\} \quad (63)$$

$L/D=0$ のときには

$$\left(\frac{V}{V_E}\right)_{\max} = \exp\left(-\frac{n}{3}\right) = \frac{1}{e^{n/3}} \quad (64)$$

飛行距離/飛行レンジ

(1) 式から $dy/dt = (L/D)\rho V / 2\Delta$, これを用いて独立変数を t から経路角 γ に変換し

$\varepsilon = (L/D)\rho_E / 2\Delta\beta \ll 1$: 無次元パラメータ (微小値)

$$c = -\cos \gamma_E + \varepsilon$$

と置くと s の γ に関する変化率は次式で表される。

$$\frac{ds}{d\gamma} = \frac{2\Delta}{L/D} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\cos \gamma - \cos \gamma_E + \varepsilon} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\cos \gamma + c} \quad (65)$$

上式を積分公式

$$\int \frac{dx}{\cos x + c} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1-c^2} \sin x + c \cos x + 1}{\cos x + c} \right|$$

を用いて $[\gamma_E, \gamma]$, $\gamma < 0$ の間で積分を行うと

$$s = \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \ln \left| \frac{\sin \gamma_E \sin \gamma + (-\cos \gamma_E + \varepsilon) \cos \gamma + 1}{\cos \gamma - \cos \gamma_E + \varepsilon} \right| - \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \ln \left(\frac{2 \sin^2 \gamma_E}{\varepsilon} \right) \quad (66)$$

$$\approx -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \ln \left\{ \left(\frac{2 \sin^2 \gamma_E}{\varepsilon} \right) \left| \frac{\cos \gamma - \cos \gamma_E + \varepsilon}{\sin \gamma_E \sin \gamma + (-\cos \gamma_E + \varepsilon) \cos \gamma + 1} \right| \right\} \quad (67)$$

但し

$$\sqrt{1-c^2} \approx \sin \gamma_E$$

$$\sqrt{1-c^2} \sin \gamma_E + (-\cos \gamma_E + \varepsilon) \cos \gamma_E + 1 \approx 2 \sin^2 \gamma_E$$

飛行レンジ

飛行距離の場合と同様に (1) 式を用いて、飛行レンジ R の経路角 γ に関する変化率は次式で

表される。

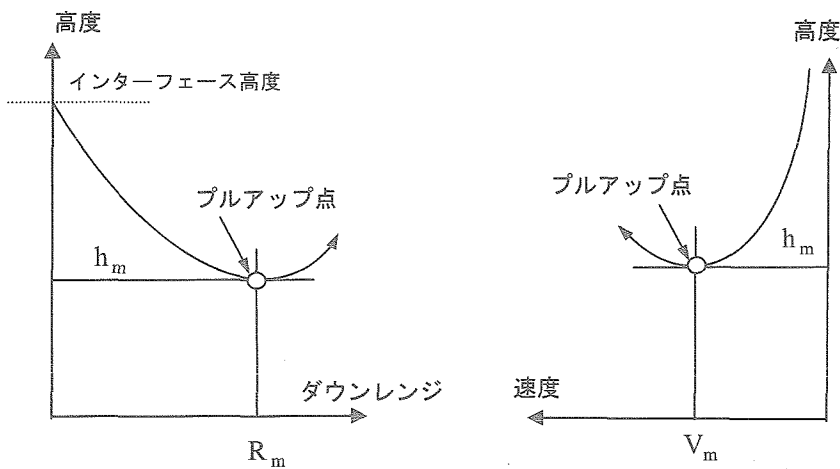
$$\frac{dR}{d\gamma} = \frac{2\Delta}{L/D} \frac{\cos \gamma}{\rho} = \frac{1}{\beta} \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma - \cos \gamma_E + \varepsilon} = \frac{1}{\beta} \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma + c} \quad (68)$$

前記積分公式を用いて積分を行うと

$$R = \frac{(\gamma - \gamma_E)}{\beta} - \frac{1}{\beta \tan \gamma_E} \ln \left| \left(\frac{2 \sin^2 \gamma_E}{\varepsilon} \right) \frac{\cos \gamma - \cos \gamma_E + \varepsilon}{\sin \gamma_E \sin \gamma + (-\cos \gamma_E + \varepsilon) \cos \gamma + 1} \right| \quad (69)$$

スキップ軌道底部(プルアップ点)の状態量

スキップ軌道底部の状態量(下図参照)の状態量をまとめて示す。



スキップ飛行の底部の状態量を添字 m で表す。スキップ飛行底部の条件は $\gamma=0$ であるから、(10)式に代入して次式を得る。

$$\rho_m = \rho_E + \frac{2\Delta\beta}{L/D} (1 - \cos \gamma_E) \approx \Delta\beta \frac{\gamma_E^2}{L/D} \quad (70)$$

ここで Cohen の 1 次近似によると空力荷重が最大となる密度は(45)式から次式で表されるから

$$\rho_{\max} = \rho_E + \frac{2\Delta\beta(\cos \gamma_{\max} - \cos \gamma_E)}{L/D} \approx \frac{\Delta\beta}{L/D} \gamma_E^2 \quad (-\gamma_E \ll 1) \quad (71)$$

(70)式と比較すると $-\gamma_E \ll 1$ の場合には空力荷重最大点とプルアップ点はほぼ等しい高度であることがわかる。

$$\frac{V_m}{V_E} = \exp\left(\frac{\gamma_E}{L/D}\right) \quad (72)$$

高度

等温大気密度の関係式 $\rho_m = \rho_{SL} \exp(-\beta h_m)$ から

$$h_m = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{2}{L/D} \frac{\Delta\beta}{\rho_{SL}} (1 - \cos \gamma_E) \right\} \approx -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1}{L/D} \frac{\Delta\beta}{\rho_{SL}} \gamma_E^2 \right) \quad (73)$$

空力荷重 G

空力荷重 G は $G = (\rho V^2 / 2\Delta) \sqrt{1 + (L/D)^2}$ から

$$G_m = \frac{\beta V_E^2}{2} \frac{\gamma_E^2}{L/D} \exp \left(\frac{2\gamma_E}{L/D} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} \quad (74)$$

またインターフェース速度が周回円速度 $V_E = \sqrt{gr}$ の場合には次のようになる。

$$\frac{G_m}{g} = \frac{\beta r}{2} \gamma_E^2 \exp \left(\frac{2\gamma_E}{L/D} \right) \frac{\sqrt{1 + (L/D)^2}}{L/D} \quad (75)$$

飛行距離, 飛行レンジ

スキップ飛行底部(プルアップ時)まで飛行距離は次式で近似できる。

$$s_m = -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \ln \left(\frac{2 \sin^2 \gamma_E}{\varepsilon} \right) \approx -\frac{1}{\beta \gamma_E} \ln \left\{ \frac{4\Delta\beta}{\rho_E} \frac{\gamma_E^2}{(L/D)} \right\} \quad (76)$$

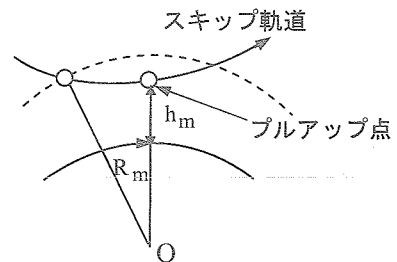
またスキップ飛行底部の高度は次式で近似できる。

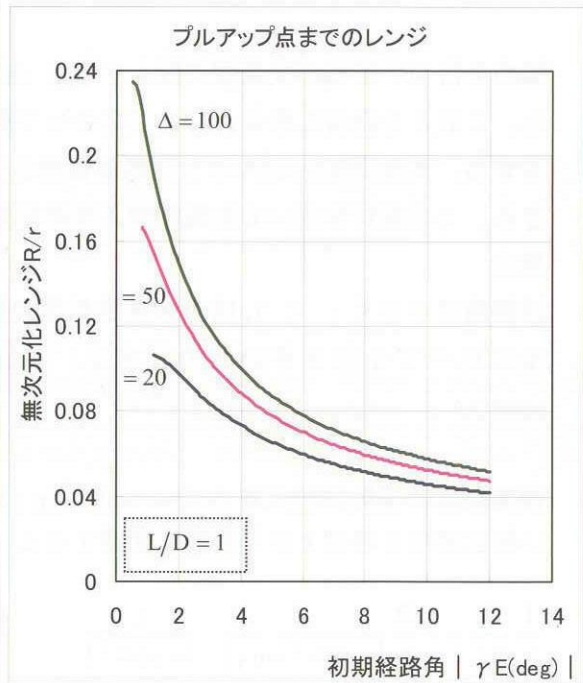
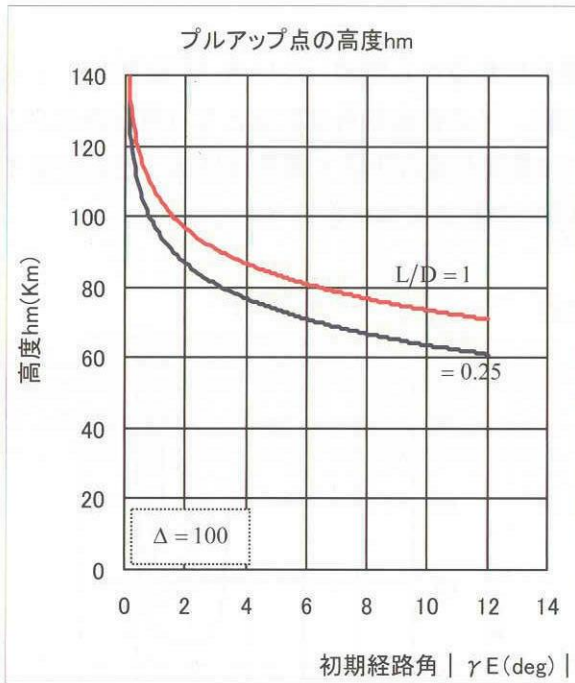
$$\beta(h_E - h_m) = \ln \left\{ \Delta\beta \gamma_E^2 / \rho_E (L/D) \right\}$$

この高度 h_m を用いるとプルアップ点までの飛行レンジは次式で表される。

$$R_m = -\frac{1}{\beta \gamma_E} \left[\gamma_E^2 + \left(1 - \gamma_E^2 / 2 \right) \left\{ \beta(h_E - h_m) + \ln 4 \right\} \right] \quad (77)$$

(73) (77) 式の結果を下図に示す。ただし飛行レンジ R_m は地球半径で無次元化した。





7-3. 一定速度近似解

揚力を持つ宇宙機が大気圏に突入すると、経路角は負値から増加していき、経路角は 0 となる。このとき高度は最低となる（スキップ底部）。その後経路角は正值となり再び高度が上昇する。大気圏突入後スキップ底部近傍まで速度変化量は小さく速度はほぼ一定と仮定できる。この仮定を用いて大気圏突入後の初期段階の軌道の解析を行う。

仮定：

経路角は小さく $\gamma \ll 1$, 抗力加速度が重力加速度に比べて十分大きいものとする。 $D/m \gg g \sin \gamma$

速度座標系運動方程式を $d\rho/dt = -\rho\beta V \sin \gamma$ を用い独立変数を時刻 t から密度に変換すると

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\rho} = -\frac{D}{m} \frac{1}{(-\rho\beta V^2 \sin \gamma)} - \frac{g}{(-\rho\beta V^2)}$$

$$\approx -\frac{1}{2\Delta\beta} \frac{1}{\gamma} \quad (1)$$

$$\frac{d \cos \gamma}{d\rho} = \frac{1}{\rho\beta V^2} \frac{L}{m} + \frac{1}{\rho\beta V^2} \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma$$

$$\approx \frac{1}{2\Delta\beta} \left(\frac{L}{D} \right) - \frac{1}{\rho\beta r} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \quad (2)$$

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{V}{(-\rho\beta V \sin \gamma)} \approx -\frac{1}{\beta} \frac{1}{\rho\gamma} \quad (3)$$

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{V \cos \gamma}{(-\rho\beta V \sin \gamma)} \approx -\frac{1}{\beta} \frac{1}{\rho\gamma} \quad (4)$$

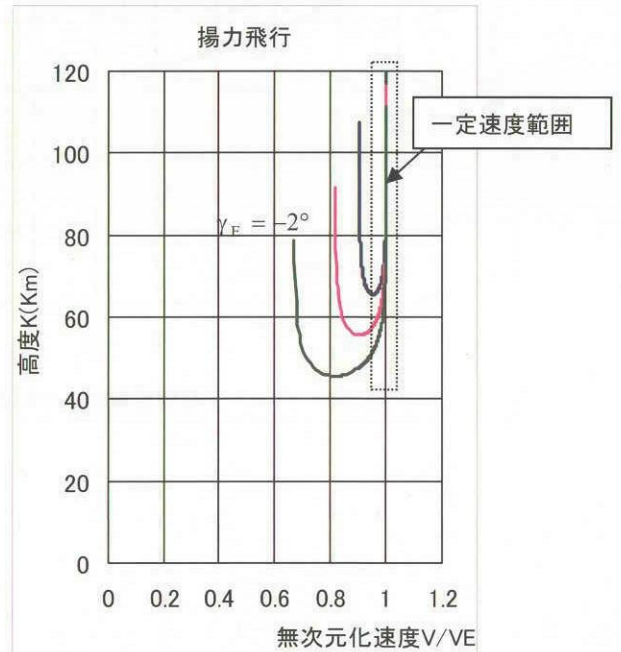
(1) 第 1 次近似 : 一定速度近似

運動方程式 (1) 式の右辺で $V = V_E$ 一定とおいて積分を行うと

$$\gamma^2 = \gamma_E^2 - \frac{L}{D} \frac{1}{\Delta\beta} (\rho - \rho_E) + \frac{2}{\beta r} \left(\frac{gr}{V_E^2} - 1 \right) \ln \frac{\rho}{\rho_E} \quad (5)$$

$$\text{但し } \cos \gamma - \cos \gamma_E = -(\gamma^2 - \gamma_E^2)/2$$

1 次オーダーの近似解と比較すると右辺第 3 項が追加されたものとなっている。



いま軌道の適当な点, 例えば抗力加速度(動圧)が最大となる点の密度を ρ_{\max} とすれば ρ_{\max} は初期経路角 γ_E のみにより決まる。例えば

$$\rho_{\max} = \Delta \beta \gamma_E^2 / (L/D)$$

この密度 ρ_{\max} を規準に密度を無次元化すると経路角は次式で表される。

$$\gamma = - \sqrt{\left\{ \gamma_E^2 + \frac{L}{D} \frac{1}{\Delta \beta} \rho_E + \frac{2}{\beta r} \left(\frac{gr}{V_E^2} - 1 \right) \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_E} \right\} - \frac{L}{D} \frac{1}{\Delta \beta} \rho + \frac{2}{\beta r} \left(\frac{gr}{V_E^2} - 1 \right) \ln \frac{\rho}{\rho_{\max}}} \quad (6)$$

(6) 式の $\sqrt{\quad}$ 内で下線部は定数, また対数項 $\ln(\rho/\rho_{\max})$ を $\rho = \rho_{\max}$ に於いて級数展開し 2 次項までをとる。すなわち 2 次式で表す。

$$\begin{aligned} \ln \frac{\rho}{\rho_{\max}} &\equiv \ln(1 - \varepsilon) = -\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \dots & \varepsilon &= 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \\ &= -\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2 - \dots & &= -\frac{3}{2} + 2 \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

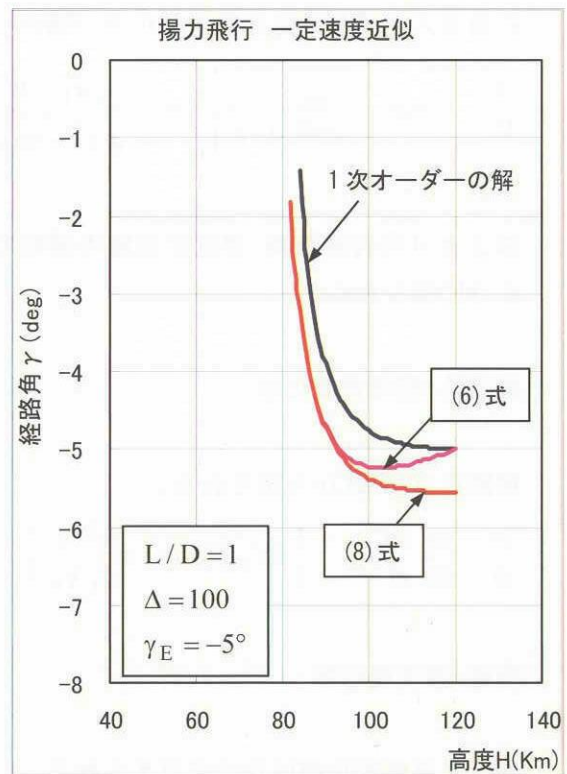
ここで定数 a, b, c (無次元) を次のように置けば

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{\beta r} \left(\frac{gr}{V_E^2} - 1 \right) \\ b &= -\frac{L}{D} \frac{\rho_{\max}}{\Delta \beta} + \frac{4}{\beta r} \left(\frac{gr}{V_E^2} - 1 \right) \\ c &= \gamma_E^2 + \frac{L}{D} \frac{\rho_E}{\Delta \beta} + \frac{1}{\beta r} \left(2 \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_E} - 3 \right) \left(\frac{gr}{V_E^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

飛行経路角 γ は密度 ρ に関する 2 次式の 1/2 乗で表される。

$$\gamma = -\sqrt{a \hat{\rho}^2 + b \hat{\rho} + c} \quad (8)$$

但し $\hat{\rho} \equiv \rho/\rho_{\max}$



(2) 第 2 次近似

一定速度近似で得られた経路角 γ (6) 式を用いると (1) 式は次式で表される。

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\hat{\rho}} = \frac{\rho_{\max}}{2\Delta\beta} \frac{1}{\gamma} = -\frac{\rho_{\max}}{2\Delta\beta} \frac{1}{\sqrt{a\hat{\rho}^2 + b\hat{\rho} + c}} \quad (9)$$

上式を積分公式

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \right) dx \quad \text{または} \quad \int \left(\frac{1}{\sqrt{bx + c}} \right) dx$$

を用いて積分を行う。この場合係数 a の符号に 1), 2), 3) により表される

速度：

1) 再突入速度が周回速度に等しい場合： $V_E^2 = gr$ ($a=0$)

$$\frac{V}{V_E} = \exp \left\{ -\frac{\rho_{\max}}{2\Delta\beta} \frac{2}{b} \left(\sqrt{b\hat{\rho} + c} - \sqrt{b\hat{\rho}_E + c} \right) \right\} \quad (10)$$

2) 再突入速度が周回速度より大きい場合： $V_E^2 > gr$ ($a > 0$)

$$\frac{V}{V_E} = \exp \left[-\frac{\rho_{\max}}{2\Delta\beta} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left\{ \frac{2\sqrt{a(a\hat{\rho}^2 + b\hat{\rho} + c)} + 2a\hat{\rho} + b}{2\sqrt{a(a\hat{\rho}_E^2 + b\hat{\rho}_E + c)} + 2a\hat{\rho}_E + b} \right\} \right] \quad (11)$$

3) 再突入速度が周回速度より小さい場合： $V_E^2 < gr$ ($a < 0$)

$$\frac{V}{V_E} = \exp \left[-\frac{\rho_{\max}}{2m\beta} \frac{1}{\sqrt{-a}} \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{2a\hat{\rho} + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{2a\hat{\rho}_E + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) \right\} \right] \quad (12)$$

以上より飛行経路角、速度が密度の関数で閉じて得られたので他の飛行パラメータは次のように得られる。

経路角/経路角変化率：

経路角は(8)式から得られる。

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt} = -\frac{1}{2} \beta V_E \hat{\rho} (2a\hat{\rho} + b) \left(\frac{V}{V_E} \right) \quad (13)$$

高度/高度変化率：

高度と高度変化率は次式で与えられる。

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_{SL}} \hat{\rho} \right) \quad (14)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \gamma = V_E \sqrt{a\hat{\rho}^2 + b\hat{\rho} + c} \left(\frac{V}{V_E} \right) \quad (15)$$

加速度/抗力加速度：

加速度/抗力加速度は $-dV/dt = D/m = \rho V^2/2\Delta$ から次式で表される。

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{D}{m} = \frac{\rho_{\max} V_E^2}{2\Delta} \hat{\rho} \left(\frac{V}{V_E} \right)^2 \quad (16)$$

抗力加速度/揚力加速度

抗力加速度/揚力加速度は定義から次式で表される。

$$\frac{D}{m} = \frac{\rho_{\max} V_E^2}{2\Delta} \hat{\rho} \left(\frac{V}{V_E} \right)^2 \quad (17)$$

$$\frac{L}{m} = \left(\frac{L}{D} \right) \frac{D}{m} = \left(\frac{L}{D} \right) \frac{\rho_{\max} V_E^2}{2\Delta} \hat{\rho} \left(\frac{V}{V_E} \right)^2 \quad (18)$$

空力荷重 G：

空力荷重は (17) (18) 式から次式で表される。

$$G = \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} \frac{D}{m} = \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} \frac{\rho_{\max} V_E^2}{2\Delta} \hat{\rho} \left(\frac{V}{V_E} \right)^2 \quad (19)$$

$$\rho_{\max} = \Delta \beta \gamma_E^2 / (L/D)$$

空力加熱率：

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho^a V^3 = K_Q \rho_{\max}^n V_E^3 \hat{\rho}^n \left(\frac{V}{V_E} \right)^3 \quad (20)$$

飛行距離/飛行レンジ

この場合飛行距離, 飛行レンジは等しく (3), (4) 式から

$$s = R$$

$$\frac{ds}{d\hat{\rho}} = \frac{dR}{d\hat{\rho}} = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{\rho} \gamma} = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{\rho} \sqrt{a\hat{\rho}^2 + b\hat{\rho} + c}} \quad (21)$$

積分公式

$\int \left(\frac{1}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}} \right) dx$ を用いて積分を行うと飛行距離/飛行レンジは次式で与えられる。1) $c > 0$ の場合 2) $c < 0$ の場合について飛行距離/飛行レンジを求めると次の通り。

$$s = R = \frac{1}{\beta\sqrt{c}} \ln \left\{ \frac{\left(b\bar{\rho}/2 + c + \sqrt{c(a\hat{\rho}^2 + b\hat{\rho} + c)} \right) / \hat{\rho}}{\left(b\bar{\rho}_E/2 + c + \sqrt{c(a\hat{\rho}_E^2 + b\hat{\rho}_E + c)} \right) / \hat{\rho}_E} \right\} \quad c > 0 \text{ の場合 (22)}$$

$$s = R = \frac{1}{\beta\sqrt{-c}} \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{b\hat{\rho}_E + 2c}{\hat{\rho}_E \sqrt{b^2 - 4ac}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{b\hat{\rho} + 2c}{\hat{\rho} \sqrt{b^2 - 4ac}} \right) \right\} \quad c < 0 \text{ の場合 (23)}$$

Lees, Cohen の 1 次オーダ一解との比較

上記解析で初速度 V が $V_E^2 = gr$ とすると $a=0$ となる。これは(6)式で右辺第3項を無視した 1 次オーダ一の場合となる。この時係数 b, c は

$$b = -\frac{L}{D} \frac{\rho_{\max}}{\Delta\beta}$$

$$c = \gamma_E^2 + \frac{L}{D} \frac{\rho_E}{\Delta\beta}$$

(8) 式の経路角は $\gamma = \sqrt{b\hat{\rho} + c}$ 両辺を 2 乗して b, c を代入し、 $\hat{\rho} = \rho/\rho_{\max}$ と置くと次式を得る。

$$\gamma^2 - \gamma_E^2 = -\frac{1}{\Delta\beta} \left(\frac{L}{D} \right) (\rho - \rho_E)$$

(9) 式から速度は次式で与えられる。

$$\frac{V}{V_E} = \exp \left\{ -\frac{\gamma - \gamma_E}{L/D} \right\}$$

Lees, Cohen の結果と一致する。

7-4. 高次近似解(級数展開法)

(1) 基礎式の導出

$$\text{仮定 } D/m \gg g \sin \gamma \quad (1)$$

速度軸座標系運動方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \approx -\frac{\rho V^2}{2\Delta} \quad (2)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (4)$$

$$\hat{\rho} \equiv \rho / \rho_{SL} \quad (5)$$

$$\hat{z} \equiv -\ln(V/V_E)^2 \quad d\hat{z} \equiv -(2/V)dV \quad (6)$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\hat{\rho}\beta V \sin \gamma \quad (7)$$

(7) 式から

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\hat{z}} = \frac{-\Delta\beta \sin \gamma}{\rho_{SL}} \equiv \hat{\rho}' \quad (8)$$

さらに \hat{z} で微分して

$$\hat{\rho}'' = \frac{-\Delta\beta \cos \gamma}{\rho_{SL}} \frac{d\gamma}{d\hat{z}} \quad (9)$$

(2), (3) 式から次の関係式を得る。

$$V \frac{d\gamma}{dt} = V \frac{d\gamma}{d\hat{z}} \frac{d\hat{z}}{dt} = V \frac{d\gamma}{d\hat{z}} \left(\frac{-2}{V} \right) \frac{dV}{dt} = V \frac{d\gamma}{d\hat{z}} \left(\frac{-2}{V} \right) \left(-\frac{\rho V^2}{2\Delta} \right) = \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2\Delta} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \quad (10)$$

これから経路角の \hat{z} に関する変化率が得られる。

$$\frac{d\gamma}{d\hat{z}} = \frac{1}{2} \frac{L}{D} + \frac{\Delta g}{\rho_{SL} \hat{\rho} V^2} \left(\frac{V^2}{gr} - 1 \right) \cos \gamma \quad (11)$$

(9) 式に代入すると(10)式は次のように変形できる。

$$\hat{\rho}'' = -\frac{\beta}{2} \frac{L}{D} \left(\frac{\Delta \cos \gamma}{\rho_{SL}} \right) + \frac{\beta}{r} \left(\frac{\Delta \cos \gamma}{\rho_{SL}} \right)^2 \frac{1}{\hat{\rho}} \left(\frac{V_E^2}{V^2} \frac{gr}{V_E^2} - 1 \right) \quad (12)$$

ここで

$$\hat{z} = \ln(V_E/V)^2$$

$$\hat{z}_E = \ln(V_E^2/gr)$$

$$I = \frac{\beta}{r} \left(\frac{\Delta \cos \gamma}{\rho_{SL}} \right)^2 \quad (13)$$

$$J = \frac{\beta L}{2D} \left(\frac{\Delta \cos \gamma}{\rho_{SL}} \right) = \frac{\beta L}{2D} \sqrt{I\beta r} \quad (14)$$

と置けば次の基礎式、無次元化密度 $\hat{\rho}$ に関する 2 階の微分方程式を得る。

$$\hat{\rho}'' = \frac{I}{\hat{\rho}} \{ \exp(\hat{z} - \hat{z}_E) - 1 \} - J \quad (15)$$

(11) 基礎式の解法

無次元密度を級数展開し、 \hat{z}^2 項までをとる。

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_E + \hat{\rho}'_E \hat{z} + A \hat{z}^2 + \dots \quad (16)$$

$$\hat{\rho}' = \bar{\rho}'_E + 2A \hat{z} + \dots \quad (17)$$

(16), (17) 式から係数 A を消去すると

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_E = \frac{1}{2} (\hat{\rho}' + \hat{\rho}'_E) \hat{z} \quad (18)$$

次に(18)式の両辺に $\bar{\rho}''$ をかけて積分を行う。

$$\hat{\rho}' \hat{\rho}'' + \hat{\rho}'_E \hat{\rho}'' = (2/\hat{z}) \hat{\rho} \hat{\rho}'' (1 - \hat{\rho}_E/\hat{\rho}) \quad (19)$$

積分を実行すると左辺は容易に積分でき、 $(3/2)\bar{\rho}'_E{}^2$ は積分定数

$$\frac{\hat{\rho}'^2}{2} + \hat{\rho}'_E \hat{\rho}' - \frac{3}{2} \hat{\rho}'_E{}^2 = \int_0^{\hat{z}} \frac{2}{\hat{z}} \hat{\rho} \hat{\rho}'' \left(1 - \frac{\hat{\rho}_E}{\hat{\rho}} \right) d\hat{z} \quad (20)$$

右辺の積分は(15)式から $\hat{\rho} \hat{\rho}''$ を消去する

$$\hat{\rho} \hat{\rho}'' = I \{ e^{(\hat{z} - \hat{z}_E)} - 1 \} - J \hat{\rho} \quad (21)$$

$$\frac{\hat{\rho}'^2}{2} + \hat{\rho}'_E \hat{\rho}' - \frac{3}{2} \hat{\rho}'_E{}^2 = \int_0^{\hat{z}} \left[\frac{2I \{ e^{(\hat{z} - \hat{z}_E)} - 1 \}}{\hat{z}} - \frac{2J \hat{\rho}}{\hat{z}} \right] \left(1 - \frac{\hat{\rho}_E}{\hat{\rho}} \right) d\hat{z} \quad (22)$$

ここで

$$G_1 = \int_0^{\hat{z}} \left(1 - \frac{\hat{\rho}_E}{\hat{\rho}} \right) \frac{\{ e^{(\hat{z} - \hat{z}_E)} - 1 \}}{\hat{z}} d\hat{z} \quad (23)$$

$$G_2 = \int_0^{\hat{z}} \frac{(\hat{\rho} - \hat{\rho}_E)}{\hat{z}} d\hat{z} \quad (24)$$

(18)式から G_2 は次のように求めることができる。

$$G_2 = \int_0^{\hat{z}} \frac{\hat{\rho}' + \hat{\rho}'_E}{2} d\hat{z} \quad (25)$$

積分を実行して

$$G_2 = \frac{1}{2} (\hat{\rho} - \hat{\rho}_E + \hat{\rho}_E \hat{z}) \quad (26)$$

または(18)式を用いると

$$G_2 = \frac{1}{4} (\hat{\rho}' + 3\hat{\rho}'_E) \bar{z} \quad (27)$$

これより(22)式は次のように表される。 G_1 の積分値については次項参照

$$\bar{\rho}'^2 + 2 \bar{\rho}'_E \bar{\rho}' - 3 \bar{\rho}'_E{}^2 = 4I G_1 - 4J G_2 \quad (28)$$

右辺 G_2 は(27)式から $G_2 = (\hat{\rho}' + 3\hat{\rho}'_E) \hat{z} / 4$ で表されるからこれを代入すると

$$\hat{\rho}'^2 + 2 \hat{\rho}'_E \hat{\rho}' - 3 \hat{\rho}'_E{}^2 + J (\hat{\rho}' + 3\hat{\rho}'_E) \bar{z} - 4I G_1 = 0 \quad (29)$$

$\hat{\rho}'$ に関する2次式で表されるからこれを解くと

$$\hat{\rho}' = - \left(\hat{\rho}'_E + \frac{J \hat{z}}{2} \right) + 2F(\hat{z}) \quad (30)$$

で表される。ただし関数 $F(\bar{z})$ は次式で表す。

$$F(\hat{z}) = \sqrt{\hat{\rho}'_E{}^2 - \frac{1}{2} \hat{\rho}'_E J \hat{z} + \left(\frac{J \hat{z}}{4} \right)^2 + I G_1} \quad (31)$$

(30)式から $\bar{\rho}'$ が得られたのでこれを用いて $\bar{\rho}$ を(18)式を用いて求める。

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_E = -\frac{J}{4} \hat{z}^2 + \hat{z} F(\hat{z}) \quad (32)$$

または速度の関数として次式で表される。

$$\rho - \rho_E = -\frac{J \rho_{SL}}{4} \left\{ 2 \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \right\}^2 + 2 \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) F \left\{ 2 \ln \left(\frac{V_E}{V} \right) \right\} \quad (33)$$

$$F(\hat{z}) = \sqrt{\hat{\rho}'_E{}^2 - \frac{1}{2} \hat{\rho}'_E J \hat{z} + \left(\frac{J \hat{z}}{4} \right)^2 + I G_1} \quad (34)$$

$$I = \frac{\beta}{r} \left(\frac{\Delta \cos \gamma}{\rho_{SL}} \right)^2 \quad (35)$$

$$J = \frac{\beta L}{2 D} \left(\frac{\Delta \cos \gamma}{\rho_{SL}} \right) = \frac{\beta L}{2 D} \sqrt{I \beta r} \quad (36)$$

$$\rho - \rho_E = -\frac{\Delta\beta}{2} \frac{L}{D} \cos\gamma \left\{ \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\}^2 + 2 \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) F\left\{ 2 \ln\left(\frac{V_E}{V}\right) \right\} \quad (37)$$

(III) G_1 の積分:

$$G_1 = \int_0^{\hat{z}} \left\{ \frac{e^{(\hat{z}-\hat{z}_E)}}{\hat{z}} - \frac{1}{\hat{z}} - \frac{\hat{\rho}_E}{\hat{\rho}} \frac{e^{(\hat{z}-\hat{z}_E)}}{\hat{z}} + \frac{\hat{\rho}_E}{\hat{\rho}} \frac{1}{\hat{z}} \right\} d\hat{z} \quad (38)$$

$\hat{\rho}_E/\hat{\rho}$ は \hat{z} の増加とともに急速に減少することから級数展開して2項のみをとると
 $e^{\hat{z}} = 1 + \hat{z} + \dots$

$$\hat{\rho}/\hat{\rho}_E = 1 + (\hat{\rho}'_E/\hat{\rho}_E)\hat{z} + \dots$$

$$G_1 \approx \int_0^{\hat{z}} \left[e^{-\hat{z}_E} \left\{ \frac{e^{\hat{z}}}{\hat{z}} - \frac{e^{\hat{z}} - 1}{\hat{z} \{1 + (\hat{\rho}'_E/\hat{\rho}_E)\hat{z}\}} \right\} - \frac{1}{\hat{z}} + \frac{1 - e^{-\hat{z}_E}}{\hat{z} \{1 + (\hat{\rho}'_E/\hat{\rho}_E)\hat{z}\}} \right] d\hat{z} \quad (39)$$

以上から G_1 は次のように近似できる。

$$G_1 \approx \int_0^{\hat{z}} \left[e^{-\hat{z}_E} \left(\frac{e^{\hat{z}} - 1}{\hat{z}} \right) + \frac{(1 - e^{-\hat{z}_E})}{\hat{z} \{1 + (\hat{\rho}'_E/\hat{\rho}_E)\hat{z}\}} \right] d\hat{z} \quad (40)$$

積分項の第1項は積分指数関数で表され、第2項は容易に積分できる。積分指数関数を次のように定義すると(補足参照)

$$E(\hat{z}) = \int_{-\infty}^{\hat{z}} \frac{e^{\hat{z}} - 1}{\hat{z}} d\hat{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{z}^n}{n n!}$$

G_1 は次式で表される。

$$G_1 = e^{-\hat{z}_E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n n!} - (1 - e^{-\hat{z}_E}) \ln \left(1 + \frac{\bar{\rho}'_E}{\bar{\rho}_E} \bar{z} \right) \quad (41)$$

(IV) Loh の解析結果との比較

(18) 式

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_E = \frac{1}{2} (\hat{\rho}' + \hat{\rho}'_E) \hat{z}$$

(6), (7) 式から $\hat{z} = \ln(V_E/V)^2$ $\hat{\rho}' = -\Delta\beta \sin\gamma/\rho_{SL}$ を代入すると

$$\rho - \rho_E = -\frac{\Delta\beta}{2} (\sin\gamma + \sin\gamma_E) \ln\left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \quad (42)$$

7-5. 振動軌道

揚抗比 (L/D) が大きくなると再突入宇宙機の軌道は振動 (フゴイド振動, Phugoid Oscillation) をおこないながら降下する。この場合, 弾道飛行軌道と異なって, 軌道全体を解析的に求めることはできない。この振動軌道を解析的にもとめるには軌道を幾つかのセグメントに分割して, 各セグメント内で Loh の 2 次オーダの解を適用して振動軌道全体を求める。

速度座標系運動方程式から

$dp/dt = -\rho\beta V \sin\gamma$ を得る。この関係式を用いて, 独立変数を時刻 t から密度

$$\rho \text{ に変換すると} \quad \frac{d\hat{V}^2}{dp} + \frac{1}{\Delta\beta} \frac{\hat{V}^2}{\sin\gamma} = \frac{2}{\beta r} \frac{1}{\rho} \quad (1)$$

$$\frac{d\cos\gamma}{dp} + \frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1 \right) = \frac{1}{2\beta\Delta} \frac{L}{D} \quad (2)$$

(2)式右边が 0 のとき弾道飛行の運動方程式となる。また(2)式の左辺第 2 項は飛行期間でほぼ一定値となる。そこで一定値 M と置く。

$$M \equiv \frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1 \right) : \text{Loh の定数} \quad (3)$$

また仮定 1)一定揚抗比(L/D)から下記パラメータ N も一定と仮定する。

$$N \equiv \frac{1}{2\beta r} \frac{L}{D} - \frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1 \right) = \frac{1}{2\beta r} \frac{L}{D} - M \quad (4)$$

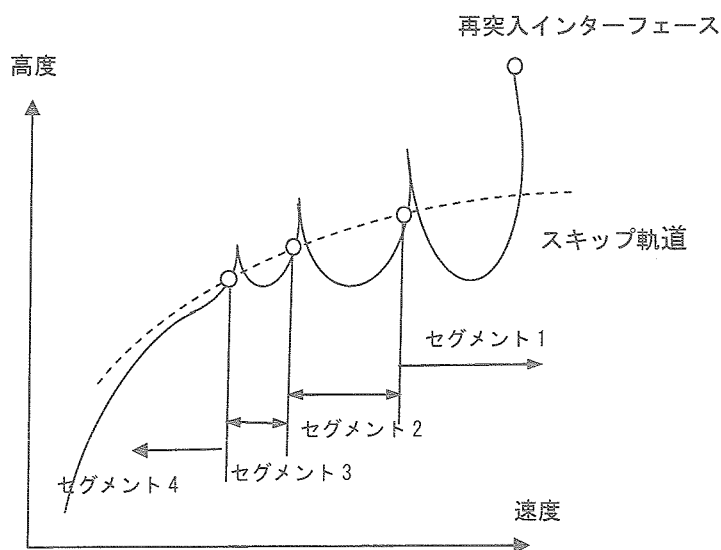
(2)式は次のようになる。

$$\frac{d\cos\gamma}{dp} = N \quad (5)$$

また(1)項右辺の重力項 $2/\rho\beta r$ を無視して, (1)式の独立変数を(5)式を用いて密度 ρ から経路角 γ に変換すると

$$\frac{1}{\hat{V}^2} \frac{d\hat{V}^2}{d\gamma} = \frac{1}{\Delta\beta N} \quad (6)$$

(5),(6)式を積分すると次式を得る。



$$\ln\left(\frac{\hat{V}^2}{\hat{V}_E^2}\right) = \frac{1}{\Delta\beta} \frac{\gamma - \gamma_E}{N} \quad (7)$$

$$\cos\gamma - \cos\gamma_E = N(\rho - \rho_E) \quad (8)$$

(7)(8)式の右辺に(4)式の N を代入して密度 ρ を陽に求めると、(7)式から密度(高度)が、また(8)(9)式から経路角 γ が(10)式で表される。

$$\rho = \frac{\frac{\cos\gamma}{\beta_r} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1\right) \ln\left(\frac{\hat{V}_E^2}{\hat{V}^2}\right)}{\frac{\gamma - \gamma_E}{\Delta\beta} + \frac{L/D}{2\beta\Delta} \ln\left(\frac{\hat{V}_E^2}{\hat{V}^2}\right)} \quad (9)$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos\gamma_E + \frac{L/D}{2\beta\Delta} \rho \left(1 - \frac{\rho_E}{\rho}\right)}{1 + \frac{1}{\beta_r} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1\right) \left(1 - \frac{\rho_E}{\rho}\right)} \quad (10)$$

特に $\rho_E/\rho < 0.1$ の場合

$1 - \rho_E/\rho \approx 1$ と近似すると (10)式から

$$\frac{L/D}{2\beta\Delta} \rho = \frac{L/D}{2\beta\Delta} \rho_E + \cos\gamma - \cos\gamma_E + \frac{\cos\gamma}{\beta_r} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1\right) \approx \cos\gamma - \cos\gamma_E + \frac{\cos\gamma}{\beta_r} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1\right) \quad (11)$$

上記密度 ρ を(9)式に代入して

$$\gamma - \gamma_E = \frac{(L/D) \ln\left(\frac{\hat{V}_E^2}{\hat{V}^2}\right)}{2 \left\{ \frac{1/\hat{V}^2 - 1}{\beta_r (\cos\gamma_E / \cos\gamma - 1)} - 1 \right\}} \quad (12)$$

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_E = e^{-\beta h} - e^{-\beta h_E} = \frac{2\beta\Delta}{(L/D)\rho_{SL}} \left\{ \frac{\cos\gamma}{\beta_r} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1\right) + \cos\gamma - \cos\gamma_E \right\} \quad (13)$$

次に(10)式を密度について整理すると

$$\rho^2 + \left\{ \frac{2\beta\Delta}{L/D} \cos\gamma_E - \rho_E - \cos\gamma \left(\frac{2\beta\Delta}{L/D} + \frac{2\beta\Delta}{L/D} \frac{1}{\beta_r} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1\right) \right) \right\} \rho + \frac{\cos\gamma}{\beta_r} \frac{2\beta\Delta}{L/D} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1\right) \rho_E = 0 \quad (14)$$

密度 ρ についての 2 次式となる。そこで係数を

$$b(V, \gamma) = \frac{1}{\rho_{SL}} \left[\frac{2\beta\Delta}{L/D} \cos\gamma_E - \rho_E - \frac{2\beta\Delta}{L/D} \cos\gamma \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_r} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1\right) \right\} \right] \quad (15)$$

$$c(V, \gamma) = \frac{1}{\rho_{SL}^2} \frac{\cos\gamma}{\beta_r} \frac{2\beta\Delta}{L/D} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1\right) \rho_E \quad (16)$$

とおくと

$$\rho^2 + b\rho_{\text{SL}}\rho + c\rho_{\text{SL}}^2 = 0 \quad (17)$$

$$\hat{\rho}^2 + b\hat{\rho} + c = 0 \quad (18)$$

ただし $\rho/\rho_{\text{SL}} = \hat{\rho} = e^{-\beta h}$, と置けば $\hat{\rho}$ は無次元化密度
これを解いて次式を得る。

$$\hat{\rho} = e^{-\beta h} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (19)$$

(19)式で $N > 0$ のとき + 符号, $N < 0$ のとき - 符号を取る。

特別点

1つのセグメントで特別な点として プルアップ点, 経路角最大点, 最頂点, について記述する。

(1) プルアップ点(スキップ軌道底部)②

スキップ軌道の底部(プルアップ点) ②点は経路角が負から $\gamma = 0$ となる点である。

(12)(13)式において $\gamma = 0$ と置く, このとき $\cos\gamma = 1$ から

$$\ln\left(\frac{\hat{V}_E^2}{\hat{V}_{\gamma=0}^2}\right) = \frac{-2\gamma_E}{(L/D)} \left\{ \frac{1/\hat{V}_{\gamma=0}^2 - 1}{\beta r (\cos\gamma_E - 1)} - 1 \right\} \quad (20)$$

$$\hat{\rho}_{\gamma=0} - \hat{\rho}_E = e^{-\beta h_{\gamma=0}} - e^{-\beta h_E} = \frac{2\beta\Delta}{(L/D)\rho_{\text{SL}}} \left\{ \frac{1}{\beta r} \left(\frac{1}{\hat{V}_{\gamma=0}^2} - 1 \right) + 1 - \cos\gamma_E \right\} \quad (21)$$

$$N_{\gamma=0} = \frac{1}{2\beta r} \frac{L}{D} - \frac{1}{\beta r} \frac{1}{\rho_{\text{SL}}} \frac{1}{e^{-\beta h_{\gamma=0}}} \left(\frac{1}{\hat{V}_{\gamma=0}^2} - 1 \right) \quad (22)$$

(2) 経路角最大点③

経路角の最大点③は(11)式 $d\cos\gamma/d\rho = N$ で $\gamma = \gamma_{\text{max}}$ 経路角最大となる。

(3) 最頂点④

最頂点④は経路角が正から $\gamma = 0$ となる点である。

振動軌道の計算

軌道 1-4:

最初にプルアップ点②点

$$\hat{V}_{\gamma=0}, \rho_{\gamma=0}, N_{\gamma=0}$$

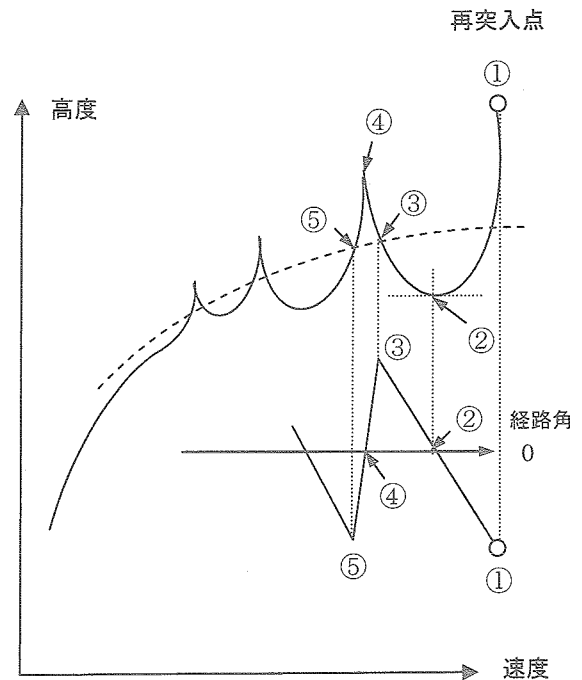
求めると(20),(21)式から

$$\ln\left(\frac{\hat{V}^2}{\hat{V}_E^2}\right) = \frac{1}{\Delta\beta} \frac{\gamma - \gamma_E}{N_{\gamma=0}} \quad (23)$$

$$\cos\gamma - \cos\gamma_E = N_{\gamma=0} \rho_{SL} (e^{-\beta h} - e^{-\beta h_E}) \quad (24)$$

$$N = \frac{1}{2\beta r D} - \frac{1}{\beta r \rho_{SL} e^{-\beta h}} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1 \right) \quad (25)$$

を計算して軌道パラメータ,速度,高度,経路角,

 \hat{V}, γ, ρ および N が求まる。

経路角最大値③点: 上記の計算の過程で経路角最

大点 $\gamma = \gamma_{\max}$ ③点は $N=0$ となる点としてもとまる

$$\hat{V}_{\max}, \rho_{\max}, N_{\max} = 0$$

スキップアウトの条件 $\gamma = \gamma_{\text{exit}}$

スキップアウト底部の条件を初期値としてスキップアウトの条件を求める。

(8)式 $\cos\gamma - \cos\gamma_E = N(\rho - \rho_E)$ において 初期値 $\cos\gamma_E, \rho_E$ をスキップアウト底部 $\gamma=0$ 点として $\cos\gamma_E = 1, \rho_E = \hat{\rho}_{\gamma=0}$ と置けば以下のようにスキップアウト時の経路角 γ_{exit} が得られる。

$$\cos\gamma_{\text{exit}} = 1 + N\rho_{SL} (\hat{\rho}_{\text{exit}} - \hat{\rho}_{\gamma=0}) \approx 1 - N\rho_{SL} e^{-\beta h_{\gamma=0}}$$

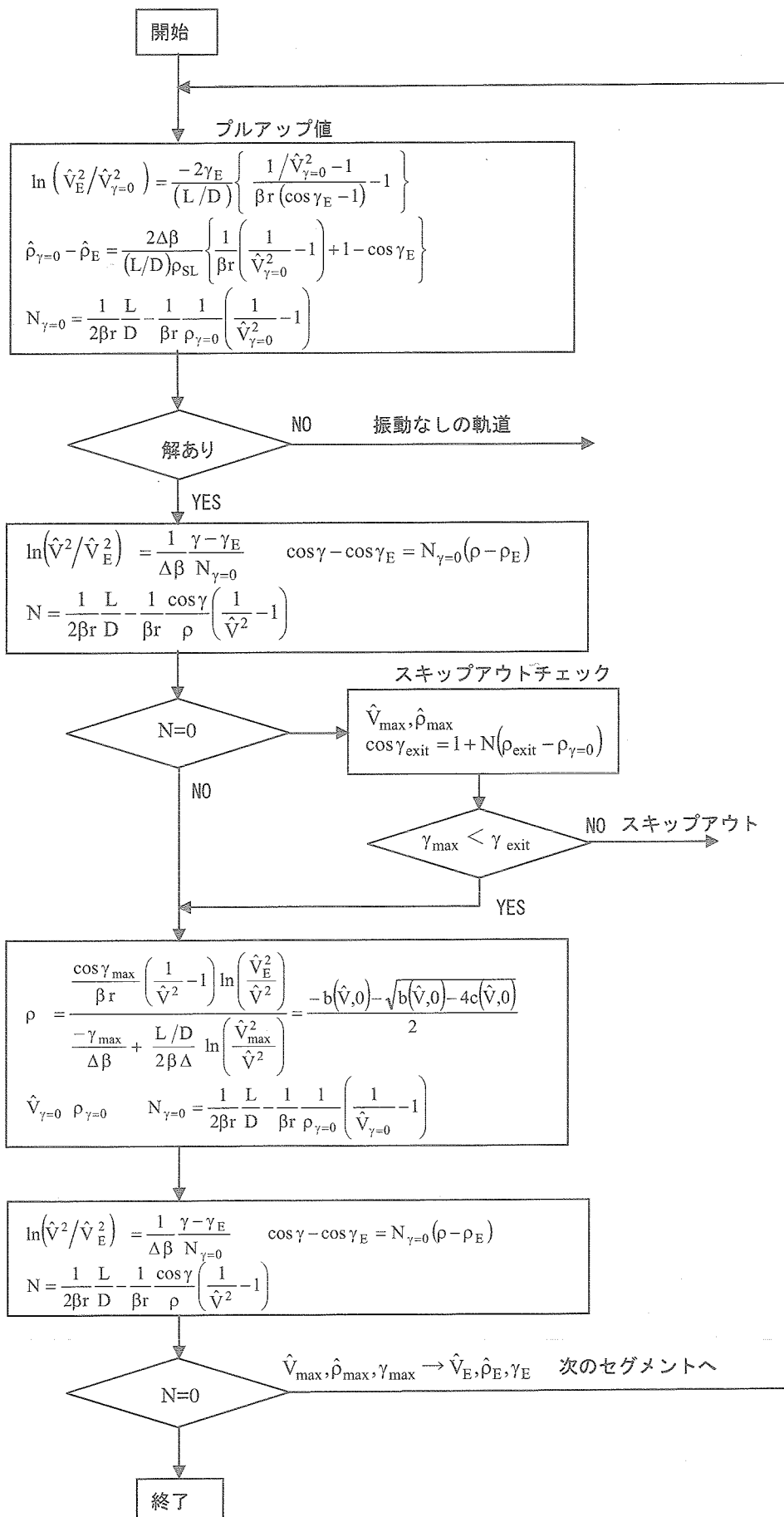
$$\gamma_{\text{exit}} = \cos^{-1}\left(1 - N\rho_{SL} e^{-\beta h_{\gamma=0}}\right) \quad (26)$$

最頂点④

 $\gamma_{\max} < \gamma_{\text{exit}}$ の条件を満たすとき再頂点 $\gamma=0$ 点④点は $\hat{V}_{\max}, \rho_{\max}$ を初期値として

$$\rho = \frac{\frac{\cos\gamma_{\max}}{\beta r} \left(\frac{1}{\hat{V}^2} - 1 \right) \ln\left(\frac{\hat{V}_E^2}{\hat{V}^2}\right)}{-\frac{\gamma_{\max}}{\Delta\beta} + \frac{L/D}{2\beta\Delta} \ln\left(\frac{\hat{V}_{\max}^2}{\hat{V}^2}\right)} = \frac{-b(\hat{V}, 0) - \sqrt{b(\hat{V}, 0)^2 - 4c(\hat{V}, 0)}}{2} \quad (27)$$

上式から $\hat{V}_{\gamma=0}, \rho_{\gamma=0}$ が得られる。以下計算フローチャートを示す。



7-6. 平衡滑空軌道

宇宙機の大気圏再突入軌道で代表的な軌道として平衡滑空飛行軌道がある。これは機体の揚力と遠心力・重力がバランスした状態で飛行する軌道で経路角変化率が微小となる。また揚抗比は一定、経路角は微小と仮定した飛行である。この平衡滑空飛行軌道により、機体の飛行可能範囲(フットプリント)等の検討を行うことができる。また再突入宇宙機の誘導にも使用される(シャトルの誘導の項参照)。以下平衡滑空飛行での各種飛行状態量、フットプリント、Allen, Eggers(1957), Lho(1960)の解析結果について記述する。

(I) 仮定および運動方程式

(1) 仮定 1) L/D : 揚抗比一定

2) $\gamma, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{ds} \ll 1$: 平衡滑空飛行の条件

(2) 速度座標系運動方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \quad (1)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L_v}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \quad (2)$$

$$V \cos \gamma \frac{d\psi}{dt} = \frac{L_n}{m} + \frac{V^2 \tan \phi \sin \psi \cos^2 \gamma}{r} \quad (3)$$

$$\frac{dS}{dt} = V \quad (4)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (5)$$

$$\frac{dR_D}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} = V \cos \gamma \cos \psi \quad (6)$$

$$\frac{dR_C}{dt} = r \cos \phi \frac{d\lambda}{dt} = V \cos \gamma \sin \psi \quad (7)$$

ここで

ϕ_B : バンク角(速度ベクトル周りの回転角)

$$\Delta \equiv \frac{m}{C_D A} : \text{弾道係数} \quad (8)$$

$$\frac{L_v}{m} = \frac{\rho V^2}{2\Delta} \left(\frac{L}{D} \right) \cos \phi_B : \text{飛行面内揚力加速度} \quad (9)$$

$$\frac{L_n}{m} = \frac{\rho V^2}{2\Delta} \left(\frac{L}{D} \right) \sin \phi_B : \text{飛行面外揚力加速度} \quad (10)$$

(II) 2次元(飛行面内)平衡滑空飛行

宇宙機の平衡滑空飛行を2次元として方位角 $\psi=0$ 、バンク角 ϕ_B =一定とする。平衡滑空の条件から運動方程式は次のようになる。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\rho V^2}{2\Delta} \quad (11)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\rho V^2}{2\Delta} \left(\frac{L}{D} \right)_v + \frac{V^2}{r} - g \quad (12)$$

$$\frac{dh}{dt} = V\gamma \quad (13)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dR_D}{dt} = V \quad (14)$$

以下飛行面内の飛行パラメータを求める。また添字 C は平衡滑空開始時の飛行パラメータとする。

(1) 密度, 高度対速度

(12) 式で $V \frac{d\gamma}{dt} = 0$ と置き, 密度を求めると

$$\rho = \frac{2}{r} \frac{\Delta}{(L/D) \cos \phi_B} \left(\frac{1 - V^2/gr}{V^2/gr} \right) \quad (15)$$

または

$$\frac{V^2}{gr} = \frac{1}{1 + \frac{\rho r (L/D) \cos \phi_B}{2\Delta}}$$

平衡滑空開始時の密度を ρ_c とすれば

$$\rho_c = \frac{2}{r} \frac{\Delta}{(L/D) \cos \phi_B} \left(\frac{1 - V_c^2/gr}{V_c^2/gr} \right)$$

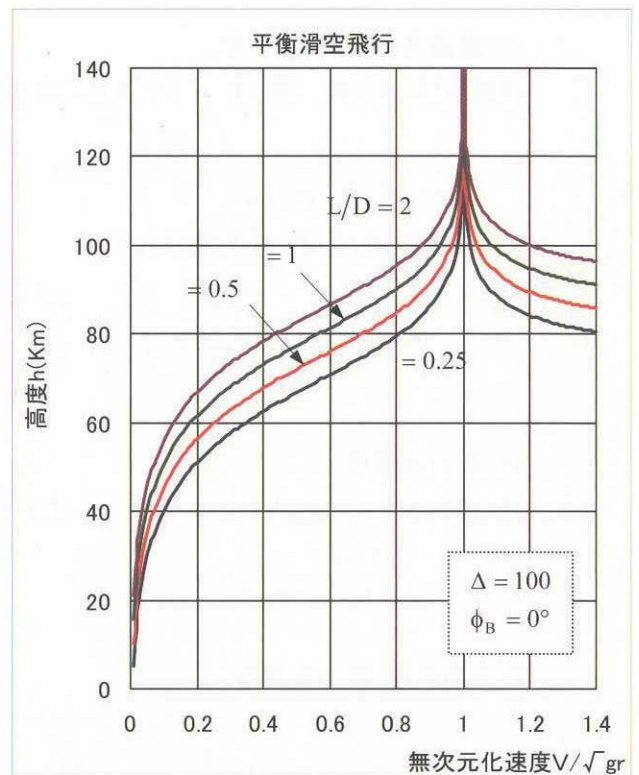
で表されるから, この密度 ρ_c で無次元化すると密度, 高度は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{V_c}{V} \right)^2 \frac{1 - V^2/gr}{1 - V_c^2/gr} \quad (16)$$

海面上(高度 $h=0$)の密度 ρ_{SL} とすれば

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \left(\frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \right) \left(\frac{V_c}{V} \right)^2 \frac{1 - V^2/gr}{1 - V_c^2/gr} \quad (17)$$

より高度は次式で表される。



$$h = h_c - \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \left(\frac{V_c}{V} \right)^2 \frac{1 - V^2/gr}{1 - V_c^2/gr} \right\} \quad (18)$$

(2) 高度変化率 :

$d\rho/dt = -\rho\beta(dh/dt)$ の関係式、及び(16)式の両辺の対数をとって微分し(12)式を用いると次式を得る。

$$-\beta \frac{dh}{dt} = - \frac{2}{(gr/V_c^2 - 1)} \frac{gr}{V^3} \frac{dV}{dt} = \frac{2}{(gr/V_c^2 - 1)} \frac{gr}{V^3} \left(\frac{\rho V^2}{2\Delta} \right)$$

上式から高度変化率は次式で与えられ速度 V に逆比例する。

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\sqrt{gr}}{\beta r} \frac{2}{(L/D) \cos \phi_B} \left(\frac{\sqrt{gr}}{V} \right) \quad (19)$$

(3) 経路角/経路角変化率 :

経路角は(16)式 $dh/dt = V\gamma$ 及び(19)式から次式で表され速度 V の 2 乗に逆比例する。

$$\gamma = - \frac{1}{\beta r} \frac{2}{(L/D) \cos \phi_B} \left(\frac{\sqrt{gr}}{V} \right)^2 \quad (20)$$

経路角変化率は(20)式を微分して

$$\frac{d\gamma}{dt} = - \frac{1}{\beta r} \sqrt{\frac{g}{r}} \left\{ \frac{2}{(L/D) \cos \phi_B} \right\}^2 \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right) \left(\frac{\sqrt{gr}}{V} \right)^3 \quad (21)$$

(4) 抗力加速度 :

(11)式 $-dV/dt = \rho V^2/2\Delta$ 及び(15)式から

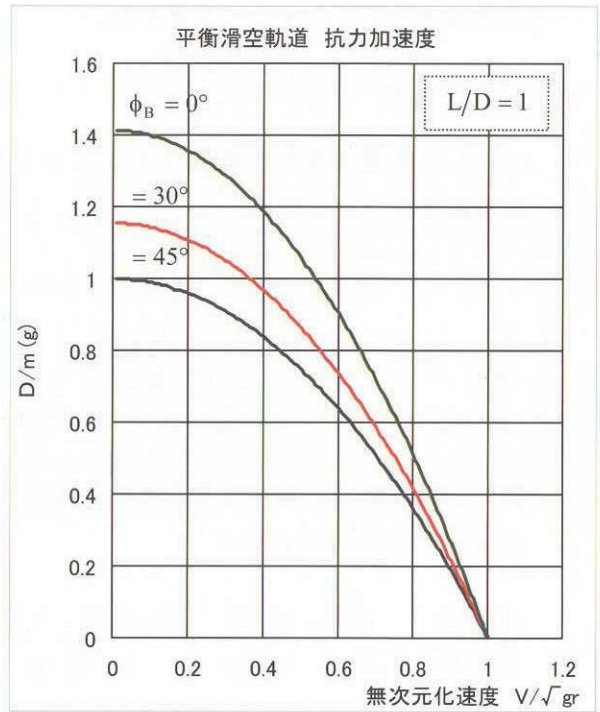
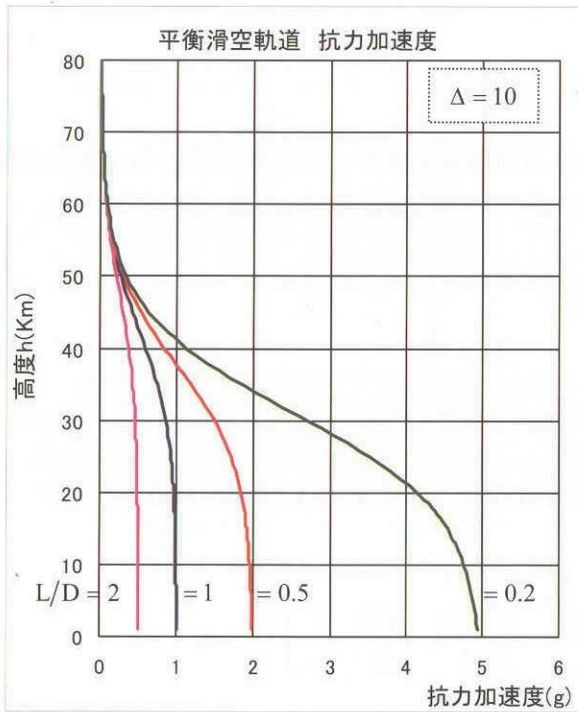
$$-\frac{dV}{dt} = \frac{g}{(L/D) \cos \phi_B} \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right) \quad (22)$$

抗力加速度/揚力加速度 :

$$\frac{D}{mg} = \frac{1}{(L/D) \cos \phi_B} \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right) \quad (23)$$

$$\frac{L}{mg} = \frac{D}{mg} \left(\frac{L}{D} \right) = \frac{1}{\cos \phi_B} \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right) \quad (24)$$

$L/D=1$ のときバンク角 $\phi_B = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ の場合について(23)式をプロットしたものを図に示す。図で $L/D=1$ であるから $\phi_B = 0^\circ$ のラインは揚力加速度 L/mg と一致する。



(5) 空力荷重 :

空力荷重は抗力加速度と揚力加速度を合成して次式で表される

$$G = \sqrt{(D/m)^2 + (L/m)^2} = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/m)$$

L/D 一定より

$$G = \frac{g}{(L/D) \cos \phi_B} \left(1 - \frac{V^2}{gr}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2} \quad (25)$$

上式から平衡滑空時の空力荷重は速度の 2 乗に比例し V=0 に於いて G は最大値をとる。

$$G_{\max} = \frac{g}{(L/D) \cos \phi_B} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2} \quad (26)$$

今揚抗比を L/D=1 と仮定すると

バンク角 $\phi_B = 0^\circ$ の時 $G_{\max} = \sqrt{2} g \doteq 1.4 g$

バンク角 $\phi_B = 45^\circ$ の時 $G_{\max} = 2 g$

これより平衡滑空時の空力荷重は弾道飛行時の空力荷重に比べてはるかに小さいことがわかる。

(6) 空力加熱率 :

空力加熱率を次のように定義する。

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho_c^n V_C^3 \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^n \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \quad (27)$$

$n=1/2$ の時澱点空力加熱率, $n=1$ のとき平均空力加熱率を表す。(16)式を用いると速度の関数で表すことが出来る。

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho_c^n V_C^3 \left\{ \frac{(V_C/V)^2 - V_C^2/gr}{1 - V_C^2/gr} \right\}^n \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \quad (28)$$

空力加熱率の最大値となる条件は速度で微分して0とおくことにより得られる。

$d(dQ/dt)/dV=0$ において

$$\frac{d(dQ/dt)}{d(V/V_C)} = \frac{1}{3} \left(K_Q \rho_c^n V_C^3 \right) \left\{ \frac{(V_C/V)^2 - V_C^2/gr}{1 - V_C^2/gr} \right\}^{n-1} \left\{ \frac{3-2n}{3} - \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \right\} = 0$$

上式から

$$\left(\frac{V}{V_C} \right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{3-2n}{3} \right) \frac{gr}{V_C^2}} \quad (29)$$

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_c} = \frac{1}{gr/V_C^2 - 1} \left(\frac{2n}{3-2n} \right) \quad (30)$$

に於いて次の最大値をとる。

$$\left(\frac{dQ}{dt} \right)_{\max} = K_Q \rho_c^n V_C^3 \left(\frac{2n}{3-2n} \right)^n \left(\frac{3-2na}{3} \right)^{3/2} \left(\frac{V_C^2/gr}{1 - V_C^2/gr} \right)^n \left(\frac{gr}{V_C^2} \right)^{3/2} \quad (31)$$

澱点空力加熱率 ($a=1/2$) が最大となる高度と平均空力加熱率 ($a=1$) が最大となる高度の差, 及び澱点空力加熱率が最大となる速度と平均空力加熱率が最大となる速度の比は

$$h_{\max/a=1/2} - h_{\max/a=1} = \ln 4 / \beta > 0$$

$$\frac{V_{\max/a=1/2}}{V_{\max/a=1}} = \sqrt{2} \quad (32)$$

で表され, 再突入条件あるいは機体特性とは無関係で一定となる。また再突入後最初に澱点空力加熱率が最大となり, 引続き平均空力加熱率が最大となることがわかる。

空力加熱の例

平均空力加熱率を $K_{QAV} \rho_c V_C^3$ で, また澱点加熱率を $K_{QST} \rho_c^{1/2} V_C^3$ で無次元化し, 速度依存性の部分のみ表示すると次のとおり。

無次元化平均空力加熱率

$$\frac{(dQ/dt)_{avg}}{K_{QAV} \rho_{SL} V_C^3} = \left(\frac{\rho_C}{\rho_{SL}}\right) \left(\frac{gr/V^2 - 1}{gr/V_C^2 - 1}\right) \left(\frac{V}{V_C}\right)^3 \quad (33)$$

$$\frac{(dQ/dt)_{stg}}{K_{QST} \rho_{SL}^{1/2} V_C^3} = \left(\frac{\rho_C}{\rho_{SL}}\right)^{1/2} \left(\frac{gr/V^2 - 1}{gr/V_C^2 - 1}\right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C}\right)^3 \quad (34)$$

平均空力加熱率, 澱点空力加熱率が最大となる速度は

$$V_{avg\ max} / \sqrt{gr} = \sqrt{1/3}$$

$$V_{stg\ max} / \sqrt{gr} = \sqrt{2/3}$$

となる。

(7) 飛行距離/ダウンレンジ :

$$\frac{dS}{dV} = \frac{dR_D}{dV} = \frac{2\Delta}{\rho V} = r(L/D) \cos \phi_B \left(\frac{V}{V^2 - gr}\right) \quad (35)$$

積分して

$$s = R_D = \frac{r}{2} \left(\frac{L}{D}\right) \cos \phi_B \ln \left(\frac{1 - V^2/gr}{1 - V_C^2/gr}\right) \quad (36)$$

飛行距離, ダウンレンジの初期値を 0 とし, 終端速度を V_f とすれば平衡滑空飛行期間の飛行距離, ダウンレンジは次式で表される。

$$s = R_D = \frac{r}{2} \left(\frac{L}{D}\right) \cos \phi_B \ln \left(\frac{1 - V_f^2/gr}{1 - V_C^2/gr}\right) \quad (37)$$

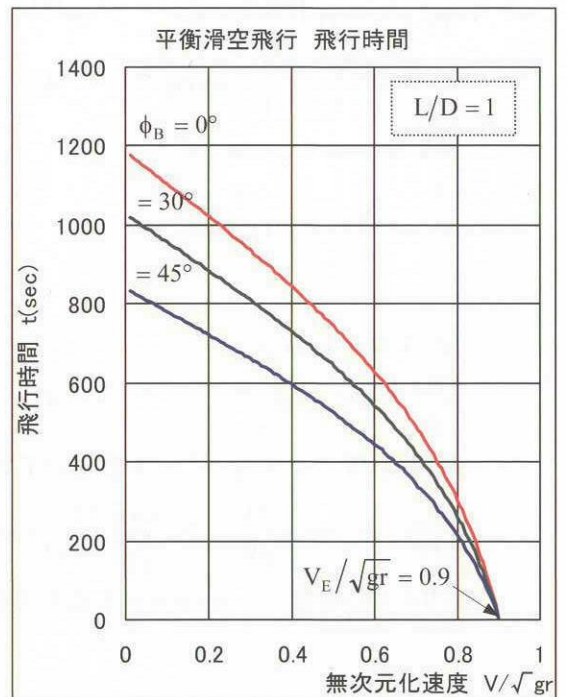
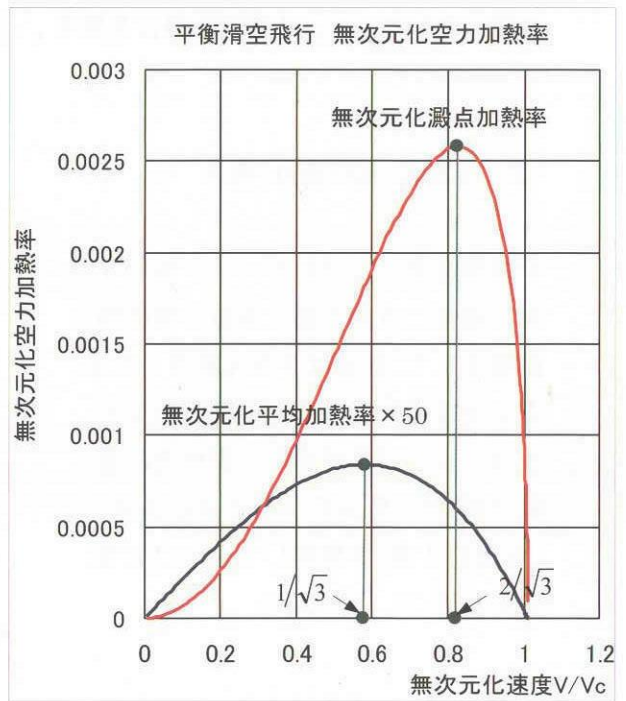
(8) 飛行時間 :

加速度, 密度の式から dt/dV を求めると

$$\frac{dt}{dV} = r \left(\frac{L}{D}\right) \cos \phi_B \ln \left(\frac{1}{V^2 - gr}\right)$$

上式を積分して飛行時間は次式で与えられる。

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \left(\frac{L}{D}\right) \cos \phi_B \ln \left(\frac{1 - V/\sqrt{gr}}{1 + V/\sqrt{gr}} \cdot \frac{1 + V_C/\sqrt{gr}}{1 - V_C/\sqrt{gr}}\right) \quad (38)$$



右辺において $\sqrt{r/g}$ は時刻の単位を持ち $\sqrt{r/g} = \approx 806$ 程度の値をとる。

(Ⅲ) 3次元(飛行面外)飛行

平衡滑空飛行に於いてバンク角が0で無い場合には飛行面に垂直方向の揚力が発生して、軌道は3次元軌道となる。ここでは飛行面外方向の飛行方位角、クロスレンジを求める。面外方向運動方程式は(5)式において遠心力項(右辺第2項)を無視して、 $\gamma \ll 1$ に留意すれば(3)、(7)式から

$$V \frac{d\psi}{dt} \approx \frac{L_n}{m} = \frac{\rho V^2}{2\Delta} \left(\frac{L}{D} \right) \sin \phi_B : \text{面外方向揚力加速度} \quad (39)$$

または独立変数を t から飛行距離 s に変換して

$$V^2 \cos \gamma \frac{d\psi}{ds} \approx V^2 \frac{d\psi}{ds} = \frac{L_n}{m} \quad (40)$$

(1) 飛行方位角 ψ :

上式で $dV/dt = -\rho V^2/2\Delta$ を用いて独立変数を t から速度 V に変換すると

$$\frac{d\psi}{dV} = -\left(\frac{L}{D} \right) \sin \phi_B \frac{1}{V} \quad (41)$$

$$\psi = \ln \left(\frac{V_C}{V} \right) \left(\frac{L}{D} \right) \sin \phi_B \quad (42)$$

または

$$\frac{V}{V_C} = \exp \left\{ -\frac{\psi}{(L/D) \sin \phi_B} \right\}$$

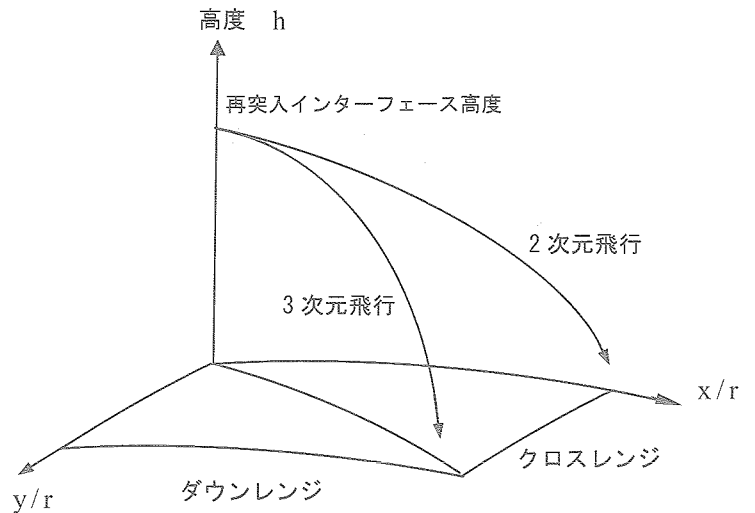
(2) クロスレンジ :

$$\frac{dR_C}{dt} \approx V \sin \psi \quad (43)$$

同様に $dV/dt = -\rho V^2/2\Delta$ を用いて独立変数を t から速度 V に変換すると

$$\frac{dR_C}{dV} = -\sin \psi \frac{2\Delta}{\rho V} = -r \frac{\sin \psi}{\sqrt{gr}} \left(\frac{L}{D} \right) \cos \phi_B \left(\frac{V/\sqrt{gr}}{1-V^2/gr} \right)$$

$L/D \ll 1$ の場合 $\sin \psi \approx \psi$ と近似できるから

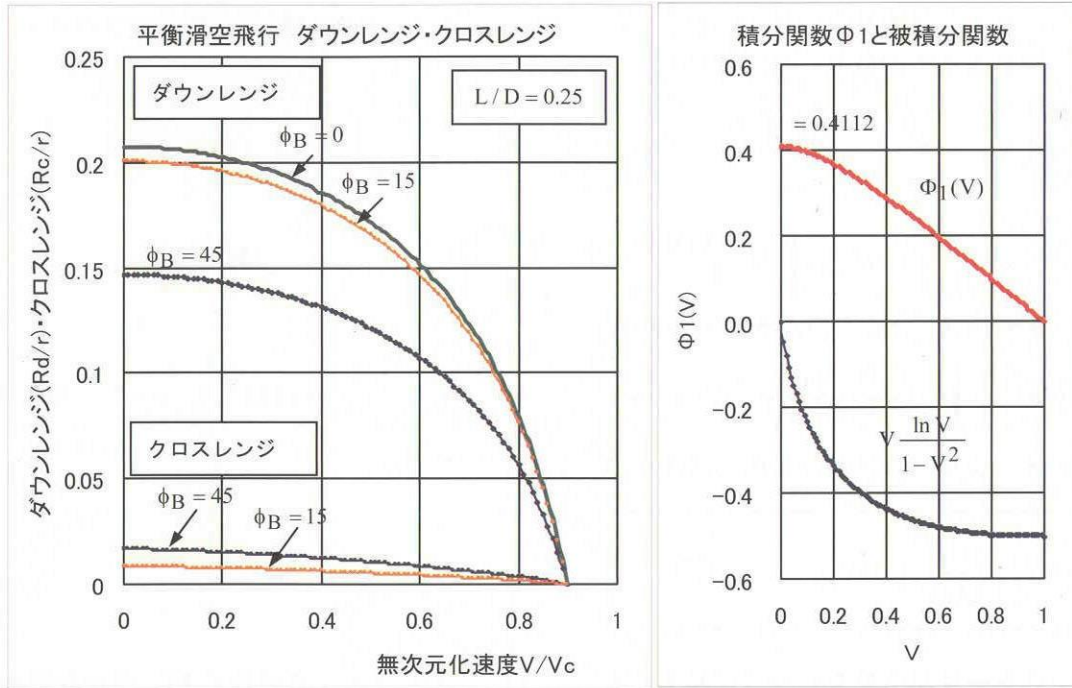


$$\frac{dR_C}{dV} = -\sin\psi \frac{2\Delta}{\rho V} \approx -r \frac{\psi}{\sqrt{gr}} \left(\frac{L}{D}\right) \cos\phi_B \left(\frac{V/\sqrt{gr}}{1-V^2/gr}\right)$$

(48) 式の ψ を代入して無次元化速度を $\hat{V} = V/\sqrt{gr}$ 用いると

$$\frac{dR_C}{d\hat{V}} = -\frac{r}{2} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \sin 2\phi_B \ln\left(\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}}\right) \frac{\hat{V}}{(1-\hat{V}^2)} \quad (44)$$

クロスレンジは速度 V の関数として次式で表される。



$$\frac{dR_C}{d\hat{V}} = -\frac{r}{2} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \sin 2\phi_B \int_{\hat{V}_C}^{\hat{V}} \left(\frac{\hat{V}}{1-\hat{V}^2}\right) \ln\left(\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}}\right) d\hat{V} \quad (45)$$

ここで $\Phi_1(\hat{V})$ を次式で定義する。

$$\Phi_1(\hat{V}) = \int_1^{\hat{V}} \hat{V} \left(\frac{\ln \hat{V}}{1-\hat{V}^2}\right) d\hat{V} \quad (46)$$

ただし

$$\Phi_1(1) = 0, \quad \Phi_1(0) = \int_1^0 \hat{V} \left(\frac{\ln \hat{V}}{1-\hat{V}^2}\right) d\hat{V} = \frac{\pi^2}{24} = 0.4112$$

$$\int_{\hat{V}_C}^{\hat{V}} \hat{V} \left(\frac{\ln \hat{V}}{1-\hat{V}^2}\right) d\hat{V} = \int_1^{\hat{V}} \hat{V} \left(\frac{\ln \hat{V}}{1-\hat{V}^2}\right) d\hat{V} - \int_1^{\hat{V}_C} \hat{V} \left(\frac{\ln \hat{V}}{1-\hat{V}^2}\right) d\hat{V} = \Phi_1(\hat{V}) - \Phi_1(\hat{V}_C)$$

から

$$\frac{R_C}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \sin 2\phi_B \left\{ \Phi_1(\hat{V}) - \Phi_1(\hat{V}_C) + \ln \left(\frac{1}{\hat{V}_C} \right) \ln \left(\frac{1 - \hat{V}^2}{1 - \hat{V}_C^2} \right) \right\} \quad (47)$$

(3) トータルクロスレンジ :

任意の速度 V に対するクロスレンジ $R_C(V)$ は解析的には得られないがトータルのクロスレンジは次のように近似的に得られる。

初期速度 $\hat{V}_C = 1$

終端速度 $\bar{V}_f = 0$

$$\frac{R_C}{r} = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \sin 2\phi_B \int_0^1 \hat{V} \left(\frac{\ln \hat{V}}{\hat{V}^2 - 1} \right) d\bar{V} = \frac{\Phi_1(0)}{2} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \sin 2\phi_B \quad (48)$$

但し定積分値 $\Phi_1(0)$ は次のように表される。

$$\Phi_1(0) \equiv -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\ln \hat{V}}{1 - \hat{V}} - \frac{\ln \hat{V}}{1 + \hat{V}} \right) d\bar{V} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{24} \approx 0.4112 \quad (49)$$

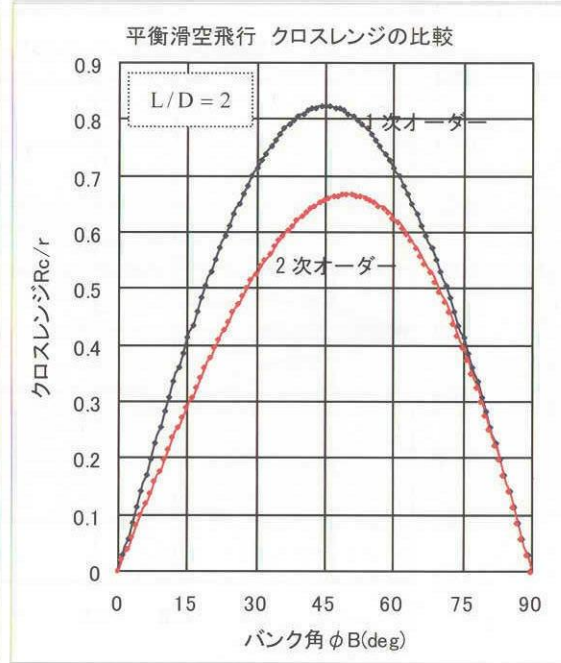
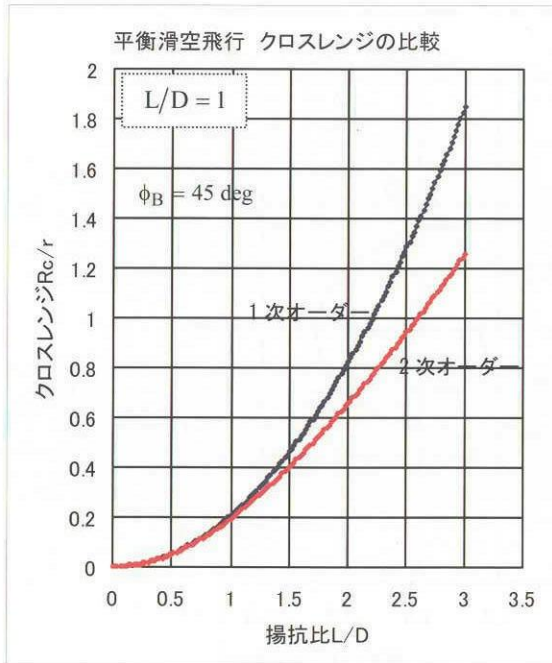
従ってトータルクロスレンジの 1 次オーダーの解は次の通り。

$$\frac{R_C}{r} = \frac{\pi^2}{48} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \sin 2\phi_B \quad (50)$$

上式からトータルクロスレンジが最大となるのはバンク角が 90° ではなく 45° のとき最大となることがわかる。また揚抗比 L/D の 2 乗に比例して増加する。なおトータルクロスレンジの 2 次オーダーの解は次式で表される。

$$\frac{R_C}{r} = \frac{\pi^2}{48} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \sin 2\phi_B \left\{ 1 - \frac{0.608 (L/D)^2 \cos^2 \phi_B}{4 + (L/D)^2 \cos^2 \phi_B} \right\} \quad (51)$$

(50) 式と (51) 式を次図に示す。



(IV) フットプリント(地上面飛行軌跡)

(36) 式, (50) 式からトータルのダウンレンジ距離, クロスレンジ距離が得られたので両式からバンク角を消去すると平衡滑空飛行における飛行範囲が得られる。これをフットプリント(地上面飛行軌跡)と称する。 $V_f^2 / gr = 0$

$$\cos \phi_B = -\frac{R_D}{r} \frac{2}{(L/D) \ln(1 - V_C^2/gr)} \quad (52)$$

$$\sin 2\phi_B = \frac{R_C}{r} \frac{1}{(\pi^2/48)(L/D)^2} \quad (53)$$

ここで次式をもちいて ϕ_B を消去すると

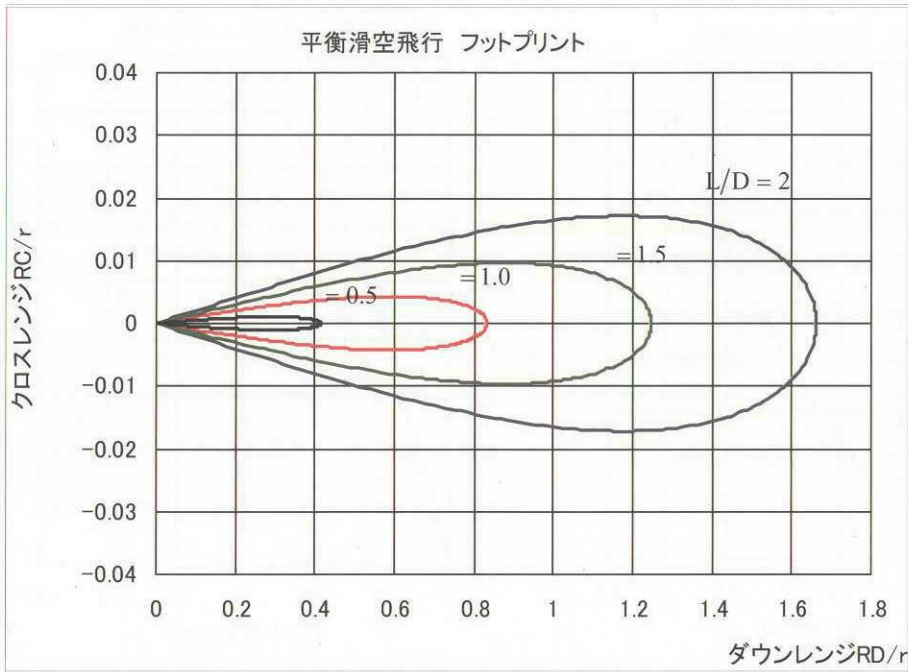
$$\sin^2 2\phi_B = 4 \cos^2 \phi_B \sin^2 \phi_B = 4 (1 - \cos^2 \phi_B) \cos^2 \phi_B$$

両式から ϕ_B を消去して, フットプリント(地上面飛行軌跡)は次式で表される。

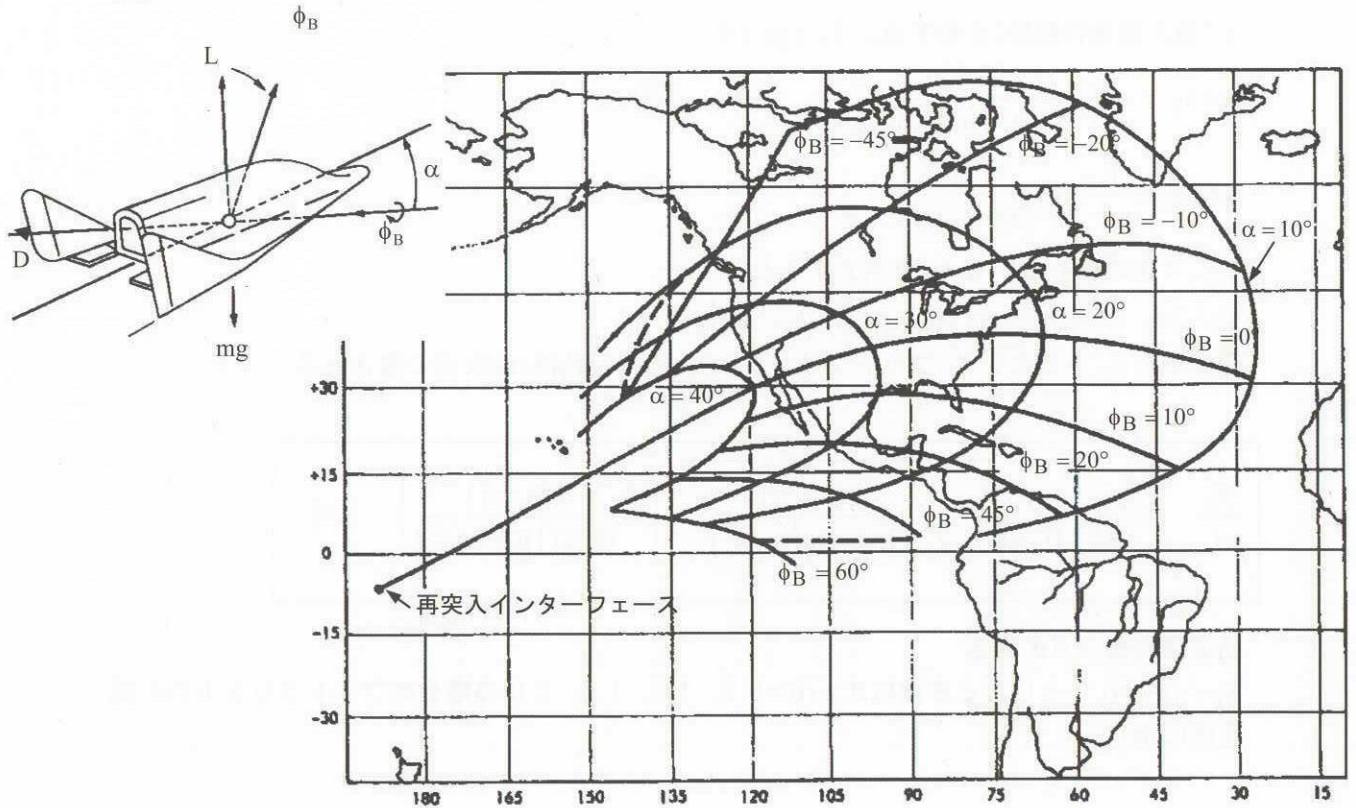
$$\frac{R_C}{r} = \pm \frac{\pi^2}{48} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \sqrt{1 - \left\{ -\frac{2(R_D/r)}{(L/D) \ln(1 - \hat{V}_C^2)} \right\}^2} \left\{ -\frac{2(R_D/r)}{(L/D) \ln(1 - \hat{V}_C^2)} \right\} \quad (54)$$

軌道傾斜角が0の場合

$V_C/\sqrt{gr} = 0.9$ としたとき揚抗比 $L/D = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の場合のフットプリント(54) 式を図に示す。



下図は揚力体ダイナ・ソアーのフットプリントの例を示す。ここではバンク角 ϕ_B をパラメータにとり、揚抗比 $L/D(\alpha)$ の変化は迎角 α をパラメータに取ったものである。なおフットプリントが歪んでいるのは地球の球面を平面に変換したメルカトル変換のためである。



(V) Allen, Eggers と Loh の平衡滑空軌道

Allen, Eggers 経路角が小さい場合について, また Loh は経路角が大きい場合について前項の解析解とは少し異なる方法で解を得ている。これらの結果について述べる。

(3) (4) 式から

$$\frac{D}{m} = -V \frac{dV}{ds} - g \sin \gamma \quad (55)$$

$$\frac{L}{m} = \frac{L}{D} \frac{D}{m} = -V \frac{d\gamma}{ds} - \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \quad (56)$$

両式から D/m を消去して整理すると次式を得る。

$$\frac{dV^2}{ds} + \frac{2V^2}{L/D} \left(\frac{d\gamma}{ds} - \frac{\cos \gamma}{r} \right) + \frac{2g \cos \gamma}{L/D} \left(1 + \frac{L}{D} \tan \gamma \right) = 0 \quad (57)$$

平衡滑空の条件 $d\gamma/ds \ll 1$ から

$$\frac{dV^2}{ds} - \frac{2}{L/D} \frac{\cos \gamma}{r} V^2 + \frac{2g \cos \gamma}{L/D} \left(1 + \frac{L}{D} \tan \gamma \right) = 0 \quad (58)$$

(1) Allen の小経路角滑空軌道の解

・ 飛行距離 S

Allen の解析では経路角は小さい $\gamma \ll 1$ と仮定していることから $\cos \gamma \approx 1$ 、 $(L/D) \tan \gamma \ll 1$ とおくと (58) 式は次のようになる。

$$\frac{dV^2}{ds} - \frac{2}{L/D} \frac{1}{r} V^2 + \frac{2g}{L/D} = 0 \quad (59)$$

上式は独立変数 s に関する V^2 の 1 階常微分方程式であり, これを解くことにより直接飛行距離が速度関数で得られる。(付録 1 階常微分方程式の解参照)

$$\frac{1 - V^2/gr}{1 - V_C^2/gr} = \exp\left(\frac{2}{r} \frac{s}{L/D}\right) \quad (60)$$

または

$$s = R_D = \frac{r}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{1 - \hat{V}^2}{1 - \hat{V}_C^2} \right) \quad (61)$$

(36) 式と同じ結果となる。

・ 密度(高度)対飛行距離

次に飛行距離 S の関数 $J(S)$ を定義する

$$J(s) = \frac{2}{r} \frac{s}{L/D} \quad (62)$$

と置くと、速度は飛行距離 S の関数として次式で表される。

$$\hat{V}^2 = 1 - (1 - \hat{V}_C^2) e^J \quad (63)$$

大気密度は滑空飛行 M の条件 $L/m = g(1 - V^2/gr)$ から

$$\rho = \frac{\Delta}{r} \frac{2}{L/D} \left(\frac{1 - \hat{V}^2}{\hat{V}^2} \right) = \frac{\Delta}{r} \frac{2}{L/D} \frac{(1 - \hat{V}_C^2) e^J}{1 - (1 - \hat{V}_C^2) e^J} \quad (64)$$

密度比を求めると

$$\frac{\rho}{\rho_C} = \left(\frac{\hat{V}^2}{1 - \hat{V}^2} \right) \left\{ \frac{(1 - \hat{V}_C^2) e^J}{1 - (1 - \hat{V}_C^2) e^J} \right\} \quad (65)$$

これより高度は速度の関数ではなく飛行距離 S の関数として表すことができる。

$$h - h_C = \frac{1}{\beta} \left[\ln \left(\frac{1 - \hat{V}_C^2}{\hat{V}^2} \right) + \ln \left\{ \frac{1 - (1 - \hat{V}_C^2) e^{J(s)}}{(1 - \hat{V}_C^2) e^{J(s)}} \right\} \right] \quad (66)$$

・ 経路角

上式を s について微分すると

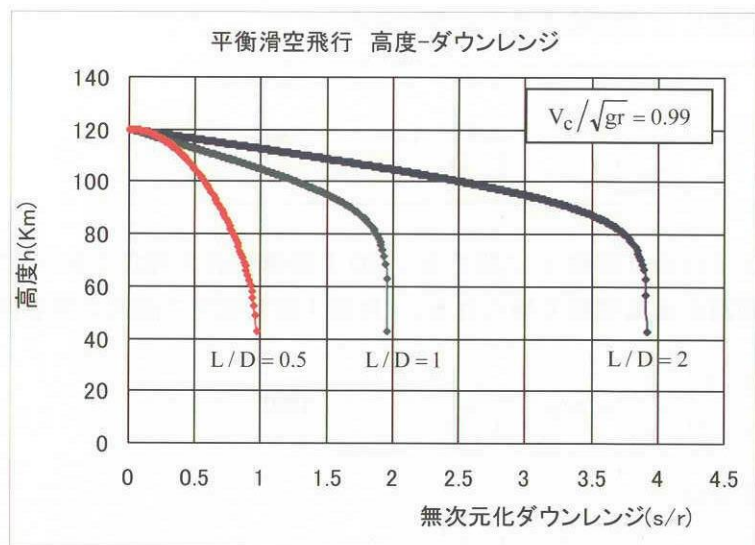
$$\frac{dh}{ds} = -\frac{1}{\beta r} \frac{2}{L/D} \frac{1}{1 - (1 - \hat{V}_C^2) e^{J(s)}} \approx -\frac{1}{\beta r} \frac{2}{L/D} \frac{1}{\hat{V}^2}$$

(4), (5) 式から $dh/ds = \gamma$ でありこれより飛行経路角 γ は次式で表される。

$$\gamma = -\frac{1}{\beta r} \frac{2}{L/D} \frac{1}{\hat{V}^2} \quad (67)$$

(20) 式と一致する。

(66) 式を右図に示す。



(2) Loh の大経路角滑空軌道の解

・ 飛行距離 S

Loh の解析では平衡滑空の条件 $d\gamma/ds \ll 1$ に対して次の仮定を行う。仮定 $d\gamma/ds = 0$ これにより $\gamma = \text{一定}$ となる。 γ が一定ならば(57)式は次式で表され、やはり独立変数 S に関する V^2 の 1 階常微分方程式となる。

$$\frac{dV^2}{dS} - \frac{2}{L/D} \frac{\cos\gamma}{r} V^2 + \frac{2g\cos\gamma}{L/D} \left(1 + \frac{L}{D} \tan\gamma\right) = 0 \quad (68)$$

上式で $L/D \cos\gamma$, $\tan\gamma$ は一定であるから、定数係数 1 階常微分方程式であり、この解は次式で表される。(補足参照)

$$V^2 = \left[-\frac{2g\cos\gamma}{L/D} \{1 + (L/D)\tan\gamma\} \int \exp\left(-\frac{2\cos\gamma}{r L/D} s\right) ds + \text{const} \right] \exp\left(\frac{2\cos\gamma}{r L/D} s\right)$$

これより速度 V と飛行距離 S の関係は

$$\frac{1 + (L/D)\tan\gamma - \hat{V}^2}{1 + (L/D)\tan\gamma - \hat{V}_C^2} = \exp\left(\frac{2\cos\gamma}{r L/D} s\right) \quad (69)$$

または

$$s = \frac{r(L/D)}{2\cos\gamma} \ln \left\{ \frac{1 + (L/D)\tan\gamma - \hat{V}^2}{1 + (L/D)\tan\gamma - \hat{V}_C^2} \right\} \quad (70)$$

・ 飛行レンジ R

飛行レンジは経路角 γ が一定であるから $R = s \cos\gamma$ より

$$R = \frac{r(L/D)}{2} \ln \left\{ \frac{1 + (L/D)\tan\gamma - \hat{V}^2}{1 + (L/D)\tan\gamma - \hat{V}_C^2} \right\} \quad (71)$$

経路角が小さい場合 $\gamma \ll 1$ には

$$s = R = \frac{r(L/D)}{2\cos\gamma} \ln \left(\frac{1 - \hat{V}^2}{1 - \hat{V}_C^2} \right)$$

となり Allen の結果と一致する。

・ 密度(高度)対速度:

$L/m = g(1 - V^2/gr)\cos\gamma$ から密度、高度は速度の関数として次式で表される。

$$\rho = \frac{\Delta}{r(L/D)} \left(\frac{1 - V^2/gr}{V^2/gr} \right) \cos\gamma \quad (72)$$

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{2\Delta}{r \rho_{SL} (L/D)} \left(\frac{1 - V^2/gr}{V^2/gr} \right) \cos \gamma \right\} \quad (73)$$

以上が Loh の解析解であり経路角は必ずしも小さい必要はない。経路角が小さい場合には Allen, Eggers の結果と一致する。但し経路角が一定と仮定していることから経路角変化率, 高度変化率は $dy/dt = 0$ $dh/dt = V \sin \gamma$ となり, 平衡滑空飛行時の経路角変化率, 高度変化率とは異なってくる。従って Loh の大経路角滑空飛行の解は経路角が小さいときには平衡滑空飛行と一致し経路角が大きいたときには一定経路角飛行で近似したものとなっている。(一定経路角飛行の項参照)

(補足) 微分方程式の解法

$$\frac{dV^2}{ds} + PV^2 + Q = 0$$

$$P = -\frac{2}{L/D} \frac{\cos \gamma}{r}$$

$$Q = \frac{2g \cos \gamma}{L/D} \left(1 + \frac{L}{D} \tan \gamma \right)$$

の解は

$$V^2 = \exp(-\int P ds) \left[\int Q \exp(\int P ds) ds \right]$$

右辺の積分項は次式で表される。

$$\exp(-\int P ds) = \exp\left(\frac{2}{L/D} \frac{\cos \gamma}{r} s\right)$$

これより

$$V^2 = \exp\left(\frac{2}{L/D} \frac{\cos \gamma}{r} s\right) \left[\frac{2g \cos \gamma}{L/D} \left(1 + \frac{L}{D} \tan \gamma \right) \int \exp\left(-\frac{2}{L/D} \frac{\cos \gamma}{r} s\right) ds + C \right]$$

$$= \exp\left(\frac{2}{L/D} \frac{\cos \gamma}{r} s\right) \left[gr \left(1 + \frac{L}{D} \tan \gamma \right) \exp\left(-\frac{2}{L/D} \frac{\cos \gamma}{r} s\right) + C \right] = gr \left(1 + \frac{L}{D} \tan \gamma \right) + C \exp\left(\frac{2}{L/D} \frac{\cos \gamma}{r} s\right)$$

$$V_C^2 - gr \left(1 + \frac{L}{D} \tan \gamma \right) = C$$

これより次式を得る

$$\frac{\hat{V}^2 - \{1 + (L/D) \tan \gamma\}}{\hat{V}_C^2 - \{1 + (L/D) \tan \gamma\}} = \exp\left(\frac{2}{L/D} \frac{\cos \gamma}{r} s\right)$$

7-7. 3次元揚力軌道

3次元平衡滑空軌道については7.6項に一部示したが、ここでは Jackson, Arther によるスパーサーキュラー速度からの3次元平衡滑空軌道の解法について記す。

(I) 速度座標系運動方程式

3次元速度座標軸系運動方程式

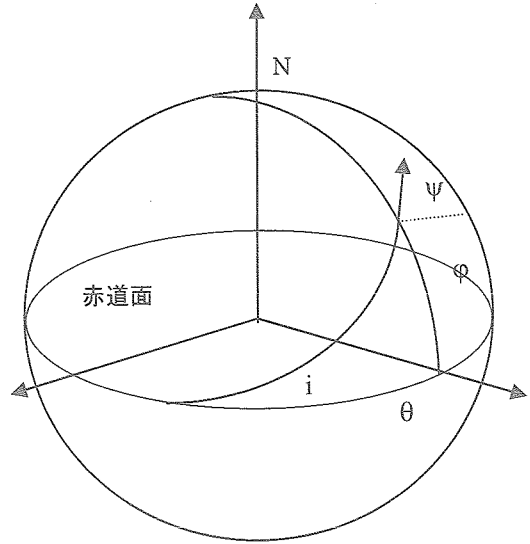
$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{m} \cos \phi_B + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \quad (2)$$

$$V \cos \gamma \left(\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \sin \phi \right) = \frac{L \sin \phi_B}{m} \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi} \quad (4)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r} \quad (5)$$



- 仮定 (1) 揚抗比 L/D : 一定
 (2) $\gamma \ll 1$ $d\gamma/dt \ll 1$: 平衡滑空飛行の条件
 (3) バンク角 ϕ_B : 一定

I. 逐次近似解法

無次元化2乗速度を次式で定義する。

$$\hat{V}^2 \equiv V^2/gr$$

(1)-(2)式から

$$\frac{L}{D} \frac{D \cos \phi_B}{m} = g \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right) \quad (6)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} = -\frac{1}{L/D} \frac{g}{\cos \phi_B} \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right) \quad (7)$$

両辺に $2V$ を乗じて、無次元化速度をもちいると次式を得る。

$$\frac{d\hat{V}^2}{dt} = -\frac{2\sqrt{gr} \hat{V}}{L/D} \frac{g}{\cos \phi_B} \left(1 - \hat{V}^2 \right) \quad (8)$$

(8)式を用いて独立変数を時刻 t から無次元化速度の2乗 \hat{V}^2 に変換する。(4), (5)式に(8)式を用いると

$$\frac{d\theta}{d\hat{V}^2} = -\left(\frac{L}{D} \right) \frac{\cos \phi_B}{2} \frac{\cos \psi}{\cos \phi} \frac{1}{(1 - \hat{V}^2)} \quad (9)$$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{V}^2} = -\left(\frac{L}{D}\right) \frac{\cos\phi_B}{2} \frac{\sin\psi}{(1-\hat{V}^2)} \quad (10)$$

また

$\rho V^2/2\Delta = -dV/dt = -(d\hat{V}^2/dt)/2\hat{V}^2$ を用いると (3) 式は

$$\frac{d\psi}{d\hat{V}^2} = -\left(\frac{L}{D}\right) \frac{\sin\phi_B}{2} \frac{1}{\hat{V}^2} + \left(\frac{L}{D}\right) \frac{\cos\phi_B}{2} \frac{\cos\psi \tan\varphi}{(1-\hat{V}^2)} \quad (11)$$

(9) - (11) 式において $L/D, \phi_B$ は仮定から一定, また積分区間 $[\hat{u}_N, \hat{u}_{N+1}]$ で右辺に含まれる $\cos\psi/\cos\varphi, \sin\psi, \cos\psi \tan\varphi$ が一定であれば (11) 式で $\cos\psi \tan\varphi = \cos\psi_N \tan\varphi_N$: 一定と置けば積分できて次式が得られる。

$$\psi_{N+1} - \psi_N = -\frac{L \sin\phi_B}{D} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\hat{V}_{N+1}^2}{\hat{V}_N^2}\right) + \frac{L \cos\phi_B}{D} \frac{\cos\psi_N \tan\varphi_N}{2} \ln\left(\frac{1-\hat{V}_{N+1}^2}{1-\hat{V}_N^2}\right) \quad (12)$$

(12) 式から 積分区間 $[\hat{u}_N, \hat{u}_{N+1}]$ で右辺に含まれる $\sin\psi$ が一定であれば

$\sin\psi = \sin\psi_N$: 一定

または () 式の積分結果をを利用して

$\sin\psi = (\sin\psi_{N+1} + \sin\psi_N)/2$: 一定 と置いて積分すると次式を得る

$$\varphi_{N+1} - \varphi_N = -\frac{L \cos\phi_B}{D} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\psi_{N+1} + \sin\psi_N}{2}\right) \ln\left(\frac{1-\hat{V}_{N+1}^2}{1-\hat{V}_N^2}\right) \quad (13)$$

(11) 式に於いて積分区間 $[\hat{u}_N, \hat{u}_{N+1}]$ で右辺に含まれる $\cos\psi, \cos\varphi$ を

$$\cos\psi = (\cos\psi_{N+1} + \cos\psi_N)/2$$

$$\cos\varphi = (\cos\varphi_{N+1} + \cos\varphi_N)/2$$

とおき平均値を用いて積分すると

$$\theta_{N+1} - \theta_N = -\frac{1}{2} \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} \left(\frac{L}{D}\right) \frac{1}{\cos\phi_B} \left\{ (\hat{V}_{N+1}^2 - \hat{V}_N^2) - \frac{1}{2} (\hat{V}_{N+1}^4 - \hat{V}_N^4) \right\} \quad (14)$$

いま $\eta = \hat{V}^2$ と置き $\eta_N = \hat{V}_N^2$ で初期値 $\psi_N, \varphi_N, \theta_N$ 積分間隔 $\Delta\eta_N (= \Delta V_N^2)$ をあたえると $\eta_{N+1} = \eta_N + \Delta\eta_N$ では

$$\psi_{N+1} - \psi_N = \frac{L \sin\phi_B}{D} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\eta_{N+1}}{\eta_N}\right) - \frac{L \cos\phi_B}{D} \frac{\cos\psi_N \tan\varphi_N}{2} \ln\left(\frac{1-\eta_{N+1}}{1-\eta_N}\right) \quad (15)$$

$$\varphi_{N+1} - \varphi_N = -\frac{L \cos\phi_B}{D} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\psi_{N+1} + \sin\psi_N}{2}\right) \ln\left(\frac{1-\eta_{N+1}}{1-\eta_N}\right) \quad (16)$$

$$\theta_{N+1} - \theta_N = -\frac{1}{2} \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} \left(\frac{L}{D}\right) \frac{1}{\cos\phi_B} \left\{ (\eta_{N+1} - \eta_N) - \frac{1}{2} (\eta_{N+1}^2 - \eta_N^2) \right\} \quad (17)$$

から $\eta_{N+1}(=\hat{V}_{N+1}^2)$ に於ける $\psi_{N+1}, \phi_{N+1}, \theta_{N+1}$ が得られる。この $\eta_{N+1}, \psi_{N+1}, \phi_{N+1}, \theta_{N+1}$ を初期値として $\eta_{N+1}, \psi_{N+1}, \phi_{N+1}, \theta_{N+1} \rightarrow \eta_N, \psi_N, \phi_N, \theta_N$ とおいて繰返し演算を行うことにより方位角 ψ, ϕ , 及び経度 θ が得られる。これが Jackson (1961) の逐次近似法である。

II. マヌーバ指数 Q を用いた 3 次元平衡滑空飛行の解析解

前項ではバンク角 ϕ_B は一定と仮定したが次に述べる Jackson (1962) ではバンク角 ϕ_B は可変とし、以下に定義するマヌーバ指数 Q を導入して解析解を得ている。

仮定

(3) バンク角 ϕ_B : 可変

また (10) (11) 式から

$$\frac{d\phi}{d\hat{V}^2} = -\left(\frac{L}{D}\right) \frac{\cos \phi_B}{2} \sin \psi \frac{1}{(1-\hat{V}^2)} \tag{18}$$

$$\frac{d\psi}{d\hat{V}^2} = -\left(\frac{L}{D}\right) \frac{\sin \phi_B}{2} \frac{1}{\hat{V}^2} + \left(\frac{L}{D}\right) \frac{\cos \phi_B}{2} \cos \psi \tan \phi \frac{1}{(1-\hat{V}^2)} \tag{19}$$

(19) 式を (18) 式で除して次の関係式を得る。

$$\sin \psi \frac{d\psi}{d\phi} + \tan \phi \cos \psi = \tan \phi_B \frac{(1-\hat{V}^2)}{\hat{V}^2} \tag{20}$$

(20)

ここで右辺を Q と置く。

$$\tan \phi_B \frac{(1-\hat{V}^2)}{\hat{V}^2} \equiv Q \tag{21}$$

この Q をマヌーバ指数いう。

Q が一定, または ϕ の関数であれば (20) 式は次のようにあらわされる。

$$\sin \psi \frac{d\psi}{d\phi} + \tan \phi \cos \psi = Q \tag{22}$$

さらに

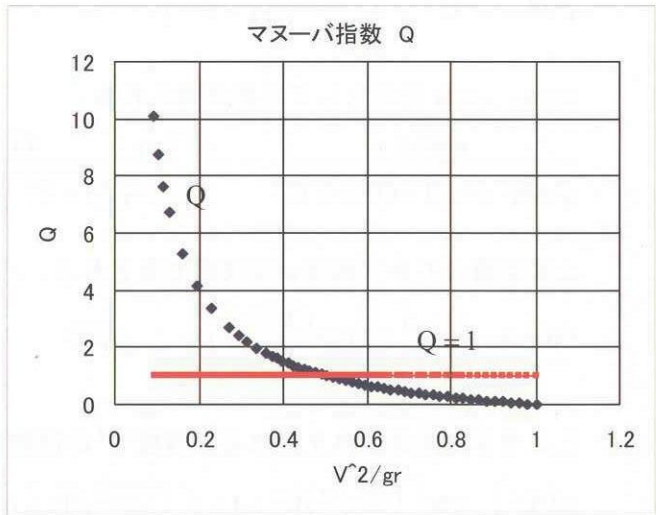
$x \equiv \cos \phi \cos \psi$ と置けば

$$dx = -\sin \phi \cos \psi d\phi - \cos \phi \sin \psi d\psi$$

$d \sin \phi = \cos \phi d\phi$ から (22) 式の左辺は

$$\sin \psi \frac{d\psi}{d\phi} \tan \phi \cos \psi = -\frac{dx}{d \sin \phi}$$

で表され, 次式を得る。



$$\frac{dx}{d \sin \phi} = -Q \quad (23)$$

上式で Q が一定であれば積分を行うことができ、積分を実行して x をもとの物理量にもどすと、次式となる。これより飛行方位角 ψ と緯度 ϕ の関係が得られる。

$$\cos \phi \cos \psi = -Q \sin \phi + C \quad (24)$$

$$C = 1$$

ここで C は積分定数であり初期値を赤道面 $\phi = 0$ として $\phi = \phi_0 = 0$ $\psi = \psi_0 = 0$ と置くと $C = 1$ となる。

次に (21) 式 $\tan \phi_B (1 - \hat{V}^2) / \hat{V}^2 = Q$ からバンク角の余弦値を求めると

$$\cos \phi_B = (1 - \hat{V}^2) / \sqrt{(1 - \hat{V}^2)^2 + Q^2 \hat{V}^4}$$

また (18) 式から方位角の正弦値は次式となる。

$$\sin \psi = \sqrt{\cos^2 \phi - (1 - Q \sin \phi)^2} / \cos \phi$$

$$\frac{d\phi}{d\hat{V}^2} = -\left(\frac{L}{D}\right) \frac{\cos \phi_B}{2} \frac{\sin \psi}{(1 - \hat{V}^2)} \quad (25)$$

$\cos \phi_B$, $\sin \psi$ を代入して次式が得られる。

$$\frac{d \sin \phi}{\sqrt{\cos^2 \phi - (1 - Q \sin \phi)^2}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{D}\right) \frac{d\hat{V}^2}{\sqrt{(1 - \hat{V}^2)^2 + Q^2 \hat{V}^4}} \quad (26)$$

上式は積分できて緯度 ϕ は次式で表される。パラメータ N の関数となる。

$$\sin \phi = \frac{Q}{1 + Q^2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{L}{D} \frac{N}{2} \right) \right\} \quad (27)$$

ここで N は次式で与えられる。速度 \hat{V}^2 の関数である。

$$N(\hat{V}^2) = \ln \left[\frac{(1 + Q^2) \hat{V}^2 - 1 + \sqrt{1 + Q^2} \sqrt{(1 + Q^2) \hat{V}^4 - 2 \hat{V}^2 + 1}}{\hat{V}^2} \right]_{\hat{V}^2}^{\hat{V}_i^2} \quad (28)$$

高度対速度：

平衡滑空飛行を仮定しているから大気密度は次のようにあらわされる。

$$\rho = \frac{2}{r} \frac{\Delta}{(L/D) \cos \phi_B} \left(\frac{1 - \hat{V}^2}{\hat{V}^2} \right) \quad (29)$$

$\cos \phi_B = (1 - \hat{V}^2) / \sqrt{(1 - \hat{V}^2)^2 + Q^2 \hat{V}^4}$ から $\cos \phi_B$ を消去すると

$$\rho = \frac{2}{r} \frac{\Delta}{(L/D)} \sqrt{\left(\frac{1-\hat{V}^2}{\hat{V}^2}\right)^2 + Q^2} \quad (30)$$

初期値を $\hat{V} = \hat{V}_c$ で $\rho = \rho_c$ とすれば

$$\rho_c = \frac{2}{r} \frac{\Delta}{(L/D)} \sqrt{\left(\frac{1-\hat{V}_c^2}{\hat{V}_c^2}\right)^2 + Q^2} \quad (31)$$

海面上密度に対する比は

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \sqrt{\left(\frac{1-\hat{V}^2}{\hat{V}^2}\right)^2 + Q^2} / \sqrt{\left(\frac{1-\hat{V}_c^2}{\hat{V}_c^2}\right)^2 + Q^2} \quad (32)$$

これより高度は次式で表される。

$$h = h_c - \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \sqrt{\left(\frac{1-\hat{V}^2}{\hat{V}^2}\right)^2 + Q^2} - \sqrt{\left(\frac{1-\hat{V}_c^2}{\hat{V}_c^2}\right)^2 + Q^2} \right\} \quad (33)$$

空力荷重

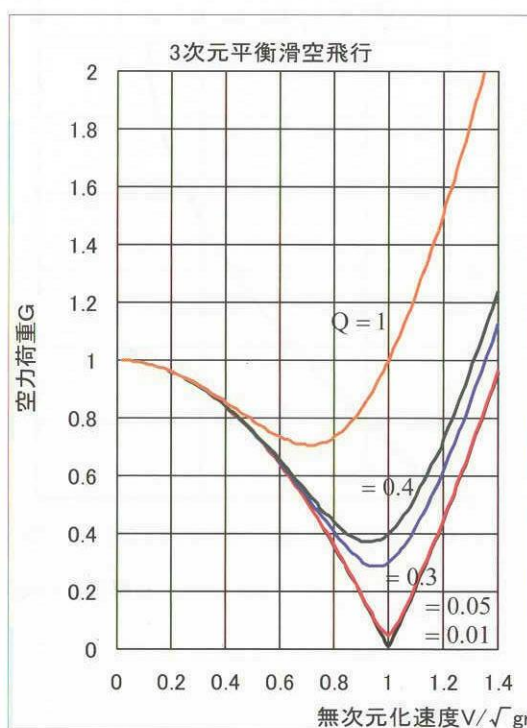
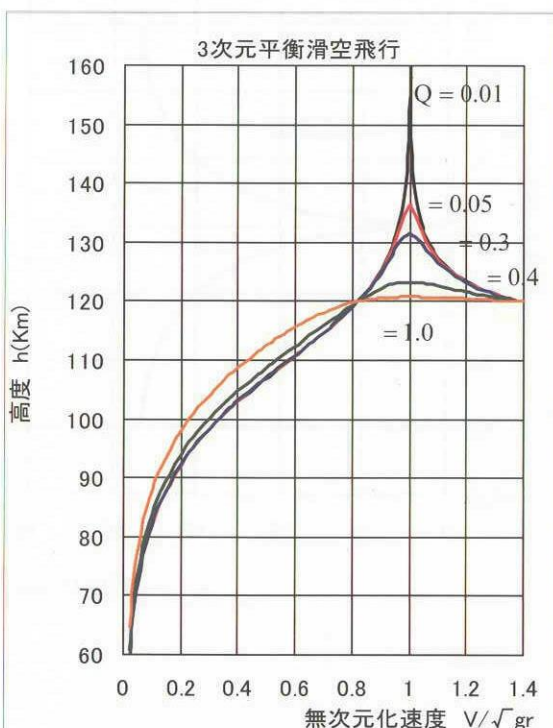
空力荷重は g 単位で次式で定義される。

$$G = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/mg) = \sqrt{1 + (L/D)^2} \frac{r\rho \hat{V}^2}{2\Delta} \quad (34)$$

上式に (32) 式の密度を代入して次式で表される。

$$G = \sqrt{\frac{1 + (L/D)^2}{(L/D)^2}} \sqrt{(1-\hat{V}^2)^2 + \hat{V}^4 Q^2} \quad (35)$$

(33) (35) 式を図に示す



経度 θ 対緯度 ϕ :

Q=1 の場合

(18)式 $\cos \varphi \cos \psi = -Q \sin \varphi + 1$ で Q=1 の場合には 方位角を緯度の関数として次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \cos \psi &= (1 - \sin \varphi) / \cos \varphi \\ \tan^2 \psi &= 2 \sin \varphi / (1 - \sin \varphi) \quad (35)' \end{aligned}$$

(4) (5) 式から

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi \tan \psi} \quad (36)$$

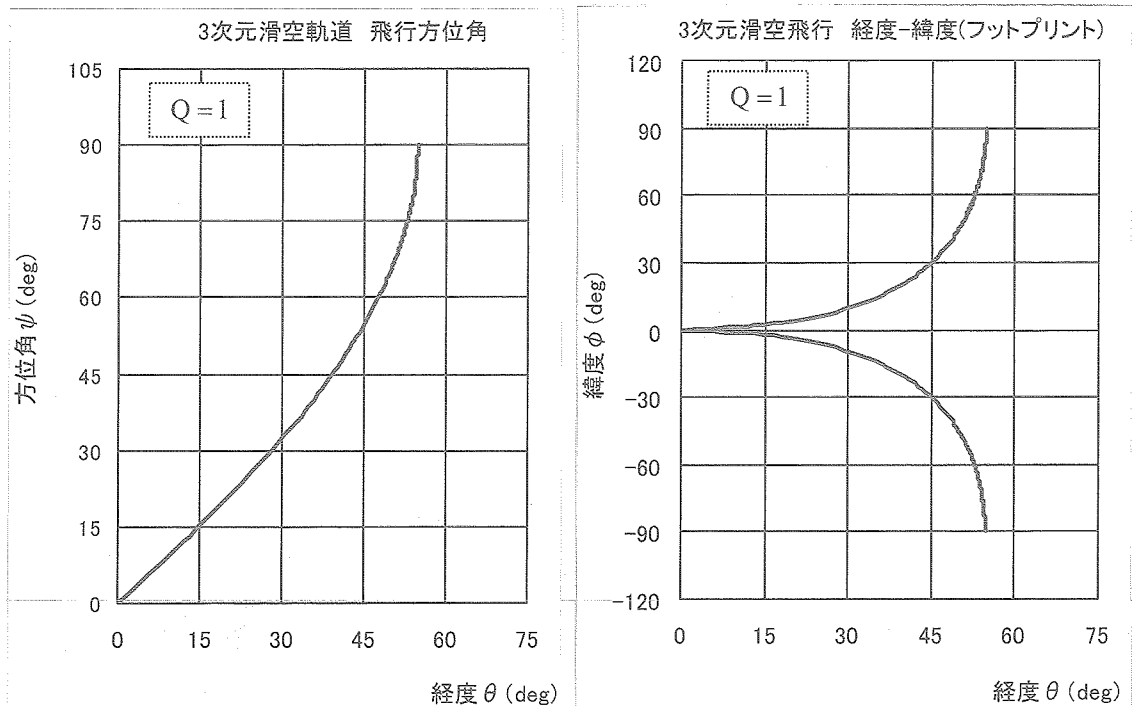
上記関係式を代入して右辺を緯度の関数として表すと次の通り。

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{2 \sin \varphi}}$$

上式は容易に積分できて緯度対経度は次式で表される。

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2 \sin \varphi}{1 + 2 \sin \varphi}} \quad (37)$$

(35)' , (37) 式を下図に示す。



Arther の解

再突入時の緯度を φ_E 軌道傾斜角を i とすれば

$$\cos i = \cos \varphi_E \cos \psi_E \quad (38)$$

$$\cos \varphi \cos \psi = -Q \sin \varphi + C \quad (39)$$

積分定数 C は $\cos i = \cos \varphi_E \cos \psi_E$ から

$$C = \cos i + Q \sin \varphi_E$$

となる。赤道面軌道ならば $i=0$ $\varphi_E=0$ から $C=1$

積分定数を代入して方位角は

$$\cos \psi = \frac{1 - Q \sin \varphi}{\cos \varphi} \quad (40)$$

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{2Q \sin \varphi - (1+Q^2) \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \quad (41)$$

で与えられる。

$$\sin \varphi = 1/Q \text{ の時} \quad \psi = \pi/2$$

$$\sin \varphi = 2Q / (1+Q^2) \text{ のとき} \quad \psi = 0 \text{ または } \pi$$

$Q \neq 1$ のとき次の関係式を得る。

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{1 - Q \sin \varphi}{\sqrt{2Q \sin \varphi - (1+Q^2) \sin^2 \varphi}} \quad (42)$$

上式の右辺分母 $\sin \varphi \{2Q - (1+Q^2) \sin \varphi\} = 0$ から

$\sin \varphi = 0$ または $\sin \varphi = 2Q / (1+Q^2)$ において特異点となる。

また $\sin \varphi = 1/Q$ で零点となる

積分して経度は次式で表される。

$$2\theta = \sin^{-1} \left[\frac{Q^2 - Q + 1 + \{(Q-1)^2 / (\sin \varphi - 1)\}}{Q} \right] + \sin^{-1} \left[\frac{Q^2 + Q + 1 - \{(Q+1)^2 / (\sin \varphi + 1)\}}{Q} \right] \quad (43)$$

$Q=1$ ならば

$$3 - \frac{4}{\sin \varphi + 1} = \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos 2\theta = -1 + 2 \sin^2 \theta \text{ から}$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2 \sin \varphi}{\sin \varphi + 1}}$$

(37) 式と一致する。

方位角が $\psi = \dot{\psi} = 0$ の場合

(1) (3), (4) 式から

$$\tan \varphi = \tan \phi_B \frac{gr}{V^2} \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right) = \tan \phi_B \frac{(1 - \hat{V}^2)}{\hat{V}^2} = Q \quad (44)$$

緯度 $\varphi = 45^\circ$ の時 $Q=1$ となる。

$\tan \varphi = \tan \phi_B \left\{ (1 - \hat{V}^2) / \hat{V}^2 \right\}$ からバンク角を求めると

$$\sin \phi_B = \frac{\hat{V}^2 \tan \varphi}{\sqrt{(1 - \hat{V}^2)^2 + (\hat{V}^2 \tan \varphi)^2}} \quad (45)$$

Shaver の解を得る。

III 3次元等高度飛行

- 仮定 (1) $d\gamma/dt = 0 \quad \gamma = 0$: 一定高度飛行
- (2) $\sin \phi_B \approx 1 \quad \phi_B \approx \pi/2$: バンク角の仮定

一定高度飛行の仮定から密度 ρ は一定である。
無次元化高度パラメータ C を次式で定義する。

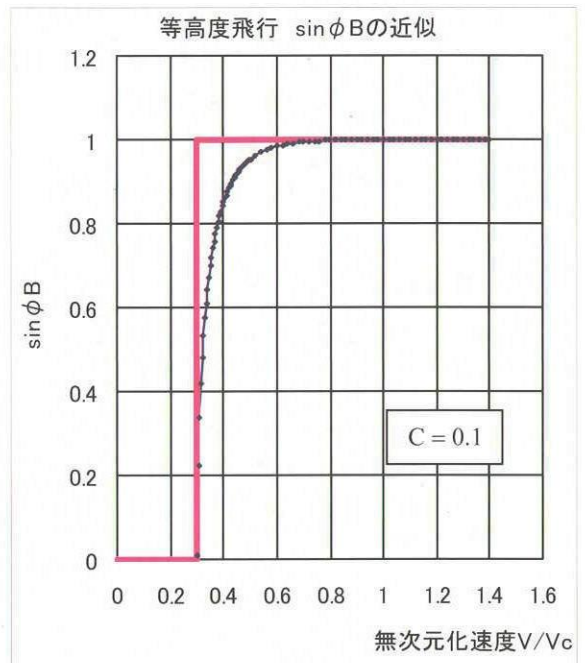
$$C \equiv \frac{1}{(L/D)} \frac{2\Delta}{r\rho} : \text{無次元化高度パラメータ}$$

(1) 式からバンク角 ϕ_B を求めると

$$\cos \phi_B = \frac{2\Delta}{(L/D)r\rho} \frac{(1 - \hat{V}^2)}{\hat{V}^2} = C \frac{(1 - \hat{V}^2)}{\hat{V}^2} \quad (46)$$

$$\sin \phi_B = \sqrt{1 - C^2 (1 - \hat{V}^2)^2 / \hat{V}^4}$$

これより速度の広い範囲に亘って $\sin \phi_B \approx 1$ が成り立つ。とくに C が小さい場合この傾向がある。そこでバンク角を $\sin \phi_B \approx 1 \quad \phi_B \approx \pi/2$ と仮定する。
 $C=0.1$ の場合について右図に示す



仮定に基づく運動方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} \quad (47)$$

$$V \frac{d\psi}{dt} = \frac{L \sin \phi_B}{m} - \frac{V^2 \tan \varphi \cos \psi}{r} \quad (48)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V \cos \psi}{r \cos \phi} \quad (49)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V \sin \psi}{r} \quad (50)$$

(47)式を用いて独立変数を変数変換 $t \rightarrow V$ すると

$$V \frac{d\psi}{dV} = -\left(\frac{L}{D}\right) \sin \phi_B + \frac{2\Delta \tan \phi \cos \psi}{rp} \quad (51)$$

$$V \frac{d\theta}{dV} = -\frac{2\Delta \cos \psi}{rp \cos \phi} \quad (52)$$

$$V \frac{d\phi}{dV} = -\frac{2\Delta \sin \psi}{rp} \quad (53)$$

$(L/D)C = 2\Delta/rp$ から $2\Delta/rp$ を消去する。また最大バンク角 $\phi_B = \pi/2$ $\sin \phi_B = 1$ と近似すると

$$V \frac{d\psi}{dV} = -\left(\frac{L}{D}\right) (1 - C \tan \phi \cos \psi) \quad (54)$$

$$V \frac{d\phi}{dV} = -\left(\frac{L}{D}\right) C \sin \psi \quad (55)$$

$$V \frac{d\theta}{dV} = -\left(\frac{L}{D}\right) \frac{C \cos \psi}{\cos \phi} \quad (56)$$

独立変数を速度 V から方位角 ψ に変更すると次式となる。

$$(1 - C \tan \phi \cos \psi) \frac{d\phi}{d\psi} = C \sin \psi \quad (57)$$

ここで $d(C \cos \phi \cos \psi)/d\phi$ を展開して上式を用いると

$d(C \cos \phi \cos \psi)/d\phi = -C \sin \phi \cos \psi - C \cos \phi \sin \psi (d\psi/d\phi) = -\cos \phi$ となり次式微分方程式を得る。

$$\frac{d(C \cos \phi \cos \psi)}{d\phi} = -\cos \phi \quad (58)$$

これを解く緯度と方位角との関係式が得られる。

$$\sin \phi = C (1 - \cos \phi \cos \psi)$$

または上式を展開して

$$(1 + C^2 \cos^2 \psi) \sin^2 \phi - 2C \sin \phi + C^2 \sin^2 \psi = 0$$

を解いて方位角の関数として次式で与えられる。

$$\sin \phi = C \left(\frac{1 - \cos \psi \sqrt{1 - C^2 \sin^2 \psi}}{1 + C^2 \cos^2 \psi} \right)$$

$$\sin \varphi = \left\{ \frac{C - \sqrt{(C^2 - \sin^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)}}{1 + (C^2 - \sin^2 \theta)} \right\} \quad (59)$$

経度を及び方位角は次式で与えられる。

$$\sin \theta = C \sin \psi$$

$$\sin \psi = \sin \theta / C$$

$$\cos \psi = \sqrt{C^2 - \sin^2 \theta} / C$$

$$\cos \psi = \frac{\cos \eta + C^2}{\sqrt{(1 + C^2)^2 - 4C^2 \sin^4(\eta/2)}} \quad (60)$$

$$\text{ただし } \eta = (L/D) \sqrt{1 + C^2} \ln(V/V_C)$$

次に遠心力項 $V^2 \tan \varphi \cos \psi / r$ を無視した地球平坦モデルを考えると

$$V \frac{d\psi}{dV} = -\left(\frac{L}{D}\right) \quad (61)$$

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = C \sin \psi \quad (62)$$

$$\frac{d\theta}{d\psi} = C \cos \psi \quad (63)$$

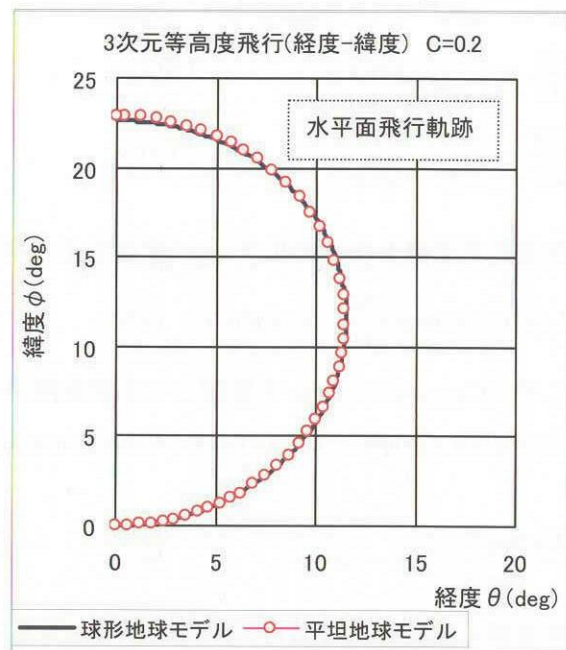
より積分を行うと

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{L}{D} \ln \frac{V_C}{V} \\ \varphi &= C(1 - \cos \psi) \quad (64) \\ \theta &= C \sin \psi \end{aligned}$$

ψ を消去すると $\theta - \varphi$ 面内で

$$(\varphi - C)^2 + \theta^2 = C^2 \quad (65)$$

中心を $[0, C]$ 半径 C の円を描く $C=0.2$ の場合について右図に示す。



7-8. Z 関数による軌道の解

再突入宇宙機の降下飛行に於いて高度の低下に伴って大気密度は指数関数的に増加し、速度は急速に減少することからチャップマン(1958)は大気密度 ρ と水平方向速度 u の積に比例する変数 $Z (Z \propto \rho u)$ をもちいて、宇宙機の運動方程式を Z に関する2階常微分方程式を導出した。

チャップマンの解析での仮定は宇宙機の揚抗比は一定とし、揚抗比と経路角 γ の積が小さい範囲 $(L/D) \tan \gamma \ll 1$ である。また2次元でのダイナミクスである。また特別な範囲では1次オーダーの解が得られる。(Z関数を用いた3次元運動方程式については項参照)

仮定 (1) $L/D = \text{一定}$

(2) $(L/D) \tan \gamma \ll 1$

$$(3) \left| \frac{uv/r}{du/dt} \right| = \frac{u}{r} \left| \frac{dr/dt}{du/dt} \right| = \left| \frac{dr/r}{du/u} \right| \ll 1$$

(3) 項の仮定は宇宙機の低高度を除き、ほぼ全飛行範囲で成り立つ。

1) 局所水平座標系運動方程式(再突入宇宙機の運動方程式の項参照)

$$\frac{du}{dt} = -\frac{uv}{r} - \frac{D}{m} \cos \gamma \left(1 + \frac{L}{D} \tan \gamma \right) \approx -\frac{\rho V^2}{2\Delta} \cos \gamma \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u^2}{r} - \frac{D}{m} \left(\sin \gamma + \frac{L}{D} \cos \gamma \right) - g \quad (2)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (3)$$

$$\frac{ds}{dt} = V \quad (4)$$

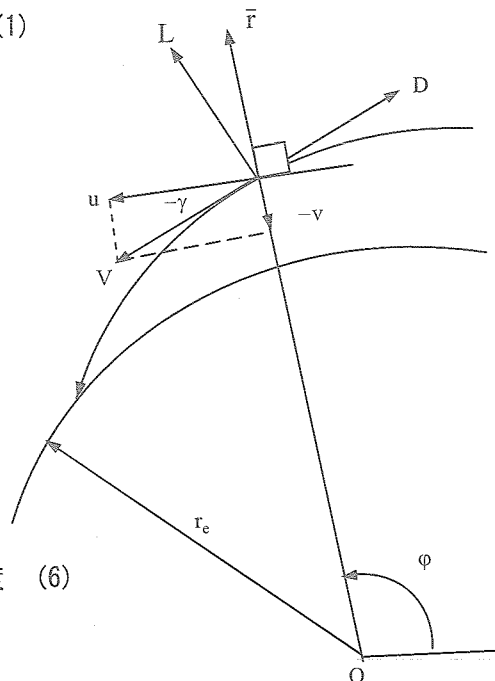
$$\frac{dR}{dt} = V \cos \gamma \quad (5)$$

ここで

$$u = V \cos \gamma \quad : \text{水平方向}(r \text{ ベクトルに直交方向}) \text{速度} \quad (6)$$

$$v = V \sin \gamma \quad : \text{垂直方向}(r \text{ ベクトル方向速度}) \quad (7)$$

$$\Delta \equiv \frac{m}{C_D A} \quad : \text{弾道係数} \quad (9)$$



無次元化：

水平方向速度 u を周回速度で無次元化し、変数 Z を次式で定義する。

$$\bar{u} \equiv \frac{u}{\sqrt{gr}} \quad (10)$$

$$Z \equiv \frac{\sqrt{\beta r}}{2} \left(\frac{u}{\sqrt{gr}} \right) \left(\frac{\rho}{\Delta \beta} \right) = \frac{1}{2\Delta} \sqrt{\frac{r}{\beta}} \rho \bar{u} \quad (11)$$

水平方向加速度：

水平方向加速度は(1)式、および(6)式を微分して次式を得る。

$$\frac{1}{g} \frac{du}{dt} = -\frac{\rho u^2}{2g\Delta \cos \gamma} = -\sqrt{\beta r} \frac{\bar{u} Z}{\cos \gamma} \quad (12)$$

$$\frac{1}{g} \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (13)$$

(12) (13) 式を比較して無次元化水平方向加速度は次式で表される。

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\sqrt{g\beta} \frac{\bar{u} Z}{\cos \gamma} \quad (14)$$

垂直方向加速度：

(2)式から

$$-\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = 1 - \bar{u}^2 + \sqrt{\beta r} \left(\frac{\bar{u} Z}{\cos \gamma} \right) \left(\tan \gamma - \frac{L}{D} \right) \quad (15)$$

また(4) (6)式から

$$v = \sqrt{gr} \bar{u} \tan \gamma \quad (16)$$

(16)式を微分して次式が得られる。

$$-\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = -\sqrt{\frac{r}{g}} \left(\frac{d\bar{u}}{dt} \right) \left(\tan \gamma + \frac{\bar{u}}{\cos^2 \gamma} \frac{d\gamma}{d\bar{u}} \right) = \sqrt{\beta r} \left(\frac{\bar{u} Z}{\cos \gamma} \right) \left(\tan \gamma + \frac{\bar{u}}{\cos^2 \gamma} \frac{d\gamma}{d\bar{u}} \right) \quad (17)$$

(15) (17) 式を等置し経路角に関する変化率 $d\gamma/d\bar{u}$ を求めると次の通り。

$$\frac{d\gamma}{d\bar{u}} = \frac{\cos^2 \gamma}{\bar{u}} \left\{ \frac{(1 - \bar{u}^2) \cos \gamma}{\bar{u} Z} - \frac{L}{\sqrt{\beta r} D} \right\} \quad (18)$$

次に Z 関数を \bar{u} で微分すると

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} = \frac{1}{2\Delta} \sqrt{\frac{r}{\beta}} \bar{u} \left(\frac{d\rho/dt}{d\bar{u}/dt} \right) + \frac{\rho}{2\Delta} \sqrt{\frac{r}{\beta}} \quad (19)$$

ここで

$$dh/dt = \sqrt{gr} \bar{u} \tan \gamma$$

$$d\rho/dt = -\rho\beta (dh/dt) = -\rho\beta \sqrt{gr} \bar{u} \tan \gamma$$

なる関係を用いると次式を得る。

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} = \sqrt{\beta r} \sin \gamma \quad (20)$$

(20)式をさらに \bar{u} で微分すると

$$\frac{d^2Z}{d\bar{u}^2} - \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{dZ}{d\bar{u}} \right) = \sqrt{\beta r} \cos \gamma \left(\frac{d\gamma}{d\bar{u}} \right) \quad (21)$$

(18)式の $d\gamma/d\bar{u}$ を代入すると次の運動方程式が得られる。

$$\underbrace{\bar{u}}_{\textcircled{1}} \underbrace{\frac{d^2Z}{d\bar{u}^2}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{dZ}{d\bar{u}} \right)}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\frac{(1-\bar{u}^2)}{\bar{u}Z}}_{\textcircled{3}} \cos^4 \gamma - \underbrace{\frac{L}{D} \sqrt{\beta r}}_{\textcircled{4}} \cos^3 \gamma \quad (22)$$

上式で左辺の①項は r 方向加速度 ②項は r 方向抗力加速度、右辺の③項は重力と遠心力の差 ④項は揚力加速度である。

初期値/定数

いま ρ_E =初期密度 V_E =初期速度 γ_E =初期経路角とすると Z 変数の初期値/初期係数は次式で与えられる。

$$Z_E = \sqrt{r/\beta} \rho_E \bar{u}_E / 2\Delta \quad : Z \text{ 変数の初期値} \quad (23)$$

$$\left(\frac{dZ}{d\bar{u}} \right)_E = \sqrt{\beta r} \sin \gamma_E + Z_E / \bar{u}_E \quad : Z \text{ 変数の微係数の初期値} \quad (24)$$

$$\text{ただし } \bar{u}_E = V_E \cos \gamma_E$$

次のパラメータは定数として次の値をとるものとする。

$$\sqrt{\beta r} = 30.$$

$$\sqrt{g/\beta} = 262.$$

$$\sqrt{g\beta} = 0.037 \text{ sec}$$

以上から再突入宇宙機の飛行パラメータは以下のように求めることができる。

飛行経路角/経路変化率:

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{\beta r}} \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) \quad (25)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\cos^3 \gamma}{\sqrt{g r}} \frac{1}{\bar{u}^2 Z} \left\{ \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\beta r}} \frac{(1-\bar{u}^2)}{\bar{u} Z} - \frac{L}{D} \right\} \quad (26)$$

速度, 密度, 高度/高度変化率 :

$$V = \frac{\bar{u}}{\cos \gamma} \quad (27)$$

$$\rho = \frac{2\Delta}{\sqrt{r/\beta}} \frac{Z}{\bar{u}} \quad (28)$$

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{2\Delta}{\rho_{SL} \sqrt{r/\beta}} \frac{Z}{\bar{u}} \right) \quad (29)$$

$$\frac{dh}{dt} = \bar{u} \sqrt{gr} \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}} \quad (30)$$

抗力加速度, 揚力加速度 :

$$\frac{D}{m} = \frac{\rho V^2}{2\Delta} = \frac{\rho \bar{u}^2}{2\Delta \cos^2 \gamma} = \frac{1}{\sqrt{r/\beta}} \frac{\bar{u} Z}{\cos^2 \gamma} \quad (31)$$

$$\frac{L}{m} = \left(\frac{L}{D} \right) \frac{D}{m} = \frac{1}{\sqrt{r/\beta}} \left(\frac{L}{D} \right) \frac{\bar{u} Z}{\cos^2 \gamma} \quad (32)$$

動圧 q :

$$q = \frac{\rho V^2}{2} = g \Delta \sqrt{\beta r} \frac{\bar{u} Z}{\cos^2 \gamma} \quad (33)$$

空力荷重 :

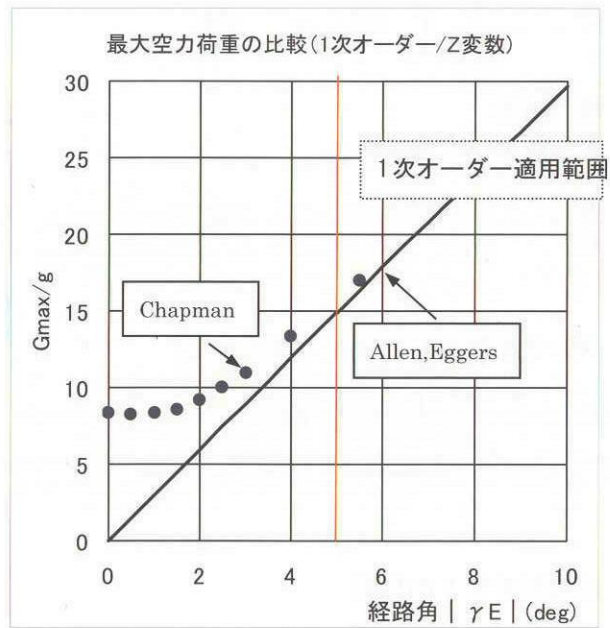
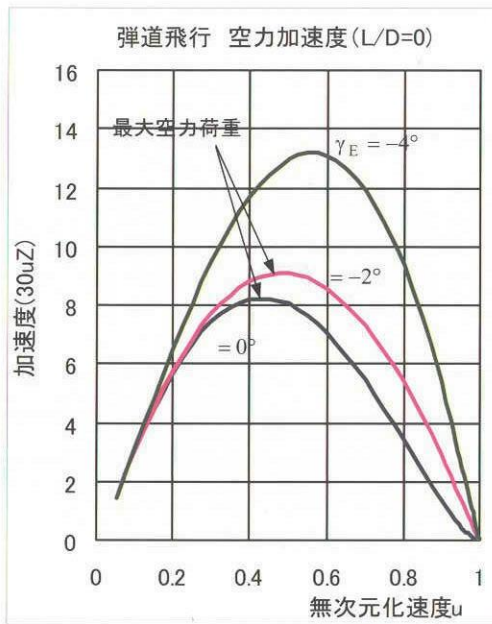
$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &\approx \frac{D}{m} \cos \gamma \\ \frac{dv}{dt} - \frac{u^2}{r} + g &= -\frac{D}{m} \cos \gamma \left(\tan \gamma - \frac{L}{D} \right) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} G &= \sqrt{\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} - \frac{u^2}{r} + g \right)^2} \\ &\approx gr \frac{\rho \bar{u}^2}{2\Delta \cos \gamma} \sqrt{1 + \left(\tan \gamma - \frac{L}{D} \right)^2} = g \frac{\sqrt{\beta r} \bar{u} Z}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \left(\tan \gamma - \frac{L}{D} \right)^2} \quad (34) \end{aligned}$$

例として

$L/D=0$ (弾道飛行) のとき (22) 式を解いた例を下図に示す。この空力加速度最大値と 1 次オーダーの最大値 $(G/g)_{\max} = -\beta r \sin |\gamma_E| / 2e$ と比較したものを下図に示す。1 次オーダーの結果は約 5deg 以下では精度が悪いことを示している。



空力加熱率：

層流の時

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \sqrt{2 \Delta g^3 r^{5/2} \beta^{1/2}} \frac{Z^{1/2} \bar{u}^{5/2}}{\cos^3 \gamma} \quad (35)$$

飛行距離/飛行レンジ：

(4) 式から

$$\frac{ds}{dt} = V = \frac{\bar{u}}{\cos \gamma} = \frac{\bar{u} \sqrt{g r}}{\cos \gamma}$$

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{g r} \bar{u}$$

(14) 式を用いて独立変数を t から u に変更すると次式を得る。

$$\frac{1}{r} \frac{ds}{d\bar{u}} = -\frac{1}{\sqrt{\beta r}} \frac{1}{Z} \quad (36)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dR}{d\bar{u}} = -\frac{1}{\sqrt{\beta r}} \frac{\cos \gamma}{Z} \quad (37)$$

飛行距離/飛行レンジは(36) (37) 式を積分して次式で与えられる。

$$\frac{s}{r} = -\frac{1}{\sqrt{\beta r}} \int_{\bar{u}_E}^{\bar{u}} \frac{1}{Z} d\bar{u} \quad (38)$$

$$\frac{R}{r} = -\frac{1}{\sqrt{\beta r}} \int_{\bar{u}_E}^{\bar{u}} \frac{\cos \gamma}{Z} d\bar{u} \quad (39)$$

飛行時間：

飛行時間は(14)式から

$$\frac{dt}{d\bar{u}} = -\frac{1}{\sqrt{g\beta}} \frac{\cos \gamma}{\bar{u} Z} \quad (40)$$

(40)式を積分して次式で表される。

$$t = -\frac{1}{\sqrt{g\beta}} \int_{\bar{u}_E}^{\bar{u}} \frac{\cos \gamma}{\bar{u} Z} d\bar{u}$$

近似解析解との比較

前項の解析から近似解析解が得られる範囲を示す。

(1) 弾道飛行の場合

仮定 $L/D = 0$: 弾道飛行

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\bar{u}} = 0 \rightarrow \gamma = \gamma_E \quad : \text{一定経路角}$$

この場合、(22)式で③④項は無視でき

$$\frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} = \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) = \frac{\sqrt{\beta r} \sin \gamma_E}{\bar{u}} \quad (41)$$

上式を積分して

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} = \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} \right)_E + \sqrt{\beta r} \sin \gamma_E \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \quad (42)$$

さらに積分公式

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

を用いて積分を実行して次式を得る。第1項は大気密度であり、再突入時点では微小であるから無視すると

$$\frac{Z}{\bar{u}} = \frac{Z_E}{\bar{u}_E} + \sqrt{\beta r} \sin \gamma_E \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \approx \sqrt{\beta r} \sin \gamma_E \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \quad (43)$$

これより大気密度、高度は次式で表される。

$$\rho = \frac{2\Delta\sqrt{\beta r}}{r} \frac{Z}{\bar{u}} = 2\Delta\beta\sin\gamma_E \ln\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E}\right) \quad (44)$$

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln\left\{ \frac{2\Delta\beta}{\rho_{SL}} \sin\gamma_E \ln\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E}\right) \right\} \quad (45)$$

または Z 関数の定義 $Z/\bar{u} = \rho\sqrt{r/\beta}/2\Delta$ を用いると密度の関数, また経路角一定の仮定から

$\bar{u}/\bar{u}_E = V/V_E$ これより

$$\ln\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E}\right) = \ln\left(\frac{V}{V_E}\right) \cong -\frac{\rho}{2\Delta\sin\gamma_E} \quad (46)$$

$$\frac{V}{V_E} = \exp\left(-\frac{\rho}{2\Delta\sin\gamma_E}\right) \quad (47)$$

これは Allen&Eggers の 1 次オーダーの解と一致する。(直線弾道飛行の項参照)

(2) 平衡滑空飛行の場合

仮定 $\gamma \cong 0 \rightarrow \cos\gamma \cong 1$: 微小経路角

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\bar{u}} \ll 1 \quad : \text{平衡滑空の条件}$$

(22) 式で左辺①②項は無視でき

$$\frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}Z} - \frac{L}{D}\sqrt{\beta r} = 0 \quad (48)$$

これより Z 関数及びその変化率は次のように表される。

$$Z = \frac{1}{(L/D)\sqrt{\beta r}} \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}} \quad (49)$$

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} = -\frac{1}{(L/D)\sqrt{\beta r}} \left(\frac{1}{\bar{u}^2} + 1 \right) \quad (50)$$

上式と Z 関数の定義から次式を得る。

$$\rho = \frac{2}{r} \frac{\Delta}{(L/D)} \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}^2} \quad (51)$$

密度(高度)対速度:

経路角 γ が微小の仮定から \bar{u} を V で表すと

$$\rho = \frac{2}{r} \frac{\Delta}{(L/D)} \left(\frac{1-V^2/gr}{V^2/gr} \right) \quad (52)$$

または

$$V^2 = \frac{gr}{1 + \frac{r}{2\Delta} \left(\frac{L}{D}\right) \rho} \quad (53)$$

飛行経路角：

$$\sqrt{\beta_r} \sin \gamma = \frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} = -\frac{2}{(L/D)\sqrt{\beta_r}} \frac{1}{\bar{u}^2} \quad (54)$$

から

$$\gamma \cong -\frac{1}{\beta_r} \frac{2}{L/D} \frac{gr}{V^2} \quad (55)$$

(平衡滑空飛行の項参照)

(3) スキップ軌道の場合

仮定 $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\bar{u}} = 0 \rightarrow \gamma = \gamma_{\text{avg}}$

$$\frac{\cos^4 \gamma (1 - \bar{u}^2)}{\bar{u} Z} = 0$$

(22) 式で③項は無視でき

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} - \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) &= \\ \bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) &= -\left(\frac{L}{D}\right) \sqrt{\beta_r} \cos^3 \gamma_{\text{avg}} \end{aligned} \quad (56)$$

積分を実行すると

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} = \sqrt{\beta_r} \sin \gamma_E - \sqrt{\beta_r} \cos^3 \gamma_{\text{avg}} \left(\frac{L}{D}\right) \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \quad (57)$$

$$\frac{Z}{\bar{u}} \cong \sqrt{\beta_r} \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \left\{ \sin \gamma_E - \frac{\cos^3 \gamma_{\text{avg}}}{2} \left(\frac{L}{D}\right) \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \right\} \quad (58)$$

上式から微小角近似を行うと経路角対速度は

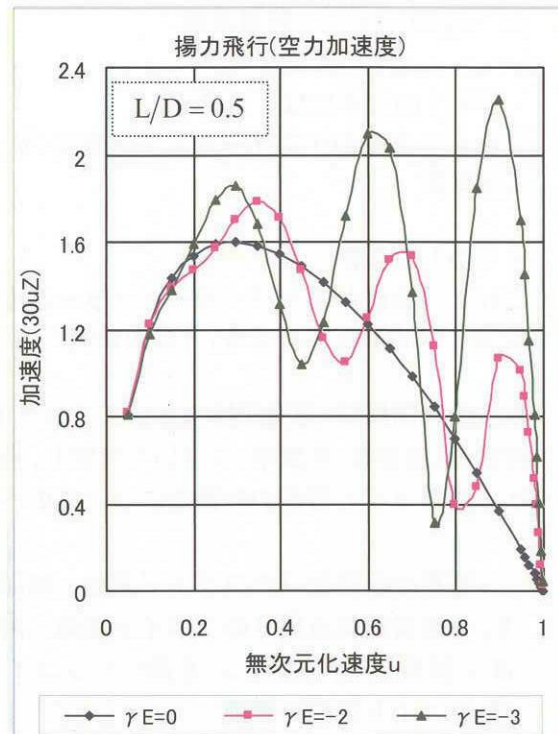
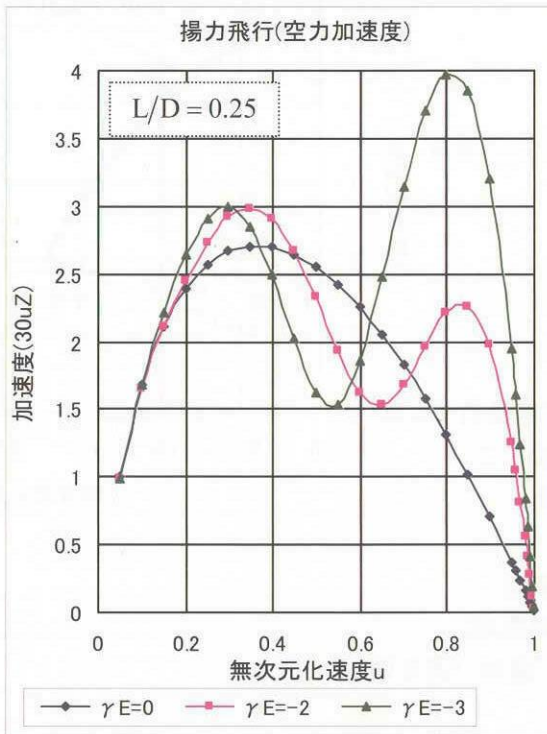
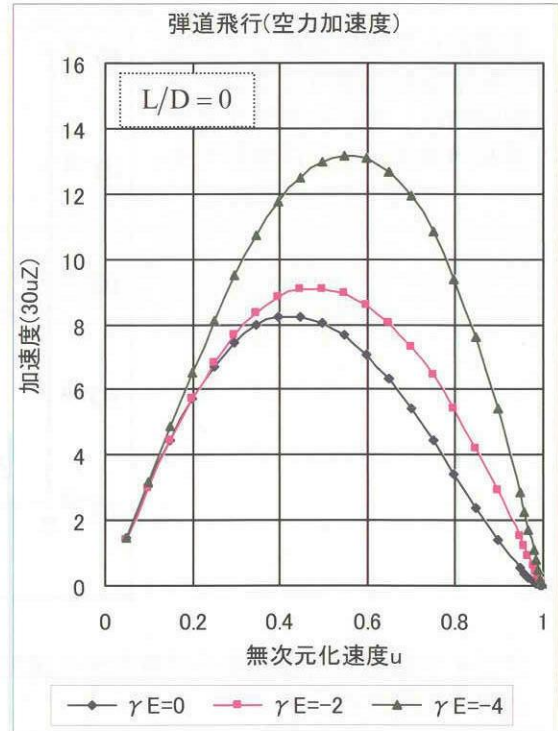
$$\gamma - \gamma_E = -\left(\frac{L}{D}\right) \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \quad (59)$$

また密度対速度は

$$\rho \cong 2\Delta\beta \ln\left(\frac{V}{V_E}\right) \left\{ \gamma_E - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{D}\right) \ln\left(\frac{V}{V_E}\right) \right\} \quad \text{または} \quad (60)$$

$\rho \cong -\frac{2\Delta\beta}{L/D} (\gamma^2 - \gamma_E^2)$ で表される。(一定経路角飛行参照)

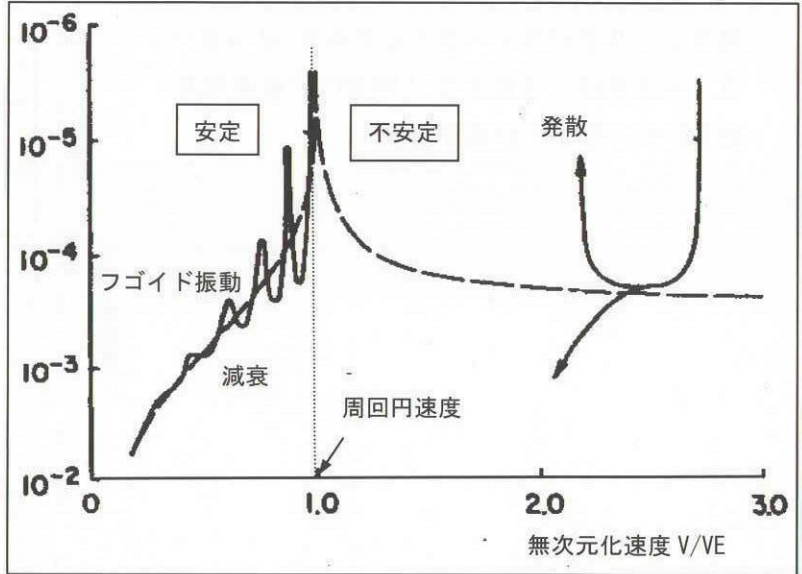
揚抗比 L/D をパラメータとして与え、インターフェース条件 γ_E を変えて、 Z 関数による運動方程式 (22) 式を解いた結果を示す。



7-9. フゴイド振動とその制動

揚力を持つ再突入宇宙機が円周速度で大気圏に突入するとき長周期の軌道振動が発生する。この長周期軌道振動をフゴイド運動(Phugoid Motion)と呼ぶ。フゴイド運動は機体の持つ位置エネルギーと速度エネルギーの交換により発生する。

右図から周回円速度以下では平衡滑空軌道周りにフゴイド振動軌道しながら減衰するが、周回円速度以上では発散する。



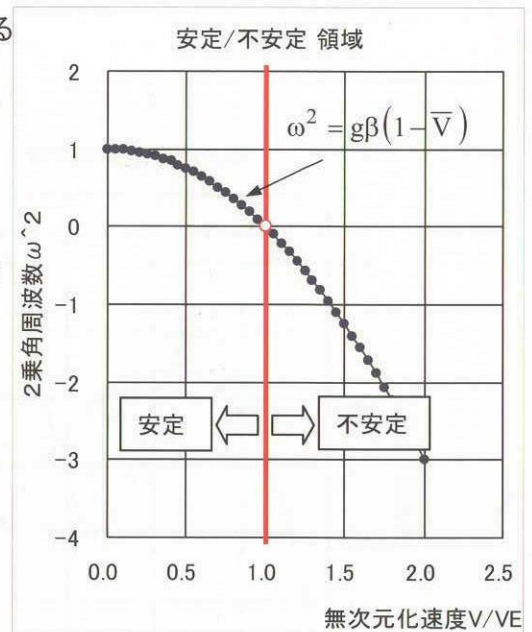
フゴイド振動の角振動数 ω は無次元化速度 \bar{V} を用いると次式で表される。

$$\omega^2 = g\beta(1 - \bar{V}^2) : \text{角周波数}$$

・ $\bar{V} < 1$ のときには $\omega^2 > 0$
 これより速度がサブサーキュラー速度 ($\bar{V} < 1$) の場合には安定

・ $\bar{V} > 1$ のときには $\omega^2 < 0$
 これより速度がスーパーサーキュラー速度 ($\bar{V} > 1$) の場合には不安定となる。(右図参照)

以下の時間領域, 速度領域においてフゴイド振動の特性(角周波数, 減衰率)について考察し, 最後にこれらのフゴイド振動の制動法についてのべる。



- (I) 等高度軌道周りのフゴイド運動 (時間領域)
- (II) 平衡滑空軌道周りのフゴイド運動 (時間領域)
- (III) Z関数(チャップマン)を用いたフゴイド運動 (速度領域)
- (IV) フゴイド振動の制動

(I) 等高度飛行軌道周りのフゴイド運動 (時間領域)

揚力を有する宇宙機の速度座標系運動方程式は次式で表される。

$$\frac{dh}{dt} - V \sin \gamma = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} - \frac{L}{mV} + \frac{g}{V} \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right) \cos \gamma = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{D}{m} + g \sin \gamma = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dS}{dt} - V \cos \gamma = 0 \quad (4)$$

次の仮定を設定する。経路角 γ とその変化率 $d\gamma/dt$ が微小。

- 仮定 1) $\gamma \ll 1$
 2) $d\gamma/dt \ll 1$

(1)-(3) 式の変分をとると

$$\frac{d\delta h}{dt} - (\sin \gamma) \delta V - (V \cos \gamma) \delta \gamma = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d\delta \gamma}{dt} + \left(\frac{\beta L}{mV} \right) \delta h - \left(\frac{L}{mV^2} + \frac{g \cos \gamma}{V^2} + \frac{\cos \gamma}{r} \right) \delta V - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \sin \gamma \delta \gamma = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d\delta V}{dt} - \left(\frac{\beta \rho V^2}{2\Delta} \right) \delta h + \left(\frac{\rho V}{\Delta} \right) \delta V + (g \cos \gamma) \delta \gamma = 0 \quad (8)$$

また次式が成り立つ。

$$\delta \rho = -\rho \beta \delta h \quad (9)$$

ここで仮定 1), 2) および抗力加速度の定義から

$$\cos \gamma \approx 1 \quad \sin \gamma \approx 0$$

$$\frac{L}{m} = g - \frac{V^2}{r}$$

$$\frac{\rho V}{\Delta} = \frac{2D}{V}$$

が成り立つ。(6)-(8) 式に代入すると

$$\delta \dot{h} - V \delta \gamma = 0 \quad (10)$$

$$\delta \dot{\gamma} + \frac{\beta L}{mV} \delta h - \frac{2g}{V^2} \delta V = 0 \quad (11)$$

$$\delta \dot{V} - \beta D \delta h + \frac{2D}{V} \delta V + g \delta \gamma = 0 \quad (12)$$

速度が一定 $v = v_0$ と仮定して (12) 式を無視して 速度を (10), (12) 式に代入すると

$$\frac{d\delta h}{dt} - v_0 \delta \gamma = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d\delta\gamma}{dt} + \frac{\beta L}{mV_0} \delta h = 0 \quad (14)$$

(13) 式を微分して(14)式を用いると次の2階微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2\delta\gamma}{dt^2} + \frac{\beta L}{m} \delta\gamma = 0 \quad (15)$$

ここで

$$\omega^2 = \beta L/m \quad (16)$$

と置けば $L/m = g - V^2/r$ から

$$\omega = \sqrt{\beta g \left(1 - \frac{V^2}{gr}\right)} : \text{角振動数} \quad (17)$$

上式から $V \leq \sqrt{gr}$ すなわち円周速度より小さい場合には安定(収束)し、 $V \geq \sqrt{gr}$ すなわち楕円軌道速度の場合には不安定(発散)となる。同様に高度に関して次式が得られる。

$$\frac{d^2\delta h}{dt^2} + \omega^2 \delta h = 0 \quad (18)$$

上式を解くと次式で表され、高度、経路角は単振動となる。

$$\delta h = A \cos\{\omega(t - t_0) + B\} \quad (19)$$

$$\delta\gamma = -A(\omega/V_0) \sin\{\omega(t - t_0) + B\} \quad (20)$$

A, B は積分定数

基準軌道の高度、経路角を $h_{\text{ref}}, \gamma_{\text{ref}}$ とすれば基準軌道の経路角 γ_{ref} は仮定1) から $\gamma_{\text{ref}} \approx 0$ また高度 h_{ref} は仮定2) $L/m = g - V^2/r$ から次に示すようにほぼ一定となる。

$$\frac{\rho_{\text{ref}}}{\rho_{\text{SL}}} = e^{-\beta h_{\text{ref}}} = \frac{1}{(L/D)} \frac{2g\Delta}{\rho_{\text{SL}} V_0^2} \left(1 - \frac{V_0^2}{gr}\right) \quad (21)$$

$$h_{\text{ref}} = -\frac{1}{\beta} \ln\left\{\frac{1}{(L/D)} \frac{2g\Delta}{\rho_{\text{SL}} V_0^2} \left(1 - \frac{V_0^2}{gr}\right)\right\} : \text{一定} \quad (22)$$

したがって速度一定近似における宇宙機の運動は次式で表される。

$$h = h_{\text{ref}} + A \cos\{\omega(t - t_0) + B\} \quad (23)$$

$$\gamma = -A(\omega/V_0) \sin\{\omega(t - t_0) + B\} \quad (24)$$

(17) 式から単振動の周期 P は次式で表される。

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta g \left(1 - \frac{V_0^2}{gr}\right)}} \quad (25)$$

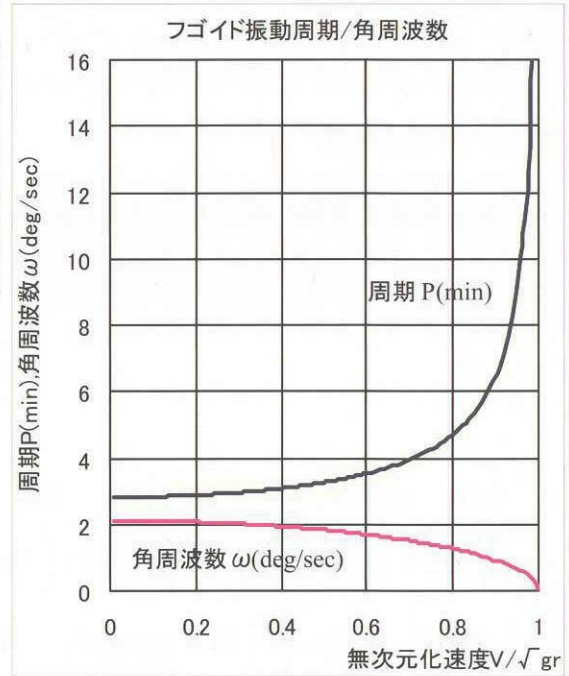
数値例：

下記値を定数として(25)式から周期Pを求めた結果を表-1に示す。

$$1/\beta = 7.224 \text{ Km} \quad 1/\sqrt{g\beta} = 27.141 \text{ sec}$$

表-1 フゴイド運動周期

速度比 V_0/\sqrt{gr}	周期 Psec (= min)
0.962 (= 7620m/sec)	622.6 (= 10.4 min)
0.769 (= 6096m/sec)	265.9 (= 4.4 min)
0.577 (= 4572m/sec)	208.1 (= 3.5 min)
0.385 (= 3048m/sec)	179.3 (= 3.0 min)
0.192 (= 1524m/sec)	173.2 (= 2.9 min)



別解)

経路角は微小と仮定すると高度変化率は次式で表される。

$$\frac{dh}{dt} = V\gamma$$

V一定と仮定し、上式を微分して $V(d\gamma/dt)$ を代入すると次式を得る

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = \left(\frac{C_L A}{m}\right) \frac{\rho V^2}{2} - g \left(1 - \frac{V^2}{gr}\right) \quad (26)$$

上式の変分をとると $C_L A \rho V^2 / 2m = L/m$, $\delta\rho = -\rho\beta \delta h$ から

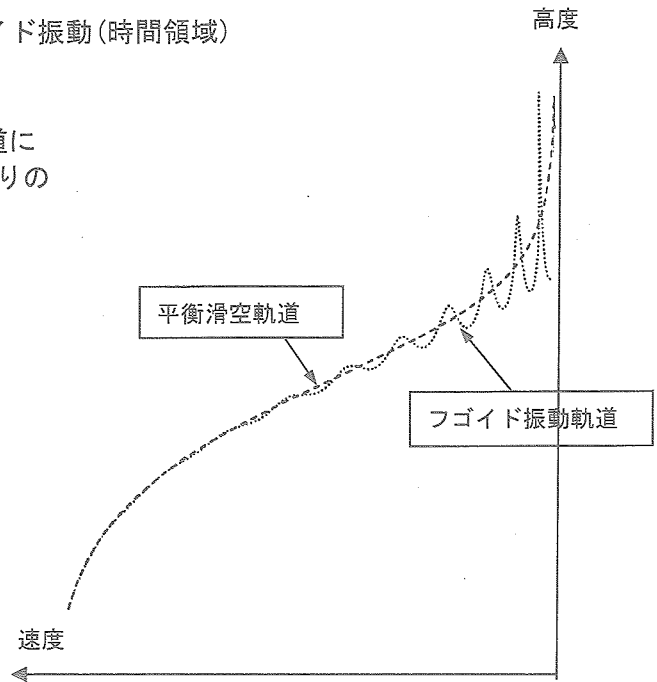
$$\frac{d^2 \delta h}{dt^2} = \frac{L}{m} \delta\rho = -\frac{\beta L}{m} \delta h \quad (27)$$

$$\frac{d^2 \delta h}{dt^2} + \frac{\beta L}{m} \delta h = 0 \quad (28)$$

(18)式と一致する。

(II) 平衡滑空軌道まわりの2次元フゴイド振動(時間領域)

前項では一定高度軌道周りのフゴイド軌道について記述した, 本項では平衡滑空軌道周りの2次元フゴイド振動軌道について述べる。



① 特性方程式

(6)-(8)式を時間に関してラプラス変換

$S = \delta(\) / \delta t$ を行うと

$$S \delta h - \sin \gamma \delta V - V \cos \gamma \delta \gamma = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\beta L}{V} \delta h - \left(\frac{L}{V^2} + \frac{g \cos \gamma}{V^2} + \frac{\cos \gamma}{r} \right) \delta V + \left(S + \frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \sin \gamma \delta \gamma = 0 \quad (30)$$

$$-\beta D \delta h + \left(S + \frac{2D}{V} \right) \delta V + g \cos \gamma \delta \gamma = 0 \quad (31)$$

(29)-(31)式を行列形式で表すと次式で表される。

$$\begin{bmatrix} S & -V \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \frac{\beta L}{V} & S - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \sin \gamma & -\frac{L}{V^2} - \frac{1}{V} \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \cos \gamma \\ -\beta D & S + \frac{2D}{V} & g \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h \\ \delta \gamma \\ \delta V \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

上記系は3次系でありその特性方程式はSの3次式となる。

(I)項との対応は速度一定の仮定から速度の変動を無視すれば(32)式の3行3列を取り除いて

$$\begin{bmatrix} S & -V \cos \gamma \\ \frac{\beta L}{mV} & S - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h \\ \delta \gamma \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

さらに(I)項では次の近似を行った。

$$\gamma, d\gamma/dt \ll 1, \quad \cos \gamma \approx 1 \\ \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \sin \gamma \approx \gamma L / mV \approx 0$$

これらの近似から上記特性方程式は次式で表されこれは(18)式と一致する。

$$S^2 + \beta L/m = 0 \quad (34)$$

(32)式に戻って、この特性方程式はSに関する次の3次式で表される。

$$\begin{aligned} & S^3 + S^2 \left\{ \frac{2D}{V} - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \sin \gamma \right\} \\ & + S \left[\left\{ \frac{L}{V^2} + \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \frac{\cos \gamma}{V} \right\} g \cos \gamma + \beta L \cos \gamma - \frac{2D}{V} \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \sin \gamma - \beta D \sin \gamma \right] \\ & + \left\{ \frac{L}{V} - \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \beta \cos \gamma \right\} \beta D \cos \gamma - \frac{\beta L}{V} g \cos \gamma \sin \gamma - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \beta D \sin^2 \gamma = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

上記(35)式の3次式の係数を

$$a_2 = \frac{2D}{V} - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \sin \gamma$$

(36)

$$a_1 = \left\{ \frac{L}{V^2} + \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \frac{\cos \gamma}{V} \right\} g \cos \gamma + \beta L \cos \gamma - \frac{2D}{V^2} \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \sin \gamma - \beta D \sin \gamma \quad (37)$$

$$a_0 = \left\{ \left(\frac{L}{V} \right) - \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \beta \cos \gamma \right\} \beta D \cos \gamma - \frac{\beta L}{V} g \cos \gamma \sin \gamma - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \beta D \sin^2 \gamma \quad (38)$$

と置けば次のように簡略化される。

$$S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + a_0 = 0 \quad (39)$$

ただし

$$a_2 \approx \frac{2D}{V} \quad (40)$$

$$a_1 = \left\{ \frac{L}{V} + \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \right\} \frac{g}{V} + \beta L \approx \beta L \quad (41)$$

$$a_0 = \left\{ \frac{L}{V} - \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \right\} \beta D \quad (42)$$

係数 a_0/a_1 , $a_2 - a_0/a_1$ を求めると次の通り。

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{L/D} \left\{ \frac{L}{V} - \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \right\} = \frac{D}{V} - \frac{1}{L/D} \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \quad (43)$$

$$a_2 - \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{L/D} \left\{ \frac{L}{V} + \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \right\} = \frac{D}{V} + \frac{1}{L/D} \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \quad (44)$$

ここで $|a_0/a_1|$ は非常に小さいから $|a_0/a_1| \ll 1$ と近似する

$$a_1 \approx a_1 + \frac{a_0}{a_1} \left(a_2 - \frac{a_0}{a_1} \right) \quad (45)$$

右辺第2項は微小項。この近似を用いて(44)式の3次方程式を次のように置き換える。

$$S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + a_0 \approx S^3 + a_2 S^2 + \left\{ a_1 + \frac{a_0}{a_1} \left(a_2 - \frac{a_0}{a_1} \right) \right\} S + a_0 \quad (46)$$

(46)式の右辺を因数分解して

$$\left(S + \frac{a_0}{a_1} \right) \left\{ S^2 + \left(a_2 - \frac{a_0}{a_1} \right) S + a_1 \right\} = 0 \quad (47)$$

ここで

$$\alpha = \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{L/D} \left\{ \frac{L}{mV} - \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \right\} \quad (48)$$

$$2\zeta\omega = a_2 - \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{L/D} \left\{ \frac{L}{mV} + \left(\frac{g}{V} + \frac{V}{r} \right) \right\} \quad (49)$$

$$\omega^2 = a_1 = \frac{\beta L}{m} = \beta \frac{C_L A}{2m} \rho V^2 \quad (50)$$

これより角周波数 ω 減衰係数 ζ は次式で表される。

$$\alpha = \left\{ \frac{L}{mg} - \left(1 + \frac{V^2}{gr} \right) \right\} \frac{g}{L/D} \frac{1}{V} \quad (51)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta L}{m}} \quad (52)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{L}{mg} + \left(1 + \frac{V^2}{gr} \right) \right\} \frac{1}{\sqrt{\beta L/m}} \frac{g}{L/D} \frac{1}{V} \quad (53)$$

と置くと特性方程式は次のようにならわされる。

$$(S + \alpha)(S^2 + 2\zeta\omega S + \omega^2) = 0 \quad (54)$$

左辺第1,2項の根は次式で表される。

$$S = -\alpha$$

$$S = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{1-\zeta^2} j$$

今 $\delta X = \delta h$, $\delta\gamma$, δV とおくと変動分の解は次式で与えられる。

減衰係数は $0 \leq \zeta \leq 1$, また α は負 $\alpha < 0$ であるから $e^{-\alpha t}$ は発散項であるが α は非常に小さいから $e^{-\alpha t} \approx 1$ で近似できる。

$$\delta X = Ce^{-\alpha t} + Ae^{-\zeta\omega t} \cos \left\{ \omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-t_0) + B \right\} \approx C + Ae^{-\zeta\omega t} \cos \left\{ \omega\sqrt{1-\zeta^2}(t-t_0) + B \right\} \quad (55)$$

平衡滑空軌道を基準としたフゴイド振動

平衡滑空軌道では仮定 2) $d\gamma/dt = L/V - (g/V - V/r) \ll 1$ と近似できるから前述のように揚力加速度は $L/m = g(1 - V^2/gr)$ で表される。(51) - (53)式に代入して

$$\alpha = \frac{a_0}{a_1} = -\frac{2}{L/D} \frac{V}{r} \quad (56)$$

$$2\xi\omega = a_2 - \frac{a_0}{a_1} = \frac{2}{L/D} \frac{g}{V} \quad (57)$$

従ってこの場合角周波数 ω 減衰係数 ζ は次式で表され角周波数 ω は(I)項の結果と同じである。

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta L}{m}} = \sqrt{\beta g (1 - V^2/gr)} \quad : \text{角周波数} \quad (58)$$

$$\zeta = \frac{1}{L/D} \frac{1}{\sqrt{\beta L/m}} \frac{g}{V} = \frac{1}{(L/D)\sqrt{\beta r}} \frac{1}{(V/\sqrt{gr})\sqrt{1 - V^2/gr}} \quad : \text{減衰率} \quad (59)$$

低速領域では $V^2/gr \ll 1$ と置くと

$$\zeta \approx \frac{1}{(L/D)\sqrt{\beta r}} \frac{1}{(V/\sqrt{gr})} \quad (60)$$

速度 V , 揚抗比に逆比例して減衰率が大きくなりフゴイド振動は急速に減衰する。

宇宙機の経路角, および経路角変化率が微小 γ , $d\gamma/dt \ll 1$ と仮定して運動方程式を解くと次の平衡滑空飛行軌道が得られる。(7-6. 項 平衡滑空軌道の項参照)

$$h_{\text{ref}} = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{2}{r} \frac{\Delta}{\rho_{\text{SL}} (L/D)} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \right\} \quad (61)$$

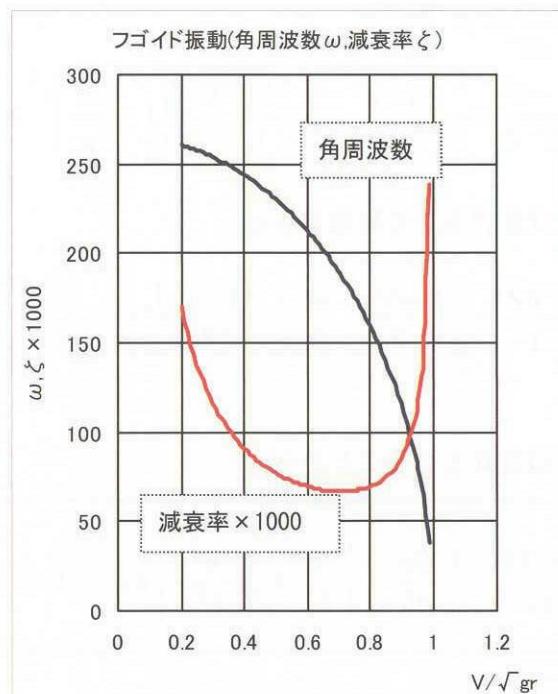
$$\gamma_{\text{ref}} = -\frac{1}{\beta r} \frac{2}{(L/D)} \frac{gr}{V^2} \quad (62)$$

これより平衡滑空飛行軌道周りのフゴイド振動軌道の高度, 経路角は次式で表される。

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{2}{r} \frac{\Delta}{\rho_{\text{SL}} (L/D)} \left(\frac{gr}{V^2} - 1 \right) \right\} + A \exp \left(-\frac{1}{L/D} \frac{g}{V} \right) \cos \left\{ \omega \sqrt{1 - \zeta^2} (t - t_0) + B \right\} + C \quad (63)$$

$$\gamma = -\frac{1}{\beta r} \frac{2}{(L/D)} \frac{gr}{V^2} + A' \exp \left(-\frac{1}{L/D} \frac{g}{V} \right) \cos \left\{ \omega \sqrt{1 - \zeta^2} (t - t_0) + B' \right\} + C' \quad (64)$$

$L/D = 1$ として(58)(59)式の時間領域での角周波数 ω , 減衰率 ζ を右図に示す。ただし減衰率は1000倍して図示した。



(Ⅲ) Z 関数 (チャップマン) を用いたフゴイド運動 (速度領域)

(Ⅰ)(Ⅱ)項では時間領域におけるフゴイド振動解析を行った。ここではチャップマンの Z 関数を用いて速度領域でのフゴイド振動解析を行う。

チャップマン (1959) は次の変数変換により

$$u = V \cos \gamma \quad : \text{水平方向速度} \quad (65)$$

$$\bar{u} = u / \sqrt{gr} \quad : \text{無次元化速度} \quad (66)$$

$$Z \equiv \frac{C_D A}{2m} \sqrt{\frac{r}{\beta}} \rho \bar{u} = \frac{\sqrt{r/\beta}}{2\Delta} \rho \bar{u} : \text{無次元化変数} \quad (67)$$

再突入宇宙機の運動方程式を 2 階の常微分方程式で表した。

$$u \frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} - \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) - \frac{(1-\bar{u}^2)}{\bar{u}Z} \cos^4 \gamma + \frac{L}{D} \sqrt{\beta r} \cos^3 \gamma = 0 \quad (68)$$

上式で左辺の 第 1 項は r 方向加速度 第 2 項は r 方向抗力加速度 第 3 項は重力と遠心力との差 第 4 項は揚力加速度を表す。

仮定 1) $\gamma \ll 1$ から $\cos \gamma \approx 1$ と置くと、運動方程式は次のようにあらわされる

$$\frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} - \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) - \frac{(1-\bar{u}^2)}{\bar{u}^2 Z} + \frac{\sqrt{\beta r} (L/D)}{\bar{u}} = 0 \quad (69)$$

いま揚抗比を一定として、基準軌道の Z を Z_{ref} 、基準軌道からの変動分を δZ と

$$Z = Z_{\text{ref}} + \delta Z \quad (70)$$

また基準軌道の Z の変化率に比べて変動分の変化率は十分小さいものとし次の近似を行う。

$$\frac{d^n Z_{\text{ref}}}{d\hat{u}^n} \gg \frac{d^n \delta Z}{d\hat{u}^n}$$

$$\frac{1-\hat{u}^2}{\hat{u}^2 Z} = \frac{1-\hat{u}^2}{\hat{u}^2 (Z_{\text{ref}} + \delta Z)} = \frac{(1-\hat{u}^2)}{\hat{u}^2 Z_{\text{ref}}} \left(1 + \frac{\delta Z}{Z_{\text{ref}}} \right)^{-1} \approx \frac{(1-\hat{u}^2)}{\hat{u}^2 Z_{\text{ref}}} \left(1 - \frac{\delta Z}{Z_{\text{ref}}} \right) = \frac{1-\hat{u}^2}{\hat{u}^2 Z_{\text{ref}}} - \frac{1-\hat{u}^2}{\hat{u}^2 Z_{\text{ref}}^2} \delta Z$$

上式を代入して整理すると

$$\frac{d^2 \delta Z}{d\hat{u}^2} - \frac{1}{\hat{u}} \left(\frac{d\delta Z}{d\hat{u}} - \frac{\delta Z}{\hat{u}} \right) - \frac{(1-\hat{u}^2)}{\hat{u}^2 Z_{\text{ref}}^2} \delta Z = - \left\{ \frac{d^2 Z}{d\hat{u}^2}_{\text{ref}} - \frac{1}{\hat{u}} \left(\frac{dZ}{d\hat{u}}_{\text{ref}} - \frac{Z_{\text{ref}}}{\hat{u}} \right) - \frac{(1-\hat{u}^2)}{\hat{u}^2 Z_{\text{ref}}} + \frac{\sqrt{\beta r} (L/D)}{\hat{u}} \right\} \quad (71)$$

右辺は 0 となることから

$$\frac{d^2 \delta Z}{d\hat{u}^2} - \frac{1}{\hat{u}} \frac{d\delta Z}{d\hat{u}} + \left\{ \frac{1}{\hat{u}^2} + \frac{1-\hat{u}^2}{\hat{u}^2 Z_{\text{ref}}^2} \right\} \delta Z = 0 \quad (72)$$

上式第3項で $(1-\hat{u}^2)/\hat{u}^2 Z_{\text{ref}}^2$ は密度の2乗に逆比例するから $1/\hat{u}^2$ に比べてはるかに大きいから

$$\frac{1}{\hat{u}^2} \ll \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}^2 Z_{\text{ref}}^2} = \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}^4} \frac{4\beta\Delta^2}{\rho^2 r}$$

$1/\hat{u}^2$ 項を無視すると次式を得る。

$$\frac{d^2\delta Z}{d\hat{u}^2} - \frac{1}{\hat{u}} \frac{d\delta Z}{d\hat{u}} + \frac{1-\hat{u}^2}{\hat{u}^2 Z_{\text{ref}}^2} \delta Z = 0 \quad (73)$$

ここで平衡滑空の条件, 仮定 1), 2) を用いると基準軌道の Z_{ref} は次式で表される。

$$Z_{\text{ref}} = \frac{1}{(L/D)\sqrt{\beta r}} \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}} \quad (74)$$

これを(72)式に代入すると

$$\frac{d^2\delta Z}{d\hat{u}^2} - \frac{1}{\hat{u}} \frac{d\delta Z}{d\hat{u}} + \frac{\beta r(L/D)^2}{1-\hat{u}^2} \delta Z = 0 \quad (75)$$

ここでラプラス変換を行う。 $S = -d(\)/d\hat{u}$ と置く。ここで $d\hat{u} < 0$ であるから一符号をつける。

このラプラス変換は独立変数が時刻 t ではなく \hat{u} であることに注意を要する。

$$\left\{ S + \frac{1}{\hat{u}} S + \frac{\beta r(L/D)^2}{1-\hat{u}^2} \right\} \delta Z = 0 \quad (76)$$

これより特性方程式は

$$S + \frac{1}{\hat{u}} S + \frac{\beta r(L/D)^2}{1-\hat{u}^2} = 0 \quad (77)$$

2次振動の基本形 $S^2 + 2\zeta\omega S + \omega^2 = 0$ と比較して

$$\omega^2 = \frac{\beta r(L/D)^2}{1-\hat{u}^2} \quad (78)$$

$$2\zeta\omega = 1/\hat{u} \quad (79)$$

これより速度領域での角周波数, 減衰係数は次式で表される。また経路角が微小と仮定しているから $\hat{u} \approx V/\sqrt{gr}$ と近似できる。また $\sqrt{\beta r}$ は定数で $\sqrt{\beta r} \approx 30$ である。

$$\omega = \frac{L}{D} \sqrt{\frac{\beta r}{1-\hat{u}^2}} \approx \frac{L}{D} \frac{\sqrt{\beta r}}{\sqrt{1-V^2/gr}} \quad (\text{rad/unit } \hat{u}) \quad (80)$$

$$\zeta = \frac{1}{2(L/D)\sqrt{\beta r}} \frac{\sqrt{1-\hat{u}^2}}{\hat{u}} \approx \frac{1}{2(L/D)\sqrt{\beta r}} \frac{\sqrt{1-V^2/gr}}{V/\sqrt{gr}} \quad (81)$$

$$\delta Z = Ae^{-\zeta\omega t} \cos \left\{ \omega \sqrt{1-\zeta^2} (\hat{u} - \hat{u}_0) + B \right\} \quad (82)$$

これより平衡滑空軌道まわりのフゴイド振動は Z_{ref} を加えて次式で表される。

$$Z = \frac{1}{(L/D)\sqrt{\beta r}} \frac{1-\hat{u}^2}{\hat{u}} + Ae^{-\zeta\omega t} \cos \left\{ \omega\sqrt{1-\zeta^2}(\hat{u}-\hat{u}_0) + B \right\} \quad (83)$$

また変数 Z をもとの物理量に戻して速度対密度(高度)を求めると次の通り。

$$\rho = \frac{2\Delta}{(L/D)r} \frac{1-\hat{u}^2}{\hat{u}^2} + \frac{2\Delta}{\hat{u}\sqrt{r/\beta}} Ae^{-\zeta\omega t} \cos \left\{ \omega\sqrt{1-\zeta^2}(\hat{u}-\hat{u}_0) + B \right\} \quad (84)$$

Z 変換では経路角は次式で表される

$$\sqrt{\beta r} \sin \gamma = \left(\frac{dZ}{d\hat{u}} - \frac{Z}{\hat{u}} \right) \quad (85)$$

ここで $\gamma \rightarrow (\gamma + \delta\gamma)$ $Z \rightarrow (Z + \delta Z)$ を代入し $\delta\gamma$ 微小と近似する。 $d\delta Z/d\hat{u}$ 、 $\delta Z/\hat{u}$ を求めて代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\beta r}} \left(\frac{d\delta Z}{d\hat{u}} - \frac{\delta Z}{\hat{u}} \right) \quad (86) \\ &= \frac{Ae^{-\zeta\omega\hat{u}}}{\sqrt{\beta r}} \left[\left(\zeta\omega - \frac{1}{\hat{u}} \right) \cos \left\{ \omega\sqrt{1-\zeta^2}(\hat{u}-\hat{u}_0) + B \right\} - \omega\sqrt{1-\zeta^2} \sin \left\{ \omega\sqrt{1-\zeta^2}(\hat{u}-\hat{u}_0) + B \right\} \right] \quad (87) \end{aligned}$$

平衡滑空軌道では経路角は次式で表される。

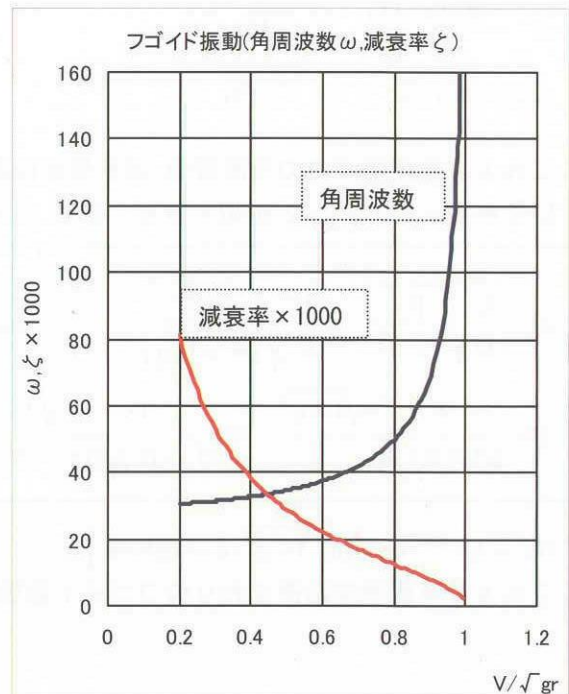
$$\sqrt{\beta r} \sin \gamma_{\text{ref}} = -\frac{2}{(L/D)\sqrt{\beta r}} \frac{1}{\bar{u}^2} \quad (88)$$

$$\gamma_{\text{ref}} \approx -\frac{2}{(L/D)\beta r} \frac{1}{\bar{u}^2} \quad (89)$$

以上から平衡滑空軌道周りのフゴイド振動運動は

$$\gamma = \gamma_{\text{ref}} + \frac{Ae^{-\zeta\omega\hat{u}}}{\sqrt{\beta r}} \left[\left(\zeta\omega - \frac{1}{\hat{u}} \right) \cos \left\{ \omega\sqrt{1-\zeta^2}(\hat{u}-\hat{u}_0) + B \right\} - \omega\sqrt{1-\zeta^2} \sin \left\{ \omega\sqrt{1-\zeta^2}(\hat{u}-\hat{u}_0) + B \right\} \right] \quad (90)$$

$L/D=1$ として (80) (81) 式の数値領域での角周波数 ω 、減衰率 ζ を図-1 に示す。ただし減衰率は 1000 倍して図示した。



(IV) フゴイド振動の制動

(I)-(III)項に揚力を持つ宇宙機の本ゴイド振動の概要, 固有振動数, 減衰率について記述したが, この長周期振動は軌道としては好ましくないので, この振動を制動する方法について述べる。ここでは迎角のモジュレーションにより行うこととする。

2次元速度座標での運動方程式は次の通り。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma = -\frac{C_D A}{2m} \rho V^2 - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma \quad (1)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{mV} + \frac{1}{V} \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma = \frac{C_L A}{2m} \rho V + \left(\frac{V}{r} - \frac{\mu}{r^2 V} \right) \cos \gamma \quad (2)$$

また高度変化率は次式で表される。

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (3)$$

高度変化率(3)式を微分して

$$\dot{h} = \dot{V} \sin \gamma + V \dot{\gamma} \cos \gamma$$

(1)(2)式を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{h} &= \left\{ -\frac{C_D A}{2m} \rho V^2 - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma \right\} \sin \gamma + \left\{ \frac{C_L A}{2m} \rho V + \left(\frac{V}{r} - \frac{\mu}{r^2 V} \right) \cos \gamma \right\} V \cos \gamma \\ &\text{より} \\ -C_D \sin \gamma + C_L \cos \gamma &= \frac{1}{(A/m)(\rho V^2/2)} \left\{ \frac{\mu}{r^2} \sin^2 \gamma - \left(\frac{V^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} \right) \cos^2 \gamma + \ddot{h} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

ここで空力係数は迎角の関数として次式で与える。

$$C_L = C_{L0} \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (5)$$

$$C_D = C_{D0} + C_{DL} \sin^3 \alpha \quad (6)$$

いま要求振動数, 減衰率 ω_n, ζ として好ましい軌道を次式で与える。

$$\ddot{h} + 2\zeta\omega_n \dot{h} + (h - h_H)\omega_n^2 = 0 \quad (7)$$

(4)式に代入して次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} &\sin^2 \alpha (-C_{DL} \sin \alpha \sin \gamma + C_{L0} \cos \alpha \cos \gamma) \\ &= \frac{2m}{A\rho V^2} \left\{ \frac{\mu}{r^2} - \frac{V^2}{r} \cos^2 \gamma - 2\zeta\omega_n V \sin \gamma - (h - h_H)\omega_n^2 \right\} + C_{D0} \sin \gamma \quad (8) \end{aligned}$$

上式迎角 α に関する代数方程式であるから, これを逐次近似法で解いて迎角 α を求めればよい。 α が大きい場合と小さい場合で若干簡易になる。計算フローと振動制動例を以下に示す。

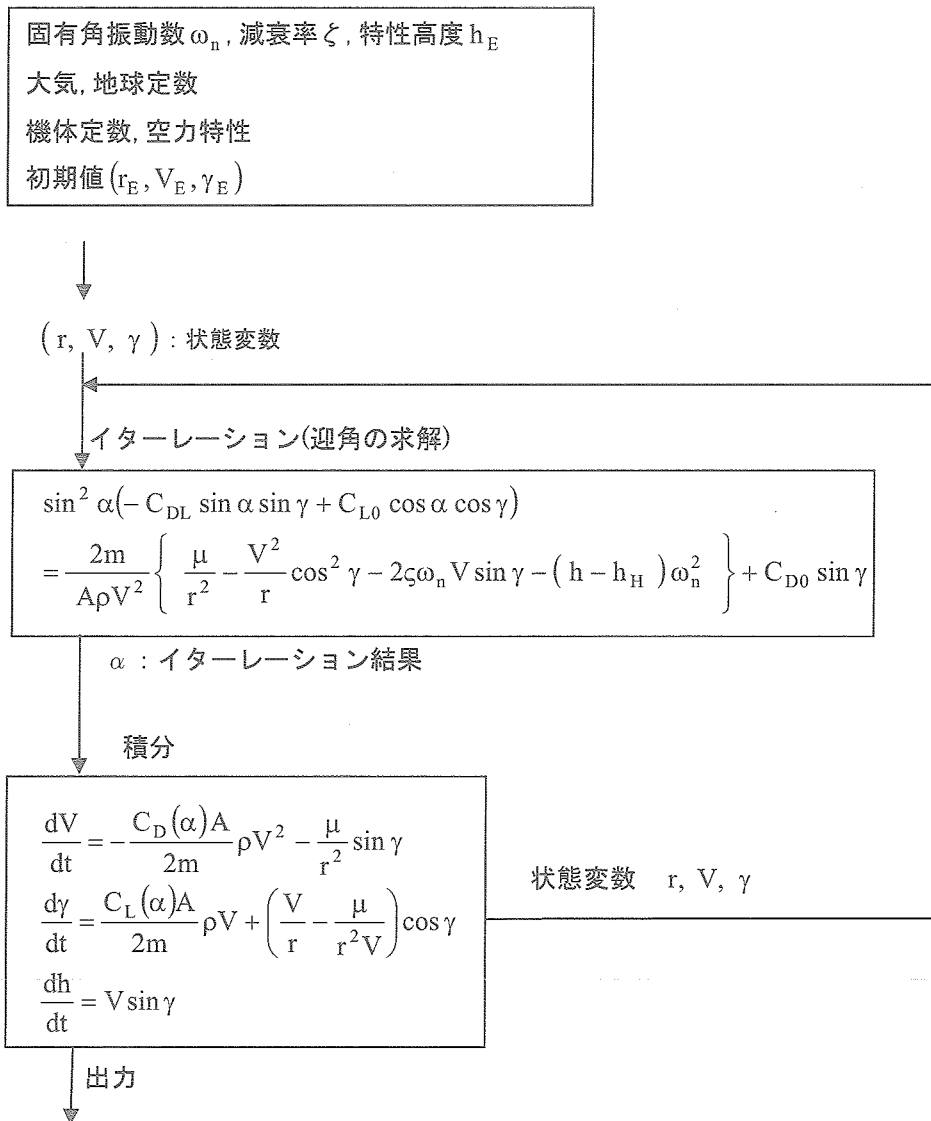
α が大きい場合

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \left(C_{L0} \sin^2 \alpha \cos \gamma \right) \\ &= \frac{2m}{A\rho V^2} \left\{ \frac{\mu}{r^2} - \frac{V^2}{r} \cos^2 \gamma - 2\zeta\omega_n V \sin \gamma - (h - h_H) \omega_n^2 \right\} + (C_{D0} + C_{DL} \sin^3 \alpha) \sin \gamma \end{aligned}$$

α が小さい場合

$$\begin{aligned} & \sin^2 \alpha \left(-C_{DL} \sin \alpha \sin \gamma + C_{L0} \cos \alpha \cos \gamma \right) \\ &= \frac{2m}{A\rho V^2} \left\{ \frac{\mu}{r^2} - \frac{V^2}{r} \cos^2 \gamma - 2\zeta\omega_n V \sin \gamma - (h - h_H) \omega_n^2 \right\} + C_{D0} \sin \gamma \end{aligned}$$

解法フロー

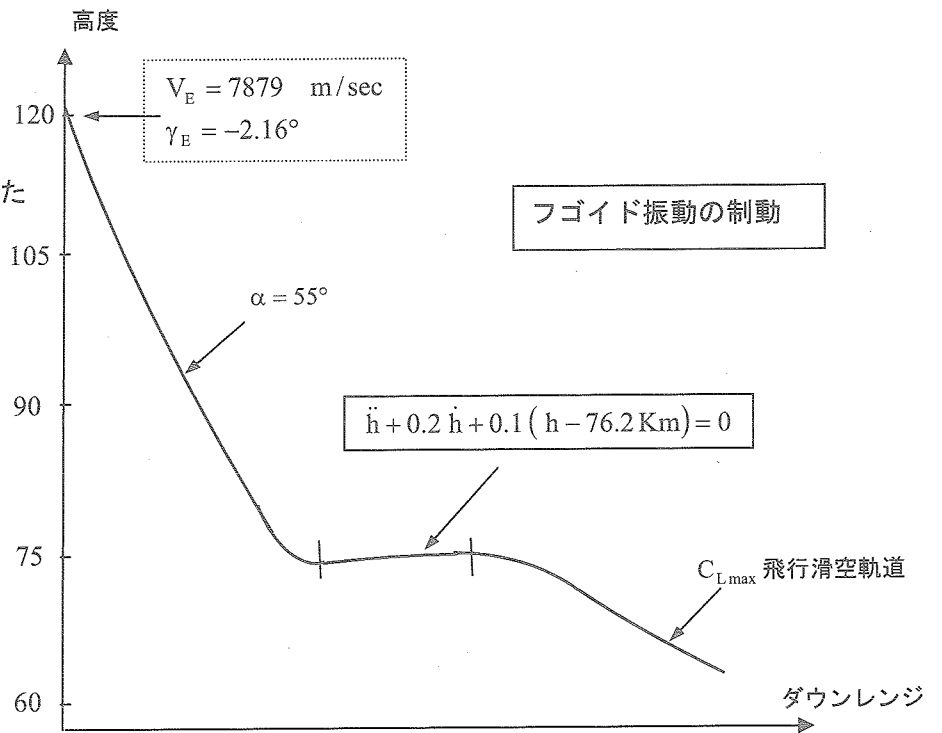


インターフェース高度 $h_E = 120$ Km から迎角を 55° (最大揚力係数 54.7° となる迎角) で一定揚抗比 L/D の飛行を行い, $h_H = 76.2$ Km で高度角周波数と減衰率を要求値を

$\omega_n^2 = 0.1$
 $2\omega_n\zeta = 0.2$

としたとき,

フゴイド振動を制動させた軌道例を右図に示す。



第7項の参考文献

- 1) Alfred J. Eggers, Jr., H. Julian Allen, and Stanford E. Neice "A Comparative Analysis of The Performance of Long-Range Hypervelocity Vehicles" NACA TN 4046 October 1957
- 2) Michael E. Tauber and Lily Yang "Performance Comparisons of Maneuvering Vehicles Returning from Orbit" J. Spacecraft VOL. 25, NO. 4, July-August 1988
- 3) H. Julian Allen and A. J. Eggers, Jr. "A Study of The Motion and Aerodynamic Heating of Ballistic Missiles Entering The Earths Atmosphere At HighSupersonic Speeds" Report 1381 1958
- 4) Alfred J. Eggers, Jr., H. Julian Allen, and Stanford E. Neice "Acomparative Analysis of The Performance of Long-Range Hypervelocity Vehicles" NACA TN 4046 October 1957
- 5) H. Julian Allen and A. J. Eggers, Jr. "A Study of The Motion and Aerodynamic Heating of Missiles Entering The Earths Atmosphere at High Supersonic Speeds" NACA TN 4047 October 1957
- 6) Michael E. Tauber and Lily Yang "Performance Comparisons of Maneuvering Vehicles Returning from Orbit" J. Spacecraft VOL. 25, NO. 4, July-August 1988
Donald S. Mandell "Maneuvering Performanse of Lifting Re-entry Vehicles" ARS Journal March 1962
- 7) Paul D. Arthur and Hans K. Karrenberg "Atmospheric Entry with Small L/D" Journal of the Aerospace Sciences April 1961 351-352
- 8) Lester Lees, Frederic W. Hartwig and Clarence B. Cohen "Use of Aerodynamic Lift DuringEntry into the Earths Atmosphere" ARS Journal September 1959 633-641
Kenneth Wang and Lu Ting "An Approximate Analytic Solution of Re-Entry Trajectory With Aerodynamic Forces" ARS Journal June 1960 565-566
- 9) Lees, L., Hartwig, F. W. and Cohen, C. B., "The Use of Aerodynamic Lift During Entry Into the Earths Atmosphere" ARS Journal, vol29, no.2, Sept., 1959, 633-641
- 10) Alfred J. Eggers, Jr., Thomas. J. Wong "Motion and Heating of Lifting Vehicles DuringAtmosphere Entry" ARS Journal October 1961 1364-1375
- 11) S. J. Citron and T. C. Meir "An Analiytic Solution for Entry into Planetary Atmosheres" AIAAJournal VOL. 3, NO. 3 March 1965 470-475
- 12) W. H. T. Loh "Extension of Second-Order Theory of Entry Mechanics to Oscillatory Entry Solutions" AIAA Journal VOL. 3, NO. 9, September, 1965 1688-1691
- 13) W. H. T. Loh "Extension of the Second-Order Theory of Entry Mechanics to Nearly Exact

- Solutions” AIAA Journal VOL. 5, NO.10, October, 1967 1823-1827
- 14) Alfred J. Eggers, Jr. “The Possibility of a Safe Landing” Space Technology, Edited By H. S. Seifert, Wiley New York, 1959, Chapter 13. [*]
- 15) W. H. T. Loh “Hypervelocity Vehicles at Large Angles of Inclination” ARS Journal February 1959, 522-523
- 16) W. H. T. Loh “Hypervelocity Glider at Large Angles of Inclination” ARS Journal February 1960, 201-202
- 17) W. H. T. Loh “Dynamics and Thermodynamics of Re-Entry” Journal of the Aerospace Science October 1960, 748-762
- 18) W. H. T. Loh “Orbital Re-Entry at Small Lift-Drag Ratio Small Inclination” ARS Journal May 1962, 779
- 19) W. H. T. Loh “A Second-Order Theory of Entry Mechanics Into a Planetary Atmosphere” Journal of the Aerospace Science October 1962, 1210-1221
- 20) W. H. T. Loh “Extension of Second-Order Theory of Entry Mechanics to Oscillatory Entry Solutions” AIAA Journal VOL. 3, NO. 9, September, 1965 1688-1691
- 21) Michael E. Tauber and Lily Yang “Performance Comparisons of Maneuvering Vehicles Returning from Orbit” J. Spacecraft VOL. 25 NO. 4, July-August 1988, 263-270
- 22) W. Scott Jackson “An Improved Method for Determining the Lateral Range of a Gliding Entry Vehicle” Journal of the Aerospace Sciences November 1961 910-911
- 23) W. Scott Jackson “Special Solution to the Equations of Motion for Maneuvering Entry” Journal of the Aerospace Sciences, February 1962, 236
- 24) Howard S. London “Change of Satellite Orbit Plane by Aerodynamic Maneuvering” Journal of the Aerospace Sciences, March 1962, 323-332
- 25) Howard S. London “Comments on Aerodynamic Plane Change” AIAA Journal VOL. 1, NO. 10, October 1963 2414-2415
- 26) Paul D. Arther and Bruce E. Baxter “Observations on Minor Circle Turns” AIAA Journal VOL. 1, NO. 10, October 1963 2408-2410
- 27) H. E. Wang and R. S. Skulsky “Characteristics of Lateral Range during Constant-Altitude Glide” AIAA Journal VOL. 1, NO. 3, March 1963 703-704
- 28) H. E. Wang “Motion of Re-Entry Vehicles during Constant-Altitude Glide” AIAA Journal VOL. 3, NO. 7, July 1965 1346-1348
- 29) Dean R. Chapman “An Approximate Method for Studying Entry into Planetary Atmospheres” NACA TN 4276 1958, NASA TR R-11 1959
- 30) Dean R. Chapman and Arline K. Kaphan “Table of Z Functions for Atmosphere Entry Analyses” NASA TR R-106 1961

- 31) George C. "Orbital Flight Hand Book" Space Flight Handbooks Volume 1 Part 2. Mission Sequencing Problems NASA N63-21102 1963
- 32) Raymond W. Wolverton "Flight Performance Handbook for Orbital Operations" Vehicles Design Considerations for Atmospheric Entry 6.4 Planetary Entry and Controlled Descent
- 33) 森英彦 "ジェミニ型カプセル飛しょう体の回収における軌道とダイナミックス" 航空宇宙技術研究報告 TR-651 (1981)
- 34) Rodney C. Wingrove "Flight Dynamics of Planetary Entry" AAS Science and Technology Series Volume 9, Recent Developments in Space Flight Mechanics
- 35) Raymond Morth and Jason L. Speyer "Divergence From Equilibrium Guide Path at Supersatellite Velocities" ARS Journal March 1961, 448-450
- 36) Nguyen X. Vinh, Vincent T. Coppola and L. de-Oive Ferreira "Phugoid Motion for Grazing-Entry Trajectories at Near-Circular Speeds" Journal of Spacecraft and Rockets VOL. 33, NO. 2, March-April 1996 206-213
- 37) David J. South "Real-Time Optimal Guidance with Application to Lifting Re-Entry Vehicles" Air Force Institute of Technology (AFITese) Wright-Patterson AFB, Ohio AD-774444 December 1972

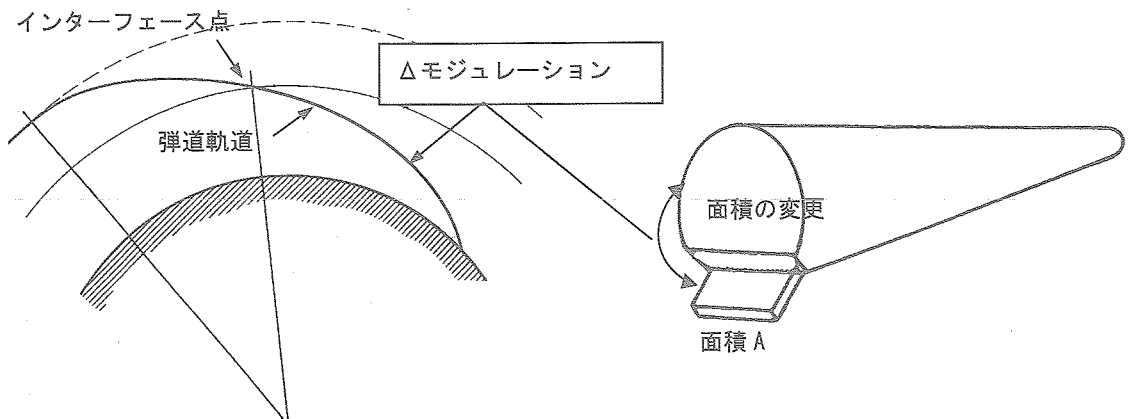
8. 再突入宇宙機の軌道制御

軌道制御について述べる。ここで言う軌道制御とは、飛行パラメータに一定の拘束を課し、この拘束に従って飛行するように軌道を制御することを言う。一定の拘束とは、例えば機体に加わる空力荷重や空力加熱率が一定になるような拘束、あるいは高度変化率や経路角が一定になるような拘束等がある。このようにある拘束に従って軌道を制御する場合、揚抗比 L/D はもはや一定では飛行できず、揚抗比 L/D は可変としなければ実現できない。この可変揚抗比 L/D を要求揚抗比 $(L/D)_C$ と称する。軌道制御は次のように適用される。

機体の特性値である弾道係数 $m/C_D A$ 、揚抗比 L/D を既知とする。宇宙機の再突入時飛行パラメータ高度 h_E 、速度 V_E 、経路角 γ_E とすると揚抗比 L/D 一定で再突入した場合には、突入後に遭遇する最大空力荷重、最大空力加熱率と発生時点の高度、速度はあらかじめ予測できる。この最大空力荷重、最大空力加熱率が許容値を超える場合には、これらが最大となる前に、揚抗比 L/D を連続的に変更して空力荷重や空力加熱率が一定 (< 許容値) の軌道を飛行させ、エネルギーが十分消散した時点で再び揚抗比 L/D 一定の飛行、例えば平衡滑空飛行に戻す。また再突入時の速度が周回円軌道より大きい場合 (スーパーサーキュラー速度) には揚抗比 L/D や再突入時飛行パラメータによっては、再び大気圏外に出る (スキップアウト) 場合があり、スキップアウトが予測される場合には揚抗比 L/D を連続的に変更して高度変化率、経路角が一定の軌道を飛行させ、エネルギーが消散した時点で再び揚抗比 L/D 一定の飛行を行う。

8-1. 弾道飛行の軌道制御

弾道飛行の場合制御パラメータは限られており弾道係数しかないので、この弾道係数を次のように変更した場合について解析を行う。弾道係数は $\Delta = m/C_D A$ で定義されるが質量の変化がないものとするれば弾道係数を変化させるためには図のように面積を可変として制御する方法が考えられる。以下機体面積を不連続、あるいは連続的に変化させて軌道制御を行う場合について記述する。



(A) 弾道係数の不連続変更(ディスクリット・モジュレーション)

弾道係数 $\Delta = m/C_D A$ の機体特性をもつ宇宙機が零揚力の場合、弾道軌道開始条件を密度(高度) ρ_c 、初期速度 V_c 、経路角 γ_c とした時の解析結果は次の通り。直線弾道飛行の場合(6-1章参照)、経路角は一定で

$$\gamma = \gamma_c \quad (1)$$

また、弾道パラメータは、

$$a = -1/2\Delta\beta\sin\gamma_c > 0 \quad (2)$$

となる。このとき、空力荷重は次式で表される。(直線弾道飛行の項参照)

空力荷重：

$$G = \frac{V_c^2}{2\Delta} \rho \exp\{-2a(\rho - \rho_c)\} = \frac{V_c^2}{2\Delta} \rho \exp\left(\frac{\rho - \rho_c}{\Delta\beta\sin\gamma_c}\right) \quad (3)$$

最大空力荷重：

$$G_{\max} = -\frac{V_c^2 \beta \sin\gamma_c}{2} \exp(-1 + 2a\rho_c) = -\frac{V_c^2 \beta \sin\gamma_c}{2e} \exp\left(-\frac{\rho_c}{\Delta\beta\sin\gamma_c}\right) \quad (4)$$

$$\rho_{\max} = 1/2a \quad (5)$$

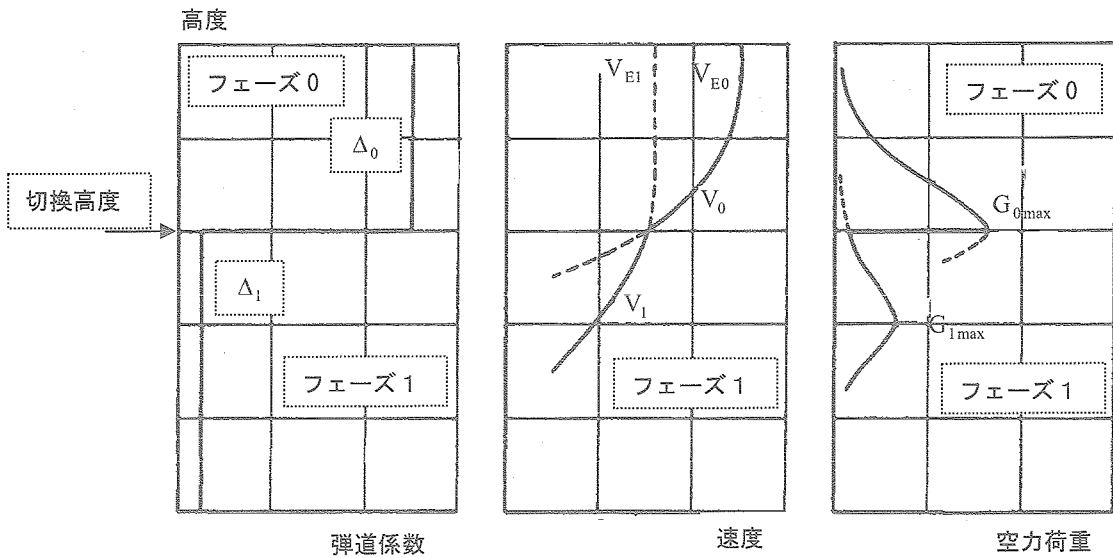
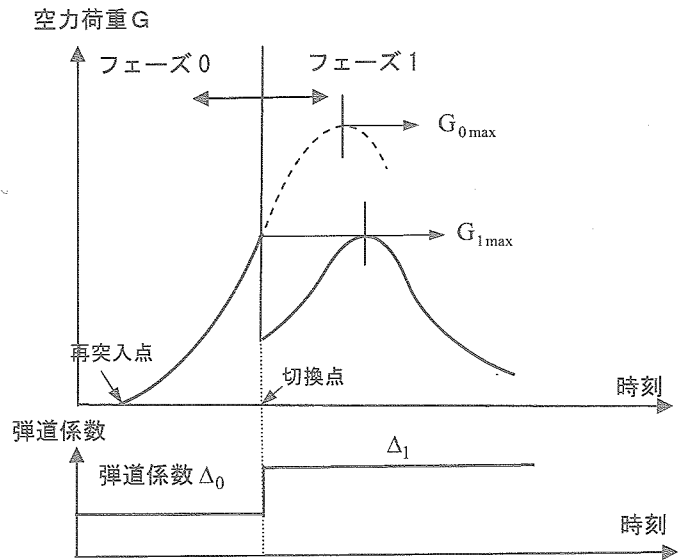
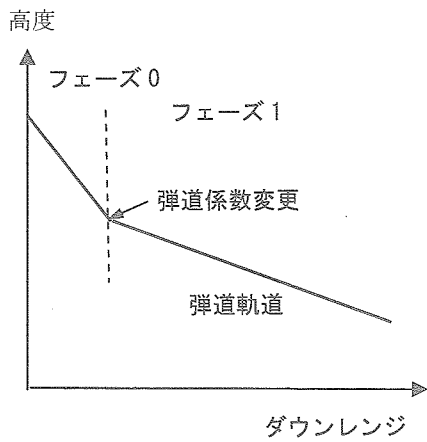
$$V_{\max}/V_c = \exp(-1/2 + a\rho_c) \quad (6)$$

再突入高度が大きい場合には ρ_c は非常に小さく、(1)-(6)式で ρ_c を含む項は無視される。弾道飛行開始時点が低高度の場合、密度は指数関数的に大きくなることから無視できなくなる。

空力荷重は $G = \rho V^2/2\Delta$ で定義され、弾道係数 Δ に逆比例する。これより弾道軌道で空力荷重を軽減させるには弾道係数 Δ を大きくすればよい。また弾道係数は $\Delta = m/C_D A$ で表されるから、質量 m 、抗力係数 C_D が一定の場合には弾道係数 Δ を大きくするには、基準面積 A を増加させる必要がある。飛行の途中で弾道係数 $\Delta = m/C_D A$ を不連続に変更する場合について考察する。

弾道係数 Δ の変更前をフェーズ0、変更後をフェーズ1に分割する。

- ①フェーズ0 弾道軌道
- ②フェーズ1 弾道軌道



① フェーズ0 弾道軌道

周回円軌道からの再突入弾道軌道とし添字を C から E に変更する。初期条件 ρ_E, V_E 弾道係数を Δ_0 、弾道パラメータを a_0 とすると前述の結果から初期密度 ρ_E の項は無視できて

速度/高度：

$$V = V_E \exp(-a_0 \rho) \tag{7}$$

空力荷重/最大空力荷重：

$$G_0 = \frac{V_E^2}{2\Delta_0} \rho \exp(-2a_0 \rho) \tag{8}$$

$$G_{0max} = \frac{V_E^2}{4a_0 \Delta_0 e} = -\frac{V_E^2 \beta \sin \gamma_E}{2e} \tag{9}$$

最大空力荷重 $G_{0\max}$ は機体形状によらず、突入条件 V_E, γ_E により予測できるから、予め $G_{0\max}$ が許容値 G_{LMT} を超える ($G_{0\max} > G_{LMT}$) ことが明らかな場合には飛行の途中で弾道係数 Δ を変更する。

いまフェーズ 0 の飛行中の任意の時点、但し空力荷重が最大値となる前に弾道係数を $\Delta_0 \rightarrow \Delta_1 (\geq \Delta_0)$ ディスクリートに変更するものとし、フェーズ 0 の終了状態を添字 0*, フェーズ 1 の開始状態を添字 *1 とする。変更の前時で軌道の不連続はないので密度(高度)速度は等しく次式で表される。

$$\begin{aligned} \rho_{0*} = \rho_{*1} &\equiv \rho_c \\ V_{0*} = V_{*1} &\equiv V_c \end{aligned} \quad (10)$$

フェーズ 0 終了時の空力荷重は次式で表され、これを G_m とする。また弾道係数を変更しない場合の最大値との比は次の通り。

$$G_{0*} = \frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta_0} = \frac{V_E^2}{2\Delta_0} \rho_c \exp(-2a_0 \rho_c) \equiv G_m \quad (11)$$

$$\frac{G_m}{G_{0\max}} = 2a_0 e^{-2a_0 \rho_c} \quad (12)$$

G_m があたえられると

$$\rho_c \exp(-2a_0 \rho_c) = (G_m / G_{0\max}) / 2a_0 e \quad (13)$$

を逐次近似法により解くことにより変更時の密度 ρ_c (高度 h_c) が得られる。また変更時の速度 V_c は(7)式から

$$\frac{V_c}{V_E} = \exp(-a_0 \rho_c) \quad (14)$$

② フェーズ 1 弾道軌道

初期条件を ρ_c, V_c とし、弾道係数が Δ_1 の、弾道飛行を考える。

$$a_1 \equiv -\frac{1}{2\Delta_1 \beta \sin \gamma_c} \quad (15)$$

密度対速度：

$$\frac{V}{V_c} = \exp\{-a_1(\rho - \rho_c)\} \quad (16)$$

空力荷重/最大空力荷重：

フェーズ1 開始時の空力荷重とフェーズ1での最大値は次式で表される。

$$G_1 = \frac{V_c^2}{2\Delta_1} \rho \exp\{-2a_1(\rho - \rho_c)\} \quad (17)$$

$$G_{1\max} = \frac{V_c^2}{4\Delta_1 a_1} \exp(-1 + 2a_1 \rho_c) = -\frac{V_c^2 \beta \sin \gamma_E}{2} \exp(-1 + 2a_1 \rho_c) \quad (18)$$

弾道係数, 切換え直後の空力荷重は

$$\frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta_0} \rightarrow \frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta_1} \quad (19)$$

と不連続に減少する。弾道係数変更後の空力荷重は $\rho_c V_c^2 / 2\Delta_1$ を初期値として再び増加するがその最大値は $\Delta_0 < \Delta_1$ であれば変更前の空力荷重最大値を超えることは無い。

③ 最適切換え条件

フェーズ1での空力荷重の最大値が変更時の空力荷重を越えないように次の条件を設定する。

$$G_m = G_{1\max} \quad (20)$$

(11), (18)式から

$$\frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta_0} = \frac{V_c^2}{4\Delta_1 a_1} \exp(-1 + 2a_1 \rho_c) \quad (21)$$

ここで

$$\lambda_1 = -\frac{\rho_c}{\Delta \beta \sin \gamma_E} = 2a_1 \rho_c$$

と置けば, 上記関係式は以下のとおり。

$$\boxed{\frac{\Delta_1}{\Delta_0} = \frac{\exp(\lambda_1 - 1)}{\lambda_1}} \quad (22)$$

左辺は弾道係数の比で定数である。 Δ_1 / Δ_0 を変化させながら(22)式を逐次近似法(ニュートン-ラフソン法等)で求めると λ_1 は Δ_1 / Δ_0 の関数で表される。 λ_1 が求まると変更時点の密度(高度)は $\rho_a = \lambda_1 / 2a_1$ で得られる。

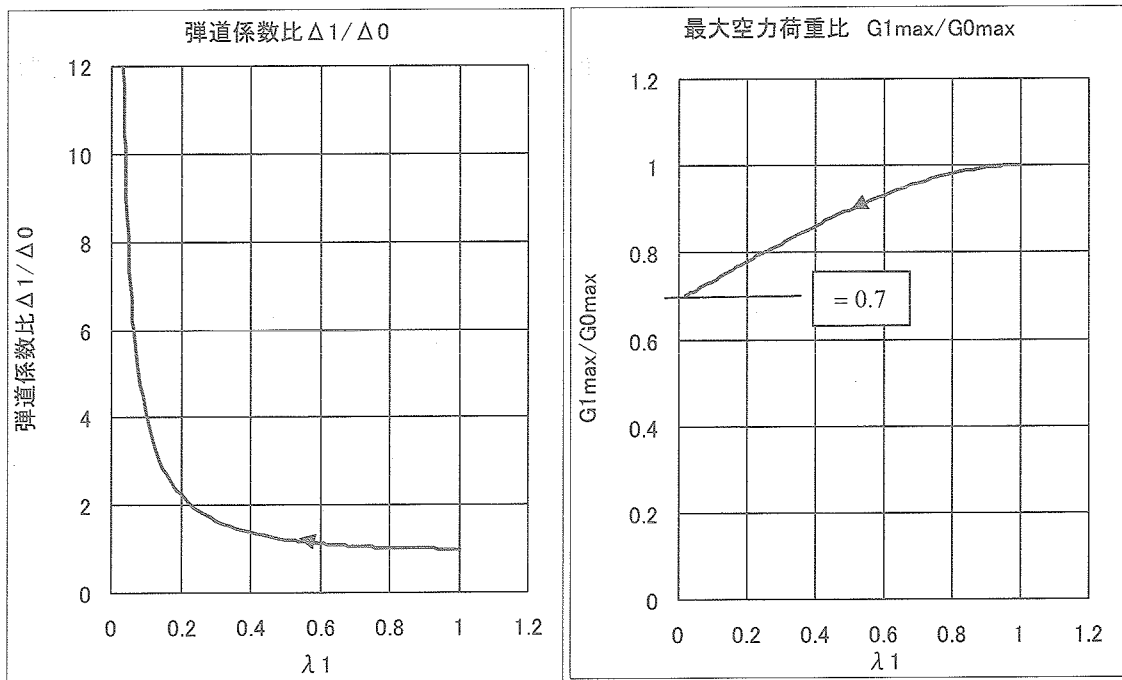
$$\frac{G_{1\max}}{G_{0\max}} = \left(\frac{V_C}{V_E} \right)^2 e^{\exp(-1 + 2a_1 \rho_c)}$$

(14), (20) 式を代入して

$$\frac{G_m}{G_{0\max}} = \frac{G_{1\max}}{G_{0\max}} = \exp \left\{ 2\rho_c a_1 \left(1 - \frac{a_0}{a_1} \right) \right\} = \exp \left\{ \lambda_1 \left(1 - \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \right) \right\} = \exp \{ \lambda_1 - \exp(\lambda_1 - 1) \} \quad (23)$$

これより $G_m/G_{0\max}$ も Δ_1/Δ_0 の関数で表される。

以下の表に示すように、逐次近似解の結果 Δ_1/Δ_0 の増加とともに λ_1 は減少していくが、 $G_m/G_{0\max}$ は指数関数の内容が λ_1 と Δ_1/Δ_0 の積となっていることから Δ_1/Δ_0 が小さい時には急速に減少するが Δ_1/Δ_0 を大きくなるにつれ減速度は小さくなり、ほぼ 0.7 に漸近しそれ以上は小さくならない。 $\Delta_1/\Delta_0 \rightarrow 10$ の時加速度の減少量は $G_m/G_{0\max} \rightarrow 0.7$



(B) 弾道係数の連続変更(連続モジュレーション)

次に連続モジュレーションの例として

(B-1) 弾道係数を動圧に比例して制御する場合

(B-2) 弾道係数を高度に比例して制御する場合

のケースについて考察する。

(B-1) 弾道係数を動圧に比例して制御する場合 (連続モジュレーション)

弾道係数を Δ_0 , インターフェース条件を ρ_E, V_E, γ_E として

- ① フェーズ0 弾道飛行
- ② フェーズ1 等空力荷重飛行
- ③ フェーズ2 弾道飛行

の3つのフェーズ分割して弾道係数を連続変更する。

- ① フェーズ0 弾道飛行
フェーズ0 終了時の状態量を

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{0^*} = \rho_{*1} \equiv \rho_a \\ V &= V_{0^*} = V_{*1} \equiv V_a \end{aligned} \quad (24)$$

とおくと空力加重と対応する速度は次式で表される。

$$G_{0^*} = G_m = \frac{\rho_a V_a^2}{2} \frac{1}{\Delta_0} \quad (25)$$

$$V_a^2 = \frac{2 G_m \Delta_0}{\rho_a} \quad (25a)$$

フェーズ0 で飛行中の速度は $V = V_E \exp(-a_0 \rho)$ で表されるから $\rho = \rho_a$ において

$$V_a = V_E \exp(-a_0 \rho_a) = \exp\left(\frac{1}{2\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0}\right)$$

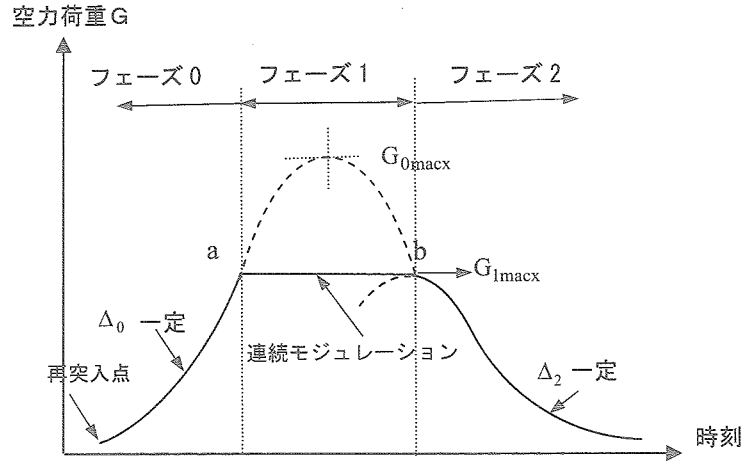
$$G_m = \frac{\rho_a V_a^2}{2\Delta_0}$$

またフェーズ0 での空力荷重の最大値は $G_{0max} = -\beta V_E^2 \sin \gamma_E / 2e$ で表されるから

$$\frac{G_m}{G_{0max}} = -\frac{e}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \left(\frac{V_a}{V_E}\right)^2 = -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \exp\left(1 + \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0}\right)$$

$$\lambda_0 = -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \text{ と置けば}$$

$$\frac{G_m}{G_{0max}} = \lambda_0 \exp(1 - \lambda_0)$$



② フェーズ1 等空力荷重飛行

$$\text{仮定 } G_1 = G_m : \text{一定} \quad (26)$$

空力荷重：

空力荷重を $G = \rho V^2 / 2\Delta$ から弾道係数は動圧に比例した形で与える。

$$\Delta_1 = \frac{1}{G_m} \frac{\rho V^2}{2} \quad (27)$$

$$V^2 = \frac{2\Delta_1 G_m}{\rho} \quad (27a)$$

直線弾道飛行の運動方程式 $dV/dt = -\rho V^2 / 2\Delta$, $d\rho/dt = -\rho\beta V \sin \gamma_E$ から

$$V \frac{dV}{d\rho} = \frac{V^2}{2\Delta_1 \beta \sin \gamma_E} = -a_1 V^2 = -\frac{G_m}{\beta \sin \gamma_E} \frac{1}{\rho} \quad (28)$$

ρ について積分して

$$\frac{1}{2} (V^2 - V_a^2) = -\frac{G_m}{\beta \sin \gamma_E} \ln \frac{\rho}{\rho_a} \quad (29)$$

(25a), (27a) 式の V^2, V_a^2 用いて速度を省略するとフェーズ1の弾道係数 Δ_1 は密度の関数として次式で表される。

$$\frac{\Delta_1}{\rho} = \frac{\Delta_0}{\rho_a} + \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \ln \frac{\rho}{\rho_a}$$

または

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} = \frac{\rho}{\rho_a} \left(1 + \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \ln \frac{\rho}{\rho_a} \right) \quad : \text{連続モジュレーション} \quad (30)$$

フェーズ1終了時の状態量

$$\rho = \rho_{1^*} = \rho_{*2} \equiv \rho_b$$

$$V = V_{1^*} = V_{*2} \equiv V_b$$

とおけば

$$\frac{\Delta_{1^*}}{\Delta_0} = \frac{\rho_b}{\rho_a} \left(1 + \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \ln \frac{\rho_b}{\rho_a} \right) \quad (31)$$

$$G_{1^*} = G_m = \frac{\rho_b V_b^2}{2\Delta_0} \left(\frac{\Delta_0}{\Delta_{1^*}} \right) \quad (32)$$

③ フェーズ 2 弾道飛行

弾道係数を一定 $\Delta_2 = \Delta_{1^*}$ と仮定すると

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_0} = \frac{\Delta_{1^*}}{\Delta_0} \quad (34)$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_0} = \frac{\rho_b}{\rho_a} \left(1 + \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \ln \frac{\rho_b}{\rho_a} \right) \quad (35)$$

$$\rho_{\max} = \rho_b \quad (36)$$

$$G_{2\max} = G_m \quad (37)$$

密度(速度)対高度 :

$$\frac{V}{V_b} = \exp\left(\frac{\rho - \rho_b}{2\Delta_2 \beta \sin \gamma_E}\right) = \exp\{-a_2(\rho - \rho_b)\} \quad (38)$$

加速度 :

$$G_2 = \frac{\rho_b V_b^2}{2\Delta_2} \exp\left(\frac{\rho - \rho_b}{\Delta_2 \beta \sin \gamma_E}\right) = \frac{\rho_b V_b^2}{2\Delta_2} \exp\{-2a_2(\rho - \rho_b)\} \quad (39)$$

加速度の最大値は次式であらわされる。ここで加速度が最大となる位置, および最大値をフェーズ 1 終了時の状態量と一致するように設定すると

$$\rho_{\max} = \rho_b = -\Delta_2 \beta \sin \gamma_E = 1/2a_2 \quad (40)$$

$$G_{2\max} = G_m = -\frac{V_b^2 \beta \sin \gamma_E}{2} \exp(-1 + 2a_2\rho_b) = -\frac{V_b^2 \beta \sin \gamma_E}{2} \quad (41)$$

(32) 式と等値して

$$G_m = \frac{\rho_b V_b^2}{2\Delta_0} \left(\frac{\Delta_0}{\Delta_{1^*}}\right) = \frac{\rho_b V_b^2}{2\Delta_0} \left(\frac{\Delta_0}{\Delta_2}\right) = -\frac{V_b^2 \beta \sin \gamma_E}{2} \quad (42)$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_0} = -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_b}{\Delta_0} \quad (43)$$

(35) 式から

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_0} = \frac{\rho_b}{\rho_a} \left(1 + \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \ln \frac{\rho_b}{\rho_a} \right) = -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_b}{\Delta_0} = -\frac{\rho_b}{\rho_a} \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \quad (44)$$

上式から

$$1 + \left(\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \right) \ln \frac{\rho_b}{\rho_a} = -\frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \quad (45)$$

ここで $\lambda_0 = -\rho_a / \Delta_0 \beta \sin \gamma_E$ であるから上式に代入すると

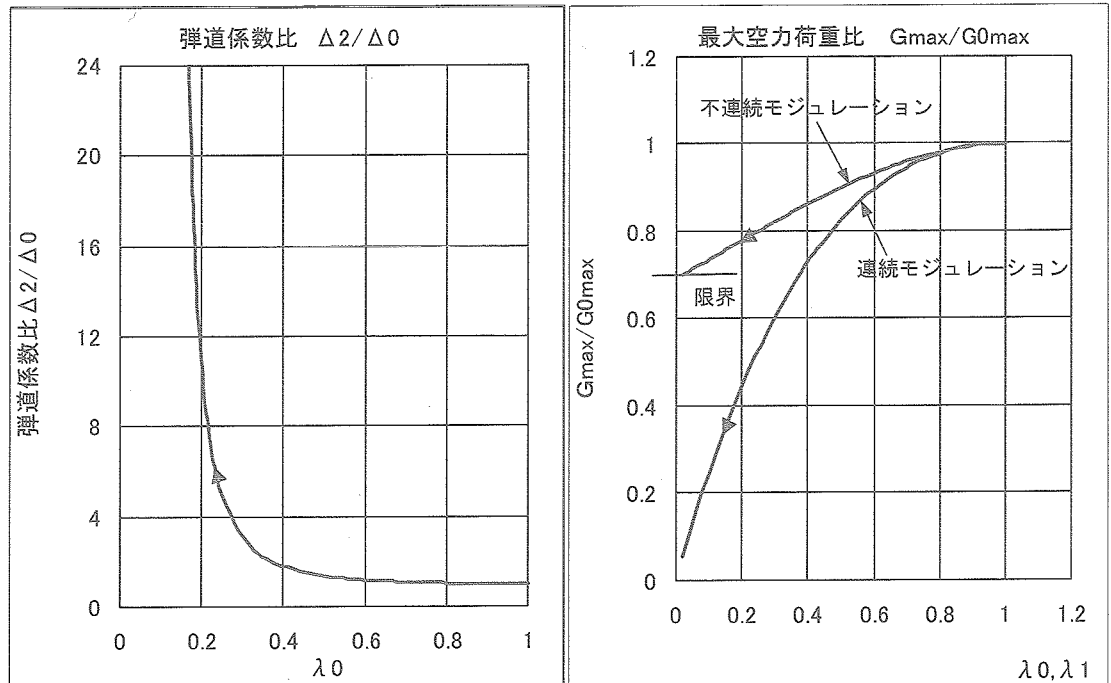
$$\left(1 - \lambda_0 \ln \frac{\rho_b}{\rho_a}\right) = \lambda_0 \rightarrow \frac{\rho_b}{\rho_a} = \exp\left(\frac{1 - \lambda_0}{\lambda_0}\right) \quad (46)$$

これより弾道係数 Δ_2 / Δ_1 及び空力荷重 G_m / G_{0max} は次式で表される。

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_0} = \lambda_0 \exp\left(\frac{1 - \lambda_0}{\lambda_0}\right) \quad (47)$$

$$\frac{G_m}{G_{0max}} = \lambda_0 \exp(1 - \lambda_0) \quad (48)$$

(47) 式で左辺は弾道係数の比で定数これを逐次近似法(ニュートン-ラフソン法等)で求めると λ_0 は Δ_2 / Δ_0 の関数で表される。 λ_0 が求まると変更時点の密度(高度)は(46)式で得られる。また G_m / G_{0max} は Δ_2 / Δ_0 の関数として得ることが出来る。



上記結果から不連続モジュレーションでは変更後の最大空力荷重比は 0.7 が限界でありこれ以下には下がらなかったのに対して連続モジュレーションではさらに低下することができる。

(B-2) 弾道係数を高度の関数として制御する場合(連続モジュレーション)

(B-1)項では弾道係数が動圧に比例する場合について述べた。動圧に比例する場合には弾道係数を密度の関数として表すと(27)式で表された。

ここで $\ln(\rho/\rho_a) = -\beta(h - h_a)$ を用いて高度の関数に変換すると

$\hat{h} = \beta h$: 無次元化高度

$$K_1 = e^{\hat{h}_a} \left(1 + \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \hat{h}_a \right) \quad (49)$$

$$K = \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \left/ \left(1 + \frac{1}{\beta \sin \gamma_E} \frac{\rho_a}{\Delta_0} \hat{h}_a \right) \right. \quad (50)$$

と置けば無次元化高度の関数として次式で表される。

$$\Delta/\Delta_0 = K_1 (1 - K \hat{h}) \exp(-\hat{h}) \quad (51)$$

そこで本項では弾道係数が一般に高度の関数として表される場合について考察する。

$$\textcircled{1} \quad \frac{\Delta}{\Delta_0} = \exp\left\{-K\left(1 - \hat{h}/\hat{h}_E\right)\right\} \quad \text{の場合}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\Delta}{\Delta_0} = \left\{1 - K\left(1 - \hat{h}/\hat{h}_E\right)\right\}^{1-N} \quad \text{の場合}$$

運動方程式 $dV/dt = -\rho V^2/2\Delta$ を $dh/dt = V \sin \gamma_E$ を用いて独立変数を t から h に変換する。さらに次式で定義した無次元化高度 $\hat{h} = \beta h$ を用いると運動方程式は次式で表される。

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\hat{h}} = -\frac{\rho}{2\Delta\beta \sin \gamma_E} = a \rho_{SL} e^{-\hat{h}} \quad (52)$$

パラメータ a と再突入時のパラメータ a_E の比は弾道係数を Δ_0 とすれば弾道係数の逆比に等しい

$$\frac{a}{a_E} = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \exp\left\{K\left(1 - \hat{h}/\hat{h}_E\right)\right\} \equiv f(\hat{h}) \quad (53)$$

これよりパラメータ a は $a = a_E f(\hat{h})$ (52)式に代入して

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\hat{h}} = a_E \rho_{SL} e^{-\hat{h}} f(\hat{h}) \quad (54)$$

ただし K, N は定数。

$K=0$ のとき $f(\hat{h})=1$ となり弾道係数は一定 $\Delta = \Delta_0$ となる。

① $\Delta/\Delta_0 = \exp\{-K(1-\hat{h}/\hat{h}_E)\}$ の場合

$$\ln \frac{V}{V_E} = a_E \rho_{SL} \int_{\hat{h}}^{\hat{h}_E} \exp\{-\hat{h} + K(1-\hat{h}/\hat{h}_E)\} d\hat{h} = a_E \rho_{SL} \int_{\hat{h}}^{\hat{h}_E} \exp\{K - (1+K/\hat{h}_E)\hat{h}\} d\hat{h} \quad (55)$$

上式を積分して

$$\ln \frac{V}{V_E} = -\frac{a_E \rho_{SL} e^K \exp\{-(1+K/\hat{h}_E)\hat{h}\}}{1+K/\hat{h}_E} + \text{const}$$

\hat{h}_E が十分大きければ $\text{const}=0$

$$\frac{V}{V_E} \approx \exp\left[-\frac{a_E \rho_{SL} e^K \exp\{-(1+K/\hat{h}_E)\hat{h}\}}{1+K/\hat{h}_E}\right] \quad (56)$$

高度対速度：

$$\ln \frac{V}{V_E} = -\frac{a_E \rho_{SL} e^K \exp\{-(1+K/\hat{h}_E)\hat{h}\}}{1+K/\hat{h}_E} \quad (57)$$

$K=0$ の時には次式、となり弾道係数一定の直線弾道飛行軌道と一致する。

$$V/V_E = \exp\{-a_E \rho_{SL} \exp(-\hat{h})\} = \exp(-a_E \rho) \quad (58)$$

空力荷重：

空力荷重は $G=D/m = \rho V^2/2\Delta$ から、 Δ を (53) 式を用いて a に、また $a = a_E f(\hat{h})$ 、 $\rho/\rho_{SL} = \exp(-\hat{h})$ を代入して

$$G = \frac{\rho V^2}{2\Delta} = \frac{\rho_{SL} V_E^2}{2\Delta_0} \left(\frac{\Delta_0}{\Delta}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \left(\frac{V}{V_E}\right)^2 \quad (59)$$

加速度、抗力加速度は高度 βh の関数として次式で表される。

$$G = \frac{\rho_{SL} V_E^2}{2\Delta_0} \exp\left[-\hat{h} + K\left(1 - \frac{\hat{h}}{\hat{h}_E}\right) - \frac{2a_E \rho_{SL} e^K \exp\{-(1+K/\hat{h}_E)h\}}{1+K/\hat{h}_E}\right] \quad (60)$$

最大値は \hat{h} で微分して零と置くと加速度、抗力加速度が最大となる高度と最大値は次式で表される。対数をとって微分し、0 と置くと

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{d\hat{h}} = -(1+K/\hat{h}_E) + 2a_E \rho_{SL} e^K \exp\{-(1+K/\hat{h}_E)h\} = 0$$

$$\hat{h}_{\max} = \frac{1}{(1+K/\hat{h}_E)} \ln\left(\frac{2a_E \rho_{SL} e^K}{1+K/\hat{h}_E}\right) \quad (61)$$

G に代入して空力最大値を求めると次の通り。

$$G_{\max} = \frac{\rho_{SL} V_E^2 e^K}{2\Delta_0 e} \exp \left[-\ln \left(\frac{2a_E \rho_{SL} e^K}{1 + K/\hat{h}_E} \right) \right] = \frac{\rho_{SL} V_E^2 e^K}{2\Delta_0 e} \left(\frac{1 + K/\hat{h}_E}{2a_E \rho_{SL} e^K} \right)$$

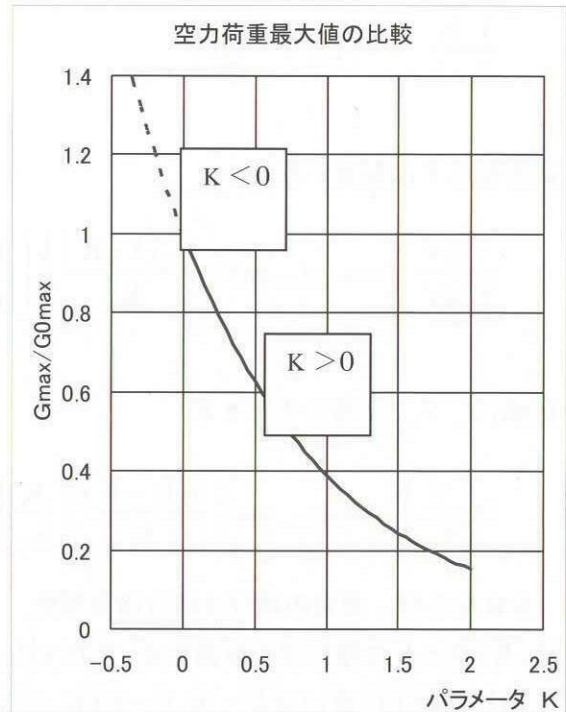
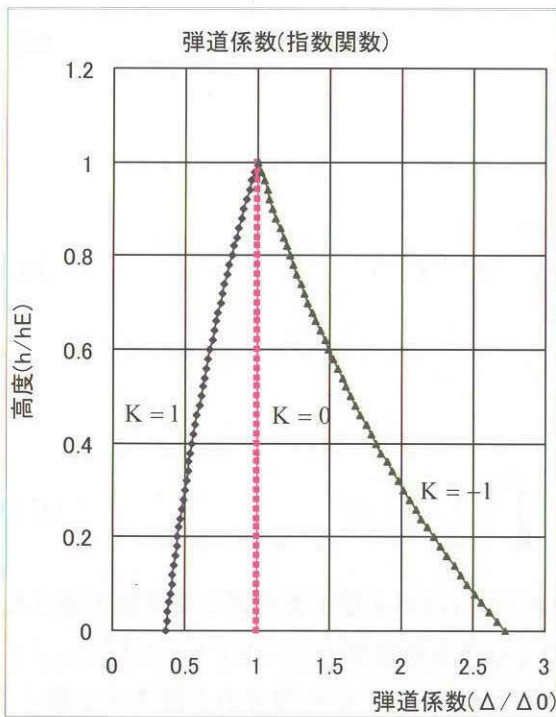
$$= - \frac{\beta V_E^2 \sin \gamma_E (1 + K/\beta \hat{h}_E)}{2e} \tag{62}$$

K=0 の場合には空力荷重最大値とそのときの高度は次式となり弾道係数非変更の場合と一致する。

$$\hat{h}_{\max} = \ln (2a_E \rho_{SL}) \tag{63}$$

$$G_{0\max} = - \frac{\beta V_E^2 \sin \gamma_E}{2e} \tag{64}$$

$$\frac{G_{\max}}{G_{0\max}} = 1 + K/\beta \hat{h}_{\max} \tag{65}$$



(校正者注) 原文は、 $\frac{G_{\max}}{G_{0\max}} = \frac{(1 + K/\beta \hat{h}_E)}{e^K}$ となっており、右のグラフはそれが元であろう。

② $\Delta/\Delta_0 = \left\{1 - K \left(1 - \hat{h}/\hat{h}_E\right)\right\}^{1-N}$ の場合

いま $K \neq 0$ として

$$Y \equiv \frac{\hat{h}_E}{K} \left\{1 - K \left(1 - \frac{\hat{h}}{\hat{h}_E}\right)\right\} \quad (66)$$

と置くと高度と Y との関係は次の通り。

$$\hat{h} = Y - \left(\frac{1-K}{K}\right) \hat{h}_E \quad (67)$$

$$a/a_E = \Delta_0/\Delta = \left\{1 - K \left(1 - \hat{h}/\hat{h}_E\right)\right\}^{N-1} = \left(K/\hat{h}_E\right)^{N-1} Y^{N-1} \equiv f(\hat{h}) \quad (67a)$$

また密度の指数部 $e^{-\hat{h}}$ を変数 Y で表すと

$$e^{-\hat{h}} = \exp\left\{-Y + \hat{h}_E(1-K)/K\right\} = e^{-Y} \exp\left\{\hat{h}_E(1-K)/K\right\} \quad (68)$$

$d\hat{h} = dY$ に留意して独立変数を \hat{h} から Y に変換すると

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\hat{h}} = a_E \rho_{SL} e^{-\hat{h}} f(\hat{h}) \quad (69)$$

高度から Y に変換すると

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dY} = a_E \rho_{SL} \exp\left\{\frac{\hat{h}_E(1-K)}{K}\right\} \left(\frac{K}{\hat{h}_E}\right)^{N-1} e^{-Y} Y^{N-1} \quad (70)$$

区間 $[Y, Y_E]$ で積分を行うと

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) = a_E \rho_{SL} \exp\left\{\frac{\hat{h}_E(1-K)}{K}\right\} \left(\frac{K}{\hat{h}_E}\right)^{N-1} \int_Y^{Y_E} e^{-Y} Y^{N-1} dY \quad (71)$$

$N=0$ ならば 右辺の積分は積分指数関数、 $N \neq 0$ ならば第 2 種不完全ガンマ関数で表される。 $N \neq 0$ として積分項を分割する。また $Y(\hat{h})$ のとり得る範囲は $\hat{h}_E(1-K)/K \leq Y(\hat{h}) \leq \hat{h}_E/K$ であり K が 1 に近いほど $\hat{h}_E(1-K)/K \ll \hat{h}_E/K$ となることから積分の上限を ∞ と置く。

$$\underbrace{\int_Y^{Y_E=\infty} e^{-Y} Y^{N-1} dY}_{\text{第 2 種不完全 } \Gamma \text{ 関数}} = \underbrace{\int_0^{Y_E=\infty} e^{-Y} Y^{N-1} dY}_{\Gamma \text{ 関数}} - \underbrace{\int_0^Y e^{-Y} Y^{N-1} dY}_{\text{第 1 種不完全 } \Gamma \text{ 関数}}$$

以上から左辺積分項は第 2 種不完全ガンマ関数、右辺第 1 項はガンマ関数、第 2 項は第 1 種ガンマ関数となる。ガンマ関数の定義は次の通り。(補足参照)

$$\Gamma(N) \equiv \int_0^{\infty} e^{-Y} Y^{N-1} dY \quad : \text{ガンマ関数}$$

$$\Gamma(N, Y) \equiv \int_0^Y e^{-Y} Y^{N-1} dY \quad : \text{第2種不完全ガンマ関数}$$

速度はこれらのガンマ関数を用いて次式で表される。

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) = a_E \rho_{SL} \left(\frac{K}{\hat{h}_E}\right)^{N-1} \exp\left\{\frac{\hat{h}_E(1-K)}{K}\right\} \{\Gamma(N) - \Gamma(N, Y)\} \quad (72)$$

さらに右辺のガンマ関数を次のようにおけば

$$g_1(Y) \equiv \exp\left\{\frac{\hat{h}_E(1-K)}{K}\right\} \{\Gamma(N) - \Gamma(N, Y)\} \quad (73)$$

速度対高度は

$$\ln\left(\frac{V}{V_E}\right) = a_E \rho_{SL} \left(\frac{K}{\hat{h}_E}\right)^{N-1} g_1(Y) \quad (74)$$

$$\frac{V}{V_E} = \exp\left\{a_E \rho_{SL} \left(\frac{K}{\hat{h}_E}\right)^{N-1} g_1(Y)\right\} \quad (75)$$

空力荷重：

空力荷重は $G = D/m = \rho V^2 / 2\Delta$ から (67a), (68) 式及び (75) 式を用いて Y で表すと

$$G = \frac{\rho_{SL} V_E^2}{2\Delta_0} \left(\frac{K}{\hat{h}_E}\right)^{N-1} Y^{N-1} \exp\left\{-Y + \frac{\hat{h}_E(1-K)}{K} - 2a_E \rho_{SL} \left(\frac{K}{\hat{h}_E}\right)^{N-1} g_1(Z)\right\} \quad (76)$$

空力荷重の最大値は $dg_1(Y)/dY = \exp\left\{-Y + \frac{\hat{h}_E(1-K)}{K}\right\} Y^{N-1}$ に留意して (76) 式を Y で微分して零とおくと次の条件式を得る。

$$(N-1) \left(\frac{K}{\hat{h}_E}\right) - 2a_E \rho_{SL} \left(\frac{KY_{\max}}{\hat{h}_E}\right)^N \exp\left\{-Y_{\max} + \frac{\hat{h}_E(1-K)}{K}\right\} - \left(\frac{KY_{\max}}{\hat{h}_E}\right) = 0 \quad (77)$$

または (66) 式を用いて高度で表すと

$$(N-1) \left(\frac{K}{\hat{h}_E}\right) - 2a_E \rho_{SL} \left\{1 - K \left(1 - \frac{\hat{h}_{\max}}{\hat{h}_E}\right)\right\}^N \exp(-\hat{h}_{\max}) - \left\{1 - K \left(1 - \frac{\hat{h}_{\max}}{\hat{h}_E}\right)\right\} = 0$$

これより

$$\hat{h}_{\max} = \ln \left[\frac{-2a_E \rho_{SL} \left\{ 1 - K \left(1 - \frac{\hat{h}_{\max}}{\hat{h}_E} \right) \right\}^N}{1 - K \left(1 - \frac{\hat{h}_{\max} - (N-1)}{\hat{h}_E} \right)} \right] \quad (78)$$

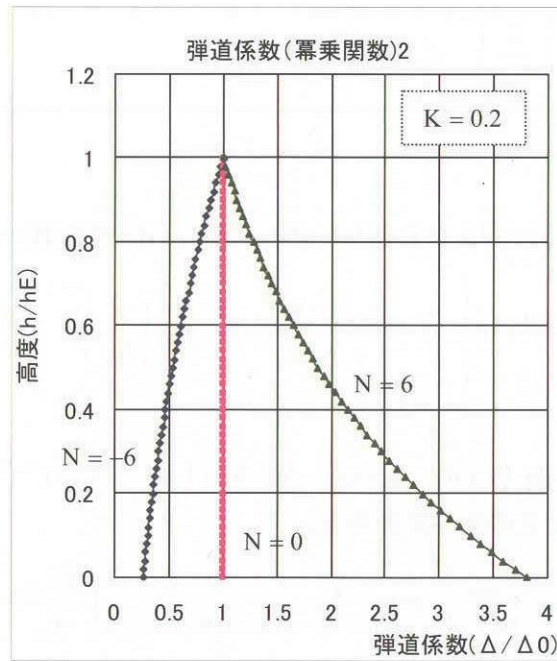
特に $N=1$ の場合、(78)式は $\hat{h}_{\max} = \ln(-2a_E \rho_{SL})$ となり弾道係数一定の場合と一致する。

Y が大きい場合にはガンマ関数を級数展開すると

$$\Gamma(N) - \Gamma(N, Y) = \frac{e^{-Y}}{Y^{1-N}} \left\{ 1 - \frac{1-N}{Y} + \frac{(1-N)(2-N)}{Y^2} - \dots \right\}$$

関数 $g_1(Y)$ は次式で表される。

$$g_1(Y) = Y^{N-1} \left\{ 1 - \frac{1-N}{Y} + \frac{(1-N)(2-N)}{Y^2} - \dots \right\} \exp \left\{ -Y + \frac{\hat{h}_E(1-K)}{K} \right\} \quad (79)$$



8-2. 揚力飛行の軌道制御

弾道軌道の軌道制御では弾道係数を変更することにより、空力荷重、空力加熱率の制御例をしめしたが、ここでは揚力飛行での軌道制御を示す。この場合軌道制御は揚抗比 L/D により行い(揚抗比モジュレーション)弾道係数は一定とする。

経路角 $\gamma, \gamma_E \ll 1$ と仮定すると一定 L/D 軌道は次式で表される。

$$\rho - \rho_E = \frac{2\Delta\beta(\cos\gamma - \cos\gamma_E)}{L/D} \quad (1)$$

$$\frac{V}{V_E} = \exp\left(-\frac{\gamma - \gamma_E}{L/D}\right) \quad (2)$$

一定 L/D 軌道での空力荷重は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} G &= \left(V_E^2/2\Delta\right) \sqrt{1+(L/D)^2} \rho (V/V_E)^2 \\ &= \frac{V_E^2 \sqrt{1+(L/D)^2}}{2\Delta} \left\{ \frac{2\Delta\beta(\cos\gamma - \cos\gamma_E)}{L/D} + \rho_E \right\} \exp\left\{-\frac{2(\gamma - \gamma_E)}{L/D}\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

経路角 $\gamma, \gamma_E \ll 1$ の仮定から $\cos\gamma - \cos\gamma_E = -(\gamma^2 - \gamma_E^2)/2$ と近似すると

$$G = \frac{\beta V_E^2 \sqrt{1+(L/D)^2}}{2(L/D)} \left\{ -(\gamma^2 - \gamma_E^2) + \frac{\rho_E}{\Delta\beta} \left(\frac{L}{D}\right) \right\} \exp\left\{-\frac{2(\gamma - \gamma_E)}{L/D}\right\} \quad (4)$$

$\beta V_E^2/2$ は加速度次元を有するから G を $\beta V_E^2/2$ で無次元化する。 $\beta V_E^2/2$ のオーダーは周回円軌道の場合 $V_E^2 = gr$, $\beta r \approx 900$ から $\beta V_E^2/2 = (\beta r/2)g \approx 450g$ である。

$$\hat{G} = \frac{\sqrt{1+(L/D)^2}}{L/D} \left\{ -(\gamma^2 - \gamma_E^2) + \frac{\rho_E}{\Delta\beta} \left(\frac{L}{D}\right) \right\} \exp\left\{-\frac{2(\gamma - \gamma_E)}{L/D}\right\} \quad (5)$$

また高高度で ρ_E が小さく、 $(\rho_E/\Delta\beta)(L/D)$ が無視できる場合には L/D をパラメータとして経路角の関数として次式で近似できる。

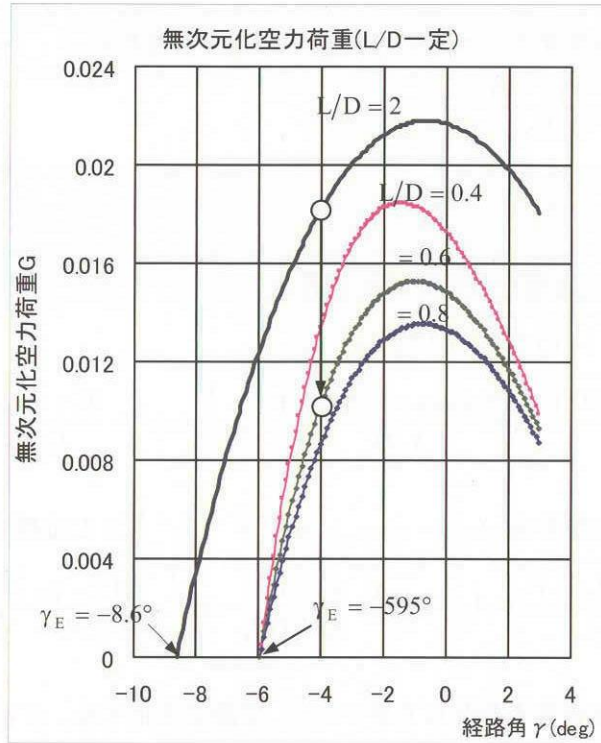
$$\hat{G} \approx -\frac{\sqrt{1+(L/D)^2}}{L/D} (\gamma^2 - \gamma_E^2) \exp\left\{-\frac{2(\gamma - \gamma_E)}{L/D}\right\} \quad (6)$$

空力荷重の最大値は次式で与えられる(スキップ軌道の項参照)。また最大値は次式で与えられる。

$$\gamma_{\max} = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{D}\right) \left[\sqrt{1 + \frac{4}{(L/D)^2} \left\{ \gamma_E^2 + \frac{\rho_E}{\Delta\beta} \left(\frac{L}{D}\right) \right\}} - 1 \right] \quad (7)$$

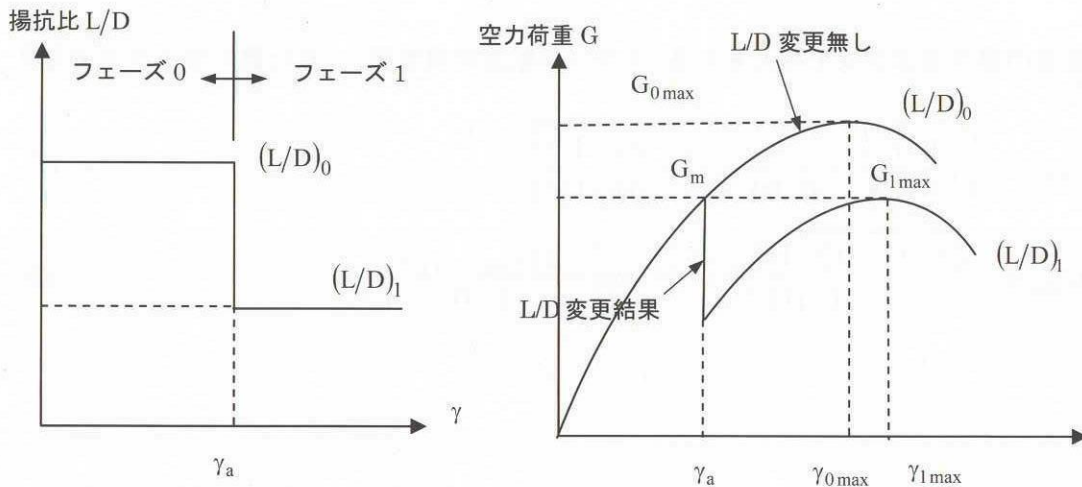
$$\hat{G}_{\max} = -\frac{\sqrt{1+(L/D)^2}}{(L/D)} (\gamma_{\max}^2 - \gamma_E^2) \exp\left\{-\frac{2(\gamma_{\max} - \gamma_E)}{L/D}\right\} \quad (8)$$

例として揚抗比 $L/D=2$ 、初期経路角 $\gamma_E = -8.6^\circ$ の軌道を初期軌道とする。これに対して初期経路角 $\gamma_E = -5.95^\circ$ 、として揚抗比が $L/D=0.4$ $L/D=0.6$ $L/D=0.8$ の軌道を下図に示す。これらの軌道の最大空力荷重は初期軌道の最大空力荷重に比べて小さい。初期軌道の最大空力荷重が大きすぎる場合には飛行の途中で揚抗比を変更して他の軌道に変更する方法について次項に述べる。



(1) 揚力係数の不連続変更(ディスクリート・モジュレーション)

再突入条件を ρ_E, V_E, γ_E 、弾道係数を Δ 、揚抗比を $(L/D)_0$ とする一定揚抗比飛行の途中で揚抗比を $(L/D)_1$ に変更する。ただし $(L/D)_0 > (L/D)_1$ 。変更直後、空力荷重は不連続に減少するが再び増加してピーク値を持つ。切換点を適当に選ぶことにより $(L/D)_0$ 軌道のピーク値を超えないよう軌道の制御を行う。



① フェーズ0

フェーズ0軌道：

高高度の場合には ρ_E の項は無視できる。

$$\rho = \rho_E + \frac{2\Delta\beta(\cos\gamma - \cos\gamma_E)}{(L/D)_0} \approx -\frac{\Delta\beta(\gamma^2 - \gamma_E^2)}{(L/D)_0} \quad (9)$$

$$\frac{V}{V_E} = \exp\left\{-\frac{\gamma - \gamma_E}{(L/D)_0}\right\} \quad (10)$$

 ρ_E が小さく、 $(\rho_E/\Delta\beta)(L/D)$ が無視できる場合には空力荷重は次式で近似できる。

$$\hat{G}_0 \approx -\frac{\sqrt{1+(L/D)_0^2}}{(L/D)_0} (\gamma^2 - \gamma_E^2) \exp\left\{-\frac{2(\gamma - \gamma_E)}{(L/D)_0}\right\} \quad (11)$$

空力荷重最大値は次式で得られる。

$$\gamma_{0\max} = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{D}\right)_0 \left[\sqrt{1 + \frac{4\gamma_E^2}{(L/D)_0^2}} - 1 \right] \approx -\frac{\gamma_E^2}{(L/D)_0} \quad (12)$$

$$\hat{G}_{0\max} = -\frac{\sqrt{1+(L/D)_0^2}}{(L/D)_0} (\gamma_{0\max}^2 - \gamma_E^2) \exp\left\{-\frac{2(\gamma_{0\max} - \gamma_E)}{(L/D)_0}\right\} \quad (13)$$

フェーズ0軌道の終了時点を添字(0*)でまたフェーズ1軌道の開始時点を添字(*1)で記述すると軌道の不連続はないから切換え点をaとすれば

$$\rho_{0*} = \rho_{*1} = \rho_a \quad : \text{密度}$$

$$V_{0*} = V_{*1} = V_a \quad : \text{速度}$$

$$\gamma_{0*} = \gamma_{*1} = \gamma_a \quad : \text{経路角}$$

これよりフェーズ0軌道の終了時点の空力荷重, 密度, 速度は γ_a を代入して次式で与えられる。

$$\hat{G}_{0*} = \hat{G}_m = -\frac{\sqrt{1+(L/D)_0^2}}{(L/D)_0} (\gamma_a^2 - \gamma_E^2) \exp\left\{-\frac{2(\gamma_a - \gamma_E)}{(L/D)_0}\right\} \quad (14)$$

$$\rho_a = -\frac{\Delta\beta(\gamma_a^2 - \gamma_E^2)}{(L/D)_0} \quad (15)$$

$$\frac{V_a}{V_E} = \exp\left\{-\frac{\gamma_a - \gamma_E}{(L/D)_0}\right\} \quad (16)$$

これより切換え時の空力荷重 G_m とフェーズ0での最大空力荷重 $G_{0\max}$ との比は(13), (14)式から次のように表される。

$$\frac{\hat{G}_m}{\hat{G}_{0\max}} = \frac{\gamma_a^2 - \gamma_E^2}{\gamma_{0\max}^2 - \gamma_E^2} \exp\left\{-\frac{2(\gamma_a - \gamma_{0\max})}{(L/D)_0}\right\} \quad (17)$$

 γ_a は未知変数で次の③最適切換え条件により決定する。

② フェーズ1:

フェーズ1開始時点では高度は低下しているので軌道制御開始時の密度 ρ_a は無視できず高度速度は次式で表される。

$$\rho = \rho_a - \frac{\Delta\beta(\gamma^2 - \gamma_a^2)}{(L/D)_1} \quad (18)$$

$$\frac{V}{V_a} = \exp\left\{-\frac{\gamma - \gamma_a}{(L/D)_1}\right\} \quad (19)$$

フェーズ1での空力荷重は次式で表される。

$$\hat{G}_1 = \frac{\sqrt{1 + (L/D)_1^2}}{(L/D)_1} \left\{ -(\gamma^2 - \gamma_a^2) + \frac{\rho_a}{\Delta\beta} \left(\frac{L}{D}\right)_1 \right\} \exp\left\{-\frac{2(\gamma - \gamma_a)}{(L/D)_1}\right\} \quad (20)$$

または(15)式 $\rho_a/\Delta\beta$ を代入して

$$\hat{G}_1 = -\frac{\sqrt{1 + (L/D)_1^2}}{(L/D)_1} \left\{ (\gamma^2 - \gamma_a^2) + \frac{(L/D)_1}{(L/D)_0} (\gamma_a^2 - \gamma_E^2) \right\} \exp\left\{-\frac{2(\gamma - \gamma_a)}{(L/D)_1}\right\} \quad (21)$$

上式を経路角 γ で微分して0とおくと \hat{G}_1 が最大となる条件を得る。

$$\gamma^2 - \left(\frac{L}{D}\right)_1 \gamma - \left\{ \gamma_a^2 + \frac{\rho_a}{\Delta\beta} \left(\frac{L}{D}\right)_1 \right\} = 0 \quad (22)$$

この2次方程式を解いて(15)式の密度 ρ_a を代入すると \hat{G}_1 が最大となる経路角 $\gamma_{1\max}$ は次式で与えられる。

$$\gamma_{1\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D}\right)_1 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4}{(L/D)_1} \left\{ \left\{ \frac{1}{(L/D)_1} - \frac{1}{(L/D)_0} \right\} \gamma_a^2 + \frac{\gamma_E^2}{(L/D)_0} \right\}} \right] \quad (23)$$

ここで $\sqrt{\quad}$ 内の第2,3項(斜線部)を

$$F \equiv \left\{ \frac{1}{(L/D)_1} - \frac{1}{(L/D)_0} \right\} \gamma_a^2 + \frac{\gamma_E^2}{(L/D)_0} \quad (24)$$

とおけば $\gamma_{1\max}$ は次式で表される。またFは経路角 γ_a γ_E の2乗の和であるから、十分微小であり、 $4F/(L/D)_1 \ll 1$ とおくと $\gamma_{1\max} \approx -F$ で近似できる。

$$\gamma_{1\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D}\right)_1 \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{4F}{(L/D)_1}} \right\} \approx -F \quad (25)$$

この $\gamma_{1\max}$ を(21)式に代入してフェーズ1での最大空力荷重は次式で与えられる。

$$\hat{G}_{1\max} = \frac{\sqrt{1 + (L/D)_1^2}}{(L/D)_1} \left\{ -(\gamma_{1\max}^2 - \gamma_a^2) - \frac{(L/D)_1}{(L/D)_0} (\gamma_a^2 - \gamma_E^2) \right\} \exp\left\{-\frac{2(\gamma_{1\max} - \gamma_a)}{(L/D)_1}\right\} \quad (26)$$

③ 最適切換え条件

最適切換え条件としてL/D切換え時の空力荷重 G_m とフェーズ1での最大空力荷重 $\hat{G}_{1\max}$ が等しくなるように選び、切換え点を求める。

$$\hat{G}_m = \hat{G}_{1\max} \quad (27)$$

\hat{G}_m は(14)式から、 $\hat{G}_{1\max}$ は(26)式から得られるから両式を等値すると $\hat{G}_m = \hat{G}_{1\max}$ を満たす条件(関係式)を得る。 $\gamma_{1\max} \ll \gamma_a$ より $\gamma_{1\max}$ を無視すると、上記条件を満たす関係式(解曲線)は近似的に次式で表される。

$$f\left(\frac{\gamma_a}{\gamma_E}\right) = \left\{ \frac{(\gamma_a/\gamma_E)^2}{(1 - (\gamma_a/\gamma_E)^2)} + \frac{(L/D)_1}{(L/D)_0} \right\} \exp \frac{2\gamma_E}{(L/D)_0} \left\{ \left[1 + \frac{(L/D)_0}{(L/D)_1} \right] \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_E} \right) - 1 \right\} - \frac{(L/D)_1 \sqrt{1 + (L/D)_0^2}}{(L/D)_0 \sqrt{1 + (L/D)_1^2}} = 0 \quad (28)$$

上式を逐次近似法(ニュートン・ラフソン法等)により γ_a/γ_E を求める。 γ_a/γ_E が得られると、切換時の密度 ρ_a 、速度 V_a/V_E は次式で得られる。

$$\frac{\rho_a}{\rho_{SL}} = -\frac{\Delta\beta\gamma_E^2 (\gamma_a^2/\gamma_E^2 - 1)}{\rho_{SL} (L/D)_0} \quad (29)$$

これより高度 h_a は $\ln(\rho_a/\rho_{SL}) = -\beta h_a$ から次式で表される。

$$h_a = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{\Delta\beta\gamma_E^2 (1 - \gamma_a^2/\gamma_E^2)}{\rho_{SL} (L/D)_0} \right\} \quad (30)$$

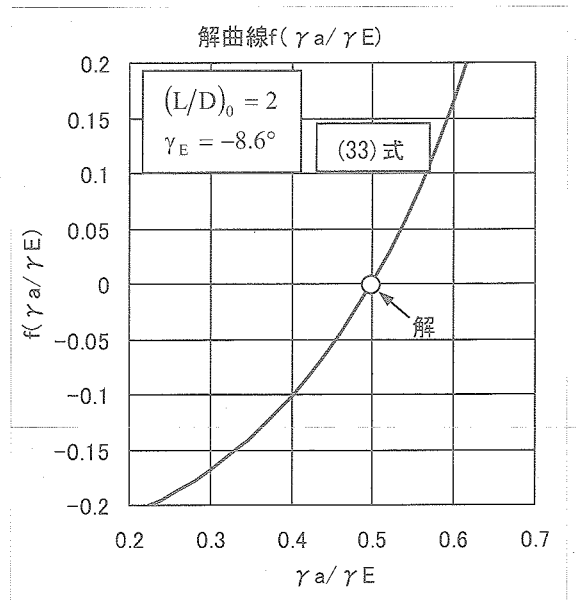
$$\frac{V_a}{V_E} = \exp \left\{ -\frac{\gamma_E}{(L/D)_0} \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_E} - 1 \right) \right\} \quad (31)$$

フェーズ0での最大空力荷重 $G_{0\max}$ に対する最大空力荷重の比(低減化率)は $G_{1\max} = G_m$ から次式で表される。

$$\frac{G_{1\max}}{G_{0\max}} = \frac{G_m}{G_{0\max}} = \frac{(\gamma_a^2 - \gamma_E^2)}{(\gamma_{0\max}^2 - \gamma_E^2)} \exp \left\{ -\frac{2(\gamma_a - \gamma_{0\max})}{(L/D)_0} \right\} \quad (32)$$

上式で(12)式より $\gamma_{0\max}$ は γ_E^2 のオーダーであり $\gamma_{0\max} \ll \gamma_E$ から $\gamma_{0\max}$ を無視すると次式となる。

$$\frac{G_{1\max}}{G_{0\max}} = \left\{ 1 - \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_E} \right)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_E}{(L/D)_0} \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_E} \right) \right\} \quad (33)$$



数値例)

数値例として揚抗比と、初期経路角を次の値とする。

$$(L/D)_0 = 2, \gamma_E = -8.6^\circ \quad (= 0.15 \text{ rad})$$

$$(L/D)_1 = 0.5$$

解曲線を描くと $f(\gamma_a/\gamma_E) = 0$ から γ_a/γ_E をもとめると解は

$$\gamma_a/\gamma_E = 0.5$$

$$\gamma_a = \gamma_E(\gamma_a/\gamma_E) = -8.6 \times 0.5 = -4.3 \text{ deg}$$

となる。

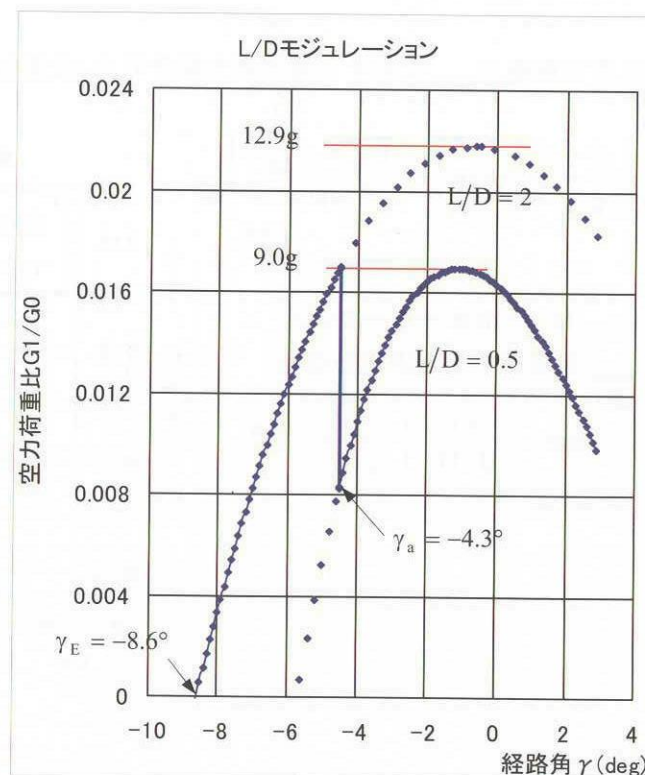
$$\frac{V_a}{V_E} = \exp\left\{-\frac{-0.15 \text{ rad}}{2.0}(0.5 - 1)\right\} = 0.96$$

$$\frac{G_{1\max}}{G_{0\max}} = \left\{1 - \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_E}\right)^2\right\} \exp\left\{-\frac{2\gamma_E}{(L/D)_0} \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_E}\right)\right\} = \{1 - 0.5^2\} \exp\left\{-\frac{2 \times (-0.15) \times 0.5}{2.0}\right\} = 0.70$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{0\max} &= -\frac{\sqrt{1 + (L/D)_0^2} \left\{(-\gamma_E^2/(L/D)_0)^2 - \gamma_E^2\right\}}{(L/D)_0} \exp\left\{-\frac{2\left\{(-\gamma_E^2/(L/D)_0) - \gamma_E\right\}}{(L/D)_0}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{1 + 2.0^2} \left\{(-0.15^2/2.0)^2 - (-0.15)^2\right\}}{2.0} \exp\left\{-\frac{2\left\{-(-0.15)^2/2.0 - (-0.15)\right\}}{2.0}\right\} = 0.0287 \end{aligned}$$

$$G_{0\max} = 0.0287 \times 450 \text{ g} = 12.9 \text{ g}$$

$$G_{1\max} = \left(\frac{G_{1\max}}{G_{0\max}}\right) G_{0\max} = 0.7 \times 12.9 \text{ g} = 9.0 \text{ g}$$



8-3. Z関数による軌道制御

概要：チャップマン Z 関数を用いた軌道制御の例を示す。チャップマン(1959)は密度と速度の積に比例する関数 Z を導入し、弾道係数 $\Delta = m/C_D A$ を一定として Z の速度(水平方向速度)に関する 2 階の常微分方程式を導出した(7-8 項参照)。文献(7)では弾道係数 Δ が可変とした修正チャップマンの運動飛行方程式を導出し、これを用いて軌道制御を行ったものである。

(1) 修正チャップマンの方程式(Z関数)

揚抗比 $L/D=0$, 弾道係数 Δ を可変として次の仮定のもとに運動方程式を導出する。

- 仮定 1) $L/D=0$: ゼロ揚力
- 2) $\Delta = m/C_D A$: 弾道係数可変
- 3) $dr/r \ll du/u$

局所水平座標系運動方程式から

$$\frac{du}{dt} = -\frac{D}{m} \cos \gamma - \frac{uv}{r} \approx -g \sqrt{\beta r} \frac{\bar{u} Z}{\cos \gamma} \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{D}{m} \sin \gamma + \frac{u^2}{r} - g \approx -g \left\{ 1 - \bar{u}^2 + \sqrt{\beta r} \frac{\bar{u} Z}{\cos^2 \gamma} (\sin \gamma) \right\} \tag{2}$$

$$\frac{dh}{dt} = v = \sqrt{gr} \bar{u} \tan \gamma \tag{3} \text{ 高度変化率}$$

$$u = V \cos \gamma \tag{4} \text{ 水平方向速度}$$

$$v = V \sin \gamma \tag{5} \text{ 垂直方向速度}$$

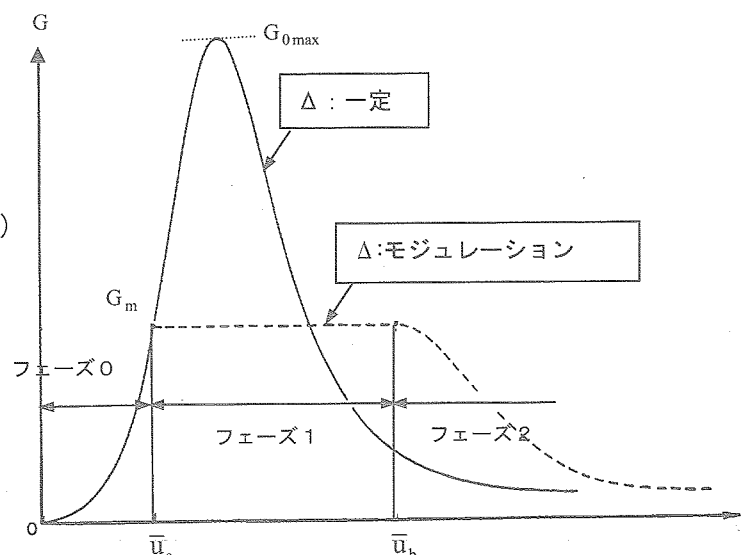
等温大気モデル $\rho = \rho_{sl} e^{-\beta h}$ を用いて

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \beta \frac{dh}{dt} = -\rho \beta \sqrt{gr} \bar{u} \tan \gamma \tag{7}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{\sqrt{gr}} : \text{無次元化水平速度}$$

$$Z \equiv \frac{m}{2C_D A} \sqrt{\frac{r}{\beta}} \rho \bar{u} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{\beta}} \frac{\rho \bar{u}}{\Delta} \tag{8}$$

: チャップマンの Z 変数



(8) 式の Z 関数を \bar{u} で微分して

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} = Z \left(\frac{1}{\bar{u}} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\bar{u}} - \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} \right) = \frac{Z}{\bar{u}} + Z \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \frac{dt}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}}$$

(1), (7) 式から右辺第 2 項は

$$Z \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \frac{dt}{d\bar{u}} = \sqrt{\beta r} \sin \gamma$$

で表されるから Z 関数の微係数は次式で表される。

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} + \frac{Z}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} = \sqrt{\beta r} \sin \gamma \quad (9)$$

また経路角の変化率は

$$\frac{d\gamma}{d\bar{u}} = \frac{1}{\sqrt{\beta r} \cos \gamma} \frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} + \frac{Z}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} \right) \quad (10)$$

次に r 方向の速度の関係を微分して

$$\begin{aligned} v &= u \tan \gamma = \sqrt{gr} \bar{u} \tan \gamma \\ \frac{dv}{dt} &= \sqrt{gr} \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{d(\bar{u} \tan \gamma)}{d\bar{u}} = -g \sqrt{\beta r} \frac{\bar{u} Z}{\cos \gamma} \frac{1}{\cos \gamma} \left(\sin \gamma + \frac{\bar{u}}{\cos \gamma} \frac{d\gamma}{d\bar{u}} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式は (2) 式と等しいことから両式を等値して次の関係式を得る。

$$\sqrt{\beta r} \frac{\bar{u}^2 Z}{\cos^3 \gamma} \frac{d\gamma}{d\bar{u}} = 1 - \bar{u}^2$$

(10) 式を代入して整理すると

$$\frac{\bar{u}^2 Z}{\cos^4 \gamma} \frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} + \frac{Z}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} \right) = 1 - \bar{u}^2$$

以上から可変 Δ , 可変 L/D 飛行に対する修正チャップマンの方程式をまとめると次の通り。
原チャップマンの方程式との相違は下線部である。

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} + \frac{Z}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} &= \sqrt{\beta r} \sin \gamma \\ \bar{u} \frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} - \frac{dZ}{d\bar{u}} + \frac{Z}{\bar{u}} + \bar{u} \left\{ \underline{Z \left(\frac{1}{\Delta} \frac{d^2 \Delta}{d\bar{u}^2} \right) - Z \left(\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} \right)^2 + \Delta \frac{dZ}{d\bar{u}} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} \right)} \right\} &= \frac{1 - \bar{u}^2}{\bar{u} Z} \cos^4 \gamma \end{aligned} \quad (12)$$

(I) 軌道制御

再突入条件を ρ_E, V_E, γ_E とし 3つのフェーズに分割して軌道制御を行う。

- ① フェーズ0：弾道(等弾道係数)飛行(Δ_0 一定)
- ② フェーズ1：弾道(等空力荷重)飛行($\Delta_1(\bar{u})$ 可変)
- ③ フェーズ2：弾道(等弾道係数)飛行(Δ_2 一定) について考える。

仮定から $L/D=0$ 小経路角 $\gamma \cong 0 \rightarrow \cos \gamma \cong 1$ とする。

① フェーズ0：弾道(等弾道係数)飛行(Δ_0 一定)

再突入条件を ρ_E, V_E, γ_E 弾道係数を一定 $\Delta = \Delta_0$ とし経路角を一定 $\gamma = \gamma_E$ とする。この場合(12)式の左辺第4項、及び右辺は零となり、また(9)式 $dZ/d\bar{u} - Z/\bar{u} = \sqrt{\beta r} \sin \gamma_E$ に留意すると次式を得る。

$$\frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} = \frac{\sqrt{\beta r} \sin \gamma_E}{\bar{u}} \quad (13)$$

上式を積分して Z とその変化率を求めると次のとおり。但し $Z_E = 0$

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} = \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} \right)_E + \sqrt{\beta r} \sin \gamma_E \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \quad (14)$$

$$Z = \bar{u}_E \sqrt{\beta r} \sin \gamma_E \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \quad (15)$$

(8), (15)式から密度(高度)対速度がまた(9), (14), (15)から経路角が次式で表される。

$$\rho = 2 \beta \Delta \sin \gamma_E \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \quad (16)$$

$$\gamma = \gamma_E \quad (17)$$

空力荷重 G を Z 関数で表すと小経路角近似から

$$G \equiv \frac{\rho V^2}{2\Delta_0} = \frac{g r \rho \bar{u}^2}{2\Delta_0 \cos^2 \gamma} \approx g \sqrt{\beta r} \bar{u} Z \quad (18)$$

(15)式をもちいてフェーズ0の空力荷重を \bar{u} の関数で表す

$$G_0 = g \beta r \bar{u}_E^2 \sin \gamma_E \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right)^2 \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_E} \right) \quad (19)$$

(19)式の空力荷重の最大値は $dG_0/d(\bar{u}/\bar{u}_E) = 0$ から次の最大値をとる。

$$\ln \left(\frac{\bar{u}_{\max}}{\bar{u}_E} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$G_{0\max} = -\frac{g r \beta \bar{u}_E^2 \sin \gamma_E}{2e} \quad (20)$$

ここで $\bar{u}_E = u/\sqrt{gr} = V \cos \gamma_E / \sqrt{gr} \approx V_E / \sqrt{gr}$ と置けば

$$V_{\max}/V_E = \frac{1}{e^{1/2}}$$

$$G_{0\max} = -\frac{\beta V_E^2 \sin \gamma_E}{2e}$$

となり Allen, Eggers の 1 次オーダーの解に等しい

フェーズ 0 の終端状態 :

フェーズ 0 の終端状態を添字 0* でまたフェーズ 1 の開始状態を添字 *1 であらわす。フェーズ 0 の終端での空力荷重を G_m で表す。

$$\bar{u} = \bar{u}_{0*} = \bar{u}_{*1} = \bar{u}_a$$

$$Z_{0*} = \bar{u}_E \sqrt{\beta r} \sin \gamma_E \left(\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}_E} \right)^2 \ln \left(\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}_E} \right) \quad (21)$$

$$G_{0*} = g \beta r \bar{u}_E^2 \sin \gamma_E \left(\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}_E} \right)^2 \ln \left(\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}_E} \right) \equiv G_m \quad (22)$$

② フェーズ 1 : 弾道 (等空力荷重) 飛行 ($\Delta_1(\bar{u})$ 可変)

フェーズ 1 の飛行期間で空力荷重は一定 G_m とする。

$$G_1 = G_m \quad (23)$$

$$\text{ここで } B \equiv \frac{G_m}{g\sqrt{\beta r}} \quad (24)$$

と置くとフェーズ 1 での Z 及び Z の微係数は次式で表される。

$$Z = \frac{B}{\bar{u}} \quad (25)$$

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} = -\frac{B}{\bar{u}^2} \quad (26)$$

$$\frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} = \frac{2B}{\bar{u}^3} \quad (27)$$

弾道係数 Δ :

(12) 式, 及び (25) - (27) 式を代入すると弾道係数 Δ に関する 2 階変数係数微分方程式を得る。

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d^2 \Delta}{d\bar{u}^2} - \left(\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} \right)^2 - \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} \right) = \frac{1 - \bar{u}^2}{(G_m/g\sqrt{\beta r})^2} - \frac{4}{\bar{u}^2} \quad (28)$$

上記微分方程式を解く。ここで階数を下げるために $p \equiv \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}}$ と置くと p に関する 1 階常微分方程式となる。

$$\frac{dp}{d\bar{u}} - \frac{p}{\bar{u}} = \bar{u} \frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{p}{\bar{u}} \right) = \frac{1 - \bar{u}^2}{B^2} - \frac{4}{\bar{u}^2} \quad (29)$$

積分を実行して

$$\frac{p}{\bar{u}} = \frac{\ln \bar{u} - \frac{1}{2} \bar{u}^2}{B^2} + \frac{2}{\bar{u}^2} + \text{const}$$

初期条件 $\bar{u} = \bar{u}_a$ で (32) 式 $p_a = \bar{u}_a \sqrt{\beta r \sin \gamma_E} / B + 2 / \bar{u}_a$ を用いて定数を決定すると

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\bar{u}} = p = \frac{\bar{u}_a}{B^2} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_a} \right) \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_a} \right) + \frac{\bar{u}_a^3}{2B^2} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_a} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_a} \right)^2 \right\} + \frac{2}{\bar{u}_a} \left(\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}} \right) + \frac{\bar{u}_a \sqrt{\beta r}}{B} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_a} \right) \sin \gamma_E \quad (30)$$

さらに積分すると弾道係数は速度の関数として次式で表される。

$$\ln \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right) = 2 \left\{ 1 + C \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_a} \right)^2 \right\} \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_a} \right) + E \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_a} \right)^2 \right\} + \frac{C \bar{u}_a^2}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_a} \right)^4 \right\} \quad (31)$$

$$\text{但し } C = \bar{u}_a^2 / 4B^2 = \beta r \bar{u}_a^2 / 4(G_m/g)^2$$

$$E = C \left(1 - 2B \sqrt{\beta r \sin \gamma_E} - \bar{u}_a^2 \right) = C \left\{ 1 - 2(G_m/g) \sin \gamma_E - \bar{u}_a^2 \right\}$$

フェーズ0とフェーズ1の結合条件

フェーズ1の開始条件では

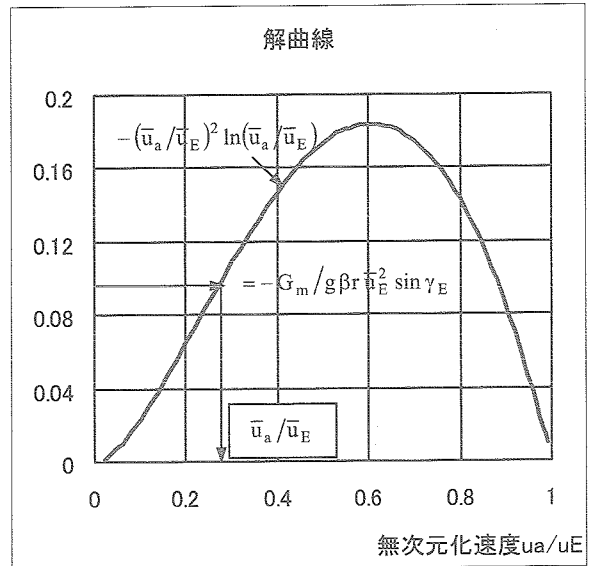
$$\bar{u} = \bar{u}_{0*} = \bar{u}_{*1} = \bar{u}_a$$

$$Z_{*1} = Z_a = \frac{B}{\bar{u}_a} = \frac{G_m}{g \sqrt{\beta r}} \frac{1}{\bar{u}_a} \quad (34)$$

フェーズ0の終了時とフェーズ1の開始時のZは等しいことから

$$Z_{*1} = Z_{0*} = Z_a \quad (35)$$

$$\left(\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}_E} \right)^2 \ln \left(\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}_E} \right) = \frac{G_m}{g \beta r \bar{u}_E^2 \sin \gamma_E} \quad (36)$$



G_m を与えて上式を逐次近似法により解くとフェーズ0とフェーズ1の切換え速度 \bar{u}_a が得られる。

フェーズ1の終了条件

$$\bar{u} = \bar{u}_{1*} = \bar{u}_{*2} = \bar{u}_b$$

$$Z_{1*} = Z_b = \frac{G_m}{g \sqrt{\beta r}} \frac{1}{\bar{u}_b} \quad (37)$$

$$\sin \gamma_{1*} = \sin \gamma_b = \sin \gamma_E + \frac{g}{G_m} \ln \left(\frac{\bar{u}_b}{\bar{u}_a} \right) + \frac{g \bar{u}_a^2}{2G_m} \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{u}_b}{\bar{u}_a} \right)^2 \right\} \quad (38)$$

- ③ フェーズ 2 : 弾道(等弾道係数)飛行(Δ_2 一定)
弾道係数一定の弾道飛行はフェーズ 0 と同様に

$$\frac{d^2Z}{d\bar{u}^2} = \frac{\sqrt{\beta r} \sin \gamma_b}{\bar{u}} \quad (39)$$

を積分して Z と Z の変化率は次式で与えられる。

$$\frac{dZ}{d\bar{u}} = \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} \right)_b + \sqrt{\beta r} \sin \gamma_b \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_b} \right) \quad (40)$$

$$\frac{Z}{\bar{u}} = \frac{Z_b}{\bar{u}_b} + \sqrt{\beta r} \sin \gamma_b \frac{\bar{u}}{\bar{u}_b} \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_b} \right) \quad (41)$$

これより密度(高度)対速度, 及び経路角は次の通り。

$$\rho = \rho_b + 2\Delta_2 \beta \sin \gamma_b \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_b} \right) \quad (42)$$

$$\gamma = \gamma_b \quad (43)$$

空力荷重 G :

フェーズ 2 の空力荷重は $G = g\sqrt{\beta r} \bar{u} Z$ から速度の関数として次のように表される。

$$G_2 = g\sqrt{\beta r} \bar{u}_b^2 \left\{ \frac{Z_b}{\bar{u}_b} + \sqrt{\beta r} \sin \gamma_b \ln \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_b} \right) \right\} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_b} \right)^2 \quad (44)$$

(44) 式 of 空力荷重の最大値は $dG_2/d(\bar{u}/\bar{u}_b) = 0$ から

$$\ln \left(\frac{\bar{u}_{\max}}{\bar{u}_b} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{Z_b}{\bar{u}_b \sqrt{\beta r} \sin \gamma_b} \quad (45)$$

において次の最大値をとる。

$$G_{2\max} = -\frac{g\beta r \bar{u}_b^2 \sin \gamma_b}{2} \exp \left(-1 - \frac{2Z_b}{\bar{u}_b \sqrt{\beta r} \sin \gamma_b} \right) \quad (46)$$

フェーズ 1 とフェーズ 2 の結合条件 :

フェーズ 2 切換え後空力荷重が再びの増加して G_m を超えないようにフェーズ 2 切換え後空力荷重の最大値がフェーズ 1 終了時の空力荷重 G_m と一致するよう設定する。

$\bar{u}_{\max} = \bar{u}_b$ とおくと

$$G_{2\max} = -\frac{g\beta r \bar{u}_b^2 \sin \gamma_b}{2} \equiv G_m \quad (47)$$

$$\left(\frac{\bar{u}_b}{\bar{u}_a} \right)^2 \left[\sin \gamma_E + \frac{g}{G_m} \ln \left(\frac{\bar{u}_b}{\bar{u}_a} \right) + \frac{g\bar{u}_a^2}{2G_m} \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{u}_b}{\bar{u}_a} \right)^2 \right\} \right] = \frac{2G_m}{g\beta r \bar{u}_a^2} \quad (48)$$

G_m を与えて上式を逐次近似法により解くとフェーズ 1 とフェーズ 2 の切換え速度 \bar{u}_b が得られる。

切換え速度 \bar{u}_b が得られると Δ モジュレーションを行わない場合の最大空力加重 $G_{0\max}$ との比は次式で表される。

$$\frac{G_m}{G_{0\max}} = \frac{\sin\gamma_b}{\sqrt{\beta r} \sin\gamma_E} \left(\frac{\bar{u}_a}{\bar{u}_E} \right)^2 \left(\frac{\bar{u}_b}{\bar{u}_a} \right)^2$$

ただし

$$\sin\gamma_b = \sin\gamma_E + \frac{g}{G_m} \ln \left(\frac{\bar{u}_b}{\bar{u}_a} \right) + \frac{g\bar{u}_a^2}{2G_m} \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{u}_b}{\bar{u}_a} \right)^2 \right\}$$

8-4. 等高度・等高度変化率軌道制御

これまで揚抗比 L/D が一定とした場合の揚力飛行について記述したが、これらの軌道は初期飛行状態量(初期高度, 速度, 経路角)が与えられると、揚抗比 L/D が固定であれば、軌道および空力荷重, 空力加熱率等は一意的に決まってしまう。そこで本章では高度変化率(降下率), 経路角, 空力荷重, 空力荷重等に制約を加えて、これらの制約に沿って飛行するように揚抗比 L/D を変化させる軌道制御について考える。

(I) 等高度・高度変化率軌道

一定高度及び一定高度変化率飛行の解析解を揚抗比を可変として求める。ただし空力が重力に比べて十分大きい飛行領域とし $D/m \gg g \sin \gamma$ とする。

速度座標における運動方程式：

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \tag{1}$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \tag{2}$$

$$\frac{ds}{dt} = V \tag{3}$$

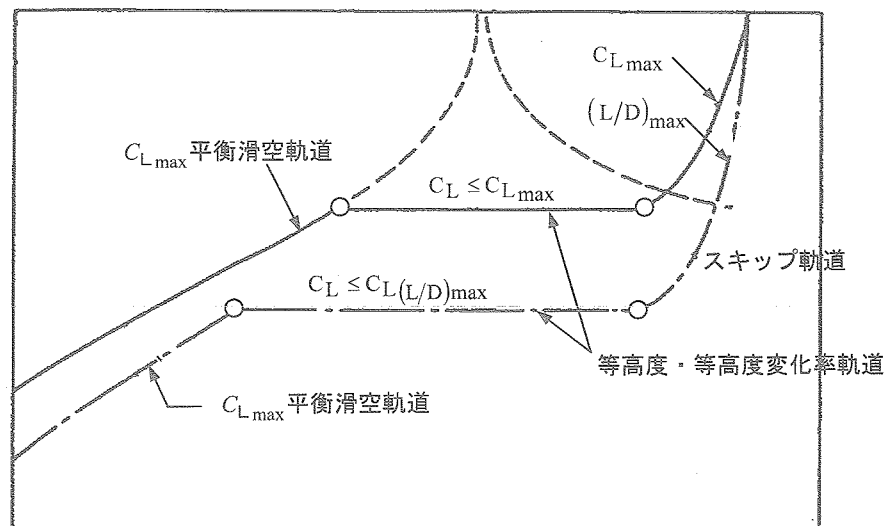
$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \tag{4}$$

$$\frac{dR}{dt} = V \cos \gamma \tag{5}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\beta \frac{dh}{dt} \tag{6}$$

$$\Delta = m/C_D A : \text{弾道係数} \tag{7}$$

但し ρ_C, V_C は初期値



(A) 一定高度飛行の条件および仮定

一定高度飛行の条件は次の通り。また空気力は重力項に比べて十分大きいと仮定する。

$$\text{(一定高度飛行の条件)} \quad h = h_c : \text{一定} \quad (8)$$

$$\text{(仮定)} \quad D/m \gg g \sin \gamma \quad (9)$$

①高度(密度), 高度変化率

(8) 式から高度, 密度は一定

(a) 高度

$$h = h_c \quad (10)$$

$$\rho = \rho_c \quad (11)$$

(b) 高度変化率: 一定高度飛行であることから高度変化率は 0

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad (12)$$

②飛行経路角/飛行経路角変化率

(4) 式 $dh/dt = V \sin \gamma = 0$ から高度一定で飛行する為には経路角, 経路角変化率は 0 となる。

$$\gamma = \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad (13)$$

③加速度

(9) 式の仮定 $D/m \gg g \sin \gamma$ を用いて (1) 式から重力項を無視し, g 単位で加速度を表すと

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta g} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 = \left(\frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta g} \right) \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 = \kappa \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \quad (14)$$

右辺の係数 κ は初期抗力加速度を g で割った無次元定数である。

$$\kappa \equiv \frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta g} = \left(\frac{D}{mg} \right)_c \quad (15)$$

④ 抗力加速度/揚力加速度

重力項を無視したことから加速度と抗力加速度は等しい。揚力加速度は (2) 式から得ることができる。ここで (13) 式 $\gamma = d\gamma/dt = 0$ であるから揚力は遠心力と重力の差で表される。

$$\frac{D}{mg} = \kappa \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \quad (16)$$

$$\frac{L}{mg} = 1 - \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \quad (17)$$

⑤ 要求揚抗比 L/D

$L/D = (L/m)/(D/m)$, (16), (17) 式から一定高度飛行を行うのに必要な揚抗比 L/D は次式で表される。

$$\frac{L}{D} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \left(\frac{V_c}{V} \right)^2 - \frac{V_c^2}{gr} \right\} \quad (18)$$

$$\kappa \equiv \frac{r\rho_c V_c^2}{2\Delta gr}$$

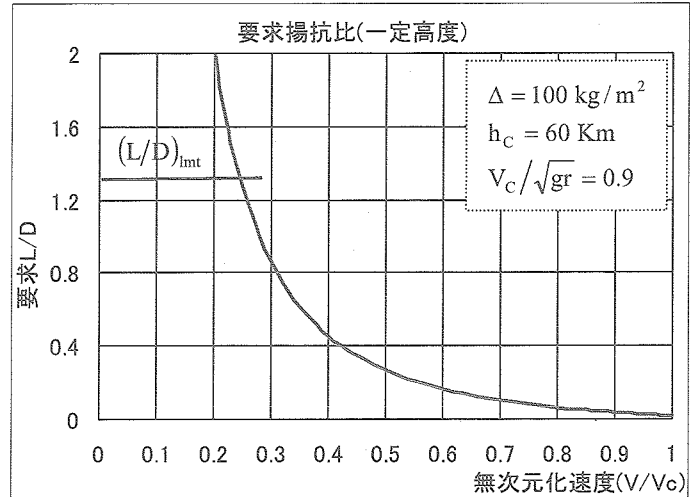
$$\Delta = 100 \text{ Kg/m}^2$$

$$r = 6378 \times 10^3 \text{ m}$$

$$h_c = 60 \text{ Km}$$

$$\rho_c = 1.225 \times \exp(-60/7.6128) \\ = 4.63 \times 10^{-4} \text{ Kg/m}^3$$

$$V_c/\sqrt{gr} = 0.9$$



の時揚抗比 L/D を右図に示す。

要求揚抗比 L/D は速度の 2 乗に逆比例して大きくする必要がある。

⑥ 空力荷重

空力荷重 G は g 単位で次式で表される $G/g = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/mg)$ (16) 式の D/mg (18) 式の L/D から無次元化速度 V/V_c の関数で表すと次式となる。

$$\frac{G}{g} = \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} \left(\frac{D}{mg} \right) = \sqrt{\kappa^2 \left(\frac{V}{V_c} \right)^4 + \left\{ 1 - \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \right\}^2} \quad (19)$$

⑦ 澱点空力加熱率

澱点の空力加熱率を次式で定義する。 $dQ/dt = K_Q \rho^{1/2} V^3$ 一定高度飛行の場合には $\rho = \rho_c$ から澱点加熱率は次式で表される。

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho_c^{1/2} V_c^3 \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \quad (20)$$

$V = V_c$ での澱点加熱率を $(dQ/dt)_C$ とすれば $(dQ/dt)_C = K_Q \rho_c^{1/2} V_c^3$ であるから (20) 式を $(dQ/dt)_C$ で無次元化すると

$$\frac{(dQ/dt)}{(dQ/dt)_C} = \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \quad (21)$$

⑧ 飛行時間 t

(1)式で重力項を無視して、一定高度飛行の条件 $\rho = \rho_c$ を用いると次式を得る。

$$\frac{dt}{dV} = -\frac{2\Delta}{\rho_c} \frac{1}{V^2}$$

上式は容易に積分できて次式を得る。初期時刻を 0 とすれば

$$t = \frac{2\Delta}{\rho_c V_C} \left(\frac{V_C}{V} - 1 \right) \quad (22)$$

これより速度に逆比例して大きくなる。 $t_c = 2\Delta/\rho_c V_C$ と置き t_c で無次元化すると次式で表される。

$$\frac{t}{t_c} = \frac{V_C}{V} - 1$$

係数 $2\Delta/\rho_c V_C$, $V_C/(D/m)_C$ は時間の次元 sec を持ち、そのオーダーは次の通り。

$$\Delta = 100 \text{ Kg/m}^2$$

$$h_c = 60 \text{ Km} \quad \rho_c = 4.63 \times 10^{-4} \text{ Kg/m}^3$$

$$V_C = 0.9\sqrt{gr} = 0.9 \times 7910 = 7119 \text{ m/sec}$$

の場合には約 1 分である

$$t_c = 2\Delta/\rho_c V_C = 2 \times 100 / 4.63 \times 10^{-4} \times 7119 = 60.68 \text{ sec}$$

⑨ 飛行距離 飛行レンジ

(1)式で重力を無視して、(3)式を用いて独立変数を時間 t から飛行距離 s に変換すると次式を得る。また経路角が 0 より飛行距離 s と飛行レンジ R は等しい。

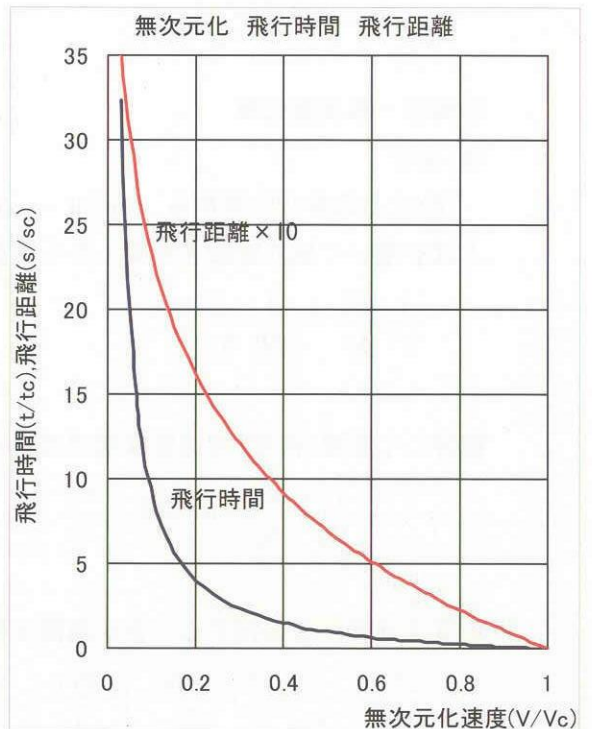
$$\frac{1}{V} \frac{dV}{ds} = -\frac{\rho_c}{2\Delta}$$

右辺は定数であるから容易に積分できる。初期値を 0 として積分を行うと次式を得る。

$$\ln\left(\frac{V}{V_C}\right) = -\frac{\rho_c}{2\Delta} s$$

$$s = R = -\frac{2\Delta\beta}{\beta\rho_c} \ln\left(\frac{V}{V_C}\right) \quad (23)$$

これより飛行距離 s は無次元化速度の対数に比例する。また係数 $\Delta\beta/\rho_c$ は無次元定数 $1/\beta$ は距離の次元を持ちこれを $s_c = R_c = 2\Delta/\rho_c$ と置き、



無次元化数すると次式を得る。

$$\boxed{\frac{s}{s_c} = \frac{R}{R_C} = \ln\left(\frac{V_C}{V}\right)} \quad (24)$$

$$s_c = R_C = 2\Delta/\rho_c = 2 \times 100 / 4.63 \times 10^{-4} = 431.97 \text{ Km}$$

(B) 一定高度変化率飛行

一定高度変化率の条件は次の通り。また空気力は重力項に比べて十分大きいと仮定する。

$$\text{(一定高度変化率の条件)} \quad dh/dt = V \sin \gamma = \dot{h}_C \quad (25)$$

$$\text{(仮定)} \quad D/m \gg g \sin \gamma \quad (26)$$

α 、 κ 、 η を以下のように定義する。

$$\alpha \equiv \frac{2\Delta\beta}{\rho_c}$$

$$\kappa \equiv \frac{r\rho_c}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr}$$

$$\eta \equiv \beta r \frac{V_C^2}{gr}$$

(25)式 $V \sin \gamma = \dot{h}_C$ を微分して $\ddot{h}_C = 0$ から一定高度変化率飛行では次式が成り立つ。

$$V \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{dV}{dt} \tan \gamma \quad (27)$$

①高度・高度変化率

(a)高度

(6)式と条件(25)式から $dp/dt = -\rho\beta(dh/dt) = -\rho\beta\dot{h}_C$ を得る。

上式を用いて独立変数を時間 t から密度 ρ に変換すると

$$\frac{1}{V^2} \frac{dV}{d\rho} = \frac{1}{2\Delta\beta} \frac{1}{\dot{h}_C} \quad (28)$$

積分して密度(高度)対速度は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(1 + \frac{\alpha\dot{h}_C}{V_C}\right) - \frac{\alpha\dot{h}_C}{V_C} \left(\frac{V_C}{V}\right) \quad (29)$$

密度は速度に逆比例する。また海面上密度に対する密度比を求めると次の通り。

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha\dot{h}_C}{V_C}\right) - \frac{\alpha\dot{h}_C}{V_C} \left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \quad (30)$$

これより高度 h は速度の関数として次式で表される。

$$h = h_c - \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_c} \right) - \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_c} \left(\frac{V_c}{V} \right) \right\} \quad (31)$$

ただし、係数 $\alpha \left(\dot{h}_c / V_c \right)$ は弾道係数、初期値により決まる定数である。

(b) 高度変化率

高度変化率は一定高度変化率の条件 (25) 式から

$$\frac{dh}{dt} = \dot{h}_c < 0 \quad (32)$$

② 経路角・経路角変化率

(a) 経路角

経路角は (25) 式 $V \sin \gamma = \dot{h}_c$ から経路角の正弦値 $\sin \gamma$ は速度に逆比例する。

$$\sin \gamma = \frac{\dot{h}_c}{V_c} \left(\frac{V_c}{V} \right) \quad (33)$$

(b) 経路角変化率：

(1) 式 $dV/dt = -\rho V^2 / 2\Delta$ 、および (27) 式から

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{dV}{dt} \frac{1}{V} \tan \gamma = \frac{\rho V}{2\Delta} \tan \gamma \quad (36)$$

(2) 式 ρ/ρ_c を用いると経路角変化率は次式で表される。

$$\frac{d\gamma}{dt} = \beta \left\{ \frac{V_c}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_c} \right) \left(\frac{V}{V_c} \right) - \dot{h}_c \right\} \tan \gamma \quad (37)$$

(c) 密度に関する変化率

(36) 式で $d\rho/dt = -\rho\beta V \sin \gamma$ を用いて独立変数を t から密度に変換すると

$$\frac{d \sin \gamma}{d\rho} = -\frac{1}{2\Delta\beta} \quad (38)$$

積分して $\sin \gamma_c = \dot{h}_c / V_c$ を用いると

$$\sin \gamma = \frac{1}{\alpha} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_c} \right) - \frac{\rho}{\rho_c} \right\} \quad (39)$$

上式から一定高度変化率の飛行では経路角の正弦値 $\sin \gamma$ は密度に比例する。(次項 $\sin \gamma = K\rho$ の項参照)

④ 加速度/抗力加速度 D/m

・ 加速度

(9) 式の仮定 $D/m \gg g \sin \gamma$ を用いて (1) 式から重力項を無視し, g 単位で加速度を表すと

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{\rho V^2}{2\Delta g} = \left(\frac{r\rho_c}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 = \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \quad (40)$$

(29) 式の ρ/ρ_c を代入して

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \beta r \frac{V_C^2}{gr} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\dot{h}_c}{V_C} \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right) \quad (41)$$

上式は速度 V/V_C に関する 2 次式であり

$$\dot{h}_c < -\frac{\rho_c V_C}{2\Delta\beta}$$

の場合, 加速度は最大値を有する。最大値を取る条件は

$$\left(\frac{V}{V_C} \right) = \frac{1}{2} \frac{\alpha \dot{h}_c / V_C}{(1 + \alpha \dot{h}_c / V_C)} \quad (42)$$

最大値を取る速度, また密度は (29) 式に代入して次式で与えられる。

$$\left(\frac{V}{V_C} \right)_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\alpha \dot{h}_c / V_C}{(1 + \alpha \dot{h}_c / V_C)} \quad (43)$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)_{\max} = -(1 + \alpha \dot{h}_c / V_C) \quad (44)$$

加速度の最大値は次の値をとる。

$$\left(-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} \right)_{\max} = \frac{\eta}{4} \frac{\alpha (\dot{h}_c / V_C)^2}{(1 + \alpha \dot{h}_c / V_C)} \quad (45)$$

⑤ 抗力加速度, 揚力加速度

(a) 抗力加速度

(1) 式から重力項を無視したことから加速度と抗力加速度は等しく次式で表される。

$$\frac{D}{mg} = \eta \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\dot{h}_c}{V_C} \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right) \quad (46)$$

(b) 揚力加速度

$L/m = V(dy/dt) - (V^2/r - g)\cos\gamma$, および (37) 式 dy/dt から

$$\frac{L}{mg} = \eta \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\dot{h}_c}{V_C} \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right) \tan\gamma - \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos\gamma \quad (47)$$

ただし $\tan\gamma$, $\cos\gamma$ は (34), (35) 式。また係数 $\beta r (V_C^2/gr)$ は無次元定数。

⑦ 要求揚抗比

一定高度変化率で飛行するのに要求される揚抗比は $L/D = (L/mg) / \{D/mg\}$ に (46) 式, (47) 式を代入して次式で与えられる。

$$\frac{L}{D} = \tan\gamma - \frac{\frac{1}{\eta} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos\gamma}{\left\{ \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\dot{h}_c}{V_C} \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)} \quad (48)$$

上式で高度変化率が 0 の時 $\dot{h}_c = 0$, $\gamma = 0$ と置くと

$$\frac{L}{D} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \left(\frac{V_C}{V} \right)^2 - \frac{V_C^2}{gr} \right\}$$

で表され一定高度飛行の要求揚抗比と一致する。ただし $\kappa = (2\Delta/r\rho_c) / (V_C^2/gr)$

⑧ 空力荷重

空力荷重 G は g 単位で次式で表される $G/g = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/mg)$ (46) 式の D/mg (48) 式の L/D から無次元化速度 V/V_C の関数で表すと次式となる。

$$\frac{G}{g} = \eta \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\dot{h}_c}{V_C} \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right) \times \sqrt{1 + \left[\frac{\frac{1}{\eta} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos\gamma}{\left\{ \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\dot{h}_c}{V_C} \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)} \right]^2} \quad (49)$$

⑨ 澱点空力加熱率

澱点の空力加熱率を次式で定義する。 $dQ/dt = K_Q \rho^{1/2} V^3$ 一定高度変化率飛行の場合には (29) 式の ρ/ρ_c を代入して次式で表される。

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho_c^{1/2} V_C^3 \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3$$

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho_c^{1/2} V_C^3 \left\{ 1 - \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \left(\frac{V_C}{V} - 1 \right) \right\}^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \quad (50)$$

$V = V_C$ での澱点加熱率を $(dQ/dt)_C$ とすれば $(dQ/dt)_C = K_Q \rho_c^{1/2} V_C^3$ であるから (20) 式を $(dQ/dt)_C$ で無次元化すると

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_C} = \sqrt{\left\{ \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_C}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\alpha \dot{h}_C}{V_C} \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)^5} \quad (51)$$

無次元化速度 V/V_C で微分して澱点加熱率は次の条件で最大値をとる。

$$\frac{d}{d(V/V_C)} \left\{ \frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_C} \right\}^2 = 6 \left(\frac{V}{V_C} \right)^4 \left\{ \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_C}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{5}{6} \frac{\alpha \dot{h}_C}{V_C} \right\} = 0 \quad (52)$$

上式から澱点加熱率は次式のとき最大となる。

$$\left(\frac{V}{V_C} \right)_{\max} = \frac{5}{6} \frac{\alpha \dot{h}_C / V_C}{1 + \alpha \dot{h}_C / V_C} \quad (53)$$

$$\left\{ \frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_C} \right\}_{\max} = \left\{ \frac{5}{6} \frac{\alpha \dot{h}_C / V_C}{1 + \alpha \dot{h}_C / V_C} \right\}^3 \sqrt{-\frac{1}{5} (1 + \alpha \dot{h}_C / V_C)} \quad (54)$$

ただし $1 + (2\Delta\beta/\rho_c)(\dot{h}_C/V_C) < 0$

⑩ 飛行時間 t

(1) 式で仮定 $D/m \gg g \sin \gamma$ から重力項を無視すると次式を得る。

$$\frac{dt}{dV} = -1/(D/m) \quad (55)$$

$$a = -\beta \dot{h}_c - \rho_c V_C / 2\Delta = -\frac{\rho_c V_C}{2\Delta} \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \right)$$

$$b = \beta \dot{h}_c$$

と置くと、(46) 式の抗力加速度 D/m を代入すると $b \neq 0$ のとき右辺は次式で表される。

$$\frac{dt}{d(V/V_C)} = \frac{1}{\{a(V/V_C) + b\}(V/V_C)} = \frac{1}{b} \left\{ \frac{1}{V/V_C} - \frac{a}{a(V/V_C) + b} \right\} \quad (56)$$

(56) 式を積分すると飛行時間は次式で表される。

$$t = -\frac{1}{\beta \dot{h}_c} \ln \left\{ \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \right) - \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \left(\frac{V_C}{V} \right) \right\} \quad (57)$$

$-1/\beta \dot{h}_c > 0$ は時間の次元を有するから $t_c = -1/\beta \dot{h}_c$ と置けば

$$\frac{t}{t_c} = \ln \left\{ \left(1 + \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \right) - \frac{\alpha \dot{h}_c}{V_C} \left(\frac{V_C}{V} \right) \right\} \quad (58)$$

$b = 0$ の場合 (一定高度飛行の場合) には

$$\frac{dt}{dV} = -\frac{1}{a(V/V_C)^2} = -\frac{2\Delta}{\rho_c} \frac{1}{V^2}$$

となり (22) 式と一致する。

⑩ 飛行距離/飛行レンジ

(a) 飛行距離

(3) 式 $ds/dt = V$ を重力項を無視した (1) 式 $dV/dt = -\rho V^2/2\Delta$ から独立変数を時間 t から速度 V に変換すると

$$\frac{ds}{dV} = -\frac{2\Delta}{\rho V} \quad (59)$$

(29) 式右辺 ρV を速度 V の関数で表すと速度の 1 次式で表される。

$$\rho V = \rho_c V_C \left\{ \left(1 + \frac{\alpha h_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\alpha h_c}{V_C} \right\}$$

$$\frac{ds}{d(V/V_C)} = -\frac{2\Delta}{\rho_c} \frac{1}{\left\{ \left(1 + \frac{\alpha h_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\alpha h_c}{V_C} \right\}} = -\frac{2\Delta}{\rho_c} \frac{1}{\{a(V/V_C) + b\}} \quad (60)$$

ただし、 $a = 1 + \alpha h_c/V_C < 0$: 定数、 $b = -\alpha h_c/V_C > 0$: 定数

上式を積分すると初期値を 0 として次式で表される。

$$s = -\frac{2\Delta}{\rho_c} \frac{1}{a} \ln \left\{ \frac{a(V/V_C) + b}{b} \right\} \quad (61)$$

a, b を代入して飛行距離 s は次式で表される。

$$s = -\frac{1}{\beta} \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha h_c}{V_C} \right)} \ln \left\{ \left(1 + \frac{\alpha h_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\alpha h_c}{V_C} \right\} \quad (62)$$

$\alpha = 2\Delta\beta/\rho_c$ は無次元定数, $1/\beta$ は距離の次元を持つから $s_c = \alpha/\beta$ で無次元化すると

$$\frac{s}{s_c} = -\frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha h_c}{V_C} \right)} \ln \left\{ \left(1 + \frac{\alpha h_c}{V_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) - \frac{\alpha h_c}{V_C} \right\}$$

一定高度飛行 $\dot{h}_c = 0$ の時には上式は

$$\frac{s}{s_c} = \ln\left(\frac{V_c}{V}\right)$$

となり(23)式と一致する。

(b) 飛行レンジ R

(5) 式 $dR/dt = V \cos\gamma$ を重力項を無視した(1) 式 $dV/dt = -\rho V^2/2\Delta$ から独立変数を時間 t から速度 V に変換すると

$$\frac{dR}{dV} = -2\Delta \frac{\cos\gamma}{\rho V}$$

高度変化率一定の条件 $\dot{h}_c = V \sin\gamma$ から余弦値は $\cos\gamma = \sqrt{1 - (\dot{h}_c/V)^2}$ となる。また ρV は(60) 式を用いると

$$\frac{dR}{d(V/V_c)} = -2\Delta V_c \frac{\sqrt{(V/V_c)^2 - (\dot{h}_c/V_c)^2}}{(V/V_c)\{a(V/V_c)+b\}}$$

$b \neq 0$ の時上式は次のように変形できる。

$$\frac{dR}{d(V/V_c)} = -2\Delta V_c \frac{a}{b} \left\{ \frac{\sqrt{(V/V_c)^2 - (\dot{h}_c/V_c)^2}}{a(V/V_c)} - \frac{\sqrt{(V/V_c)^2 - (\dot{h}_c/V_c)^2}}{\{a(V/V_c)+b\}} \right\}$$

ここで、 $x = V/V_c$ 、 $c = (\dot{h}_c/V_c)^2$ と置くと

$$\frac{dR}{dx} = -2\Delta V_c \frac{1}{b} \left(\frac{\sqrt{x^2 - c}}{x} - \frac{a\sqrt{x^2 - c}}{ax + b} \right)$$

上式を積分して飛行レンジは次式で表される。

$$R = -2\Delta V_c \frac{1}{b} \left\{ \int_x^1 \frac{\sqrt{x^2 - c}}{x} dx - a \int_x^1 \frac{\sqrt{x^2 - c}}{ax + b} dx \right\} = \frac{1}{\beta} \frac{V_c}{\dot{h}_c} \{ I_A - I_B \}$$

右辺係数は距離の次元を持ち、 I_A, I_B は積分公式から次式で表される。

$$I_A = \int_x^1 \frac{\sqrt{x^2 - c}}{x} dx = \left[\sqrt{x^2 - c} - \sqrt{c} \ln \left| \frac{-2c - 2\sqrt{-c(x^2 - c)}}{x} \right| \right]_x^1$$

$$I_B = a \int_x^1 \frac{\sqrt{x^2 - c}}{ax + b} dx = \left[\sqrt{x^2 - c} - \frac{b}{a} \ln \left| 2x + 2\sqrt{x^2 + c} \right| + \frac{\sqrt{k}}{a} \ln \left| \frac{-2b(ax + b) + 2k - 2a\sqrt{k(x^2 - c)}}{ax + b} \right| \right]_x^1$$

$$(k = b^2 - ca^2 \geq 0)$$

⑫ 等高度/高度変化率飛行軌道の例

宇宙機の再突入に際して最初から一定高度及び一定高度変化率の条件で飛行する場合は少なく。再突入時は一定揚抗比 L/D でスキップ飛行(項参照)を行いスキップ飛行の底部(プルアップ時)近傍でこれらの条件を保って飛行する場合を想定する。また一定高度及び一定高度変化率飛行の終端で平衡滑空飛行に遷移するものとする。

1) フェーズ1: 一定揚抗比飛行

機体の弾道係数を Δ , 揚抗比を L/D とし, 初期速度を V_E , 再突入角を γ_E とすると、一定揚抗比 L/D 飛行では密度(高度)対速度は次式で与えられる

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\Delta\beta}{\rho_{SL}} \left\{ 2\gamma_E - \frac{L}{D} \ln\left(\frac{V}{V_E}\right) \right\} \ln\left(\frac{V}{V_E}\right)$$

速度範囲 $V_E \exp\{\gamma_E/(L/D)\} \leq V \leq 0.999V_E \exp\{\gamma_E/(L/D)\}$ はプルアップ時の速度。飛行終端点での速度 V_C (上記速度範囲) とすれば終端点での密度 ρ_C は

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_C}{\rho_{SL}} \left\{ \left(1 + \frac{2\Delta\beta}{\rho_C} \frac{\dot{h}_C}{V_C} \right) - \frac{2\Delta\beta}{\rho_C} \frac{\dot{h}_C}{V_C} \left(\frac{V_C}{V} \right) \right\}$$

2) フェーズ2: 等高度/高度変化率飛行

(ρ_C, V_C) を初期値とする等高度/高度変化率飛行は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_C} = 1 + \frac{\alpha\dot{h}_C}{V_C} \left(1 - \frac{V_C}{V} \right)$$

等高度/高度変化率飛行の終端速度を $V = V_*$ とすれば終端点での密度 ρ_* は

$$\frac{\rho_*}{\rho_C} = 1 + \frac{2\Delta\beta}{\rho_C} \frac{\dot{h}_C}{V_C} \left(1 - \frac{V_C}{V_*} \right) \approx \frac{2\Delta\beta}{\rho_C} \frac{\dot{h}_C}{V_C} \left(1 - \frac{V_C}{V_*} \right)$$

一定 L/D 平衡滑空飛行に移行するものとする。

3) フェーズ3: 一定 L/D 平衡滑空飛行

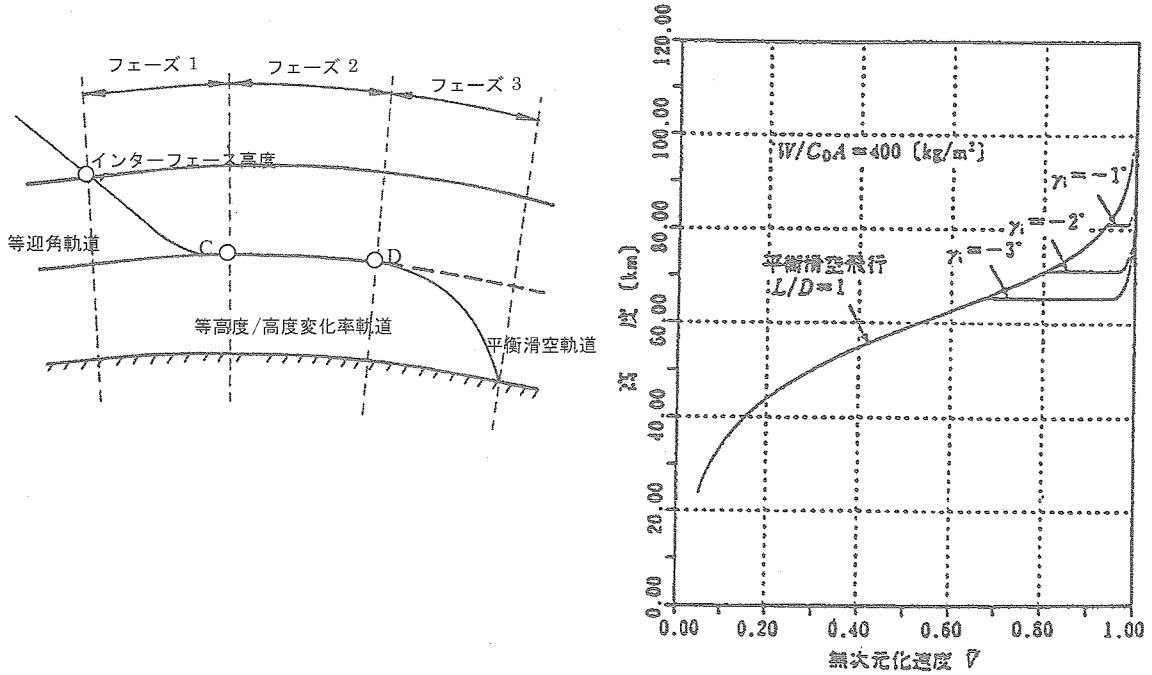
(ρ_*, V_*) を初期値とする一定 L/D 平衡滑空飛行は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_*}{\rho_{SL}} \left\{ \frac{gr}{V_E^2} \left(\frac{V_E}{V} \right)^2 - 1 \right\} / \left\{ \frac{gr}{V_E^2} \left(\frac{V_E}{V_*} \right)^2 - 1 \right\}$$

L/D 一定時要求バンク角は $\{ (L/D) \cos \phi_B \}_C = (2\Delta/r\rho_*) (gr/V_*^2 - 1)$ から次式で表される。

$$\{ \cos \phi_B \}_C = \frac{\Delta}{r\rho_*} \frac{2}{L/D} \left(\frac{gr}{V_*^2} - 1 \right)$$

一定高度飛行の解析例を下図に示す。



<補足>

$$\int \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{px + q} dx = \frac{1}{p} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{2aq - bp}{2p^2} I[0, -1] + \frac{aq^2 - bpq + cp^2}{p^2} I[-1, -1]$$

$$I[0, -1] = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| \quad (a \geq 0)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \sin^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (a \leq 0)$$

$$k = aq^2 - bpq + cp^2$$

$$I[-1, -1] = \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \left| \frac{(bp - 2aq)(px + q) + 2k - 2p\sqrt{k(ax^2 + bx + c)}}{px + q} \right| \quad (k \geq 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sin^{-1} \left(\frac{(bp - 2aq)(px + q) + 2k}{\sqrt{b^2 - 4ac} p |px + q|} \right) \quad (k \leq 0)$$

$$= \frac{2p\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(2aq - bp)(px + q)} \quad (k = 0)$$

8-5. 等経路角軌道制御

経路角が一定で飛行する場合について考察する。弾道軌道の初期段階では遠心力と重力が釣り合って一定経路角で飛行するが、ここでは揚力と遠心力の和が重力と釣り合って飛行する。速度方向に垂直方向の運動方程式から次のように表される。

$$\frac{L}{m} + \frac{V^2}{r} \cos \gamma = g \cos \gamma$$

揚力 遠心力 重力

運動方程式：

時間に関する運動方程式を $dp/dt = -\beta \rho V \sin \gamma$ を用いて独立変数を時刻から密度に変換すると次のように表される。

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{2\beta \Delta \sin \gamma} \quad (1)$$

$$\frac{d \cos \gamma}{dp} - \frac{1}{\beta r} \frac{\cos \gamma}{\rho} \left(1 - \frac{gr}{V^2} \right) = \frac{1}{2\beta \Delta} \left(\frac{L}{D} \right) \quad (2)$$

$$\frac{ds}{dp} = -\frac{1}{\beta \rho \sin \gamma} \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dp} = -\frac{1}{\beta \rho \tan \gamma} \quad (4)$$

$$\text{(一定飛行経路角飛行の条件)} \quad \gamma = \gamma_c \quad (5)$$

$$\text{(仮定)} \quad D/m \gg g \sin \gamma \quad (6)$$

一定飛行経路角飛行の条件から経路角変化率は一定である。

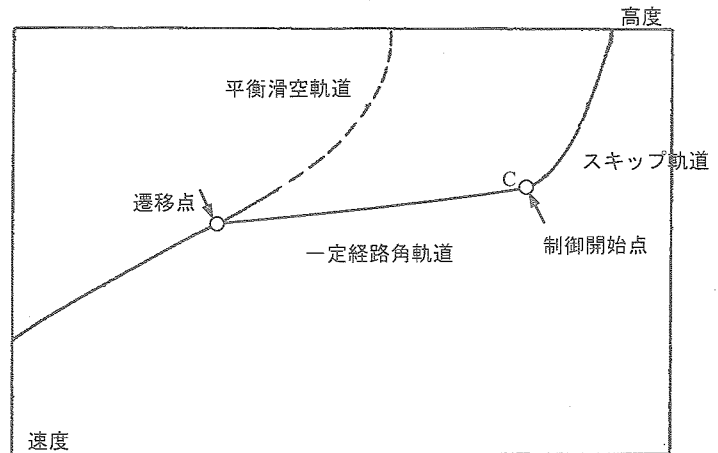
$$d\gamma/dt = 0 \quad (7)$$

① 高度/高度変化率

(a) 高度

弾道パラメータ a を $a = -1/2\Delta\beta\sin\gamma_c$ で定義すると(1)式は次式で表される。

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = -a \quad (8)$$



右辺は定数であるから容易に積分できて

$$\ln\left(\frac{V}{V_C}\right) = -a(\rho - \rho_c) \quad (9)$$

これより速度は密度の関数として次式で表される。

$$\frac{V}{V_C} = \exp\{-a(\rho - \rho_c)\} \quad (10)$$

初期密度あるいは海面上密度との比は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_c} = 1 + \frac{1}{a\rho_c} \ln\frac{V_C}{V} \quad (11)$$

また(10)式を用いると高度 h は速度の関数として次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left\{ 1 + \frac{1}{a\rho_c} \ln\frac{V_C}{V} \right\} \quad (13)$$

$$h = h_c - \frac{1}{\beta} \ln\left\{ 1 + \frac{1}{a\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \quad (14)$$

(b) 高度変化率

高度変化率は $dh/dt = V \sin\gamma$ で表され条件(5)式から次式で表される。

$$\frac{dh}{dt} = V \sin\gamma_c \quad (15)$$

② 飛行経路角/飛行経路角変化率

$$\gamma = \gamma_c \quad (16)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad (17)$$

③ 加速度, 抗力加速度

(6) 式の仮定 $D/m \gg g \sin\gamma$ から重力項を無視し加速度 (g 単位) 次式で表され, 加速度と抗力加速度は等しい。

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{D}{mg} = \frac{\rho V^2}{2\Delta g} = \frac{r\rho_{SL}}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 \quad (18)$$

(10) 式の速度, (13) 式の密度を代入すると速度あるいは密度の関数として表される。

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \kappa \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin\gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 = \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \exp\left\{ \frac{\rho_c}{\Delta\beta \sin\gamma_c} \left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right) \right\} \quad (20)$$

上式から加速度は最大値を持つ。(19)式から加速度を速度 V/V_C で微分して最大値をとる条件は次の通り。

$$\frac{-d(V/dt)}{d(V/V_C)} = -\frac{V_C^2}{a\Delta} \left(\frac{V}{V_C} \right) \left\{ \ln \left(\frac{V}{V_C} \right) + \frac{1}{2} - a\rho_c \right\} = 0 \quad (21)$$

上式から加速度が最大となる速度, 密度次式で与えられる。

$$\frac{V_{\max}}{V_C} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} + a\rho_c \right\} \approx \frac{1}{e^{1/2}} \quad (22)$$

$$\rho_{\max} = \rho_c - \frac{1}{a} \left\{ -\frac{1}{2} + a\rho_c \right\} = \frac{1}{2a} = -\Delta\beta \sin \gamma_c \quad (23)$$

これより高度は $\rho_{\max}/\rho_{SL} = 1/2a\rho_{SL}$ から次式で与えられる。

$$h_{\max} = \frac{1}{\beta} \ln \left(-\frac{\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_{SL}} \right) \quad (24)$$

加速度/抗力加速度の最大値は次式で与えられる。

$$\left(-\frac{dV}{dt} \right)_{\max} = \left(\frac{D}{m} \right)_{\max} = -\frac{\beta V_C^2 \sin \gamma_c}{2} \exp \left\{ -1 - \frac{\rho_c}{\Delta\beta \sin \gamma_c} \right\} \approx -\frac{\beta V_C^2 \sin \gamma_c}{2e} \quad (25)$$

ここで初期値を示す添字 C を添字 E に変更し抗力加速度の初期値の定義から弾道係数を用いて $\beta V_C^2 \sin \gamma_c / 2(D/m)_C \rightarrow \Delta\beta \sin \gamma_E / \rho_E$ と置き変えると弾道飛行の場合(8-1項参照)と一致する。

④抗力加速度/揚力加速度

抗力加速度は(19)式から

$$\frac{D}{mg} = \kappa \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln \left(\frac{V_C}{V} \right) \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \quad (26)$$

揚力加速度は $V(dy/dt) = L/m + (V^2/r - g)\cos\gamma$ で表されるから式(16)式 $\gamma = \gamma_c$ (17)式 $dy/dt = 0$ から

$$\frac{L}{mg} = \cos \gamma_c \left\{ 1 - \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \right\} \quad (27)$$

揚力加速度は遠心力と重力の差であるからきわめて小さい。

⑤要求揚抗比

要求揚抗比 L/D は $L/D = (L/mg)/(D/mg)$ で求めることができ (26) (27) 式の抗力加速度, 揚力加速度から次式で表される。

$$\frac{L}{D} = \frac{\frac{\cos \gamma_c}{\kappa} \left\{ 1 - \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \right\}}{\left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln \left(\frac{V_C}{V} \right) \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2} \quad (28)$$

揚力加速度が極めて小さいことから要求揚抗比も非常に小さい値となる。

⑥空力荷重

空力荷重は $G/g = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/mg)$ から (26) 式の抗力加速度, (28) の揚抗比を代入して

次式で表される。 $\kappa \equiv \frac{\rho_c V_C^2}{2\Delta gr}$

$$\frac{G}{g} = \kappa \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln \left(\frac{V_C}{V} \right) \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \sqrt{1 + \frac{\frac{\cos \gamma_c}{\kappa} \left\{ 1 - \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \right\}}{\left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln \left(\frac{V_C}{V} \right) \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2}} \right)^2 \quad (29)$$

⑦澱点空力加熱率

澱点の空力加熱率を次式で定義する。 $dQ/dt = K_Q \rho^{1/2} V^3$ 一定高度変化率飛行の場合には (11) 式の ρ/ρ_c を代入して次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= K_Q \rho_c^{1/2} V_C^3 \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \\ \frac{dQ}{dt} &= K_Q \rho_c^{1/2} V_C^3 \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln \left(\frac{V_C}{V} \right) \right\}^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \end{aligned} \quad (30)$$

$V = V_C$ での澱点加熱率を $(dQ/dt)_C$ とすれば $(dQ/dt)_C = K_Q \rho_c^{1/2} V_C^3$ であるから (20) 式を $(dQ/dt)_C$ で無次元化すると

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_C} = \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln \left(\frac{V_C}{V} \right) \right\}^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \quad (31)$$

⑧ 飛行距離/飛行レンジ

(a) 飛行距離

(3)式で $\gamma = \gamma_c$ と置くと

$$\frac{ds}{d\rho} = -\frac{1}{\beta\rho\sin\gamma_c} \quad (32)$$

右辺は密度の逆数に比例することから積分でき、飛行距離は次式で表される。

$$s = -\frac{1}{\beta\sin\gamma_c} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) = -\frac{1}{\beta\sin\gamma_c} \ln\left(1 - \frac{2\Delta\beta\sin\gamma_c}{\rho_c} \ln\frac{V_C}{V}\right) \quad (33)$$

(b) 飛行レンジ

同様に(4)式で $\gamma = \gamma_c$ と置くと

$$R = -\frac{1}{\beta\tan\gamma_c} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) = -\frac{1}{\beta\tan\gamma_c} \ln\left(1 - \frac{2\Delta\beta\sin\gamma_c}{\rho_c} \ln\frac{V_C}{V}\right) \quad (34)$$

⑨ 等飛行経路角飛行軌道

一定揚抗比飛行軌道から等飛行経路角飛行軌道を取り、平衡滑空飛行に遷移する軌道は次のように計算できる。

1) フェーズ1：揚抗比一定飛行

機体の弾道係数を Δ 、揚抗比を L/D とし、初期速度を V_E 、再突入角を γ_E とすると一定揚抗比 L/D 飛行では密度(高度)対速度は次式で与えられる

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\Delta\beta}{\rho_{SL}} \left\{ 2\gamma_E - \frac{L}{D} \ln\left(\frac{V}{V_E}\right) \right\} \ln\left(\frac{V}{V_E}\right) \quad (35)$$

速度範囲 $V_E \exp\{\gamma_E/(L/D)\} \leq V \leq 0.999V_E$ $V_E \exp\{\gamma_E/(L/D)\}$ はプルアップ時の速度。飛行終端点での速度 V_C (上記速度範囲)とすれば終端点での密度 ρ_c は

$$\frac{\rho_c}{\rho_{SL}} = \frac{\Delta\beta}{\rho_{SL}} \left\{ 2\gamma_E - \frac{L}{D} \ln\left(\frac{V_C}{V_E}\right) \right\} \ln\left(\frac{V_C}{V_E}\right) \quad (36)$$

2) フェーズ2：経路角一定飛行

 (ρ_c, V_C) を初期値とする一定経路角飛行は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} - \frac{2\Delta\beta\sin\gamma_c}{\rho_{SL}} \ln\frac{V_C}{V} \quad (37)$$

経路角一定飛行の終端速度を $V=V_*$ とすれば終端点での密度 ρ_* は

$$\frac{\rho^*}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} - \frac{2\Delta\beta\sin\gamma_c}{\rho_{SL}} \ln \frac{V_c}{V^*} \tag{38}$$

3) フェーズ3: L/D一定平衡滑空飛行軌道

(ρ_*, V_*)を初期値とするL/D一定平衡滑空飛行は次式で表される。

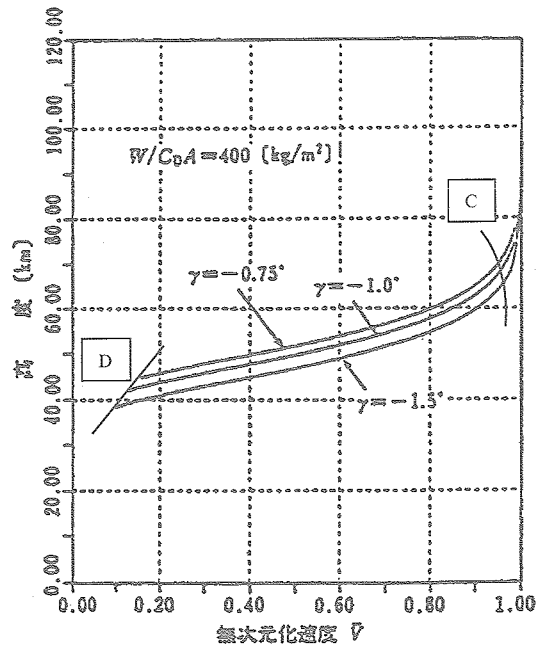
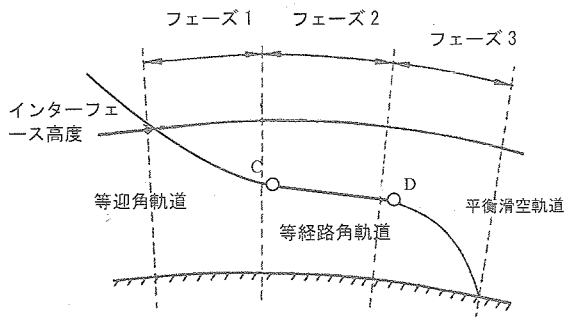
$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_*}{\rho_{SL}} \left\{ \frac{gr}{V_E^2} \left(\frac{V_E}{V} \right)^2 - 1 \right\} / \left\{ \frac{gr}{V_E^2} \left(\frac{V_E}{V_*} \right)^2 - 1 \right\} \tag{39}$$

要求揚抗比, 要求バンク角は $\{(L/D)\cos\phi_B\}_C = (2\Delta/r\rho_*) (gr/V_*^2 - 1)$ から次式で表される。

$$\left(\frac{L}{D} \right)_{VC} = \frac{2\Delta}{r\rho_*} \left(\frac{gr}{V_*^2} - 1 \right) \tag{40}$$

$$\cos\phi_{BC} = \frac{(L/D)_{VC}}{(L/D)_{max}}$$

等経路角軌道のフェーズ2までの解析例を右図に示す。



8-6. 等再突入関数軌 ρV^n 道制御

再突入飛行において重要な飛行パラメータとして加速度, 空力荷重, 空力加熱率, レイノルズ数等があり, これらの飛行パラメータは宇宙機の構造上, 耐熱上, あるいは空力特性上重要なパラメータである。これらは再突入飛行に対する制約条件となる。これらの飛行パラメータは $\rho^a V^b$ あるいは ρV^n で整理でき, 再突入関数と呼ばれている。(一般化再突入関数の項参照)ここではこれらの再突入関数に制約が加えられたとき, 制約を超えないように飛行する場合の軌道の各種飛行状態変数を求める。この軌道の特徴は経路角の正接 $\sin \gamma$ が近似的に密度 ρ に比例する ($\sin \gamma \approx (n/2\Delta\beta)\rho$) 点である。経路角 $\sin \gamma$ が密度に比例する場合の軌道については厳密解が得られる。(再突入軌道の厳密解の項参照)

最初に一般化等 ρV^n 飛行について記述し, その後個別の n の場合について述べる。

- (A) 一般化等 ρV^n 軌道
- (B) 等レイノルズ数軌道 ($n=1$)
- (C) 等加速度/抗力軌道 ($n=2$)
- (D) 等平均加熱率軌道 ($n=3$)
- (E) 等澗点加熱率軌道 ($n=6$)
- (F) 等 ρV^n 軌道の応用

(A) 一般化等 ρV^n 飛行

これらの飛行パラメータ一定飛行では $\rho^A V^B = K'$ (A, B : 一定) で表されるが, あらためて $K' = K^A, B/A = n$ と置けば $\rho V^n = K$ (n : 一定) とも表される。したがって次の条件で飛行する場合の飛行状態変数を求める。

条件: $\rho V^n = K$: 一定

(1) 運動方程式

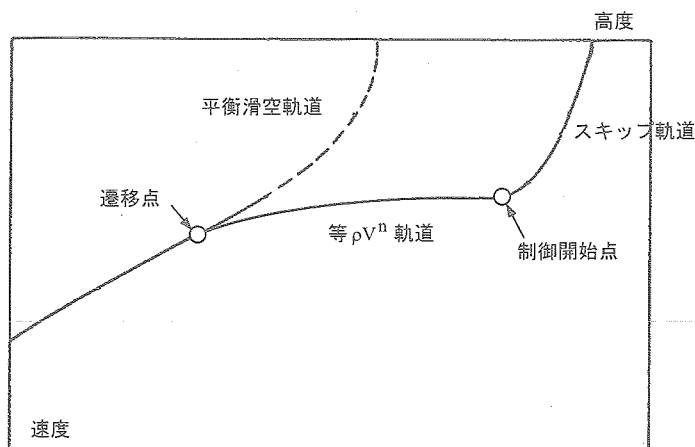
速度座標系での宇宙機の運動方程式は次式で表される。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \tag{1}$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \tag{2}$$

$$\frac{ds}{dt} = V \tag{3}$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \tag{4}$$



$$\frac{dR}{dt} = V \cos \gamma \quad (5)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\beta \frac{dh}{dt} \quad (6)$$

仮定 $\rho V^n = K$ 及び (4) (6) 式から加速度は次式で与えられる。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{n} \frac{d\rho}{\rho dt} = \frac{\beta V}{n} \frac{dh}{dt} = \frac{\beta V^2 \sin \gamma}{n} \quad (7)$$

また上式から密度の変化率は次式で表される。

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{V_c}{n\rho_c} \left(\frac{\rho_c}{\rho} \right) \left(\frac{V}{V_c} \right) = -\frac{1}{n} \frac{V_c}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_c} \right)^{n+1} \quad (8)$$

(2) 一般解および近似解

最初に以下の式の煩雑さを避けるために次のような初期値 (添時 C) により決まる定数, 無次元化定数を定義する。

$$K_n = \rho_c V_c^n \quad (11)$$

$$\kappa \equiv \frac{r\rho_c}{2\Delta} \frac{V_c^2}{gr} \quad : \text{無次元化パラメータ} \quad (12)$$

$$\eta \equiv \beta r \frac{V_c^2}{gr} \quad : \text{無次元化パラメータ} \quad (13)$$

κ は初期抗力加速度を g で無次元化した定数。 η は無次元化初期速度の 2 乗値 V_c^2/gr と無次元定数 $\beta r \approx 900$ の積 で定義した無次元定数。

① 高度/密度, 高度変化率, レイノルズ数

(a) 高度/密度

高度と速度の関係は仮定から $\rho V^n = \rho_c V_c^n$ (一定)

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{V_c}{V} \right)^n \quad (18)$$

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left(\frac{V_c}{V} \right)^n$$

$$h = h_c - \frac{n}{\beta} \ln \left(\frac{V_c}{V} \right) \quad (19)$$

(b) 高度変化率

(4) 式 $dh/dt = V \sin \gamma$ と (14) 式の $\sin \gamma$ から次式で表される。

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-\kappa V_c}{\left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-3} \left\{ \frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + 1 \right\}} \approx -\frac{n}{2} \frac{\rho_c V_c}{\Delta \beta} \left(\frac{V}{V_c} \right)^{1-n} \quad (20)$$

(c) レイノルズ数

レイノルズ数は密度と速度の積に比例し、次式で表される。

$$R_e = K_R \rho V$$

K_R は比例定数、これよりレイノルズ数 R_e を速度の関数として表すと次の通り。

$$R_e = K_R \rho V = K_R \rho_c V_c \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_c} \right) = K_R \rho_c V_c \left(\frac{V}{V_c} \right)^{1-n} \quad (21)$$

② 経路角/経路角変化率

(a) 経路角

経路角 γ は (1), (7) 式から

$$\frac{\beta V^2 \sin \gamma}{n} = -\frac{\rho V^2}{2\Delta} - g \sin \gamma$$

より $\sin \gamma$ を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= -\frac{\kappa}{\left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-2} \left\{ \frac{\beta r V_c^2}{n \text{ gr}} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + 1 \right\}} = -\frac{\kappa}{\left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-2} \left\{ \frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + 1 \right\}} \\ &\approx -\frac{n \kappa}{\eta} \left(\frac{V_c}{V} \right)^n = -\frac{n \rho}{2 \Delta \beta} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし $\kappa/\eta = \rho_c/2\Delta\beta$ (14) 式で η は $\eta = \beta r V_c^2/\text{gr}$ βr は $\beta r \approx 900$ のオーダー、 V_c^2/gr は $V_c^2/\text{gr} \approx 1$ のオーダーであり 1 比べて十分大きい $(\eta/n)(V/V_c)^2 \gg 1$ から、分母 { } 内の 1 を無視して次の近似を行う。

(14) 式から経路角 γ の正接 $\sin \gamma$ は近似的に密度に比例することがわかる。

(b) 経路角変化率

経路角変化率 $d\gamma/dt$ は (14) 式を時刻 t で微分して (7) 式を用いると次式で得られる。

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\beta V_c}{\kappa} \left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-1} \left\{ \frac{\beta r V_c^2}{n \text{ gr}} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + \frac{n-2}{n} \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma \quad (16)$$

$$\text{ただし } \tan \gamma = \sin \gamma / \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$$

または (14) 式の $\sin \gamma$ を代入して

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\beta V_c \kappa \left(\frac{V}{V_c} \right)^{3-n} \left\{ \frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + \frac{n-2}{n} \right\}}{\left\{ \frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + 1 \right\}^2 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{V}{V_c} \right)^{2n-4} \left\{ \frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + 1 \right\}^2 - 1}} \approx -\beta V_c \left(\frac{n \rho_c}{2 \Delta \beta} \right)^2 \left(\frac{V}{V_c} \right)^{1-2n} \quad (17)$$

③ 加速度

加速度は(7)式 $dV/dt = \beta V^2 \sin \gamma / n$ と (14)式の $\sin \gamma$ からただちに

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{\beta V_C^2 \frac{\kappa}{n} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{4-n}}{\frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + 1} \approx \beta V_C^2 \frac{\rho_c}{2\Delta\beta} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{2-n} = \frac{K_2}{2\Delta} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{2-n} \quad (22)$$

④ 抗力加速度, 揚力加速度, 要求揚抗比

(a) 抗力加速度

抗力加速度 D/m は抗力加速度の定義 $D/m = (C_D A/m) q$ で表され, 動圧を弾道係数で割って得られるから

$$\frac{D}{mg} = \frac{\rho V^2}{2\Delta g} = \kappa \left(\frac{V}{V_C}\right)^{2-n} = \frac{K_2}{2\Delta g} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{2-n} \quad (23)$$

(b) 揚力加速度

揚力加速度は $V (d\gamma/dt) = L/m + (V^2/r - g) \cos \gamma$ で与えられる。 $V (d\gamma/dt)$ を求めると

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\beta V_C^2}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C}\right)^n \left\{ \frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + \frac{n-2}{n} \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma$$

から $\kappa = (\rho_c / 2\Delta) (V_C^2 / gr)$ を代入して

$$\frac{L}{mg} = \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_C}\right)^n \left\{ \frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + \frac{n-2}{n} \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (24)$$

(c) 要求揚抗比

要求揚抗比 $L/D = (L/mg)/(D/mg)$ に (23), (24)式 (D/mg) (L/mg) を代入して

$$\frac{L}{D} = \frac{1}{\kappa} \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{2n-2} \left\{ \frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + \frac{n-2}{n} \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{n-2} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (29)$$

ただし $\sin \gamma$ は(14)式参照, 経路角が小さい場合には

$$\sin \gamma \approx -\frac{n\kappa}{\eta} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{-n}$$

$$\frac{L}{D} \approx \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \frac{\eta}{n\kappa} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{2n} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{n-2} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma$$

から次式で近似できる。

$$\frac{L}{D} \approx -n^2 \left(\frac{\rho_c}{2\Delta\beta}\right) \left(\frac{V_C}{V}\right)^n - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{n-2} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 - 1 \right\} \quad (30)$$

右辺第2項は遠心力と重力の差である。揚力項が大きい場合 $L/m \gg (V^2/r - g)\cos\gamma$ にはさらに次のように近似できる。

$$\frac{L}{D} \approx -\frac{n^2}{2} \left(\frac{\rho_c}{\Delta\beta} \right) \left(\frac{V_C}{V} \right)^n \quad (31)$$

⑤ 空力荷重

空力荷重 G は定義および(23)式の抗力加速度から

$$G = \sqrt{(L/m)^2 + (D/m)^2} = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/m)$$

(L/D) , (D/mg) から

$$\frac{G}{g} = \frac{r\rho_c}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{2-n} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} = \kappa \left(\frac{V}{V_C} \right)^{2-n} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} \quad (25)$$

⑥ 空力加熱率

空力加熱率は平均空力加熱率と澱点空力加熱率は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \dot{Q}_a &= C_{ha} \rho V^3 / \sqrt{R_N} : \text{平均空力加熱率} \\ \dot{Q}_s &= C_{hs} \rho^{1/2} V^3 / \sqrt{R_N} : \text{澱点空力加熱率} \end{aligned}$$

ここで R_N はノーズ半径 C_{ha} C_{hs} 定数、澱点空力加熱率 \dot{Q}_s において V^3 は $V^{3.15}$ を用いる場合が多いがここでは V^3 で近似する。上式から各加熱率を速度の関数で表すと次の通り。

$\rho = \rho_c$ $V = V_C$ で $\dot{Q}_{avgc} = C_{ha} \rho_c V_C^3 / \sqrt{R_N}$ $\dot{Q}_{stgc} = C_{hs} \rho_c^{1/2} V_C^3 / \sqrt{R_N}$ で規格化すると

$$\frac{\dot{Q}_{avg}}{\dot{Q}_{avgc}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 = \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3-n} \quad (32)$$

$$\frac{\dot{Q}_{stg}}{\dot{Q}_{stgc}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 = \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3-n/2} \quad (33)$$

⑦ 飛行時間

(7)式 $dt/dV = n / \beta V^2 \sin\gamma$ より時間の速度に関する変化率を得る。

$$\frac{dt}{d(V/V_C)} = -\frac{n}{\beta V_C \kappa} \left\{ \frac{\eta}{n} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{n-2} + \left(\frac{V}{V_C} \right)^{n-4} \right\}$$

$n \neq 1, 3$ の場合上式を積分して飛行時間は次式で表される。

$$t = \frac{1}{\beta V_C} \left[\frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \frac{1}{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_C} \right)^{n-1} \right\} + \frac{1}{\kappa} \frac{n}{n-3} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_C} \right)^{n-3} \right\} \right]$$

上式で $1/\beta V_c$ は時刻の次元を持つから $t_c = 1/\beta V_c$ と置くと

$$\frac{t}{t_c} = \left[\frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \frac{1}{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-1} \right\} + \frac{1}{\kappa} \frac{n}{n-3} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-3} \right\} \right] \approx \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \frac{1}{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-1} \right\} \quad (34)$$

上式で $1/\beta V_c$ は時刻の次元を持つ。 $n=1, n=3$ の場合にはそれぞれ II. 等レイノルズ数飛行 ($n=1$), IV. 等平均加熱率飛行 ($n=3$) の項に示す。

⑧ 飛行距離 s /レンジ R

(a) 飛行距離 s

飛行距離 s は (3) 式 $ds/dt = V$, (7) 式から

$$\frac{ds}{d(V/V_c)} = \frac{V_c}{(1/n)\beta V \sin \gamma} = -\frac{1}{\kappa\beta} \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-1} + n \left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-3} \right\}$$

$n \neq 2$ の場合には積分して

$$s = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{n} \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^n \right\} + \frac{n}{n-2} \frac{1}{\kappa} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-2} \right\} \right] \approx \frac{2\Delta}{\rho_c} \frac{1}{n} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^n \right\} \quad (35)$$

$n=2$ の場合には III. 等加速度/抗力飛行 ($n=2$) の項に示す。

(b) レンジ R

レンジ R は $n=2$ III. 等加速度/抗力飛行 ($n=2$) の場合のみ解析的に得られる。レンジ R の飛行距離 S に関する変化率は (3), (5) 式から次の通り。

$$\frac{dR}{ds} = \cos \gamma \quad (36)$$

ここで x を速度の関数として次式で定義する。(14) 式で $n=2$ と置くと

$$x = (\eta/2) (V/V_c)^2 + 1 \quad (37)$$

$$\frac{d(V/V_c)}{dx} = \frac{1}{\eta(V/V_c)} \quad (38)$$

また (12) 式で $n=2$ と置くと

$$\sin \gamma = -\kappa/x \quad (39)$$

独立変数を s から x に変換する。

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{d(V/V_C)} \frac{d(V/V_C)}{dx} \approx -\frac{1}{\beta\kappa} \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} \quad (40)$$

(39) 式を代入してレンジの変数 x に関する変化率は次式で表される。

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{1}{\beta\kappa} \frac{\sqrt{x^2 - \kappa^2}}{x} \quad (41)$$

(41) 式を積分公式 $\int (\sqrt{x^2 - a^2}/x) dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \sin^{-1}(-a/x)$ を用いて積分を実行すると

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{\beta\kappa} \sqrt{\left\{ (\eta/2)(V/V_C)^2 + 1 \right\} - \kappa^2} + \frac{1}{\beta} \sin^{-1} \left\{ \frac{-\kappa}{(\eta/2)(V/V_C)^2 + 1} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\beta\kappa} \sqrt{(\eta/2 + 1)^2 - \kappa^2} - \frac{1}{\beta} \sin^{-1} \left(\frac{-\kappa}{\eta/2 + 1} \right) \\ &\approx -\frac{1}{\beta} \frac{\eta}{2\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \sin^{-1} \left\{ \frac{-2\kappa}{\eta} \left(\frac{V_C}{V} \right)^2 \right\} + \frac{1}{\beta} \frac{\eta}{2\lambda} - \frac{1}{\beta} \sin^{-1} \left(\frac{-2\kappa}{\eta} \right) \quad (42) \end{aligned}$$

⑨ 等 ρV^n 飛行軌道

一定揚抗比飛行軌道から等 ρV^n 飛行軌道を取り、平衡滑空飛行に遷移する軌道は次のように計算できる。

1) フェーズ 1: 等揚抗比軌道(スキップ軌道)

機体の弾道係数を Δ 、揚抗比を L/D とし、初期速度を V_E 、再突入角を γ_E とすると等揚抗比 L/D 軌道(スキップ軌道)では密度(高度)対速度は次式で与えられる

$$\rho = \Delta\beta \left\{ 2\gamma_E - \frac{L}{D} \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \right\} \ln \left(\frac{V}{V_E} \right) \quad (43)$$

$$\text{速度範囲} \quad V_E \exp\{2\gamma_E/(L/D)\} \leq V \leq 0.999V_E$$

スキップアウト時の速度、およびプルアップ時 $\gamma = 0$ の速度 V_p は次式で表される。

$$\text{(スキップアウト時)} \quad V_s = V_E \exp\{2\gamma_E/(L/D)\} \quad (42)$$

$$\text{(プルアップ時)} \quad V_m = V_E \exp\{\gamma_E/(L/D)\} \quad (43)$$

高度は次式で与えられる。

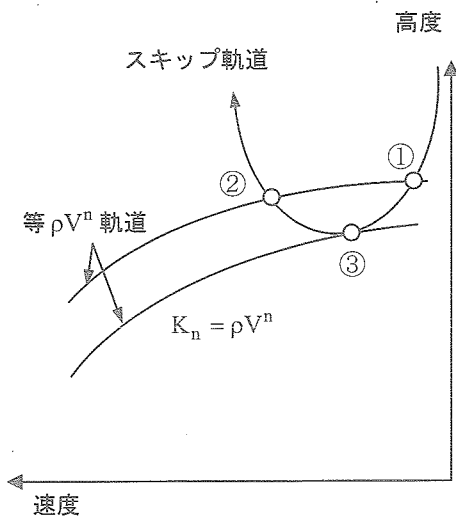
$$h = \ln\left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) = -\frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{\Delta\beta}{\rho_{SL}} \left\{2\gamma_E - \frac{L}{D} \ln\left(\frac{V}{V_E}\right)\right\} \ln\left(\frac{V}{V_E}\right)\right] \quad (44)$$

2) フェーズ 2 : 等 ρV^n 軌道

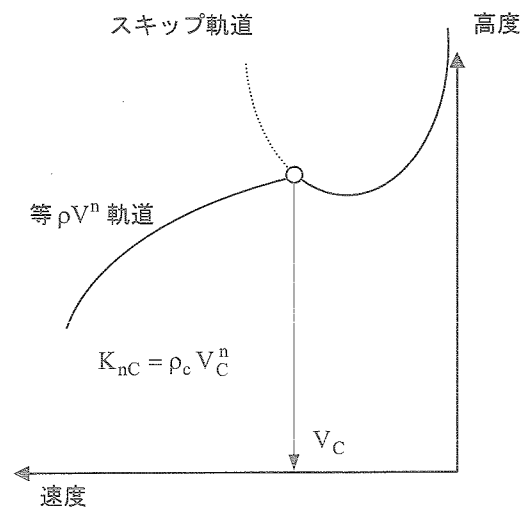
等 L/D 軌道(スキップ軌道)と等 ρV^n の交点の設定には 2 つのケースが考えられる。

(A) 定数 K_n を陽に与える場合

(B) 等 ρV^n 開始速度 V_C を与える場合



(A) 等 ρV^n 飛行



(B) 等 ρV^n 飛行

(A) の場合 :

$$\rho = K_n / V^n \quad (45)$$

と(43)式から $V = V_C$ を代入して

$$\rho = \Delta\beta \left\{2\gamma_E - \frac{L}{D} \ln\left(\frac{V_C}{V_E}\right)\right\} \ln\left(\frac{V_C}{V_E}\right) = \frac{K_n}{V_E^n} \left(\frac{V_E}{V_C}\right)^n \quad (46)$$

をニュートン・ラフソン法等により交点の速度 V_C 、密度 ρ_C をもとめ等 ρV^n 飛行開始速度を得る。ただし交点は一般には 2 つ①②あるが、③の場合 1 点となり両軌道は接する。この場合の K_n が最大 $K_{n\max}$ となる。すなわち K_n は $K_n \leq K_{n\max}$ の範囲で陽に設定する。

(B) の場合 :

速度 V_C が与えられているから, (43)式を用いて K_n の値は次式で与えられる。

$$K_n = V_C^n \rho_c = V_C^n \Delta \beta \left\{ 2\gamma_E - \frac{L}{D} \ln \left(\frac{V_C}{V_E} \right) \right\} \ln \left(\frac{V_C}{V_E} \right) \quad (47)$$

この場合速度 V_C は $V_E \exp\{2\gamma_E/(L/D)\} \leq V \leq 0.999V_E$ の範囲で与える。

等 ρV^n 軌道

等 ρV^n 飛行の開始点の密度速度が決まると密度(高度)対速度は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{V_C}{V} \right)^n \quad (48)$$

$$\frac{h}{h_c} = 1 + \frac{n}{\beta h_c} \ln \left(\frac{V}{V_C} \right) \quad (49)$$

また等 ρV^n 軌道では要求揚抗比は速度の関数として与えられる。

3) フェーズ 3 : 平衡滑空軌道

等 ρV^n 軌道と平行滑空軌道との交点において、等 ρV^n 軌道から平行滑空軌道に移行する速度 V_D を与える。この時交点の密度 ρ_D は $\rho_D = K_n/V_D^n$ で与えられる。 ρ_D, V_D が与えられたとき平衡滑空軌道の要求揚抗比は次式で与えられる (平衡滑空の項参照)

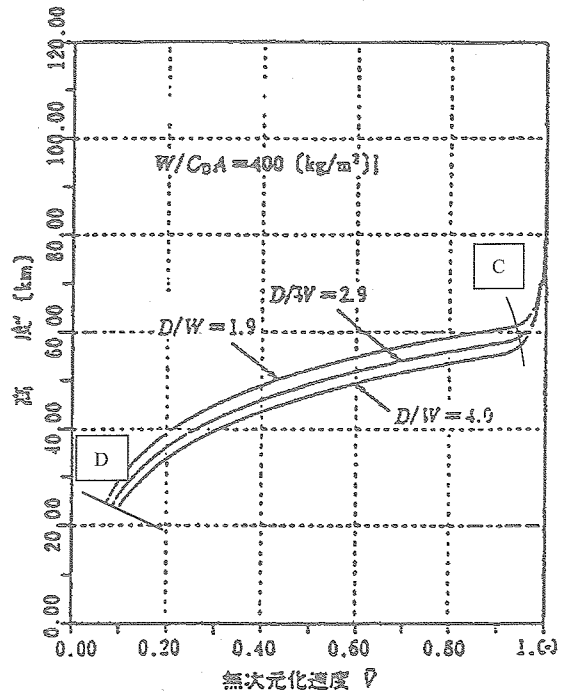
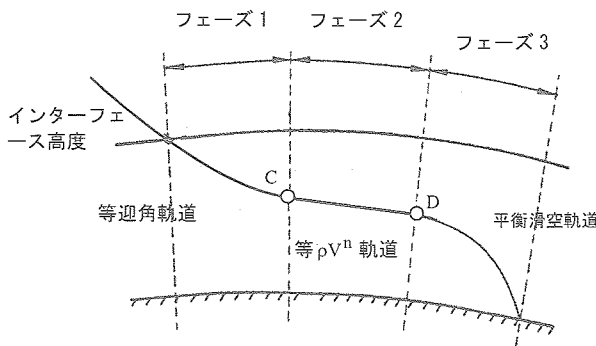
$$\left(\frac{L}{D} \right)_D = \frac{2}{r} \frac{\Delta}{\rho_D} \left(\frac{1 - V_D^2/gr}{V_D^2/gr} \right) \quad (50)$$

要求揚抗比が上式で与えられる平衡滑空軌道の密度対速度, および高度対速度は次式で与えられる。

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{2}{(L/D)_D} \frac{\Delta}{r \rho_{SL}} \left(\frac{1 - V^2/gr}{V^2/gr} \right) \quad (51)$$

$$h = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right) = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{2}{(L/D)_D} \frac{\Delta}{r \rho_{SL}} \left(\frac{1 - V^2/gr}{V^2/gr} \right) \right\} \quad (52)$$

平衡滑空軌道での揚抗比は一定とする。等抗力加速度 ($n=2$) の場合でフェーズ 2 までの解析例を示す。



(B) 等レイノルズ数起動 (n=1)

レイノルズ数は気体の粘性を表すパラメータであり、機体の空力特性に影響を与える。機体の揚力係数、抗力係数等は極超音速ニュートン流近似では迎角のみの関数であったが超音速、亜音速では気体の粘性効果が現れ一般に次のように迎角 α 、マッハ数 M 、レイノルズ数 R_e の関数となる。 $C_L = C_L(\alpha, M, R_e)$, $C_D = C_D(\alpha, M, R_e)$ レイノルズ数は密度と速度の積に比例する。

$$R_e = K_R \rho V$$

レイノルズ数が一定の場合には次のように一般化 ρV^n 軌道で $n=1$ と置いた場合に対応する。

$$\rho V = R_e / K_R = K_1$$

ここではレイノルズ数を一定に保った飛行について考える。等レイノルズ数飛行の特徴は高度変化率 dh/dt がほぼ一定で飛行する点である。

定数

$$K_1 = \rho_c V_c \tag{1}$$

$$\frac{\kappa}{\eta} = \frac{1}{2} \frac{\rho_c}{\Delta \beta} \tag{2}$$

$$\eta (V/V_c)^2 \gg 1$$

① 高度(密度), 高度変化率, レイノルズ数
(I)項の(18)-(21)式において $n=1$ と置くと
条件 $\rho V = \rho_c V_c$ から密度は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \frac{V_c}{V} \quad (5)$$

海面上密度との比は

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left(\frac{V_c}{V} \right)$$

高度は $\ln(\rho/\rho_{SL}) = -\beta h$ から次式で表される。

$$h = h_c + \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{V}{V_c} \right) \quad (6)$$

(a) 高度変化率

高度変化率は高度 h を微分して

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-\kappa V_c}{\left(\frac{V}{V_c} \right)^{-2} \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + 1 \right\}} \approx -V_c \frac{\kappa}{\eta} = -\frac{K_1}{2\Delta\beta} \quad : \text{一定} \quad (7)$$

近似的に高度変化率は一定となる。 $\dot{h}_c = -K_1/2\Delta\beta$ と置けば一定高度率飛行と一致する。
(一定高度変化率飛行の項参照)

(c) レイノルズ数

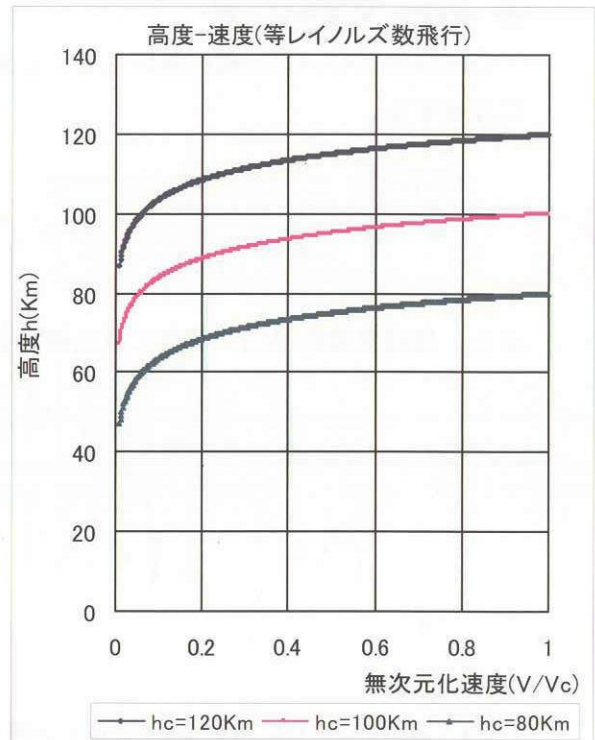
レイノルズ数は ρV に比例する。比例定数を K_R として

$$R_e = K_R \rho V$$

とおけばレイノルズ数は一定となる。

$$R_e = K_R \rho V = K_R \rho_c V_c \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_c} \right) = K_R \rho_c V_c = K_R K_1 \quad : \text{一定} \quad (8)$$

すなわち ρV 一定飛行は等レイノルズ数飛行となる。



② 経路角/経路角変化率

(I) 項の(14)―(17)式において $n=1$ と置くと、経路角は、正弦値は速度に逆比例し、密度に比例する。

$$\sin \gamma = - \frac{\kappa}{\left(\frac{V}{V_c}\right)^{-1} \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1 \right\}} \approx - \frac{\kappa \left(\frac{V_c}{V}\right)}{\eta \left(\frac{V_c}{V}\right)} = - \frac{K_1}{2\Delta\beta} \frac{1}{V} = - \frac{1}{2\Delta\beta} \rho \quad (3)$$

また、経路角変化率は、速度に逆比例する。

$$\frac{d\gamma}{dt} = - \frac{\beta V_c \kappa \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\}}{\left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1 \right\}^2 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-2} \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1 \right\}^2 - 1}} \approx -\beta V_c \left(\frac{\kappa}{\eta}\right)^2 \left(\frac{V_c}{V}\right) \quad (4)$$

③ 加速度

(I) 項の(22)―(25)式において $n=1$ と置くと

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{\frac{\beta V_c^2}{g} \kappa \left(\frac{V}{V_c}\right)^3}{\eta \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1} \approx \frac{\beta V_c^2}{g} \frac{\kappa}{\eta} \left(\frac{V}{V_c}\right) = \frac{\beta V_c^2}{g} \frac{\kappa}{\eta} \left(\frac{\rho_c}{\rho}\right) = \frac{K_1}{2\Delta g} V \quad (9)$$

④ 抗力加速度, 揚力加速度, 要求揚抗比

(a) 抗力加速度

抗力加速度は $D/m = \rho V / 2\Delta$ で定義され (ρ/ρ_c), または (V/V_c) を代入して速度または密度の関数として次式で表される。

$$\frac{D}{mg} = \frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta g} \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 = \frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta g} \left(\frac{V}{V_c}\right) = \kappa \left(\frac{V}{V_c}\right) = \kappa \left(\frac{\rho_c}{\rho}\right) = \frac{K_1}{2\Delta g} V \quad (11)$$

(b) 揚力加速度

揚力加速度は $V (d\gamma/dt) = L/m + (V^2/r - g) \cos \gamma$ で与えられる。 $V (d\gamma/dt)$ から

$$\frac{L}{mg} = \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_c}\right) \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma$$

ただし $\tan \gamma = \sin \gamma / \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$

(c) 要求揚抗比

$L/D = (L/mg)/(D/mg)$ に (D/mg) (L/mg) を代入して

$$\frac{L}{D} = \frac{\eta}{\kappa^2} \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{-1} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (12)$$

ただし $\sin \gamma$ は (1) 項の (14) 式参照, 経路角が小さい場合には

$$\sin \gamma \approx -\frac{\kappa}{\eta} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{-1}$$

$$\frac{L}{D} \approx \left(\frac{\eta}{\kappa} \right)^2 \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \tan \gamma \sin^2 \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{-1} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma$$

から次式で近似できる。

$$\frac{L}{D} \approx -\left(\frac{\rho_c}{2\Delta\beta} \right) \left(\frac{V_C}{V} \right) - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{-1} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \quad (13)$$

右辺第 2 項は遠心力と重力の差である。揚力項が大きい場合 $L/m \gg (V^2/r - g)\cos \gamma$ にはさらに次のように近似できる。

$$\frac{L}{D} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_c}{\Delta\beta} \right) \left(\frac{V_C}{V} \right) \quad (14)$$

⑤ 空力荷重

空力荷重 G は定義および (11) 式の抗力加速度から

$$G = \sqrt{(L/m)^2 + (D/m)^2} = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/m)$$

(L/D) , (D/mg) から

$$\frac{G}{g} = \frac{\rho_c}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} = \kappa \left(\frac{V}{V_C} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} \quad (15)$$

ただし (L/D) は (12) 式

近似 (L/D) の場合には空力荷重は次式で近似できる。

$$\frac{D}{g} \approx \kappa \sqrt{\left(\frac{V}{V_C} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_c}{\Delta\beta} \right)^2} \approx \kappa \left(\frac{V}{V_C} \right)$$

以上から等レイノルズ軌道では加速度/抗力加速度, 揚力加速度, 空力荷重は速度に比例することがわかる。

⑥ 空力加熱率

(1)項の(32)(33)式において $n=1$ と置くと無次元化して平均加熱率, 澱点加熱率は次式で表される。

$$\frac{\dot{Q}_{\text{avg}}}{\dot{Q}_{\text{avgc}}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \left(\frac{V}{V_c}\right)^3 = \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 \quad (16)$$

$$\frac{\dot{Q}_{\text{stg}}}{\dot{Q}_{\text{stgc}}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_c}\right)^3 = \left(\frac{V}{V_c}\right)^{5/2} \quad (17)$$

これより平均加熱率は速度の2乗に, また澱点加熱率は速度の5/2乗に比例する。

⑦ 飛行時間

飛行時間は $dt/dV = 1/\beta V^2 \sin \gamma$ から $\sin \gamma$ を代入して時間の速度に対する変化率を求めて

$$\sin \gamma = - \frac{\kappa}{\left(\frac{V}{V_c}\right)^{-1} \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1 \right\}}$$

$$\frac{dt}{d(V/V_c)} = - \frac{1}{\beta V_c \kappa} \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-1} + \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-3} \right\} \quad (18)$$

積分を行うと飛行時間は次式で表される。

$$t_c = \frac{1}{\beta V_c}$$

と置くと

$$\frac{t}{t_c} = - \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \ln\left(\frac{V}{V_c}\right) - \frac{1}{2\kappa} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-2} \right\} \approx - \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \ln\left(\frac{V}{V_c}\right) \quad (19)$$

近似的には速度の対数で表される。また速度を時間の関数としてあらわすと

$$\frac{V}{V_c} = \exp\left(- \frac{\rho_c}{2\Delta\beta} \frac{t}{t_c}\right) \quad (20)$$

で表され Alvin Seiff and Michael E. Tauber (1966) の結果と一致する。

⑧ 飛行距離/ レンジ

(a) 飛行距離 S

(1)項の(35)式において $n \neq 2$ であるから $n=1$ と置くと

$$s = \frac{1}{\beta} \left[\frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c}\right) \right\} - \frac{1}{\kappa} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-1} \right\} \right] \approx \frac{2\Delta}{\rho_c} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c}\right) \right\} \quad (21)$$

(b) レンジ R: 初等関数では表されないのので数値積分による。

(C) 等抗力加速度/動圧軌道 (n=2)

回収機に加わる動圧 q , 抗力加速度 D/m , 揚力加速度 L/m 等, 空気力に関する諸量は密度と速度の 2 乗に比例する。

$$\frac{D}{m} = \frac{C_D A}{2m} \rho V^2 = \frac{\rho V^2}{2\Delta}$$

抗力加速度一定の場合には次のように一般化 ρV^n 軌道で $n=2$ と置いた場合に対応する。

$$\rho V^2 = 2\Delta (D/m)$$

ここでは動圧 q , 抗力加速度 D/m 等を一定に保った飛行について考える

$$\text{定数: } K_2 = \rho_c V_c^2$$

① 高度/密度, 高度変化率, レイノルズ数

(I) 項の(18)-(21)式において $n=2$ と置くと

(a) 高度/密度

条件 $\rho V^2 = \rho_c V_c^2$ から密度は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{V_c}{V} \right)^2$$

海面上密度との比は

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left(\frac{V_c}{V} \right)^2$$

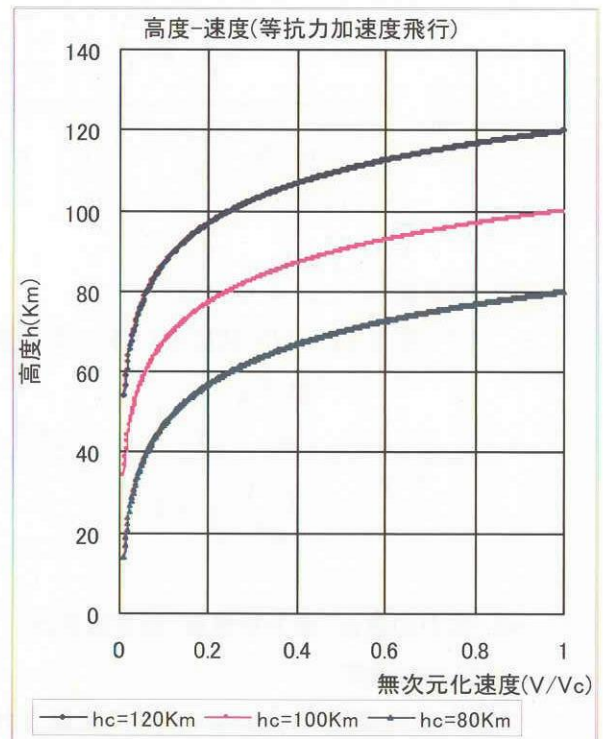
高度は $\ln(\rho/\rho_{SL}) = -\beta h$ から次式で表される。

$$h = h_c + \frac{2}{\beta} \ln \left(\frac{V}{V_c} \right)$$

・ 高度変化率

高度変化率は高度 h を微分して

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{-\kappa V_c}{\left(\frac{V}{V_c} \right)^{-1} \left\{ \frac{\eta}{2} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + 1 \right\}} \approx -2V_c \frac{\kappa}{\eta} \frac{1}{V} \\ &= -\frac{K_2}{\Delta\beta} \frac{1}{V} \end{aligned}$$



(b) レイノルズ数

レイノルズ数は定義から次式で表される。

$$R_e = K_R \rho V = K_R \rho_c V_C \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) = K_R \rho_c V_C \left(\frac{V_C}{V} \right) = K_R K_2 \frac{1}{V}$$

以上から高度変化率, レイノルズ数は速度に逆比例する。

② 経路角/経路角変化率

(I) 項の(14)–(17)式において $n=2$ と置くと、経路角は経路角の正弦値は速度の 2 乗に逆比例するが、密度に対しては比例する。

$$\sin \gamma = - \frac{\kappa}{\left\{ \frac{\eta \left(\frac{V}{V_C} \right)^2}{2} + 1 \right\}} \approx - \frac{2\kappa \left(\frac{V_C}{V} \right)^2}{\eta} = - \frac{\rho_c}{\Delta\beta} \left(\frac{V_C}{V} \right)^2 = - \frac{1}{\Delta\beta} \rho$$

経路角変化率:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\beta V_C}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right) \left\{ \frac{\eta \left(\frac{V}{V_C} \right)^2}{2} \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma$$

または $\sin \gamma$ を代入して

$$\frac{d\gamma}{dt} = - \frac{\beta V_C \kappa \left(\frac{V}{V_C} \right) \left\{ \frac{\eta \left(\frac{V}{V_C} \right)^2}{2} \right\}}{\left\{ \frac{\eta \left(\frac{V}{V_C} \right)^2}{2} + 1 \right\}^2 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \left\{ \frac{\eta \left(\frac{V}{V_C} \right)^2}{2} + 1 \right\}^2 - 1}} \approx - \beta V_C \left(\frac{2\kappa}{\eta} \right)^2 \left(\frac{V_C}{V} \right)^3$$

③ 加速度

(I) 項の(22)–(25)式において $n=2$ と置くと、加速度は、この場合加速度は一定となる。

$$- \frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{\beta V_C^2 \kappa \left(\frac{V}{V_C} \right)^2}{\frac{\eta \left(\frac{V}{V_C} \right)^2}{2} + 1} \approx \frac{\beta V_C^2 \kappa}{g \eta} = \frac{\rho_c V_C^2}{2\Delta g} = \frac{K_2}{2\Delta g} : \text{一定}$$

④ 抗力加速度, 揚力加速度, 要求揚抗比

(a) 抗力加速度

抗力加速度は $D/m = \rho V / 2\Delta$ で定義され (ρ/ρ_c), または (V/V_C) を代入して速度または密度の関数として次式で表される。抗力加速度も一定となる。

$$\frac{D}{mg} = \frac{\rho V^2}{2\Delta g} = \frac{r \rho_c}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr} = \kappa = \frac{K_2}{2\Delta g} : \text{一定} \quad (23)$$

(b) 揚力加速度

$$\frac{L}{mg} = \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 \left\{ \frac{\eta}{2} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 \right\} \tan\gamma \sin^2\gamma - \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\} \cos\gamma \quad (24)$$

(c) 要求揚抗比

揚力加速度は $V(dy/dt) = L/m + (V^2/r - g)\cos\gamma$ で与えられる。 $V(dy/dt)$ から

$$\frac{L}{D} = \frac{1}{\kappa} \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 \left\{ \frac{\eta}{2} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 \right\} \tan\gamma \sin^2\gamma - \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\} \cos\gamma \quad (29)$$

ただし $\sin\gamma$ は (l) 項の (14) 式参照, 経路角が小さい場合には

$$\sin\gamma \approx -\frac{2\kappa}{\eta} \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-2}$$

$$\frac{L}{D} \approx \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \frac{\eta}{2\kappa} \left(\frac{V}{V_c}\right)^4 \tan\gamma \sin^2\gamma - \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\} \cos\gamma$$

から次式で近似できる。

$$\frac{L}{D} \approx -4 \left(\frac{\rho_c}{2\Delta\beta} \right) \left(\frac{V_c}{V} \right)^2 - \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 - 1 \right\} \approx -2 \left(\frac{\rho_c}{\Delta\beta} \right) \left(\frac{V_c}{V} \right)^2 \quad (30)$$

右辺第2項は遠心力と重力の差である。揚力項が大きい場合 $L/m \gg (V^2/r - g)\cos\gamma$ にはさらに近似できる。

⑤ 空力荷重

空力荷重 G は定義および (23) 式の抗力加速度から

$$G = \sqrt{(L/m)^2 + (D/m)^2} = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/m)$$

(L/D), (D/mg) から

$$\frac{G}{g} = \frac{\rho_c V_c^2}{2\Delta gr} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2} = \kappa \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2} \quad (31)$$

ただし (L/D) は (30) 式参照

また近似 (L/D) を用いると抗力加速度は次のように近似でき, ほぼ一定となる。

$$\frac{G}{g} \approx \kappa \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\rho_c}{\Delta\beta} \right)^2 \left(\frac{V_c}{V} \right)^4} \approx \kappa$$

⑥ 空力加熱率

(1) 項の (32) (33) 式において $n=2$ と置くと無次元化して平均加熱率, 澱点加熱率は次式で表される。

$$\frac{\dot{Q}_{\text{avg}}}{\dot{Q}_{\text{avgc}}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \left(\frac{V}{V_c}\right)^3 = \left(\frac{V}{V_c}\right) \quad (32)$$

$$\frac{\dot{Q}_{\text{stg}}}{\dot{Q}_{\text{stgc}}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_c}\right)^3 = \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 \quad (33)$$

これより平均加熱率は速度に比例し, また澱点加熱率は速度の 2 乗に比例する。

⑦ 飛行時間

$$\frac{t}{t_c} = \left[\frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c}\right) \right\} - \frac{2}{\kappa} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-1} \right\} \right] \approx \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c}\right) \right\}$$

ただし $t_c = 1/\beta V_c$

また、近似的に次式で表され速度は時刻に比例する。

$$\frac{V}{V_c} = 1 - \frac{\rho_c}{2\Delta\beta} \frac{t}{t_c}$$

g) 飛行距離/レンジ

(a) 飛行距離 s :

飛行距離 s は (3) 式 $ds/dt = V$ および $dV/dt = \beta V^2 \sin\gamma/2$ から速度に関する変化率は次式で表される。

$$\frac{ds}{d(V/V_c)} = \frac{V_c}{(1/2)\beta V \sin\gamma} = -\frac{1}{\kappa\beta} \left\{ \eta \left(\frac{V}{V_c}\right) + 2 \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-1} \right\}$$

積分して

$$s = \frac{1}{\beta\kappa} \left\{ \frac{\eta}{2} \left[1 - \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 \right] + 2 \ln \left(\frac{V_c}{V}\right) \right\}$$

(b) レンジ R

レンジ R は $n=2$ III. 等加速度/抗力飛行 ($n=2$) の場合のみ解析的に得られる。レンジ R の飛行距離 s に関する変化率は (1) 項の (3), (5) 式から次の通り。

$$\frac{dR}{ds} = \cos\gamma \quad (36)$$

ここで x を速度の関数として次式で定義する。(14)式で $n=2$ と置くと

$$x = (\eta/2)(V/V_C)^2 + 1 \quad (37)$$

$$\frac{d(V/V_C)}{dx} = \frac{1}{\eta(V/V_C)} \quad (38)$$

また(14)式で $n=2$ と置くと

$$\sin \gamma = -\kappa/x \quad (39)$$

独立変数を s から x に変換する。

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{d(V/V_C)} \frac{d(V/V_C)}{dx} \approx -\frac{1}{\beta\kappa} \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} \quad (40)$$

(39)式を代入してレンジの変数 x に関する変化率は次式で表される。

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{1}{\beta\kappa} \frac{\sqrt{x^2 - \kappa^2}}{x} \quad (41)$$

(41)式を積分公式 $\int (\sqrt{x^2 - a^2}/x) dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \sin^{-1}(-a/x)$ を用いて積分を実行すると

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{\beta\kappa} \sqrt{\left\{ (\eta/2)(V/V_C)^2 + 1 \right\}^2 - \kappa^2} + \frac{1}{\beta} \sin^{-1} \left\{ \frac{-\kappa}{(\eta/2)(V/V_C)^2 + 1} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\beta\kappa} \sqrt{(\eta/2 + 1)^2 - \kappa^2} - \frac{1}{\beta} \sin^{-1} \left(\frac{-\kappa}{\eta/2 + 1} \right) \\ &\approx -\frac{1}{\beta} \frac{\eta}{2\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \sin^{-1} \left\{ \frac{-2\kappa}{\eta} \left(\frac{V_C}{V} \right)^2 \right\} + \frac{1}{\beta} \frac{\eta}{2\kappa} - \frac{1}{\beta} \sin^{-1} \left(\frac{-2\kappa}{\eta} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

(D) 等平均加熱率軌道 ($n=3$)

平均空力加熱率は次のように定義される。

$$\dot{Q}_a = C_{ha} \rho V^3 / \sqrt{R_N} : \text{平均空力加熱率}$$

ここで R_N はノーズ半径, C_{ha} , C_{hs} は定数。これより加熱率 \dot{Q}_a が一定であれば ρV^3 は一定となり定数を K_3 と置いて次式で表される。

$$\rho V^3 = \dot{Q}_a \sqrt{R_N} / C_{ha} = K_3$$

一般式において $n=3$ の場合に相当する以下この等平均加熱率飛行について記述する。

定数: $K_3 = \rho_c V_c^3$

$$\frac{\kappa}{\eta} = \frac{\rho_c}{2\Delta\beta} = \frac{K_3}{2\Delta\beta V_c^3}$$

κ 、 η は(I)項(12)、(13)式参照

① 高度(密度), 高度変化率, レイノルズ数

(I)項の(18)-(21)式において $n=3$ と置くと

(a) 高度(密度)

条件 $\rho V^3 = \rho_c V_c^3$ から密度は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{V_c}{V}\right)^3$$

海面上密度との比は

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left(\frac{V_c}{V}\right)^3$$

高度は $\ln(\rho/\rho_{SL}) = -\beta h$ から次式で表される。

$$h = h_c + \frac{3}{\beta} \ln\left(\frac{V}{V_c}\right)$$

(b) 高度変化率

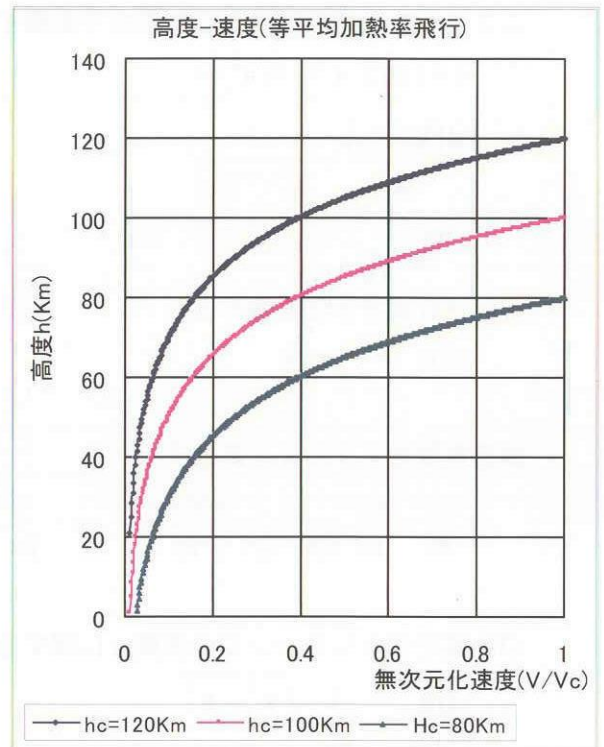
$$\frac{dh}{dt} = \frac{-\kappa V_c}{\left\{ \frac{\eta}{3} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1 \right\}} \approx -V_c \frac{3\kappa}{\eta} \left(\frac{V_c}{V}\right)^2 = -\frac{3K_3}{2\Delta\beta} \frac{1}{V^2}$$

(c) レイノルズ数

(I)項の(21)式において $n=3$ と置くと

$$R_e = K_R \rho V = K_R \rho_c V_c \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \left(\frac{V}{V_c}\right) = K_R \rho_c V_c \left(\frac{V_c}{V}\right)^2 = K_R K_3 \frac{1}{V^2}$$

高度変化率, レイノルズ数は速度の2乗に逆比例する。



② 経路角/経路角変化率

(I) 項の(14)–(17)式において $n=3$ と置くと

(a) 経路角

$$\sin \gamma = - \frac{\kappa}{\left(\frac{V}{V_C}\right) \left\{ \frac{\eta}{3} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + 1 \right\}} \approx - \frac{3\kappa}{\eta} \left(\frac{V_C}{V}\right)^3 = - \frac{3 K_3}{2 \Delta \beta} \frac{1}{V^3} = - \frac{3}{2 \Delta \beta} \rho$$

(b) 経路角変化率

$$\frac{d\gamma}{dt} = - \frac{\beta V_C \kappa \left(\frac{V}{V_C}\right)^{3-n} \left\{ \frac{\eta}{3} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + \frac{1}{3} \right\}}{\left\{ \frac{\eta}{3} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + 1 \right\}^2 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 \left\{ \frac{\eta}{3} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + 1 \right\}^2 - 1}} \approx -\beta V_C \left(\frac{3\kappa}{\eta}\right)^2 \left(\frac{V}{V_C}\right)^{-5}$$

③ 加速度

(I) 項の(22)–(25)式において $n=3$ と置くと

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{\beta V_C^2 \frac{\kappa}{3} \left(\frac{V}{V_C}\right)}{\frac{\eta}{3} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + 1} \approx \beta V_C^2 \frac{\kappa}{\eta} \left(\frac{V}{V_C}\right)^{-1} = \frac{\rho_c V_C^2}{2\Delta} \left(\frac{V_C}{V}\right) = \frac{K_3}{2\Delta} \frac{1}{V}$$

④ 抗力加速度, 揚力加速度, 要求揚抗比

(a) 抗力加速度

$$\frac{D}{mg} = \frac{\rho V^2}{2\Delta g} = \frac{\rho_c V_C^2}{2\Delta g} \left(\frac{V_C}{V}\right) = \frac{K_3}{2\Delta} \frac{1}{V} \quad (43)$$

(b) 揚力加速度

$$\frac{L}{mg} = \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_C}\right)^3 \left\{ \frac{\eta}{3} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + \frac{1}{3} \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (44)$$

(c) 要求揚抗比

要求揚抗比 $L/D = (L/mg)/(D/mg)$ に(43), (44)式 (D/mg) (L/mg) を代入して

$$\frac{L}{D} = \frac{1}{\kappa} \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_C}\right)^4 \left\{ \frac{\eta}{3} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + \frac{1}{3} \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C}\right) \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (29)$$

ただし $\sin \gamma$ は (I) 項の (14) 式参照, 経路角が小さい場合には

$$\sin \gamma \approx -\frac{3\kappa}{\eta} \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-3}$$

$$\frac{L}{D} \approx \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \frac{\eta}{3\kappa} \left(\frac{V}{V_c}\right)^6 \tan \gamma \sin^2 \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_c}\right) \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma$$

から次式で近似できる。

$$\frac{L}{D} \approx -9 \left(\frac{\rho_c}{2\Delta\beta}\right) \left(\frac{V_c}{V}\right)^3 - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_c}\right) \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\}$$

右辺第 2 項は遠心力と重力の差である。揚力項が大きい場合 $L/m \gg (v^2/r - g) \cos \gamma$ にはさらに次のように近似できる。

$$\frac{L}{D} \approx -\frac{9}{2} \left(\frac{\rho_c}{\Delta\beta}\right) \left(\frac{V_c}{V}\right)^3$$

⑤ 空力荷重

空力荷重 G は定義および (43) 式の抗力加速度から

$$G = \sqrt{(L/m)^2 + (D/m)^2} = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/m)$$

(L/D) , (D/mg) から

$$\frac{G}{g} = \frac{\rho_c}{2\Delta} \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-1} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2} = \kappa \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-1} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2}$$

ただし (L/D) は (45) 式参照

また近似 (L/D) を用いると抗力加速度は次のように近似できる。

$$\frac{G}{g} \approx \kappa \left(\frac{V_c}{V}\right) \sqrt{1 + \frac{81}{4} \left(\frac{\rho_c}{\Delta\beta}\right)^2 \left(\frac{V_c}{V}\right)^6} \approx \kappa \left(\frac{V_c}{V}\right)$$

⑥ 空力加熱率

(I) 項の (32) (33) 式において $n=3$ と置くと無次元化して平均加熱率, 澱点加熱率は次式で表される。

$$\frac{\dot{Q}_{avg}}{\dot{Q}_{avgc}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \left(\frac{V}{V_c}\right)^3 = 1$$

$$\frac{\dot{Q}_{stg}}{\dot{Q}_{stgc}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_c}\right)^3 = \left(\frac{V}{V_c}\right)^{3/2}$$

⑦ 飛行時間：

飛行時間は $dt/dV = 1/\beta V^2 \sin \gamma$ から $\sin \gamma$ を代入して時間の速度に対する変化率を求めて

$$\frac{dt}{d(V/V_c)} = -\frac{3}{\beta V_c \kappa} \left\{ \frac{\eta}{3} \left(\frac{V}{V_c} \right) + \left(\frac{V}{V_c} \right)^{-1} \right\}$$

上式を積分して飛行時間は次式で表される。

$$t = \frac{3}{\beta V_c \kappa} \left[\frac{\eta}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \right\} - \ln \left(\frac{V}{V_c} \right) \right]$$

$$\frac{t}{t_c} = \frac{3}{\kappa} \left[\frac{\eta}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \right\} - \ln \left(\frac{V}{V_c} \right) \right] \approx \frac{\eta}{2\kappa} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \right\}$$

ただし $t_c = 1/\beta V_c$

また速度を時間の関数としてあらわすと

$$\frac{V}{V_c} = \sqrt{1 - \frac{2\kappa}{\eta} \frac{t}{t_c}}$$

⑧ 飛行距離/レンジ

(a) 飛行距離 s

(I) 項の (35) 式において $n \neq 2$ であるから $n=3$ と置くと

$$s = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{3} \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \right\} + \frac{3\Delta g}{\frac{1}{2}\rho_c V_c^2} \left(1 - \frac{V}{V_c} \right) \right] \approx \frac{2\Delta}{\rho_c} \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \right\}$$

すなわち速度の 3 次式で表される。

(b) レンジ R ： 初等関数では表されない。(E) 等澱点加熱率軌道 ($n=6$)

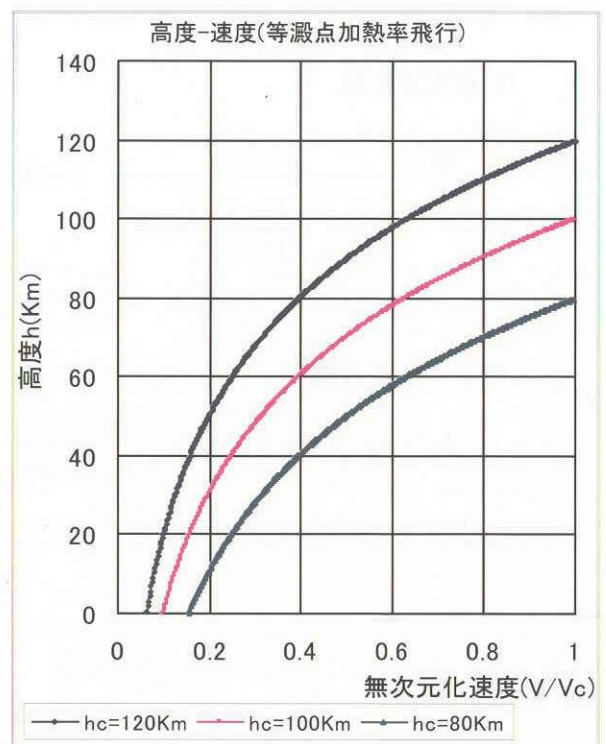
澱点空力加熱率は次のように定義される。

(宇宙機の空力加熱率の項参照)

$$\dot{Q}_s = C_{hs} \rho^{1/2} V^3 / \sqrt{R_N} : \text{澱点空力加熱率}$$

ここで R_N はノーズ半径 C_{hs} 定数、澱点空力加熱率 \dot{Q}_s において V^3 は $V^{3.15}$ を用いる場合が多いがここでは V^3 で近似する。澱点空力加熱率 \dot{Q}_s が一定であれば ρV^6 は一定となり定数を K_6 と置いて次式で表される。

$$\rho V^6 = \left(\dot{Q}_s \sqrt{R_N} / C_{hs} \right)^2 = K_6$$



定数 K_6 は澱点空力加熱率 \dot{Q}_s の 2 乗に対応する定数である。以下この等澱点加熱率飛行について記述する。

定数: $K_6 = \rho_c V_c^6$

$$\frac{\kappa}{\eta} = \frac{\rho_c}{2\Delta\beta} = \frac{K_6}{2\Delta\beta V_c^6}$$

κ , η は (I) 項 (12), (13) 式参照

① 高度 (密度), 高度変化率, レイノルズ数

(I) 項の (18) - (21) 式において $n=6$ と置くと

(a) 高度 (密度)

条件 $\rho V^6 = \rho_c V_c^6$ から密度は次式で表される。

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{V_c}{V}\right)^6$$

海面上密度との比は

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left(\frac{V_c}{V}\right)^6$$

高度は $\ln(\rho/\rho_{SL}) = -\beta h$ から次式で表される。

$$h = h_c + \frac{6}{\beta} \ln\left(\frac{V}{V_c}\right)$$

(b) 高度変化率

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-\kappa V_c}{\left(\frac{V}{V_c}\right)^3 \left\{ \frac{\eta}{6} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1 \right\}} \approx -6V_c \frac{\kappa}{\eta} \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-5} = -\frac{3K_6}{\Delta\beta} \frac{1}{V^5}$$

(c) レイノルズ数

$$R_e = K_R \rho V = K_R \rho_c V_c \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \left(\frac{V}{V_c}\right) = K_R \rho_c V_c \left(\frac{V_c}{V}\right)^5 = K_R K_6 \frac{1}{V^5}$$

② 経路角/経路角変化率

(I)項の(14)–(17)式において $n=6$ と置くと

(a) 経路角

$$\sin \gamma = - \frac{\kappa}{\left(\frac{V}{V_c}\right)^4 \left\{ \frac{\eta}{6} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1 \right\}} \approx -6 \frac{\kappa}{\eta} \left(\frac{V_c}{V}\right)^6 = -6 \frac{\rho_c}{2\Delta\beta} \left(\frac{V_c}{V}\right)^6 = -\frac{3K_6}{\Delta\beta V^6} \rho = \frac{-3\rho}{\Delta\beta}$$

(b) 経路角変化率

$$\frac{d\gamma}{dt} = - \frac{\beta V_c \kappa \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-3} \left\{ \frac{\eta}{6} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + \frac{4}{6} \right\}}{\left\{ \frac{\eta}{6} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1 \right\}^2 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{V}{V_c}\right)^8 \left\{ \frac{\eta}{6} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1 \right\}^2 - 1}} \approx -\beta V_c \left(\frac{6\kappa}{\eta}\right)^2 \left(\frac{V_c}{V}\right)^{11}$$

③ 加速度

(I)項の(22)–(25)式において $n=6$ と置くと

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{\beta V_c^2 \kappa \left(\frac{V}{V_c}\right)^{-2}}{\frac{\eta}{6} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + 1} \approx \frac{\beta V_c^2}{g} \frac{\kappa}{\eta} \left(\frac{V_c}{V}\right)^4 = \frac{K_6}{2\Delta\beta} \frac{1}{V^4}$$

④ 抗力加速度, 揚力加速度, 要求揚抗比

(a) 抗力加速度

抗力加速度は $D/m = \rho V / 2\Delta$ で定義され (ρ/ρ_c), または (V/V_c) を代入して速度または密度の関数として次式で表される。

$$\frac{D}{mg} = \frac{\rho V^2}{2\Delta\beta} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V_c}{V}\right)^4 = \frac{K_6}{2\Delta\beta} \frac{1}{V^4} \quad (46)$$

(b) 揚力加速度

$$\frac{L}{mg} = \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_c}\right)^6 \left\{ \frac{\eta}{6} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + \frac{4}{6} \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (47)$$

(c) 要求揚抗比

 $L/D = (L/mg)/(D/mg)$ に (D/mg) (L/mg) を代入して

$$\frac{L}{D} = \frac{1}{\kappa} \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left(\frac{V}{V_c}\right)^{10} \left\{ \frac{\eta}{6} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + \frac{4}{6} \right\} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_c}\right)^4 \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (48)$$

ただし $\sin \gamma$ は (1) 項の (14) 式参照, 経路角が小さい場合には

$$\sin \gamma \approx -\frac{2\kappa}{\eta} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{-6}$$

$$\frac{L}{D} \approx \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \frac{\eta}{6\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{12} \tan \gamma \sin^2 \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right)^4 \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma$$

から次式で近似できる。

$$\frac{L}{D} \approx -36 \left(\frac{\rho_c}{2\Delta\beta} \right) \left(\frac{V_C}{V} \right)^6 - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right)^4 \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \approx -\frac{36}{2} \left(\frac{\rho_c}{\Delta\beta} \right) \left(\frac{V_C}{V} \right)^6 \quad (49)$$

右辺第 2 項は遠心力と重力の差である。揚力項が大きい場合 $L/m \gg (V^2/r - g) \cos \gamma$ にはさらに近似できる。

⑤ 空力荷重

空力荷重 G は定義および (46) 式の抗力加速度から

$$G = \sqrt{(L/m)^2 + (D/m)^2} = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/m)$$

$(L/D), (D/mg)$ から

$$\frac{G}{g} = \frac{\rho_c}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{-4} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} = \kappa \left(\frac{V}{V_C} \right)^{-4} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{D} \right)^2} \quad (50)$$

ただし (L/D) は (48) 式参照

また近似 (L/D) を用いると抗力加速度は次のように近似でき, ほぼ一定となる。

$$\frac{G}{g} \approx \kappa \left(\frac{V_C}{V} \right)^4 \sqrt{1 + \left(\frac{36}{2} \right)^2 \left(\frac{\rho_c}{\Delta\beta} \right)^2 \left(\frac{V_C}{V} \right)^{12}} \approx \kappa \left(\frac{V_C}{V} \right)^4$$

⑥ 空力加熱率

(1) 項の (32) (33) 式において $n=2$ と置くと無次元化して平均加熱率, 澱点加熱率は次式で表される。これより平均空力加熱率は速度の 3 乗に逆比例, また澱点空力加熱率は一定となる。

$$\frac{\dot{Q}_{\text{avg}}}{\dot{Q}_{\text{avgc}}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 = \left(\frac{V}{V_C} \right)^{-3} \quad (51)$$

$$\frac{\dot{Q}_{\text{stg}}}{\dot{Q}_{\text{stgc}}} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 = 1 \quad (52)$$

⑦ 飛行時間

$n \neq 1, 3$ の場合上式を積分して飛行時間は次式で表される。

$$t = \frac{1}{\beta V_c} \left[\frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^5 \right\} + \frac{2}{\kappa} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \right\} \right] \quad (53)$$

上式で $1/\beta V_c$ は時刻の次元を持つから $t_c = 1/\beta V_c$ と置くと

$$\frac{t}{t_c} = \left[\frac{\Delta\beta}{\rho_c} \frac{2}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^5 \right\} + \frac{2}{\kappa} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \right\} \right] \quad (54)$$

⑧ 飛行距離 S/レンジ R

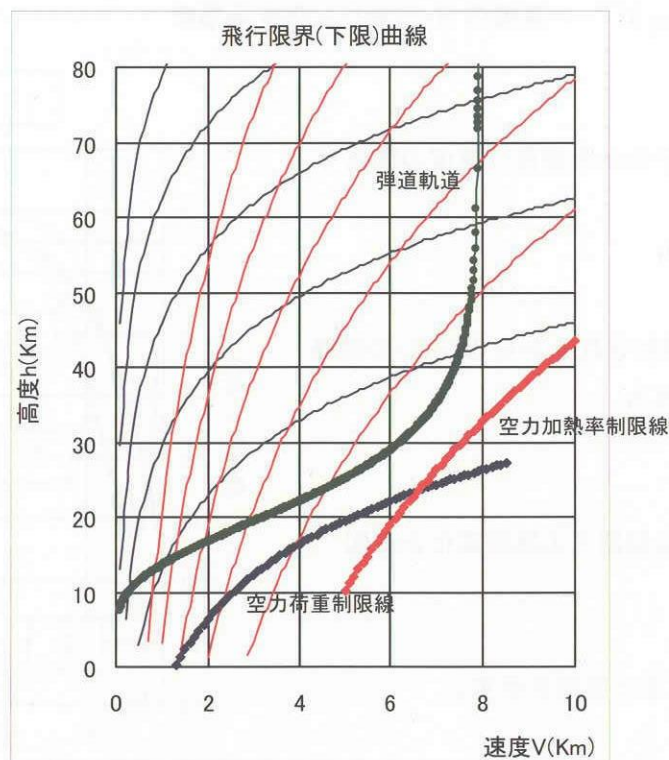
(a) 飛行距離 S

$$s = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{6} \frac{2\Delta\beta}{\rho_c} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^6 \right\} + \frac{2}{\kappa} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^{n-2} \right\} \right] \approx \frac{2\Delta}{\rho_c} \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_c} \right)^6 \right\} \quad (55)$$

(b) レンジ R: 初等関数では表されないので数値積分による。

(F) 等 ρV^n 軌道の応用

等 ρV^n 軌道で $n=2, n=6$ と置くと前述のように等抗力加速度/動圧数軌道 ($n=2$) , 等澗点加熱率軌道 ($n=6$) が得られる。これらの軌道で機体の許容空力荷重, 許容加熱率対応してパラメータ K_1, K_6 を適当な値にとると宇宙機の飛行下限線が得られる。



8-7. その他の軌道制御

等高度・高度変化率飛行, 等経路角飛行では空気力が十分大きく $D/m \gg g \sin \gamma$ と仮定して重力項を無視した。ここでは経路角の正弦値 $\sin \gamma$ が密度の関数で表される場合について, 重力項を無視せずに厳密解を求める。宇宙機の運動方程式で独立変数を時刻 t から密度 ρ に変換して $\hat{u} = V^2/gr$ と置けば次式で表される。

$$\frac{d\hat{u}}{d\rho} - \frac{1}{\Delta\beta \sin\gamma} \hat{u} = \frac{2}{\beta r \rho}$$

上式で $\Delta\beta$ は機体の弾道係数で決まる定数(次元は密度の逆数) βr は無次元定数 ≈ 900 である。したがって経路角 γ の正接 $\sin \gamma$ が密度 ρ の関数であれば次に示すようにの変数係数 1 次常微分方程式であらわされる。 $d\hat{u}/d\rho + P(\rho)\hat{u} = Q(\rho)$
この 1 次常微分方程式は解析的に解けて厳密解が得られる。

物理的に意味があつて, $\sin \gamma$ が密度 ρ の関数で表される例として次のような場合がある。このような特別な場合について厳密解を求める。

- (A) 一般解
- (B) $\sin \gamma = K$: 等経路角の場合(厳密解)
- (C) $\sin \gamma = K \rho$: 大気密度に比例する場合
- (D) $\sin \gamma = K \rho \ln(\rho/\rho_{SL})$: 密度と高度の積に比例する場合
- (E) $\sin \gamma = K (\rho/\rho_{SL})^{1-n}$: 高度の $(1-n)$ 乗に比例する場合

ここで K, n は定数,

密度 ρ は等温大気モデルから密度は高度の関数として

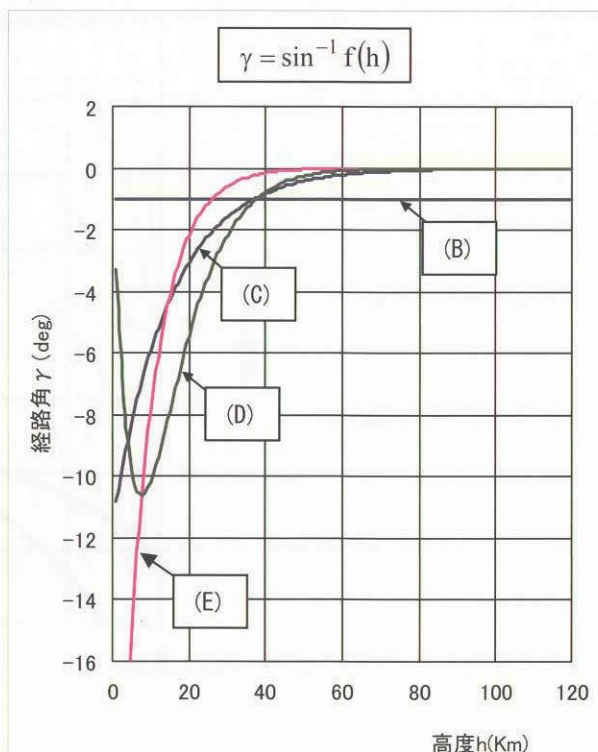
$$\rho = \rho_{SL} \exp(-\beta h)$$

ρ_{SL} は海面上密度で表わされるから (B)-(E) の経路角 γ は次式で表わされる。

$$\gamma = \sin^{-1} f(h)$$

経路角の高度に対する経路角の概略変化を右図に示す。

最初に (B)-(E) に対する一般解を示す。



(A) 一般解

$d\rho/dt = -\rho\beta V \sin\gamma$ を用いて独立変数を時刻 t から密度 ρ に変換すると次式を得る。

$$\frac{d(V^2/gr)}{d\rho} - \frac{(V^2/gr)}{\Delta\beta \sin\gamma} = \frac{2}{\beta r \rho} \quad (1)$$

$$\frac{d \cos\gamma}{d\rho} - \frac{1}{\beta r} \frac{\cos\gamma}{\rho} \left(1 - \frac{gr}{V^2}\right) = \frac{1}{2\Delta\beta D} \quad (2)$$

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{1}{\beta \rho \sin\gamma} \quad (3)$$

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{1}{\beta \rho \tan\gamma} \quad (4)$$

(1) 式の右辺は重力項を表し、(2) 式の左辺第 2 項は Loh の定数である。速度の 2 乗を速度の 2 乗の次元を持つ gr で無次元化した変数 \hat{u} を定義する。

$$\hat{u} = V^2/gr \quad (5)$$

定数 b (密度の逆数の次元を持つ)、定数 c (無次元化定数で $c \approx 1/900$ 程度の微小値をとる) を以下のように置くと、(6) 式となる。

$$b = 1/\Delta\beta > 0 : \text{定数}$$

$$c = 1/\beta r > 0 : \text{定数}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\rho} - \frac{b\hat{u}}{\sin\gamma} = \frac{2c}{\rho} \quad (6)$$

$$\text{いま、 } P(\rho) = -b/\sin\gamma$$

$$Q(\rho) = 2c/\rho$$

とおくと次の変数係数 1 次常微方程式は次のように表され、その解は次式 (8) 式で表される。

$$\frac{d\hat{u}}{d\rho} + P(\rho)\hat{u} = Q(\rho) \quad (7)$$

$$\hat{u} = \exp\left(-\int P d\rho\right) \left[\int Q \left\{ \exp \int P d\rho \right\} d\rho \right] \quad (8)$$

(B) $\sin\gamma = K$ ($= \sin\gamma_c$) : 等経路角の場合

経路角が一定で飛行する場合の厳密解を求める。弾道パラメータ a' を

$$a' = -\frac{1}{\Delta\beta \sin\gamma_c} = -\frac{b}{\sin\gamma_c}$$

とおき、(6) 式に代入すると次式を得る。

$$\frac{d\hat{u}}{d\rho} + a'\hat{u} = \frac{2c}{\rho} \quad (9)$$

(7)式と対応させると関数P, Qは次式となる。P = a' (一定), Q(ρ) = 2c/ρである。
このP, Qを(8)式に代入して解を求めると次の通り。

$$\hat{u} = \exp(-a'\rho) \left\{ 2c \int \frac{\exp(a'\rho)}{a'\rho} d(a'\rho) + \text{const} \right\}$$

右辺の積分は積分指数関数で表される(補足 参照) 初期値をρ = ρ_c, ũ = ũ_cとして

$$\frac{\hat{u}}{\hat{u}_{c_0}} = \exp\{-a'(\rho - \rho_c)\} \left[1 + \frac{2c}{\hat{u}_{c_0} \exp(a'\rho_c)} \{ \bar{E}_i(a'\rho) - \bar{E}_i(a'\rho_c) \} \right] \quad (10)$$

①高度対速度

$$\left(\frac{V}{V_c} \right)^2 = \exp\{-a'(\rho - \rho_c)\} \left[1 + \frac{2}{\beta r V_c^2} \exp(-a'\rho_c) \{ \bar{E}_i(a'\rho) - \bar{E}_i(a'\rho_c) \} \right] \quad (11)$$

または級数展開すると(補足積分指数関数の項参照)

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 &= \exp\{-a'(\rho - \rho_c)\} \left[1 + \frac{2}{\beta r V_c^2} \exp(-a'\rho_c) \left\{ \ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'^k (\rho^k - \rho_c^k)}{k k!} \right\} \right] \\ &\approx \exp\{-a'(\rho - \rho_c)\} \end{aligned} \quad (12)$$

上式で右辺第2項が重力項でありこれを無視すると(8-5)項の等経路角飛行/直線弾道軌道の近似解と一致する。初期速度gr/V_c² ≈ 1は1のオーダーであり βr ≈ 900のオーダーであるから [] 内第2項は ≪ 1 であり無視できる。弾道係数は a = -1/2Δβ sin γ_c と置いた場合の2倍になっていることに注意。 a' = 2a

また近似式をもちいると密度は速度の関数として陽に次式で表される。

$$\rho - \rho_c = \frac{2}{a'} \ln\left(\frac{V_c}{V}\right) = -2\Delta\beta \sin \gamma_c \ln\left(\frac{V_c}{V}\right)$$

海面上密度に対する密度比は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_c} &= 1 + \frac{2}{a'\rho_c} \ln\left(\frac{V_c}{V}\right) \quad (13) \\ \frac{\rho}{\rho_{SL}} &= \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} + \frac{2}{a'\rho_{SL}} \ln\left(\frac{V_c}{V}\right) = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_c}{V}\right) \right\} \end{aligned}$$

これより高度は

$$h = h_c - \frac{1}{\beta} \ln \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_c}{V}\right) \right\} \quad (14)$$

②高度変化率：

(5)式 $dh/dt = V \sin \gamma_c$ から (12) 式を用いて

$$\frac{dh}{dt} = V_C \sin \gamma_c \left\{ \exp\{-a'(\rho - \rho_c)\} \left[1 + \frac{2}{\beta r} \frac{gr}{V_C^2} \exp(-a'\rho_c) \left\{ \ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'^k (\rho^k - \rho_c^k)}{k k!} \right\} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

③経路角/経路角変化率：

経路角一定の仮定から経路角変化率は0である。

$$\gamma = \gamma_c \quad : \text{経路角} \quad (16)$$

$$d\gamma/dt = 0 \quad (17)$$

④加速度

加速度は $-dV/dt = \rho V^2/2\Delta + g \sin \gamma_c$ から

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{r\rho_c}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 + \sin \gamma_c \quad (18)$$

$$\frac{\rho}{\rho_c} = 1 + \frac{2}{a'\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right)$$

$$\left(\frac{V}{V_C}\right)^2 = \exp\{-a'(\rho - \rho_c)\} \left[1 + \frac{2}{\beta r} \frac{gr}{V_C^2} \exp(-a'\rho_c) \left\{ \ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'^k (\rho^k - \rho_c^k)}{k k!} \right\} \right]$$

⑤抗力加速度/揚力加速度

(a) 抗力加速度

等経路角飛行の抗力加速度は $D/m = \rho V^2/2\Delta$ から

$$\frac{D}{mg} = \frac{\rho V^2}{2\Delta g} = \frac{r\rho_c}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 = \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 \quad (19)$$

 ρ/ρ_c を代入して速度の関数として次式が得られる。

$$\frac{D}{mg} = \kappa \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 \quad (20)$$

経路角が $\gamma_c = 0$ と置くと

$$\frac{D}{mg} = \kappa \left(\frac{V}{V_C}\right)^2$$

この場合一定高度飛行の結果と一致する。

(b) 揚力加速度

揚力加速度 L/mg を $V d\gamma/dt = L/m + (V^2/r - g)\cos\gamma_c$ から求める。一定経路角の仮定から経路角変化率は 0 であり次式で与えられる。

$$\frac{L}{mg} = \left\{ 1 - \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \right\} \cos\gamma_c \quad (21)$$

経路角が $\gamma_c = 0$ と置くと

$$L/mg = \left\{ 1 - \left(V_C^2/gr \right) \left(V/V_C \right)^2 \right\}$$

この場合も一定高度飛行の結果と一致する。

⑥ 要求揚抗比

要求揚抗比 L/D は揚力加速度と抗力加速度の比として求めることができ、 $L/D = (L/mg)/(D/mg)$ (20) (21) 式の結果を用いて次式で表される。

$$\frac{L}{D} = \frac{\frac{\cos\gamma_c}{\kappa} \left\{ 1 - \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \right\}}{\left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta\sin\gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2} \quad (22)$$

経路角が 0 の場合 $\gamma_c = 0$ と置くと

$$\frac{L}{D} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \left(\frac{V_C}{V} \right)^2 - \frac{V_C^2}{gr} \right\}$$

一定高度飛行の結果と一致する。

⑦ 空力荷重

空力荷重は揚力加速度 L/m と抗力加速度 D/m の 2 乗和の $\sqrt{\quad}$ で表される。すなわち $G/g = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/mg)$ から次式で与えられる。 (L/D) , (D/mg) を代入して

$$\frac{G}{g} = \kappa \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta\sin\gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \sqrt{1 + \frac{\left[\frac{\cos\gamma_c}{\kappa} \left\{ 1 - \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \right\} \right]^2}{\left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta\sin\gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2}} \right)} \quad (23)$$

⑧ 激点空力加熱率

激点の空力加熱率を次式で定義する。 $dQ/dt = K_Q \rho^{1/2} V^3$ 一定経路角飛行の場合には (13) 式の ρ/ρ_c を代入して次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= K_Q \rho_c^{1/2} V_C^3 (\rho/\rho_c)^{1/2} (V/V_C)^3 \\ \frac{dQ}{dt} &= K_Q \rho_c^{1/2} V_C^3 \left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta\sin\gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\}^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \end{aligned} \quad (24)$$

$V = V_C$ での澱点加熱率を $(dQ/dt)_C$ とすれば $(dQ/dt)_C = K_Q \rho_c^{1/2} V_C^3$ であるから (24) 式を $(dQ/dt)_C$ で無次元化すると

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_C} = \sqrt{\left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \left(\frac{V}{V_C}\right)^6} \quad (25)$$

⑨ 飛行距離/飛行レンジ

(a) 飛行距離

(3) 式

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{1}{\beta \sin \gamma_c} \frac{1}{\rho}$$

を積分して飛行距離 S を得る。

$$s = \frac{1}{\beta \sin \gamma_c} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) = \frac{1}{\beta \sin \gamma_c} \ln\left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \quad (26)$$

(b) 飛行レンジ

(4) 式

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{1}{\beta \tan \gamma_c} \frac{1}{\rho}$$

を積分して飛行レンジ R を得る。

$$R = \frac{1}{\beta \tan \gamma_c} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) = \frac{1}{\beta \tan \gamma_c} \ln\left\{ 1 - \frac{2\Delta\beta \sin \gamma_c}{\rho_c} \ln\left(\frac{V_C}{V}\right) \right\} \quad (27)$$

(c) $\sin \gamma = K\rho$ の場合

経路角が密度に比例する場合を考える。この場合軌道の厳密解が得られる。またこの軌道は近似的に $\rho V^n = \text{一定}$ 軌道と等しくなることを示す。

係数 K を

$$K = -\frac{b}{n} = -\frac{1}{n\Delta\beta} \quad (28)$$

と置くと経路角は密度に比例する形で次式で与えられる。

$$\sin \gamma = -\frac{b}{n} \rho = -\frac{1}{n} \frac{\rho_{SL}}{\Delta\beta} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}}\right) \quad (29)$$

K は密度の逆数の次元を持つ定数、 $\rho_{SL}/\Delta\beta$ は無次元定数

$$\boxed{\frac{d\hat{u}}{d\rho} + \frac{n\hat{u}}{\rho} = \frac{2c}{\rho}} \quad (30)$$

で表され一般解に対応する関数 P, Q は $P(\rho) = n/\hat{\rho}$, $Q(\rho) = 2c/\hat{\rho}$ である。

この方程式の解は(8)式から

$$\hat{u} - \frac{2c}{n} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} \left(\hat{u}_c - \frac{2c}{n} \right) \quad (31)$$

① 速度対密度

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left\{ \frac{V_c^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/n} \quad (32)$$

$\beta r \approx 900$ から $2/n\beta r \ll 1$ である。したがってこの項を無視すると

$$\frac{\rho}{\rho_c} \approx \left(\frac{V_c}{V} \right)^{2/n}$$

近似式は $\rho V^{2/n} = \rho_c V_c^{2/n}$ と表されるから $\rho V^{2/n}$ 一定飛行となる。 $n=1/3$ の時、等澱点加熱率飛行、 $n=2/3$ の時、等平均加熱率飛行、 $n=1$ の時等動圧飛行、等抗力加速度飛行、 $n=2$ の時等レイノルズ数飛行となる。(次項 $\rho V^n = \text{一定飛行}$ 参照)

速度を密度の関数として表すと次の通り。また $c = 1/\beta r \approx 1/900$ であるから第2項を無視すると次式で近似できる。

$$\left(\frac{V}{V_c} \right)^2 = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} + \frac{2}{n\beta r} \frac{gr}{V_c^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} \right\} \approx \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} \quad (33)$$

海面上密度との比は

$$\frac{\rho}{\rho_{SL}} = \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left\{ \frac{V_c^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/n} \approx \frac{\rho_c}{\rho_{SL}} \left(\frac{V_c}{V} \right)^{2/n} \quad (34)$$

これより高度 h は

$$h = h_c - \frac{1}{n\beta} \ln \left(\frac{V_c^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right) \approx h_c - \frac{2}{n\beta} \ln \left(\frac{V_c}{V} \right) \quad (35)$$

② 経路角/経路角変化率：

(a) 経路角

経路角は定義から密度に比例する。

$$\sin \gamma = -\frac{b\rho_c}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \quad (36)$$

(b) 経路角変化率

経路各(40)式を微分して $d\rho/dt = -\rho\beta V \sin \gamma$ をもちいると

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{b}{n \cos \gamma} \frac{d\rho}{dt} = \frac{b}{n} \rho \beta V \tan \gamma \quad (37)$$

または $b = 1/\Delta\beta$ であるから

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\rho V}{n\Delta} \tan \gamma \quad (38)$$

$n=2$ の時、一定高度変化率飛行での経路変化率に等しい。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\rho_c V_c}{n\Delta} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_c} \right) \tan \gamma = \frac{\rho_c V_c}{n\Delta} \left\{ \frac{V_c^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/n} \left(\frac{V}{V_c} \right) \tan \gamma \\ &\approx \frac{\rho_c V_c}{n\Delta} \left(\frac{V}{V_c} \right)^{1-2/n} \tan \gamma \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\rho_{SL} V_c}{n\Delta} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right) \left[\left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} + \frac{2}{n\beta r} \frac{gr}{V_c^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} \right\} \right]^{1/2} \tan \gamma \quad (40)$$

密度に関する変化率は

$$\frac{dy}{d\rho} = -\frac{b}{n} \frac{1}{\cos \gamma} \quad (41)$$

または

$$\frac{d \sin \gamma}{d\rho} = -\frac{1}{n\Delta\beta} \quad (42)$$

$b = 1/\Delta\beta$ であるから $n=2$ ならば経路角の密度に関する変化率も一定高度変化率飛行での経路変化率に等しい(項参照)

③加速度

加速度は $-dV/dt = \rho V^2/2\Delta + g \sin \gamma$ から

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{r\rho_c}{2\Delta} \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + \sin \gamma \quad (43)$$

ρ/ρ_c , V/V_c , $\sin \gamma$, $\kappa = (r\rho_c/2\Delta)(V_c^2/gr)$ を代入して加速度を速度, または密度の関数として表すと次の通り。またあわせて重力項を無視した(右辺第2項)近似式を示す。重力項を無視すれば加速度は次項に示す抗力加速度と等しくなる。

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \kappa \left\{ \frac{V_c^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 - \left(\frac{b\rho_c}{n} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \approx \kappa \left(\frac{V}{V_c} \right)^{2-2/n} \quad (44)$$

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left[\left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} + \frac{2}{n\beta r} \frac{gr}{V_c^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} \right\} \right] - \left(\frac{b\rho_c}{n} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \approx \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1-n} \quad (45)$$

④抗力加速度/揚力加速度:

(a) 抗力加速度

抗力加速度(g 単位)は加速度の右辺第2項の重力成分を除いて次式で表される。

$$\frac{D}{mg} = \frac{\rho_c V_C^2}{2 \Delta g} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \quad (46)$$

ρ/ρ_c を代入して

$$\frac{D}{mg} = \kappa \left\{ \frac{V_C^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/n} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \approx \kappa \left(\frac{V}{V_C} \right)^{2-2/n} \quad (47)$$

密度の関数として表すと

$$\frac{D}{mg} = \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right) \left[\left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} + \frac{2}{n\beta r} \frac{gr}{V_C^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{-n} \right\} \right] \approx \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1-n} \quad (48)$$

これより抗力加速度は速度の $(2-2/n)$ 乗に、また密度の $(1-n)$ 乗に比例する。いま $n=1$ とすれば抗力加速度は一定 $D/mg = \kappa = (D/mg)_C$ となり、この $\sin \gamma = K\rho$ 飛行は抗力加速度一定飛行と等しくなる。

(b) 揚力加速度

$V d\gamma/dt = L/m + (V^2/r - g) \cos \gamma$ から揚力加速度は次式で表される。

$d\gamma/dt$, V/V_C を代入して

$$\frac{L}{mg} = \frac{2\kappa}{n} \left\{ \frac{V_C^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/n} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \tan \gamma - \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (49)$$

右辺第 2 項は重力項である。空気が十分大きい領域では右辺の重力項は無視できる。

$$\frac{L}{mg} \approx \frac{2\kappa}{n} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{2-2/n} \tan \gamma \quad (50)$$

⑤ 要求揚抗比：

要求揚抗比は $L/m = (L/mg)/(D/mg)$ で与えられるから (47), (49) 式の (L/mg) , (D/mg) を用いて次式で表される。

$$\frac{L}{D} = \frac{2}{n} \tan \gamma - \frac{\frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma}{\left\{ \frac{V_C^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/n} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2} \approx \frac{2}{n} \tan \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{2/n-2} \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (51)$$

$$\text{ただし } \cos \gamma = 1/\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}, \quad \tan \gamma = \sin \gamma / \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$$

⑥空力荷重：

空力荷重は $G = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/m)$ から次式で与えられる。

$(L/D), (D/mg)$ を代入して

$$\frac{G}{g} = \kappa \left\{ \frac{V_c^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \sqrt{1 + \left[\frac{2}{n} \tan \gamma - \frac{\frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma}{\left\{ \frac{V_c^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2} \right]^2} \quad (52)$$

$1/n\beta r \ll 1$ であるから次のように近似できる。

$$\approx \kappa \left(\frac{V}{V_c} \right)^{2-2/n} \sqrt{1 + \left[\frac{2}{n} \tan \gamma - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{V}{V_c} \right)^{2/n-2} \left\{ \frac{V_c^2}{gr} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \right]^2}$$

⑦ 澱点空力加熱率

澱点の空力加熱率を次式で定義する。

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho^{1/2} V^3 = K_Q \rho_c^{1/2} V_c^3 \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \quad (53)$$

ρ/ρ_c を代入して

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho_c^{1/2} V_c^3 \left\{ \frac{V_c^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/2n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^3$$

$V = V_c$ での澱点加熱率を $(dQ/dt)_c$ とすれば $(dQ/dt)_c = K_Q \rho_c^{1/2} V_c^3$ であるから (54) 式を $(dQ/dt)_c$ で無次元化すると

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_c} = \left\{ \frac{V_c^2/gr - 2/n\beta r}{V^2/gr - 2/n\beta r} \right\}^{1/2n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \approx \left(\frac{V}{V_c} \right)^{3-1/n}$$

⑧ 飛行距離/飛行レンジ

(a) 飛行距離

(3) 式, $\sin \gamma = -(b\rho/n)$ から

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{1}{\beta \rho \sin \gamma} = -\frac{n}{\beta b} \frac{1}{\rho^2} \quad (55)$$

上式は容易に積分できて飛行距離 s が得られる。

$$s = -\frac{1}{\beta} \frac{n}{b\rho_c} \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho} \right) = -\frac{1}{\beta} \frac{\Delta\beta}{\rho_c} n \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho} \right) \quad (56)$$

$1/\beta$ は距離の次元を持ち $\Delta\beta/\rho_c$ は無次元定数である。そこで $s_c = (1/\beta) (\Delta\beta/\rho_c)$ とおき s_c で無

次元化すると次式で表される。

$$\frac{s}{s_c} = n \left(\frac{\rho_c}{\rho} - 1 \right) \quad (57)$$

(b) 飛行距離/飛行レンジ

$$(4) \text{式から} \quad \frac{dR}{d\rho} = \frac{1}{\beta \rho \tan \gamma} \quad (58)$$

ここで経路角の正接 $\tan \gamma$ は次式で表されるから

$$\tan \gamma = \frac{-(b/n)\rho}{\sqrt{1-(b/n)^2\rho^2}}$$

上式に代入して飛行レンジの密度に関する変化率は次のようになる。

$$\frac{dR}{d\rho} = -\frac{1}{\beta} \frac{b}{n} \frac{\sqrt{1-(b/n)^2\rho^2}}{(b/n)^2\rho^2} \quad (59)$$

ここで $x = (b/n)\rho$ と置くと x の関数として次式となる。

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{1}{\beta} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

上式を 積分公式 $\int \sqrt{1-x^2}/x^2 dx = -\sqrt{1-x^2}/x - \sin^{-1} x$ を用いて積分すると飛行レンジ R を得る。

$$R = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\sqrt{1-(b\rho_c/n)^2}}{(b\rho_c/n)} - \frac{\sqrt{1-(b\rho/n)^2}}{(b\rho/n)} + \sin^{-1} \left(\frac{b\rho_c}{n} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{b\rho}{n} \right) \right\} \quad (60)$$

(D) $\sin \gamma = K \rho \ln(\rho/\rho_{SL})$ の場合

等温大気モデルからスケール高度を $1/\beta$ (定数) とすれば $\ln(\rho/\rho_{SL})$ は次のように高度 h の関数で与えられる。 $\ln(\rho/\rho_{SL}) = -\beta h$, したがってこの場合は

$$\sin \gamma = -\beta K \rho h$$

となり経路角の正弦値が密度と高度の積に比例する場合となる。

次に係数 K を

$$K = \frac{b}{n} = \frac{1}{n \Delta \beta} \quad (61)$$

と置くと経路角の正弦値は次式で表される。

$$\sin \gamma = \frac{b}{n} \rho \ln \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right) = \frac{1}{n} \frac{\rho_{SL}}{\Delta \beta} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right) \ln \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right) \quad (62)$$

ここで密度を海面上密度で無次元化して次式で定義する。

$$\hat{\rho} = \rho / \rho_{SL}$$

このとき(6)式は次のように表される。

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{\rho}} + \frac{n\hat{u}}{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}} = \frac{2c}{\hat{\rho}} \quad (63)$$

上式の一般解に対応する関数P, Qは $P(\hat{\rho}) = n / \hat{\rho} \ln \hat{\rho}$ $Q(\hat{\rho}) = 2c / \hat{\rho}$ となる。

上式の解は次のように表される。(付録参照)

$$\hat{u} = \left\{ -\frac{2c}{n+1} (\ln \hat{\rho}) + \frac{\text{const}}{(\ln \hat{\rho})^n} \right\} \quad (64)$$

積分定数を $\hat{\rho} = \hat{\rho}_c$ で $\hat{u} = \hat{u}_c$ と置けば(63)式の厳密解は次式で表される。

$$\hat{u} = \hat{u}_c \left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2c}{n+1} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \left\{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \right\} \quad (65)$$

① 高度対速度

$$\left(\frac{V}{V_c} \right)^2 = \left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2}{(n+1)\eta} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \left\{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \right\} \quad (66)$$

③ 経路角/経路角変化率:

(a) 経路角

経路角は仮定から

$$\sin \gamma = \frac{b\rho_{SL}}{n} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \quad (67)$$

ここで $\hat{\rho} \leq 1$ から $\ln \hat{\rho} \leq 0$ である。

(b) 経路角変化率

$\sin \gamma$ を微分して $d\hat{\rho}/dt = -\hat{\rho}\beta V \sin \gamma$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\beta V_c \frac{b\rho_{SL}}{n} \left(\frac{V}{V_c} \right) \hat{\rho} (\ln \hat{\rho} + 1) \tan \gamma \quad (68)$$

V/V_c を代入して

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\beta V_c \frac{b\rho_{SL}}{n} \hat{\rho} (\ln \hat{\rho} + 1) \tan \gamma \left[\left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2}{(n+1)\eta} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \left\{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \right\} \right]^{-1/2} \quad (69)$$

密度に対する変化率は

$$\frac{d \sin \gamma}{d\hat{\rho}} = \frac{b\rho_{SL}}{n} (\ln \hat{\rho} + 1) \quad (70)$$

④ 加速度

加速度は $-dV/dt = \rho V^2/2\Delta + \sin\gamma$ から

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{\rho_c V_C^2}{2\Delta g} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 + \sin\gamma \quad (71)$$

$(V/V_C)^2$, $\sin\gamma$ を代入して加速度を密度の関数として表すと次の通り。

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \kappa \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right) \left[\left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2}{(n+1)\eta} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \} \right] + \frac{b\rho_{SL}}{n} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \quad (72)$$

④ 抗力加速度/揚力加速度

(a) 抗力加速度

$$\frac{D}{mg} = \frac{\rho V^2}{2\Delta g} = \frac{\rho_c V_C^2}{2\Delta g} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \quad (73)$$

$(V/V_C)^2$ を代入して

$$\frac{D}{mg} = \kappa \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right) \left[\left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2}{(n+1)\eta} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \} \right] \quad (74)$$

(b) 揚力加速度

揚力加速度は $V(dy/dt) = L/m + (V^2/r - g)\cos\gamma$ から $V(dy/dt)$ を求めると

$$\begin{aligned} V \frac{dy}{dt} &= -\beta V_C^2 \frac{b\rho_c}{n} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \hat{\rho} (\ln \hat{\rho} + 1) \tan\gamma \\ \frac{L}{mg} &= -\beta r \frac{V_C^2}{gr} \frac{b\rho_c}{n} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \hat{\rho} (\ln \hat{\rho} + 1) \tan\gamma - \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 - 1 \right\} \cos\gamma \end{aligned} \quad (75)$$

これより $(V/V_C)^2$ を代入して

$$\begin{aligned} \frac{L}{mg} &= -\beta r \frac{V_C^2}{gr} \frac{b\rho_c}{n} \hat{\rho} (\ln \hat{\rho} + 1) \left[\left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2}{(n+1)\eta} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \} \right] \tan\gamma \\ &\quad - \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left[\left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2}{(n+1)\eta} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \} \right] - 1 \right\} \cos\gamma \end{aligned} \quad (76)$$

⑥ 要求揚抗比

要求揚抗比は $L/m = (L/mg)/(D/mg)$ で与えられるから (73), (75) 式の (L/mg) , (D/mg) を用いて次式で表される。

$$\frac{L}{D} = -\frac{2}{n} (\ln \hat{\rho} + 1) \tan\gamma - \frac{2\Delta}{r\rho_c} \frac{1}{\hat{\rho}} \left\{ 1 - \frac{gr}{V_C^2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \right\} \cos\gamma \quad (77)$$

$$\frac{L}{D} = -\frac{2}{n}(\ln \hat{\rho} + 1)\tan \gamma$$

$$-\frac{2\Delta}{r\rho_c} \frac{1}{\hat{\rho}} \left\{ 1 - \frac{gr}{V_c^2} \left[\left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2}{(n+1)\eta} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \left\{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \right\} \right] \right\} \cos \gamma \quad (78)$$

⑦ 空力荷重 G :

$$G = (D/m) \sqrt{1 + (L/D)^2}$$

から (L/D) , (D/mg) を代入して

$$\frac{G}{g} = \kappa \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right) \left[\left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2}{(n+1)\eta} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \left\{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \right\} \right] \quad (79)$$

⑧ 澱点空力加熱率

澱点の空力加熱率を次式で定義する。

$$\frac{dQ}{dt} = K_Q \rho^{1/2} V^3 = K_Q \rho_c^{1/2} V_c^3 \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \quad (80)$$

$V = V_c$ での澱点加熱率を $(dQ/dt)_c$ とすれば $(dQ/dt)_c = K_Q \rho_c^{1/2} V_c^3$ であるから (20) 式を $(dQ/dt)_c$ で無次元化すると

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_c} \right)^3 \quad (81)$$

V/V_c を代入して

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_c} = \sqrt{\left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right) \left[\left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^n - \frac{2}{(n+1)\eta} \frac{1}{(\ln \hat{\rho})^n} \left\{ (\ln \hat{\rho})^{1+n} - (\ln \hat{\rho}_c)^{1+n} \right\} \right]^3} \quad (82)$$

第2項を無視すれば

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_c} \approx \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right)^K \left(\frac{\ln \hat{\rho}_c}{\ln \hat{\rho}} \right)^{\frac{3n}{2}} \quad (83)$$

(E) $\sin \gamma = K(\rho/\rho_{SL})^{1-n}$ の場合

高度と密度の関係は $\rho/\rho_{SL} = e^{-\beta h}$ であるから

$$\sin \gamma = K(e^{-\beta h})^{1-n}$$

ここで係数 K を

$$K = -\frac{b\rho_{SL}}{n} = -\frac{\rho_{SL}}{n\Delta\beta} \quad (83)$$

と置けば

$$\sin \gamma = -\frac{b \rho_{SL}}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1-n} = -\frac{\rho_{SL}}{n \Delta \beta} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1-n} \quad (84)$$

無次元化密度 $\hat{\rho} = \rho / \rho_{SL}$ を用いると次式で表される。

$$\boxed{\frac{d\hat{u}}{d\hat{\rho}} + \frac{n\hat{u}}{\hat{\rho}^{1-n}} = \frac{2c}{\hat{\rho}}} \quad (85)$$

上式を初期条件 $\hat{\rho} = \hat{\rho}_c$ で $\hat{u} = \hat{u}_c$ のもとに積分すると次式を得る(補足参照)

$$\hat{u} = \frac{1}{\exp(\hat{\rho}^n)} \left[\frac{2c}{n} \{ \bar{E}_i(\hat{\rho}^n) - \bar{E}_i(\hat{\rho}_c^n) \} + \hat{u}_c \exp(\hat{\rho}_c^n) \right] \quad (86)$$

ここで $\bar{E}_i(x)$ は積分指数関数である。積分指数関数を級数展開すると

$$\hat{u} = \frac{1}{\exp(\hat{\rho}^n)} \left[\left\{ 2c \ln \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right) + \frac{2c}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ \{ (\hat{\rho}^n)^k - (\hat{\rho}_c^n)^k \} }{k k!} \right\} + \hat{u}_c \exp(\hat{\rho}_c^n) \right] \quad (87)$$

① 密度/高度

$$\left(\frac{V}{V_C} \right)^2 = \exp \left\{ -(\hat{\rho}^n - \hat{\rho}_c^n) \right\} \left[1 + \frac{2}{\eta \exp(\hat{\rho}_c^n)} \left\{ \ln \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ \{ (\hat{\rho}^n)^k - (\hat{\rho}_c^n)^k \} }{k k!} \right\} \right] \quad (88)$$

近似的には重力項を無視して $\rho \gg \rho_c$ と仮定すると

$$\frac{V}{V_C} \approx \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\hat{\rho}^n - \hat{\rho}_c^n) \right\} \approx \exp \left(-\frac{\hat{\rho}^n}{2} \right)$$

② 経路角/経路角変化率

(a) 経路角

経路角は仮定から次式で表される。

$$\sin \gamma = -\frac{b \rho_{SL}}{n} \hat{\rho}^{1-n} \quad (89)$$

(b) 経路角変化率

$\sin \gamma$ を t で微分して

$$\sin \gamma = -\frac{b \rho_{SL}}{n} \hat{\rho}^{1-n}$$

$$\cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{b \rho_{SL}}{n} (1-n) \hat{\rho}^{-n} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \beta V_C (1-n) \left(\frac{b \rho_{SL}}{n} \hat{\rho}^{1-n} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) \sin \gamma$$

から

$$\frac{d\gamma}{dt} = \beta V_C (1-n) \left(\frac{b \rho_{SL}}{n} \hat{\rho}^{1-n} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right) \tan \gamma \quad (90)$$

または $\sin \gamma = -(\hat{\rho}_{SL}/n) \hat{\rho}^{1-n}$ から

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\beta V_c (1-n) \left(\frac{V}{V_c} \right) \tan \gamma \sin \gamma \quad (91)$$

密度に関する変化率は $\sin \gamma$ を ρ で微分して

$$\frac{d \sin \gamma}{d \hat{\rho}} = -\frac{\hat{\rho}_{SL} (1-n)}{n} \frac{1}{\hat{\rho}^n} \quad (92)$$

③ 加速度

加速度は $-dV/dt = \rho V^2/2\Delta + g \sin \gamma$ から

(1), (4) 式を用いて

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{r \hat{\rho}_{SL}}{2\Delta} \frac{V_c^2}{gr} \hat{\rho} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 + \sin \gamma \quad (93)$$

$(V/V_c)^2$ を代入して

$$-\frac{dV}{dt} \frac{1}{g} = \frac{r \hat{\rho}_{SL}}{2\Delta} \frac{V_c^2}{gr} \hat{\rho} \exp \left\{ -(\hat{\rho}^n - \hat{\rho}_c^n) \right\} \left[1 + \frac{2}{\eta \exp(\hat{\rho}_c^n)} \left\{ \ln \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{ (\hat{\rho}^n)^k - (\hat{\rho}_c^n)^k \right\}}{k k!} \right\} \right] + \sin \gamma \quad (94)$$

近似的には

$$\approx \frac{r \hat{\rho}_{SL}}{2\Delta} \frac{V_c^2}{gr} \hat{\rho} \exp \left\{ -(\hat{\rho}^n - \hat{\rho}_c^n) \right\} + \sin \gamma$$

③ 抗力加速度/揚力加速度

(a) 抗力加速度 $D/m = \rho V^2/2\Delta$ から

$$\frac{D}{mg} = \frac{r \hat{\rho}_{SL}}{2\Delta} \frac{V_c^2}{gr} \hat{\rho} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \quad (95)$$

$(V/V_c)^2$ を代入して

$$\frac{D}{mg} = \frac{r \hat{\rho}_{SL}}{2\Delta} \frac{V_c^2}{gr} \hat{\rho} \exp \left\{ -(\hat{\rho}^n - \hat{\rho}_c^n) \right\} \left[1 + \frac{2}{\eta \exp(\hat{\rho}_c^n)} \left\{ \ln \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c} \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{ (\hat{\rho}^n)^k - (\hat{\rho}_c^n)^k \right\}}{k k!} \right\} \right] \quad (96)$$

$$\approx \frac{r \hat{\rho}_{SL}}{2\Delta} \frac{V_c^2}{gr} \hat{\rho} \exp \left\{ -(\hat{\rho}^n - \hat{\rho}_c^n) \right\} \quad (96)$$

(2) 揚力加速度

揚力加速度は $V(d\gamma/dt) = L/m + (V^2/r - g) \cos \gamma$ で与えられる。 $V(d\gamma/dt)$ を求めると

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\rho_{SL} V_c^2}{\Delta} \frac{(1-n)}{n} \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}^n} \left(\frac{V}{V_c} \right)^2 \tan \gamma \quad (97)$$

から速度, 経路角の関数として表される。

$$\frac{L}{mg} = \frac{r\rho_{SL}}{\Delta} \frac{V_C^2}{gr} \frac{(1-n)}{n} \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}^n} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 \tan \gamma - \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (98)$$

または

$$\frac{L}{mg} = -\beta r \frac{V_C^2}{gr} (1-n) \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 \tan \gamma \sin \gamma - \left\{ \frac{V_C^2}{gr} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 - 1 \right\} \cos \gamma \quad (99)$$

⑤ 要求揚抗比

要求揚抗比は $L/m = (L/mg)/(D/mg)$ で与えられるから (95), (98) 式の (L/mg) , (D/mg) を用いて次式で表される

$$\frac{L}{D} = 2 \frac{(1-n)}{n} \frac{1}{\hat{\rho}^n} \tan \gamma - \frac{2\Delta}{r\rho_{SL}} \frac{1}{\hat{\rho}} \left\{ 1 - \frac{gr}{V_C^2} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 \right\} \cos \gamma \quad (100)$$

ただし $(V/V_C)^2$ は (88) 式

⑦ 空力荷重 G

空力荷重の定義 $G = \sqrt{1 + (L/D)^2} (D/m)$ から (L/D) , (D/mg) を代入して

$$\frac{L}{D} = \frac{r\rho_{SL}}{2\Delta} \frac{V_C^2}{gr} \hat{\rho} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 \sqrt{1 + \left[\frac{2(1-n)}{n} \frac{1}{\hat{\rho}^n} \tan \gamma - \frac{2\Delta}{r\rho_{SL}} \frac{1}{\hat{\rho}} \left\{ 1 - \frac{gr}{V_C^2} \left(\frac{V}{V_C}\right)^2 \right\} \cos \gamma \right]^2} \quad (101)$$

⑧ 澱点空力加熱率

澱点の空力加熱率を次式で定義する。 $\frac{dQ}{dt} = K_Q \hat{\rho}_{SL}^{1/2} V_C^3 = K_Q \hat{\rho}_{SL}^{1/2} V_C^3 \hat{\rho}^{1/2} \left(\frac{V}{V_C}\right)^3$ (102)

$V = V_C$ での澱点加熱率を $(dQ/dt)_C$ とすれば $(dQ/dt)_C = K_Q \rho_{SL}^{1/2} V_C^3$ であるから (20) 式を $(dQ/dt)_C$ で無次元化すると

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_C} = \sqrt{\hat{\rho} \left(\frac{V}{V_C}\right)^6} \quad (103)$$

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_C} = \sqrt{\hat{\rho} \left\{ \exp\left\{-\left(\hat{\rho}^n - \hat{\rho}_c^n\right)\right\} \left[1 + \frac{2}{\eta \exp\left(\hat{\rho}_c^n\right)} \left\{ \ln\left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_c}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{ \left(\hat{\rho}^n\right)^k - \left(\hat{\rho}_c^n\right)^k \right\}}{k k!} \right\} \right] \right\}} \quad (104)$$

近似的には次式で表される。

$$\frac{dQ/dt}{(dQ/dt)_C} = \sqrt{\hat{\rho} \exp\left\{-6\left(\hat{\rho}^n - \hat{\rho}_c^n\right)\right\}}$$

<補足>

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{\rho}} + \frac{n\hat{u}}{\hat{\rho} \ln \hat{\rho}} = \frac{2c}{\hat{\rho}}$$

両辺に $\hat{\rho}$ を掛けると

$$\frac{d\hat{u}}{d \ln \hat{\rho}} + \frac{n\hat{u}}{\ln \hat{\rho}} = 2c$$

$x = \ln \hat{\rho}$ とおいて

上記微分方程式を (14) 式に代入して積分を実行すると

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \exp\left(-n \int \frac{1}{x} dx\right) \left[2c \int \left\{ \exp\left(n \int \frac{1}{x} dx\right) \right\} dx \right] \\ &= \exp(-\ln x^n) \left\{ 2c \int \exp(\ln x^n) dx + \text{const} \right\} \\ &= \frac{1}{x^n} \left\{ -2c \int x^n dx + K \right\} = \frac{1}{x^n} \left\{ -\frac{2c}{n+1} x^{n+1} + \text{const} \right\} = \left\{ -\frac{2c}{n+1} (\ln \hat{\rho}) + \frac{\text{const}}{(\ln \hat{\rho})^n} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{u}}{d\hat{\rho}} + \frac{n\hat{u}}{\hat{\rho}^{1-n}} = \frac{2c}{\hat{\rho}}$$

$$P(\rho) = n / \rho^{1-n}$$

$$Q(\rho) = 2c / \rho$$

上式の解は (14) 式に代入して

$$\hat{u} = \exp\left\{-\int (n/\rho^{1-n}) d\rho\right\} \left\{ 2c \int \exp\left\{\int (n/\rho^{1-n}) d\rho\right\} \frac{d\rho}{\rho} + C \right\}$$

$$\int (n/\rho^{1-n}) d\rho = \exp(\rho^n)$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\exp(\rho^n)} \left\{ 2c \int \exp(\rho^n) \frac{d\rho}{\rho} + \text{const} \right\}$$

$$x = \rho^n$$

$$dx = n\hat{\rho}^{n-1} d\hat{\rho} = nx \frac{d\hat{\rho}}{\hat{\rho}}$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\exp x} \left\{ \frac{2c}{n} \int \frac{e^x}{x} dx + \text{const} \right\}$$

$$\hat{u} = \frac{2c}{n} e^{-x} \left[\left\{ \bar{E}_i(x) - \bar{E}_i(x_c) \right\} + \text{const} \right]$$

$$\hat{u} = \frac{2c}{n} \frac{1}{\exp(\hat{\rho}^n)} \left[\left\{ \bar{E}_i(\hat{\rho}^n) - \bar{E}_i(\hat{\rho}_c) \right\} + \text{const} \right]$$

$\hat{\rho} = \hat{\rho}_c$ $\hat{u} = \hat{u}_c$ から積分定数 const を決めると

$$\hat{u} = \frac{1}{\exp(\hat{\rho}^n)} \left[\frac{2c}{n} \left\{ \bar{E}_i(\hat{\rho}^n) - \bar{E}_i(\hat{\rho}_c) \right\} + \hat{u}_c \exp(\hat{\rho}_c^n) \right]$$

第8章の参考文献

- 1) R. V. Warden "Ballistic Re-Entries With a Varying W/CdA " ARS Journal February 1961 208-213
- 2) Richard L. Phillips and Clarence B. Choen "Use of Drag Modulation to Reduce Deceleration Loads During Atmospheric Entry" ARS Journal June 1959 414-422
- 3) John J. Marti "Atmospheric Reentry" Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1966
- 4) Lester Lees, Frederic W. Hartwing and Clarence B. Cohen "Use of Aerodynamic Lift During Entry into the Earth's Atmosphere" ARS Journal September 1959, 633-641
- 5) Philip R. Nachtsheim, Larry L. Lehman "Unified Treatment of Lifting Atmospheric Entry" J. Spacecraft VOL. 17, NO. 2, March-April 1980 119-122
- 6) Dean R. Chapman "An Approximate Method for Studying Entry into Planetary Atmospheres" NACA TN 4276 1958, NASA TR R-11 1959
- 7) Dean R. Chapman and Arline K. Kapphan "Table of Z Functions for Atmosphere Entry Analyses" NASA TR R-106 1961
- 8) Lionel L. Levy Jr. "An Approximate Method for Studying Atmosphere Entry of Vehicles with Modulated Aerodynamic Forces" NASA TN D-319 October 1960
- 9) W. H. T. Loh "Dynamics and Thermodynamics of Re-Entry" Journal of the Aerospace Sciences October 1960 748-762
- 10) W. H. T. Loh "Some Exact Analytical Solutions of Planetary Entry" AIAA Journal April 1963 837-842
- 11) W. H. T. Loh "Some Exact Analytical Solutions of Planetary Entry" AIAA Journal April 1963 837-842
- 12) W. H. T. Loh "Dynamics and Thermodynamics of Re-Entry" Journal of the Aerospace Sciences October 1960, 748-762
- 13) W. H. T. Loh "Some Exact Analytical Solutions of Planetary Entry" AIAA Journal April 1963, 837-842
- 14) Alvin Seiff and Michael E. Tauber "Minimization of the Total Heat Input for Manned Vehicles Entering the Earth's Atmosphere at Hyperbolic Speeds" NASA TR R-236 (N66-23863), 1966

9. 再突入宇宙機の誘導

再突入宇宙機の誘導とは、軌道制御が行われていることを前提に地表の決められた点に到達させること(レンジング)を目的に行われるレンジ制御を言う。再突入宇宙機の制御/誘導では推力等は使用しないので空気力を利用した受動的(Passive)な誘導となる。

再突入宇宙機の誘導を行うには現時点から目的地までの飛行距離(ダウンレンジ, クロスレンジ)の予測値が必要となる。この飛行距離は飛行状態量の積分形で表されるが、一般にはこの積分は解析的に求めることができない。

そこで現時点の状態量を初期値として機上の計算機で高速に運動方程式を解き飛行距離を数値的に求め、目標点からの距離のずれを修正する方法が考えられる。これを高速予測積分法と言う。この方法を実際に適用した例はなく、Courant 等では人間を含む系(マンインザループ)での地上試験例がある。

次にあらかじめ目的地に到達する基準軌道を設計して、この状態量を計算機に記憶させておき、実際の再突入時の状態量が基準軌道からずれている場合には、この基準軌道に沿う飛行を行わせる方法がある。これを基準軌道に基づく誘導(インプリシット誘導)と称することとする。基準軌道に基づく誘導にも、レンジを含む状態量のずれに一定の係数(ゲイン)を掛けてフィードバックする方法、あるいは事前の感度解析からゲインを時刻や速度の関数として記憶しておき、これを掛けてフィードバックする方法等がある。

また古くから制御理論の分野では最適問題が研究されてきたが、この最適問題を最初に再突入軌道の問題にとりいれたのは Bryson, Denham である。再突入軌道を対象とした最適問題についてはその後多くの研究者により検討されている。これはある評価基準を設定して、評価基準が最小(最大)となる最適軌道を求める。Bryson, Denham は最急降下法(Steepest Descent Method)を用いているが、最適軌道を求める方法には大別して間接法(摂動法)、直接法(勾配法(最急降下法を含む))があり、各方法のなかにも多くの種類がある。

最適軌道に基づく誘導はこの最適軌道の結果を基準軌道として計算機に記憶させ、最適軌道からのずれを修正する制御変数を求めて、フィードバックする方法である。これは Neighboring Optimum Method と称されている。(Bryson, Denham, Leondes, Pane)

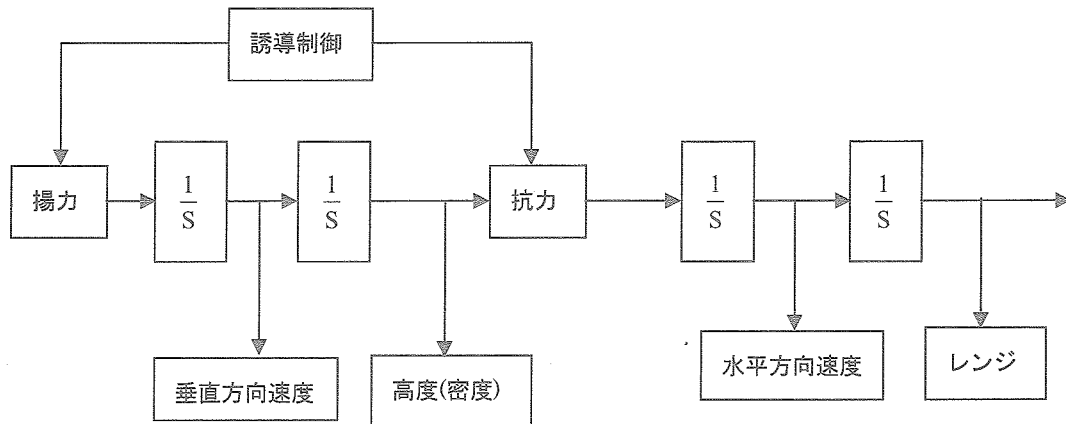
最適軌道の計算はいずれも数値計算に依らねばならないが、特別の場合には、解析的に解くことができる。Eilser, Shi 等により検討され、これらの結果は楕円積分関数で表される。

9-1. 再突入宇宙機の誘導/制御とダイナミクス

再突入宇宙機に加わる外力は空気力と重力である。空気力には速度ベクトルに垂直に働く揚力と速度ベクトルに平行(方向は逆)に働く抗力に分解できる。再突入宇宙機の誘導、あるいは軌道の制御にはこの空気力を利用して行う。飛行経路角が小さい場合には揚力は軌道にほぼ垂直(地心距離ベクトル方向、高度方向)に働き、抗力は水平方向(地心距離ベクトルに直行方

向)に働くから、揚力を制御して垂直方向の加速度を変化させ、これを積分すると垂直方向の速度が得られ、さらに積分すると高度が得られる。高度が変わると抗力が変化し、この抗力を積分することにより、水平方向の速度が得られる。この水平方向の速度を積分して、飛行距離、あるいは目標点までの距離が得られる。

逆に誘導は目標点までの距離が得られると、これが零となるよう揚力、抗力を変化させ、閉ループで制御を行う。



制御変数

宇宙機の誘導制御に用いる制御ベクトルは空気力ベクトルである。誘導制御を目的として空気力ベクトルを変化させる方法には迎角を変える方法と、バンク角を変える方法がある。

・迎角 α モジュレーション

動圧 $q = \rho V^2 / 2$ とすれば揚力、抗力は

$$L = q C_L(\alpha, M, R_e) \approx q C_L(\alpha)$$

$$D = q C_D(\alpha, M, R_e) \approx q C_D(\alpha)$$

で表される。迎角を制御変数とすると揚抗比 (L/D)

は次式で表される。

$$(L/D)(\alpha) = C_L(\alpha) / C_D(\alpha)$$

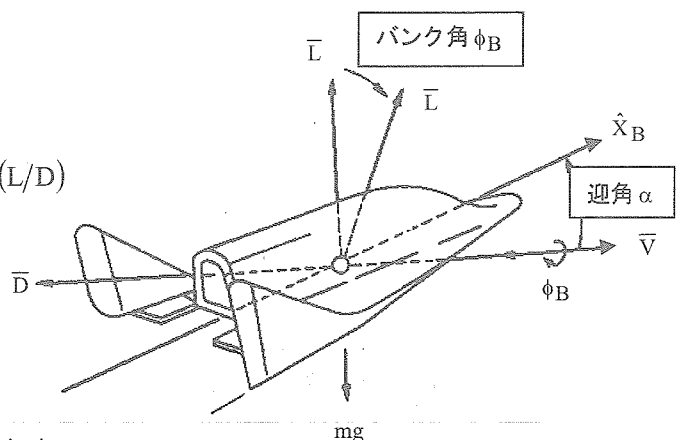
ここで係数 $C_L(\alpha, M, R_e)$, $C_D(\alpha, M, R_e)$

は揚力係数、抗力係数であり、迎角、マッハ

数 M 、レイノルズ数 R_e 等の関数である。極超音速

流近似(ニュートン流近似)では迎角のみ

の関数 $C_D(\alpha)$, $C_L(\alpha)$ で表される。



・ C_L, η モジュレーション

迎角を媒体変数として揚力, 抗力を変えるのに対して, 直接揚力係数 C_L を変数として抗力係数を $C_D = C_{D0} + K C_L^2$ で近似するとき (抗力ポラークラフ), C_L を制御変数として揚抗比 (L/D) は次式で表される。

$$L/D = C_L / (C_{D0} + K C_L^2)$$

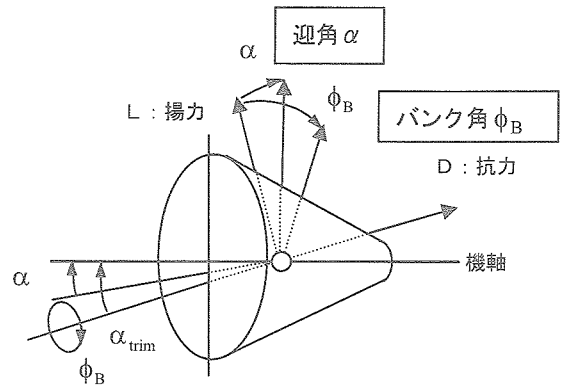
$$C_L = C_L^* \eta, \quad C_L^* \text{ は定数}$$

$$C_D = C_{D0} (1 + \eta^2) = (C_D^*/2) (1 + \eta^2)$$

と置くと揚抗比 (L/D) は次式のように C_L から $\eta = C_L / C_L^*$ の関数として表される。(付録-4 再突入宇宙機の空力特性参照)

$$\frac{L}{D} = \left(\frac{L}{D} \right)_{\max} \frac{2\eta}{1 + \eta^2}$$

これより制御変数を η として制御/誘導を行う。



・ ϕ_B バンク角モジュレーション

機体の揚抗比 (L/D) は迎角の関数であるから, 迎角を固定すると揚抗比 (L/D) は一定となる。いま揚抗比最大となる迎角を $\alpha = \alpha_{L/D \max}$, 揚力係数が最大となる迎角を $\alpha = \alpha_{CL \max}$ とすると, それぞれ対応して揚抗比 (L/D) が決まる。

$$\alpha = \alpha_{L/D \max} \text{ の時 } (L/D)_C = (L/D)_{\max}$$

$$\alpha = \alpha_{CL \max} \text{ の時 } (L/D)_C = (L/D)_{CL \max}$$

このとき飛行面内の揚抗比, 飛行面外の揚抗比は $(L/D)_C$ 一定として次式で表される。

$$(L/D)_C = (L/D)_n \cos \phi_B$$

$$(L/D)_C = (L/D)_n \sin \phi_B$$

スペースシャトルの誘導はこのバンク角モジュレーションが用いられている。

・ 迎角 α , バンク角 ϕ_B モジュレーション

3次元の軌道制御の場合には, 揚抗比 (L/D) を迎角の関数とし, 迎角 α とバンク角 ϕ_B の2つを制御変数として用いて, 揚抗比 $(L/D)(\alpha, \phi_B)$ は次式で表される。

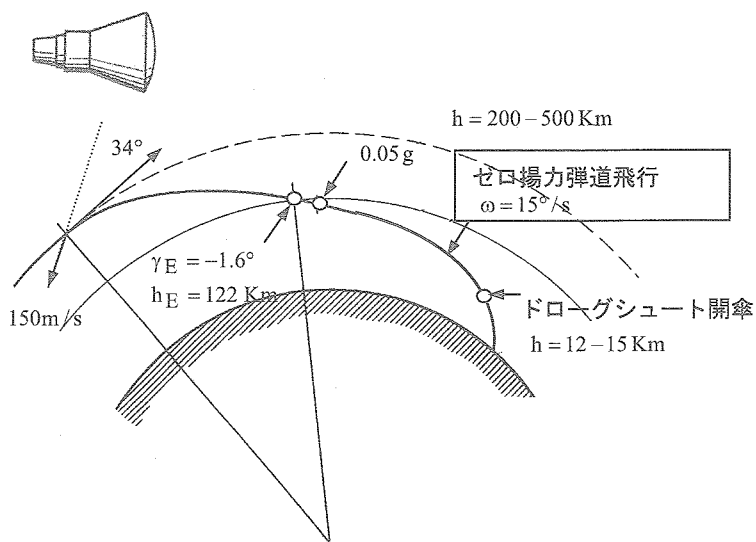
$$(L/D)_v(\alpha, \phi_B) = (L/D) \cos \phi_B$$

$$(L/D)_n(\alpha, \phi_B) = (L/D) \sin \phi_B$$

誘導方式	概要	誘導則の例	採用例
固定ゲイン	基準軌道を設定し、基準軌道からの偏差に固定ゲインを掛けて制御変数を計算、ゲインの計算法は事前の感度解析による。	$(L/D)_C = (L/D)_N + \sum_j K_j \{ (\text{状態変数})_j - (\text{状態変数})_{Nj} \}$ $K_j = \text{const}$	ダイナ・ソアー
可変ゲイン	基準軌道を設定し、基準軌道からの偏差に固定ゲインを掛けて制御変数を計算、ゲインの計算法は運動方程式の線形摂動方程式、随伴方程式から境界値問題を解いて求める。	$(L/D)_C = (L/D)_N + \sum_j K_j \{ (\text{状態変数})_j - (\text{状態変数})_{Nj} \}$ $K_j = K_j(v)$	ジェミニ
リアルタイム予測積分法	評価関数を最適とする、運動方程式方程式を直接積分し、要求軌道を求める。	$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}, u)$ $J = J(\bar{X}, u)$ $\delta J = 0$	
状態閉形式予測法 (クローズド・フォーム誘導法)	軌道を幾つかの部分に分けて、各部分に近似解析軌道を当てはめ、予測レンジ、制御変数を求める方法。近似解析軌道としては一定抗力軌道、一定加熱率軌道、一定高度軌道、平衡滑空軌道等を用いる。	$(L/D)_C = (L/D)_{ref} + \Delta(L/D)$ $\Delta(L/D) = K_D(D - D_{ref}) + K_j(\dot{h} - \dot{h}_{ref}) + \dots$ $(L/D)_{ref} \text{ の例}$ $(L/D)_{ref} = \frac{mg}{D_{ref}} (1 - \sqrt{V})$	シャトル

ゼロ揚力誘導の例(マーキュリー, ポストークの誘導)

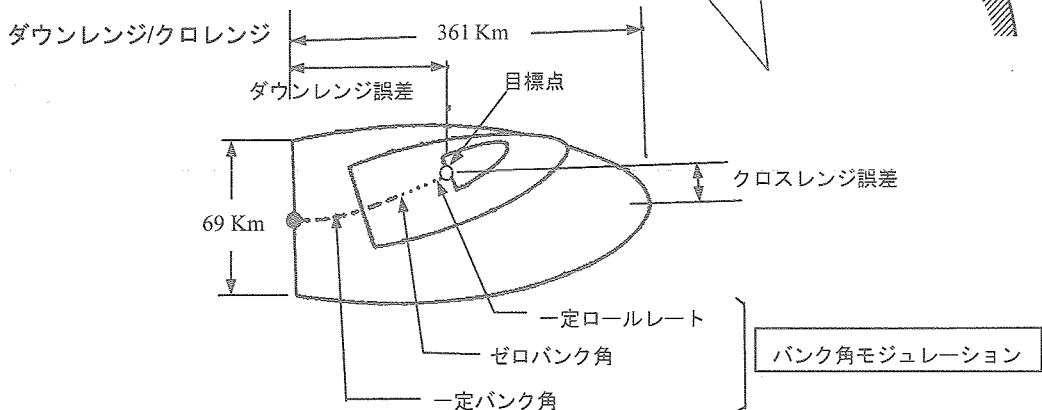
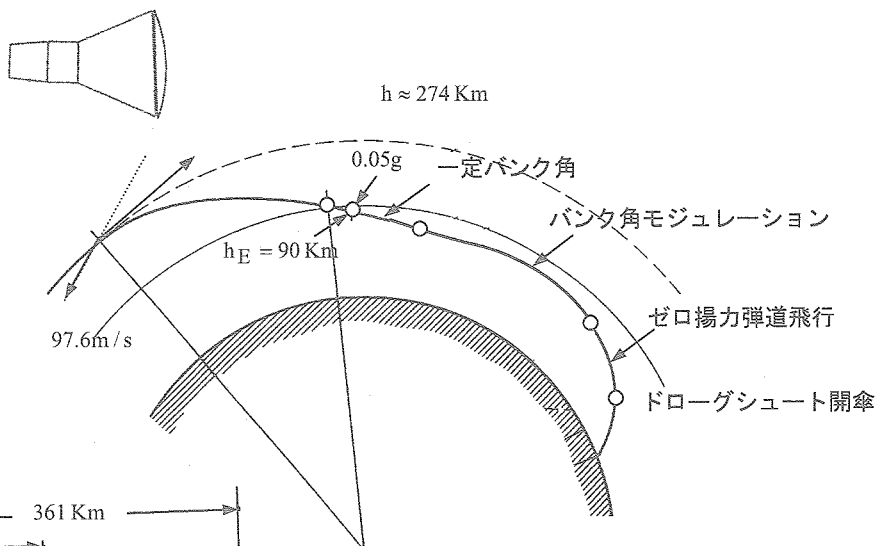
マーキュリーの再突入インターフェース条件は(122Km, -1.6°)であり, 再突入軌道は加速度計で 0.05g を検知した時点から機軸周りに 15deg/sec のロール角速度を与えて, ゼロ揚力とした, 弾道飛行による誘導である。この方式によれば着地点の分散を小さく抑えることができる反面, 再突入条件の基準軌道からの変動(誤差)に対する修正能力は無い。



バンク角モジュレーション(誘導)の例(ジェミニの誘導)

ジェミニの場合にはマーキュリーのように弾道軌道誘導をとるフェーズと, CG オフセットをあたえることによりトリム角を取り, L/D=0.2 程度の揚抗比を得て, この揚抗比によるバンク角モジュレーションによる能動的な誘導を行っているフェーズがある。

以下に飛行面内, およびバンク角モジュレーション誘導によるフットプリントの変化を示す。

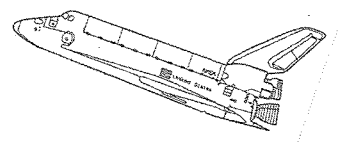
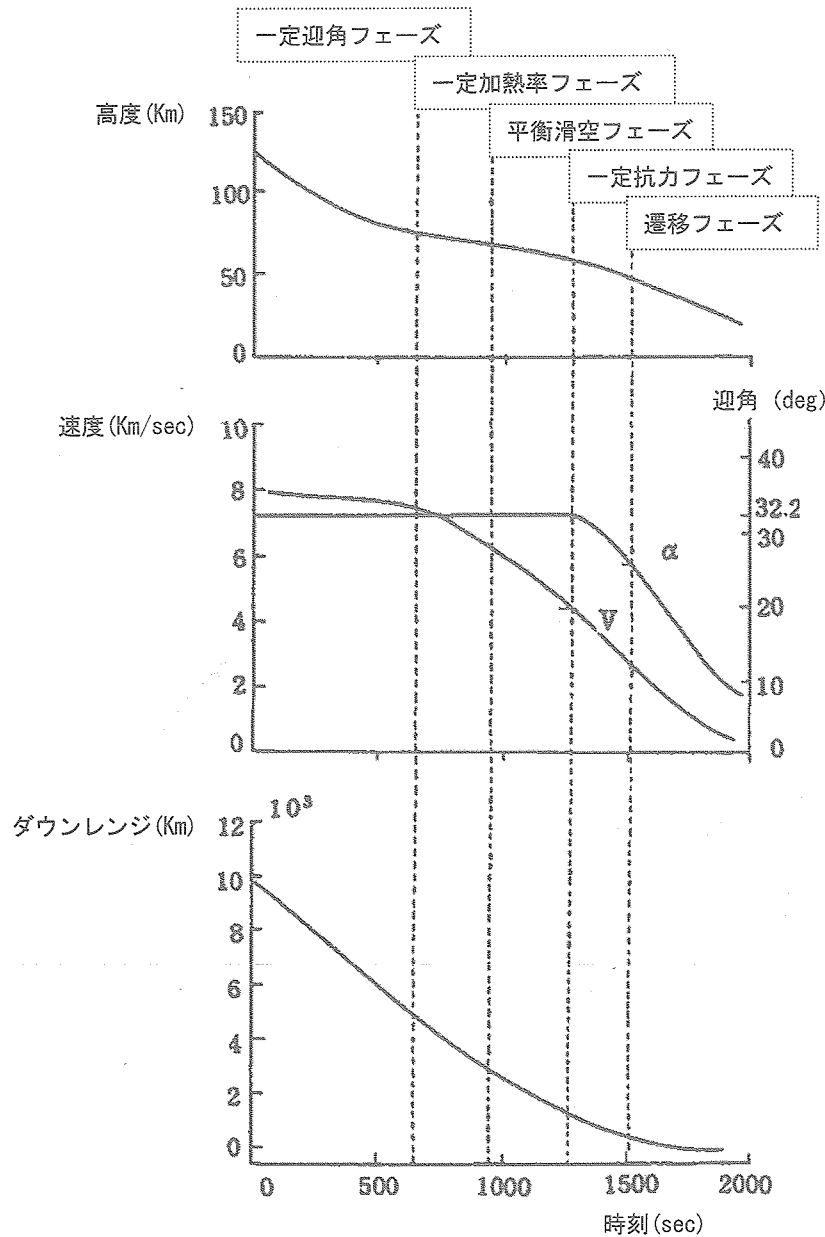
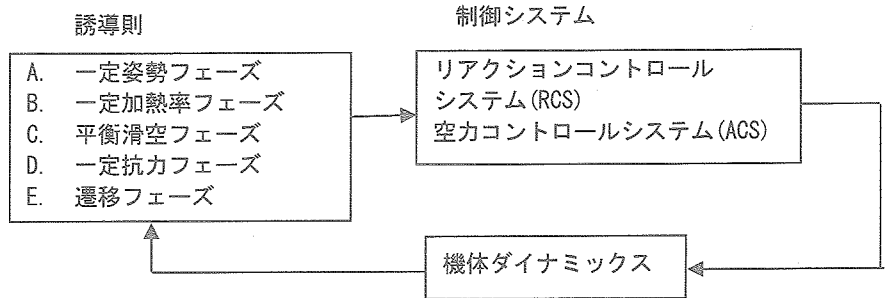


スペースシャトルの誘導

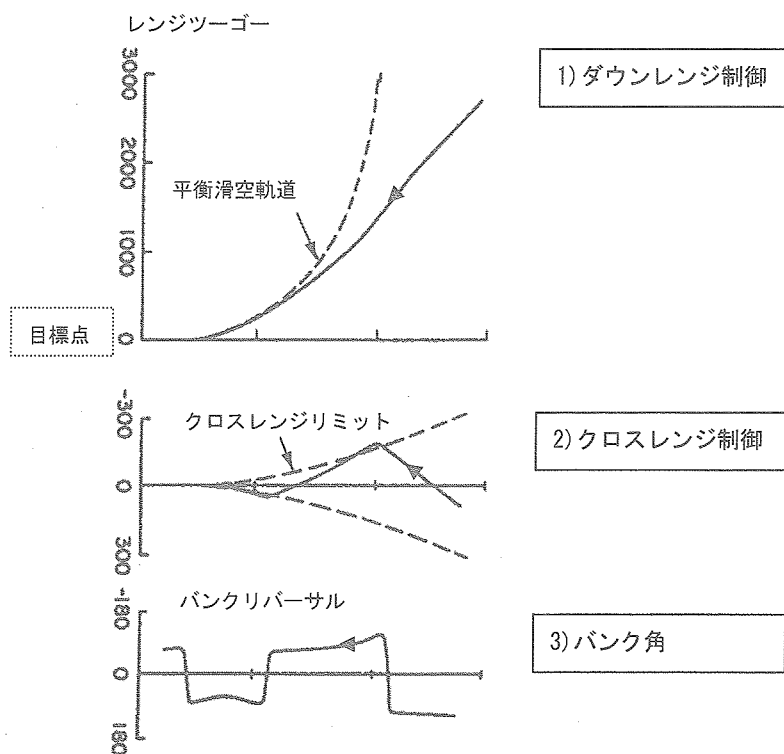
スペースシャトルの場合には再突入誘導は軌道を下図に示すように各フェーズに分割して解析解を適用して誘導を行う。また制御変数のうち迎角はあらかじめ速度の関数としてプログラムされており、バンク角を制御変数として用いて行う。この際発生する、クロスレンジ誤差に対してはクロスレンジリミットを設けて、バンク角を反転させる。

フェーズ分割

クローズドフォーム誘導



シャトルの誘導の概念図を下記に示す



9-2. 固定ゲインによる誘導

カプセル型再突入宇宙機の誘導

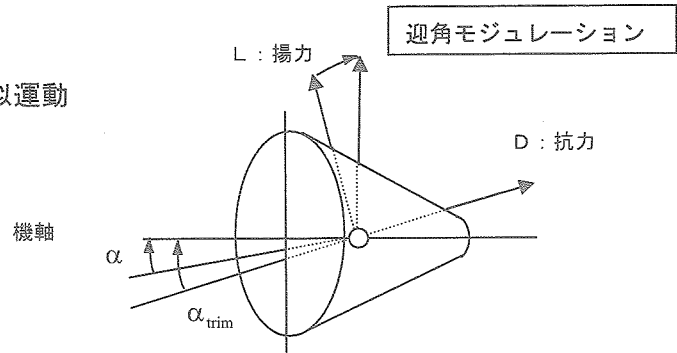
- 仮定 i) $L/m \gg (V^2/r - g) \cos \gamma$
- ii) $D/m \gg g \sin \gamma$

速度座標系運動方程式と上記の仮定に基づく近似運動方程式は、次のように表せる。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{AC_D(\alpha) \rho V^2}{m} \quad (1)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{AC_L(\alpha) \rho V}{m} \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = V \cos \gamma \quad (3)$$



レンジ・ツーゴ / レンジレートの計算

レンジ・ツーゴ は現時点のレンジ R から目標点までの要求レンジ R_D の差として次式で定義する。

$$R_{TGO} \equiv R_D - R$$

$$R = \int V \cos \gamma dt$$

上式から

$$R_{TGO} = R_D - \int V \cos \gamma dt : \text{レンジ・ツーゴ}$$

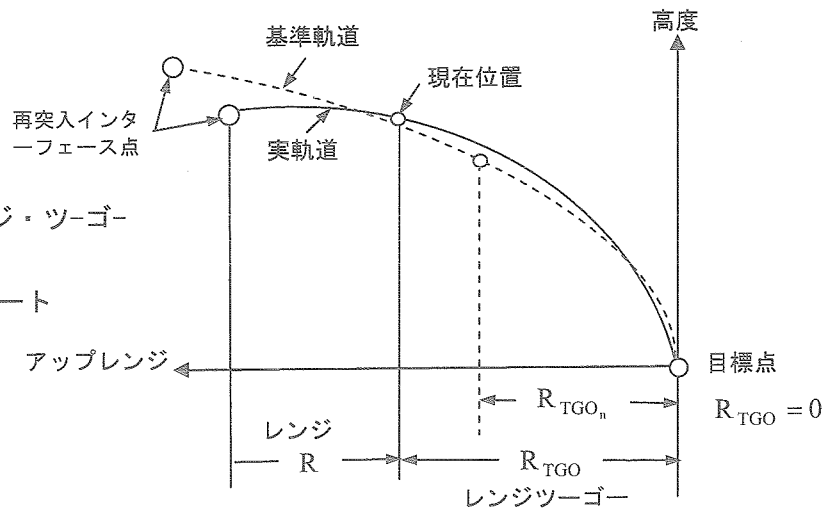
$$\frac{dR_{TGO}}{dt} = -V \cos \gamma : \text{レンジレート}$$

空力特性

$$C_L = \sqrt{C_L^2 + C_D^2} \sin \alpha$$

$$C_D = \sqrt{C_L^2 + C_D^2} \cos \alpha$$

$$\alpha_{nom} = \alpha_T = 84. \text{ deg}$$



上記より、指令迎角 α_c は、基準軌道での迎角を基準として、これを突飛行と基準軌道（添字 n）のレンジ・ツーゴおよびレンジレートの差に定数（固定ゲイン）をかけたもので修正することにより得られ、下記の誘導則で表される。

誘導則

$$\alpha_c = \alpha_T - K_1 (R_{TGO} - R_{TGO_n}) - K_2 (\dot{R}_{TGO} - \dot{R}_{TGO_n})$$

上記において、誘導係数は感度解析から得られる。

誘導係数の例として,

$$\begin{aligned} K_1 &= 0.06 \text{ deg/miles} = 0.037 \text{ deg/Km} \\ K_2 &= 2.0 \text{ deg/(miles/sec)} = 1.24 \text{ deg/(Km/sec)} \end{aligned}$$

機体特性例として,

$$m/A = 98 \text{ Kg/m}^2$$

初期値の例として,

$$\begin{aligned} h_E &= 107 \text{ Km} \\ V_E &= 7883 \text{ m/sec} \\ \gamma_E &= -1.0^\circ \end{aligned}$$

を挙げておく。

バンク角モジュレーション

(1) 指令揚抗比の計算

指令揚抗比は, 基準軌道での揚抗比 $(L/D)_n$ を基準として, これを実飛行での状態変数と基準軌道の状態変数 (添字 n) との差に定数 (固定ゲイン) をかけたもので修正することにより得られ, 下記のように表される。

$$\left(\frac{L}{D}\right)_c = \left(\frac{L}{D}\right)_n + K_1(\dot{h} - \dot{h}_n) + K_2(a - a_n) + K_3(R_{TGO} - R_{TGO_n}) + K_4(\dot{R}_{TGO} - \dot{R}_{TGO_n})$$

K_1, K_2, K_3 : 固定ゲイン

$(L/D)_c$: 指令揚抗比

$(L/D)_n$: ノミナル揚抗比

\dot{h} : 高度変化率

a : 加速度

R_{TGO} : レンジツーゴー

\dot{R}_{TGO} : レンジツーゴー・レート

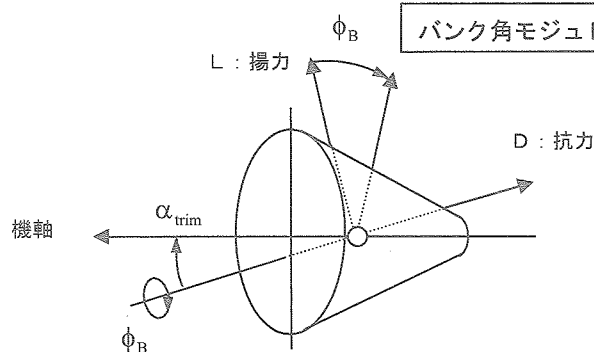
(2) バンク角の計算

指令バンク角 ϕ_B の絶対値は下記により求める。

$$(a) \left(\frac{L}{D}\right)_c > \frac{L}{D} \text{ のとき } |\phi_B| = 0$$

$$(b) \left(\frac{L}{D}\right)_c < \frac{L}{D} \text{ のとき } |\phi_B| = \pi$$

$$(c) -\frac{L}{D} \leq \left(\frac{L}{D}\right)_c \leq \frac{L}{D} \text{ のとき}$$



$$\cos|\phi_B| = \frac{(L/D)_c}{L/D} \quad \sin|\phi_B| = \sqrt{1 - \sin^2 \phi_B}$$

(3)バンク角の符号 :

(2)で求めたバンク角絶対値の符号は, 方位角 ψ に対してデッドバンド $\psi_1 = \text{const}$ を設定して, 下記のように求める。

(a) $\psi > \psi_1$ のとき $\text{Sign } \phi_B = -1$

(b) $\psi > -\psi_1$ のとき $\text{Sign } \phi_B = 1$

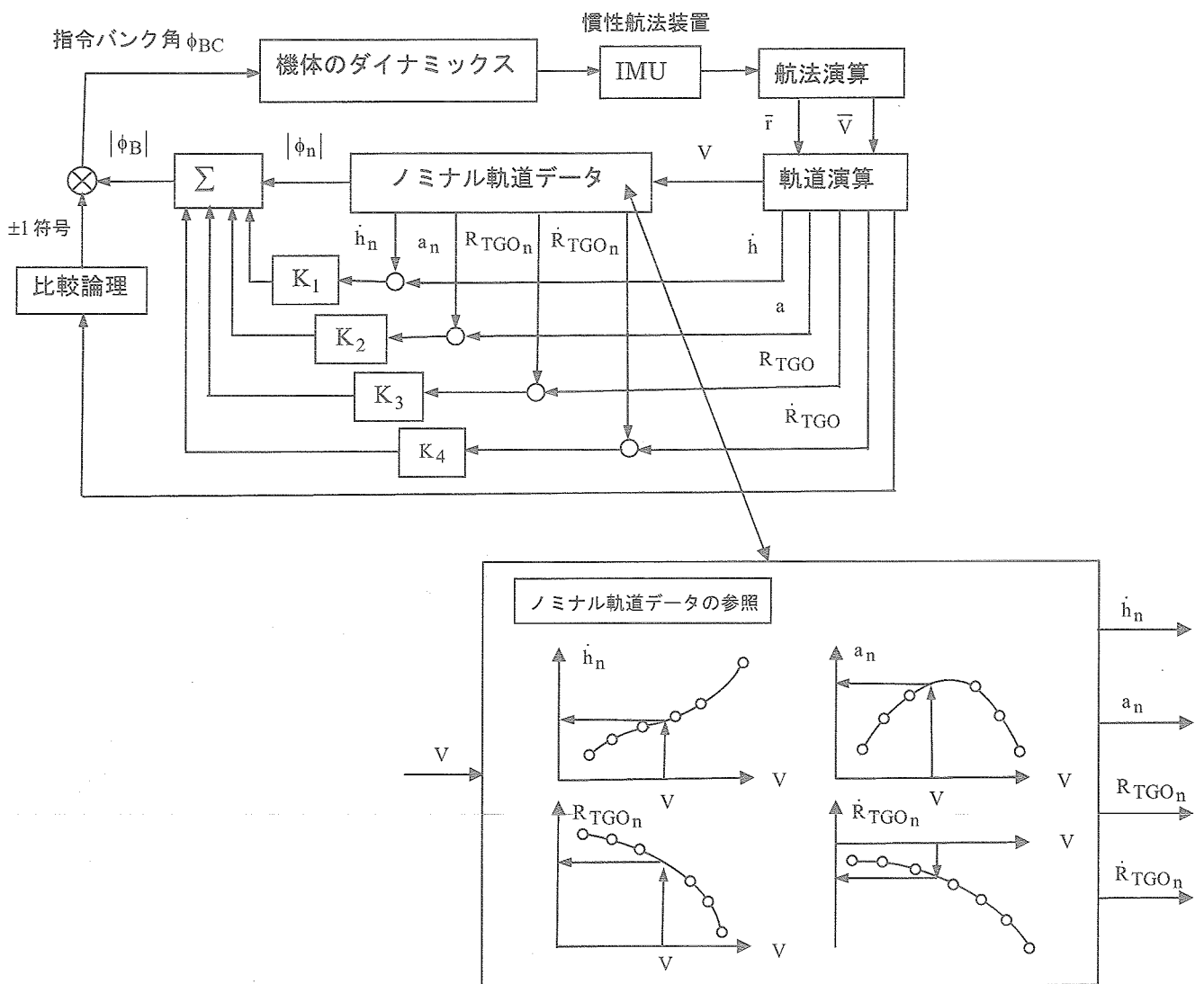
(c) $-\psi_1 \leq \psi \leq \psi_1$ のとき $\text{Sign } \phi_B = \text{前サイクルの Sign } \phi_B$

(4)指令バンク角 :

(2) (3)より, 指令バンク角は下記のように示される。

$$\phi_{BC} = \text{Sign}|\phi_B| \cdot |\phi_B|$$

バンク角モジュレーションの誘導ブロック図を下記に示す。



9-3. Z 関数を用いた固定ゲインによる誘導

基準軌道に基づく誘導

チャップマンは次の仮定のもとに
 $L/D = \text{一定}, (L/D)\tan\gamma \ll 1$

再突入宇宙機の運動方程式を2階の微分方程式で表した。(7-8項 Z 関数による軌道の解参照)

$$\bar{u} \frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} - \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) = \frac{(1-\bar{u}^2)}{\bar{u}Z} \cos^4 \gamma - \frac{L}{D} \sqrt{\beta r} \cos^3 \gamma \quad (1)$$

$\bar{u} = u/\sqrt{gr}$: 無次元化水平方向速度

$Z \equiv \frac{C_D A}{2m} \sqrt{\frac{r}{\beta}} \rho \bar{u} = \frac{\sqrt{r/\beta}}{2\Delta} \rho \bar{u}$: 無次元化変数

いま経路角は数度の微小角の場合を考えると $\cos\gamma \approx 1$ と置いて上式は次のように表される。

$$\bar{u} \frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} - \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) = \frac{(1-\bar{u}^2)}{\bar{u}Z} - \frac{L}{D} \sqrt{\beta r} \quad (2)$$

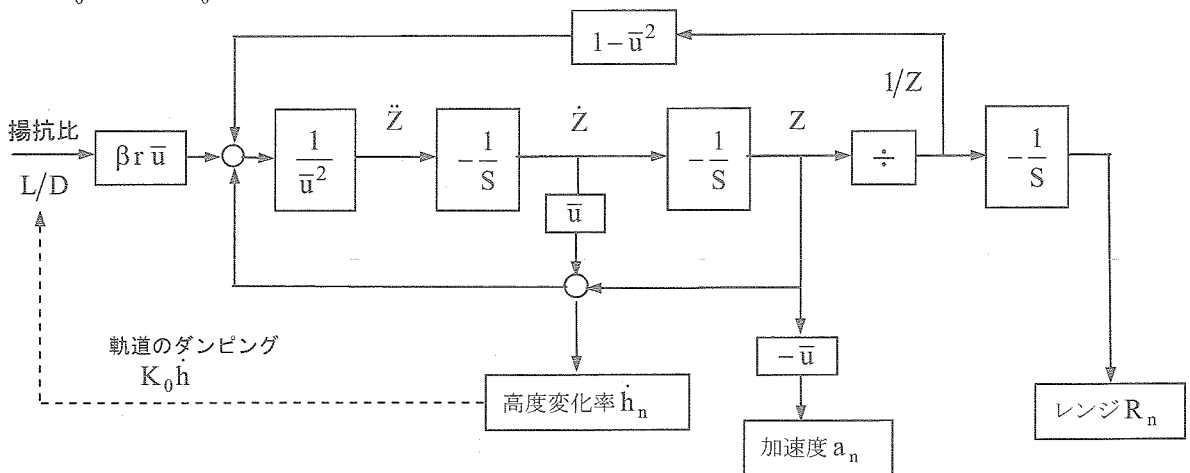
揚抗比 L/D が与えられると、初期条件

$$Z_E = \frac{C_D A}{2m} \sqrt{\frac{r}{\beta}} \rho_E \bar{u}_E = \frac{-a_E}{\sqrt{\beta r} \bar{u}_E}$$

$$\left(\frac{dZ}{d\bar{u}} \right)_E = \sqrt{\beta r} \sin \gamma_E + \frac{Z_E}{\bar{u}_E}$$

のもと上式を積分することにより機体の運動が得られる。ブロック図を以下に示す。ここで揚抗比 L/D が一定のときにはフゴイド振動が表れる。(7-9項 フゴイド振動とその制動参照)そこで基準軌道としては高度変化率をフィードバックして高度変化率に比例するように揚抗比 L/D を変化させ、軌道に適当な減衰を与える。

$$L/D = K_0 \dot{h} \quad K_0 < 0: \text{定数}$$

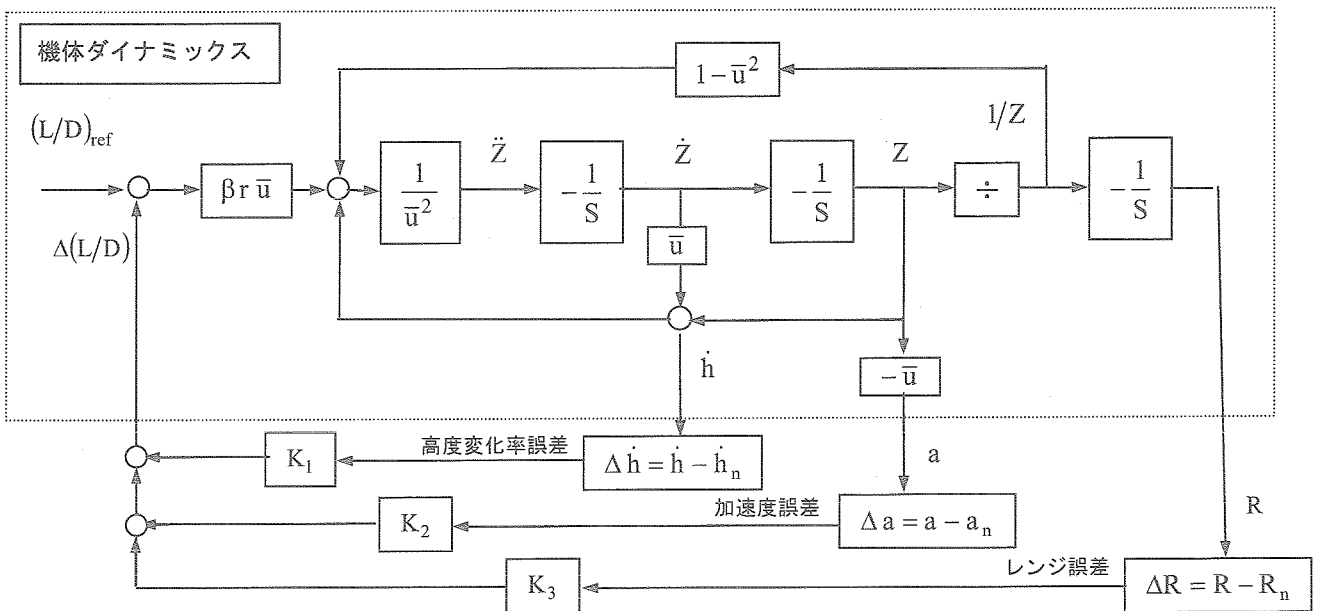


誘導は上記基準軌道での $\dot{h}_n, a_n, R_n (L/D)_{ref}$ を得た後, これらを記憶しておき次の固定ゲインによる誘導則を考える。

誘導則

$$L/D = (L/D)_{ref} + K_1 \Delta \dot{h} + K_2 \Delta a + K_3 \Delta R \quad (3)$$

この誘導付機体ダイナミクスを下图に示す



ただし $\dot{h}_n, a_n, R_n (L/D)_{ref}$ はノミナル軌道値

軌道特性

- 1) 高度変化率制御の場合の軌道特性
- 2) 加速度制御の場合の軌道特性
- 3) 飛行レンジ制御の場合の軌道特性

各制御ループでの軌道の特性固有角周波数, 減衰率を示す。

(2) 式から

$$\frac{d^2 Z}{d\bar{u}^2} - \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) - \frac{(1-\bar{u}^2)}{\bar{u}^2 Z} + \frac{\sqrt{\beta r} (L/D)}{\bar{u}} = 0 \quad (4)$$

基準軌道の Z を Z_{ref} , 基準軌道からの変動分を ΔZ と置く。

$$Z = Z_{ref} + \Delta Z \quad (5)$$

$$L/D = (L/D)_{ref} + \Delta(L/D) \quad (6)$$

また基準軌道の Z の変化率に比べて変動分の変化率は十分小さいものとする。

$$\frac{d^n Z_{ref}}{d\bar{u}^n} \gg \frac{d^n \Delta Z}{d\bar{u}^n} \quad (7)$$

(5) (6) 式を (4) 式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta Z}{d\bar{u}^2} - \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} - \frac{\Delta Z}{\bar{u}} \right) - \frac{(1-\bar{u}^2)}{\bar{u}^2} \frac{\Delta Z}{\Delta Z} + \frac{\sqrt{\beta r} \Delta(L/D)}{\bar{u}} = \\ - \frac{d^2 Z_{ref}}{d\bar{u}^2} + \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{dZ_{ref}}{d\bar{u}} - \frac{Z_{ref}}{\bar{u}} \right) + \frac{(1-\bar{u}^2)}{\bar{u}^2} \frac{\sqrt{\beta r} (L/D)_{ref}}{\bar{u}} \end{aligned} \quad (8)$$

右辺は (4) 式から 0 となることから

$$\frac{d^2 \Delta Z}{d\bar{u}^2} - \frac{1}{\bar{u}} \frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} + \left\{ \frac{1}{\bar{u}^2} + \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}^2 Z_{ref}^2} \right\} \Delta Z + \frac{\sqrt{\beta r} \Delta(L/D)}{\bar{u}} = 0 \quad (9)$$

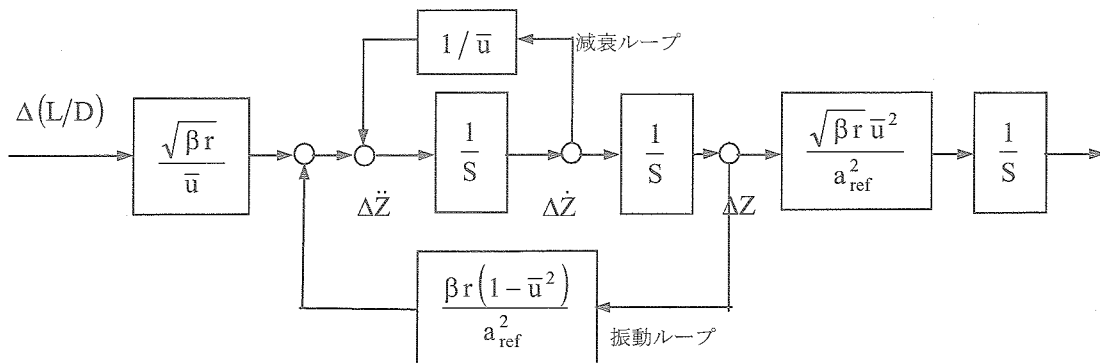
$$\frac{1}{\bar{u}^2} \ll \frac{1-\bar{u}^2}{\bar{u}^2 Z_{ref}^2}$$

より

$$-\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\rho u^2}{2 \Delta \cos \gamma} = \frac{g \sqrt{\beta r}}{\cos \gamma} \bar{u} Z : \text{水平方向加速度} \quad (10)$$

$$a = -\frac{1}{g} \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\sqrt{\beta r}}{\cos \gamma} \bar{u} Z \approx \sqrt{\beta r} \bar{u} Z \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \Delta Z}{d\bar{u}^2} - \frac{1}{\bar{u}} \frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} + \frac{1-\bar{u}^2}{a_{ref}^2} \Delta Z = -\frac{\sqrt{\beta r} \Delta(L/D)}{\bar{u}} \quad (12)$$



1) 高度変化率制御の場合の軌道特性 $\Delta(L/D) = K_1 \Delta \dot{h}$

高度変化率はZ関数を用いると次式で表される。

$$\dot{h} = V \sin \gamma = \frac{\sqrt{gr} \bar{u}}{\cos \gamma} \frac{1}{\sqrt{\beta r}} \left(\frac{dZ}{d\bar{u}} - \frac{Z}{\bar{u}} \right) \approx \sqrt{\frac{g}{\beta}} \left(\bar{u} \frac{dZ}{d\bar{u}} - Z \right) \quad (13)$$

上式から高度変化率誤差は

$$\Delta \dot{h} = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \left(\bar{u} \frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} - \Delta Z \right) \quad (14)$$

(12) 式に代入して

$$\frac{d^2 \Delta Z}{d\bar{u}^2} + \left(\frac{1}{\bar{u}} - K_1 \sqrt{gr} \right) \frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} + \left\{ \frac{\beta r (1 - \bar{u}^2)}{a_{\text{ref}}^2} - \frac{K_1 \sqrt{gr}}{\bar{u}} \right\} \Delta Z = 0 \quad (15)$$

ここで

$$S = \frac{d}{d\bar{u}}$$

と置くと

$$S^2 + \left(\frac{1}{\bar{u}} - K_1 \sqrt{gr} \right) S + \left\{ \frac{\beta r (1 - \bar{u}^2)}{a_{\text{ref}}^2} - \frac{K_1 \sqrt{gr}}{\bar{u}} \right\} = 0 \quad (16)$$

上式から固有振動数, 粘性係数は次式で得られる。

$$\omega_n^2 = \frac{\beta r (1 - \bar{u}^2)}{a_{\text{ref}}^2} - \frac{K_1 \sqrt{gr}}{\bar{u}} \quad (17)$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{\bar{u}} - K_1 \sqrt{gr} \quad (18)$$

2) 加速度制御の場合の軌道特性 ($\Delta(L/D) = K_2 \Delta a$)

加速度はZ関数をもちいると次式で表される。

$$a = \sqrt{\beta r} \bar{u} Z \quad (19)$$

上式から加速度誤差は

$$\Delta a = \sqrt{\beta r} \bar{u} \Delta Z \quad (20)$$

(12) 式に代入して次式を得る。系は2次系となる。

$$\frac{d^2 \Delta Z}{d\bar{u}^2} + \frac{1}{\bar{u}} \frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} + \left\{ \frac{\beta r (1 - \bar{u}^2)}{a_{\text{ref}}^2} + K_2 \right\} \Delta Z = 0 \quad (21)$$

S関数で表すと

$$S^2 + \frac{1}{\bar{u}} S + \left\{ \frac{\beta r (1 - \bar{u}^2)}{a_{\text{ref}}^2} + K_2 \right\} = 0 \quad (22)$$

上式から固有振動数, 粘性係数は次式で得られる。

$$\omega_n^2 = \frac{\beta r (1 - \bar{u}^2)}{a_{\text{ref}}^2} + K_2 \quad (23)$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{\bar{u}} \quad (24)$$

3) 飛行レンジ制御の場合の軌道特性 ($\Delta(L/D) = K_3 \Delta R$)

飛行レンジ制御はZ関数をもいと次の積分形で表される。

$$\Delta R = R - R_i = \frac{r}{\sqrt{\beta r}} \int_{\bar{u}}^{\bar{u}_i} \frac{\cos \gamma}{Z} d\bar{u} \approx \frac{r}{\sqrt{\beta r}} \int_{\bar{u}}^{\bar{u}_i} \frac{1}{Z} d\bar{u} \quad (25)$$

$$\Delta R = \frac{r}{\sqrt{\beta r}} \int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1} \left\{ \frac{1}{(Z_{\text{ref}} + \Delta Z)(Z_{\text{ref}} - \Delta Z)} - \frac{1}{Z_{\text{ref}}} \right\} d\bar{u} \approx \frac{r}{\sqrt{\beta r}} \int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1} \frac{\Delta Z}{Z_{\text{ref}}^2} d\bar{u} \quad (26)$$

(12)式から

$$\frac{d^2 \Delta Z}{d\bar{u}^2} + \frac{1}{\bar{u}} \frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} + \frac{1 - \bar{u}^2}{\bar{u}^2 Z_{\text{ref}}^2} \Delta Z + \frac{K_3 r}{\bar{u}} \int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1} \frac{\Delta Z}{Z_{\text{ref}}^2} d\bar{u} = 0 \quad (27)$$

上式を微分して

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \Delta Z}{d\bar{u}^3} + \frac{1}{\bar{u}} \frac{d^2 \Delta Z}{d\bar{u}^2} + \left\{ \frac{(1 - \bar{u}^2)}{\bar{u}^2} \frac{1}{Z_{\text{ref}}^2} - \frac{1}{\bar{u}^2} \right\} \frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} \\ + \left[\frac{K_3 r}{\bar{u}} \frac{1}{Z_{\text{ref}}^2} - \frac{K_3 r}{\bar{u}^2} \int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1} \frac{\Delta Z}{Z_{\text{ref}}^2} d\bar{u} - \frac{2}{\bar{u} Z_{\text{ref}}^2} \left\{ 1 + \frac{(1 - \bar{u}^2)}{\bar{u}^2} \left(1 + \frac{\bar{u}}{Z_{\text{ref}}} \frac{dZ_{\text{ref}}}{d\bar{u}} \right) \right\} \right] \Delta Z = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

これより系は3次系となる。

$$\frac{d^3 \Delta Z}{d\bar{u}^3} + \frac{1}{\bar{u}} \frac{d^2 \Delta Z}{d\bar{u}^2} + \frac{1 - \bar{u}^2}{\bar{u}^2} \frac{1}{Z_{\text{ref}}^2} \frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} + \frac{K_3 r}{\bar{u}} \frac{1}{Z_{\text{ref}}^2} \Delta Z = 0 \quad (29)$$

または $a_{\text{ref}} = -\sqrt{\beta r} \bar{u} Z_{\text{ref}}$ から

$$\frac{d^3 \Delta Z}{d\bar{u}^3} + \frac{1}{\bar{u}} \frac{d^2 \Delta Z}{d\bar{u}^2} + \frac{\beta r (1 - \bar{u}^2)}{a_{\text{ref}}^2} \frac{d\Delta Z}{d\bar{u}} + \frac{K_3 \beta r^2 \bar{u}}{a_{\text{ref}}^2} \Delta Z = 0 \quad (30)$$

S関数で表すと次のようになる。

$$S^3 + \frac{1}{\bar{u}} S^2 + \frac{\beta r (1 - \bar{u}^2)}{a_{\text{ref}}^2} S + \frac{K_3 \beta r^2 \bar{u}}{a_{\text{ref}}^2} = 0 \quad (31)$$

安定性の判別(ラウス等)から

$$K_3 > \frac{1 - \bar{u}^2}{r \bar{u}^2} \quad (32)$$

の時系は不安定となる。

以上から固定ゲインを次のように置く。

$$K_1 = -0.001 \text{ ft/sec} = -0.00328 \text{ m/sec}$$

$$K_2 = -0.33/g$$

$$K_3 = 0.006 - 0.0008 \text{ /mile} = 0.00373 - 0.00497 \text{ 1/Km}$$

解析例)

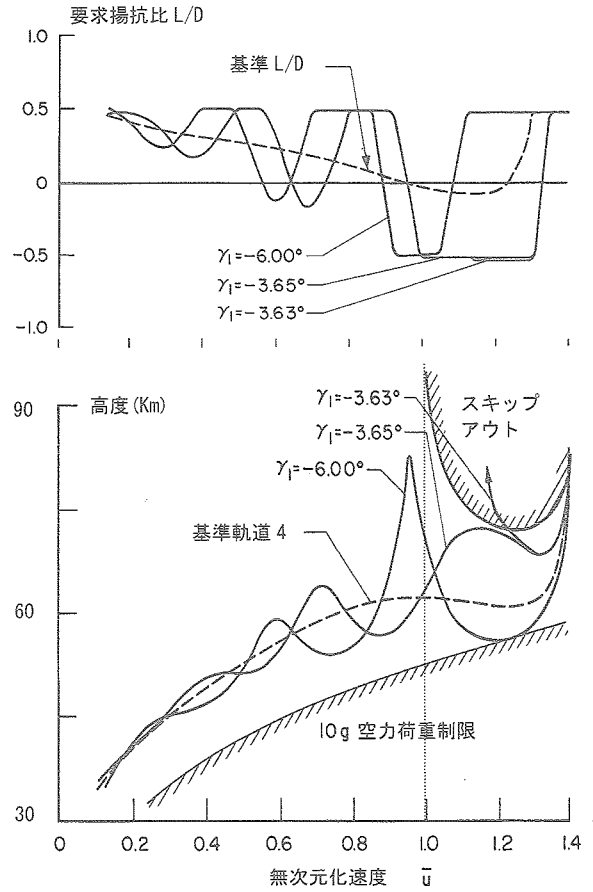
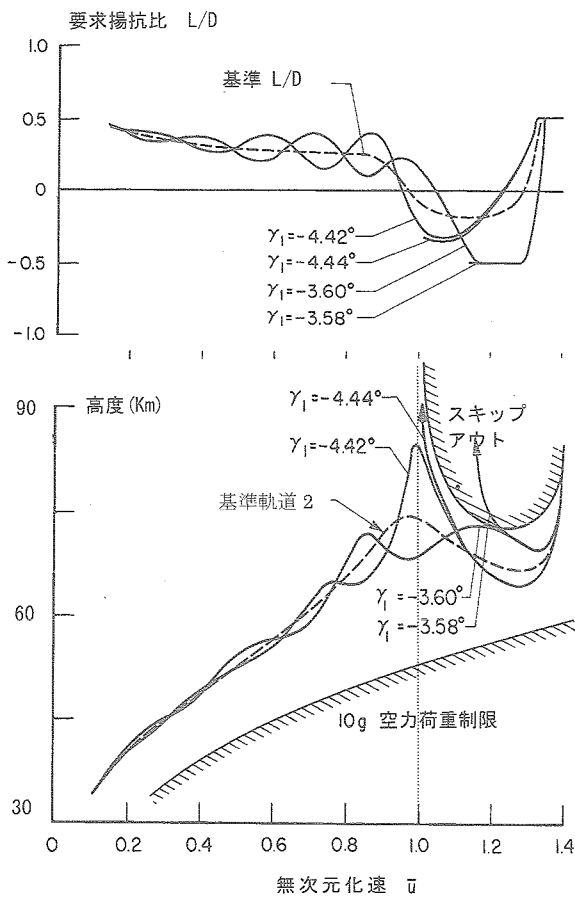
機体パラメータを

$$m / C_D A = 24 \text{Kg} / \text{m}^2 (48 \text{lbf} / \text{ft}^2)$$

基準軌道 2 : $\gamma_E = -4.1$

基準軌道 4 : $\gamma_E = -4.9$

として種々の初期飛行経路角についてシミュレーションを行った例を文献から示す。



9-4. 可変ゲインによる誘導

1) カプセル型再突入宇宙機の可変ゲインによる誘導

ジェミニのような高抵抗, 低揚力カプセルタイプの揚力機に対してバンク角モジュレーションによる可変ゲインによる誘導の例を示す。

仮定

i) $L/m \gg (V^2/r - g) \cos \gamma$

速度座標系運動方程式と仮定に基づく近似運動方程式

$$V \frac{dy}{dt} = \frac{L}{m} + g \left(\frac{V^2}{gr} - 1 \right) \cos \gamma$$

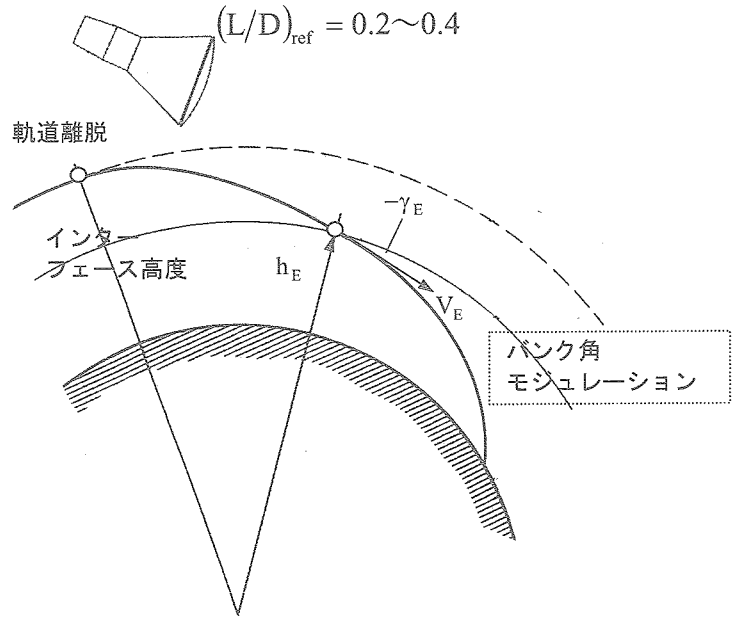
$$= \left(\frac{L}{D} \right) D_m + g \left(\frac{V^2}{gr} - 1 \right) \cos \gamma \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma = -D_m - g \sin \gamma \quad (2)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = V \cos \gamma \quad (4)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \beta V \sin \gamma \quad (6)$$



$$D_m = \frac{C_D A}{m} \frac{\rho V^2}{2} : \text{抗力加速度}$$

$$\frac{dD_m}{dt} = \frac{C_D A}{m} \frac{V^2}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} + 2V \frac{dV}{dt} \right) = -D_m \beta V \sin \gamma - \frac{2D_m}{V} (D_m + g \sin \gamma)$$

独立変数を時刻 t から速度 V に変換する。

$$\frac{d\gamma}{dV} = -\frac{D_m (L/D) \cos \phi_B - g (1 - V^2/gr) \cos \gamma}{V (D_m + g \sin \gamma)}$$

$$\frac{dD_m}{dV} = \frac{D_m (\beta V \sin \gamma + 2/V)}{D_m + g \sin \gamma}$$

$$\frac{dR}{dV} = \frac{V \cos \gamma}{D_m + g \sin \gamma}$$

線形化

$$\frac{d}{dV} \begin{bmatrix} \delta \gamma \\ \delta D_m \\ \delta R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \gamma \\ \delta D_m \\ \delta R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(\cos \phi_B)$$

$$\frac{d}{dV} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

終端条件：

$$\lambda_{1f} = \lambda_{2f} = 0$$

随伴方程式から

$$d\lambda_3/dV = 0 \rightarrow \lambda_{3f} = 1$$

終端レンジ

$$\delta R_f = \lambda_1 \delta \gamma + \lambda_2 \delta D_m + \lambda_3 \delta R - \delta(\cos \phi_B) \int_{V_f}^V \lambda_1 b_1 dV$$

ここでパラメータ λ_4 を次式で定義する。

$$\lambda_4 \equiv \frac{\partial R_f}{\partial(\cos \phi_B)} = - \int_{V_f}^V \lambda_1 b_1 dV$$

これから

$$\frac{d\lambda_4}{dV} = -\lambda_1 b_1$$

終端においてレンジ誤差を 0 とする要求条件 $\delta R_f = 0$ から

$$0 = \lambda_1 (\gamma - \gamma_{ref}) + \lambda_2 (D_{mf} - D_m) + \lambda_3 (R - R_{ref}) + \lambda_4 \{ (\cos \phi_B)_C - (\cos \phi_B)_{ref} \}$$

$$(\cos \phi_B)_C = (\cos \phi_B)_{ref} - (\lambda_1/\lambda_4)(\gamma - \gamma_{ref}) - (\lambda_2/\lambda_4)(D_{mf} - D_m) - (\lambda_3/\lambda_4)(R - R_{ref})$$

$$(L/D)_C = (L/D)_{ref} (\cos \phi_B)_C$$

$$(L/D)_{ref} = (L/D)_{ref} (\cos \phi_B)_{ref}$$

ゲイン K_1 - K_3 は次式で表わされる。

$$K_1 = -(\lambda_1/\lambda_4) / (L/D)_{ref}$$

$$K_2 = -(\lambda_2/\lambda_4) / (L/D)_{ref}$$

$$K_3 = -(\lambda_3/\lambda_4) / (L/D)_{ref}$$

$$\text{ただし } (L/D)_{ref} = 0.2 \sim 0.4$$

以上から要求バンク角は次式で表される。

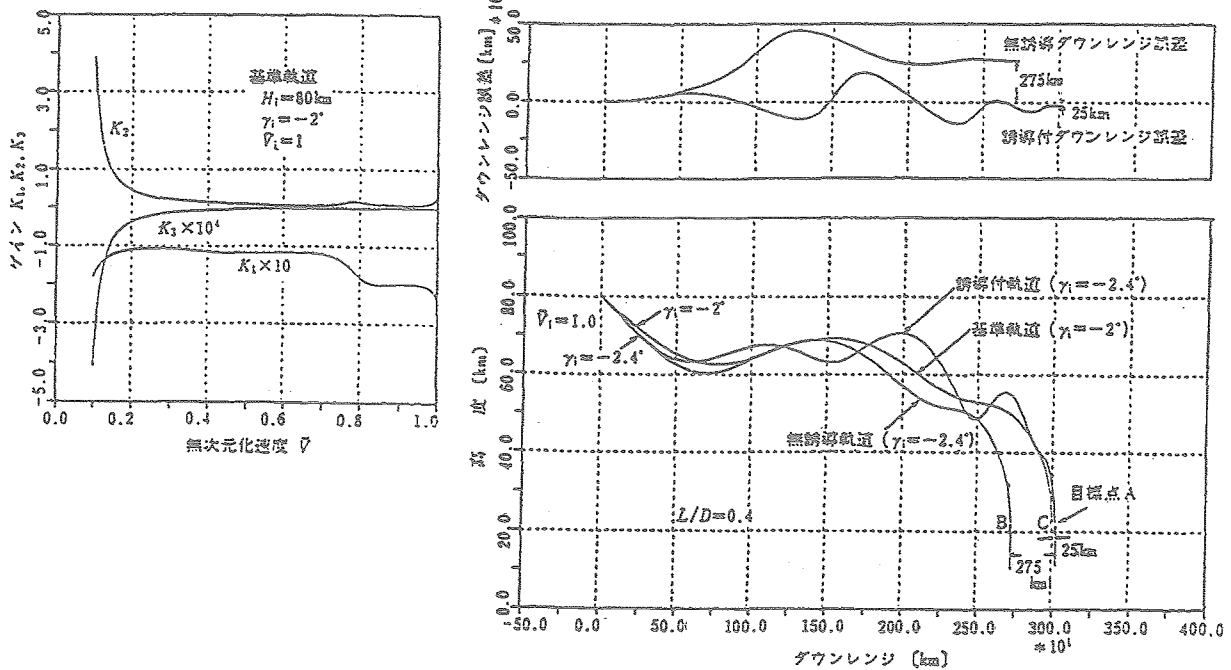
$$(L/D)_C = (L/D)_{ref} + K_1 (\gamma - \gamma_{ref}) + K_2 (D_{mf} - D_m) + K_3 (R - R_{ref})$$

$$(\cos \phi_B)_C = (L/D)_C / (L/D)$$

可変ゲインを用いた誘導の例

随伴方程式を解いて K_1, K_2, K_3 を速度の関数として表わした例を示す。

さらに基準軌道に対してこのゲインを用いて誘導を行った軌道の例を、無誘導軌道とともに示す。



II) 基準軌道(平行滑空飛行)に基づく誘導

I) 項では基準軌道は外部から与える必要があったが、基準軌道として、平衡滑空軌道をえらぶと基準軌道のパラメータが速度の関数として得られるから、あらかじめ基準軌道を与えることなく線形運動方程式の中に組み込んで表すことができる。

平行滑空飛行を基準とすることから経路角は微小と仮定する。

- i) $\gamma \ll 1$: 仮定
- ii) $V\dot{\gamma} \ll (V^2/r - g)$
- iii) $D/m \gg g \sin \gamma$

無次元化速度, 弾道係数を次式で定義する。

$$\hat{V} = V/V_E = V/\sqrt{gr}$$

$$\Delta = \frac{m}{C_D A}$$

平行滑空飛行の軌道は解析的に得られており次式で表される。添字を eq とする。(平行滑空飛行の項参照)

$$\gamma_{eq} = -\frac{1}{\beta r} \frac{2}{(L/D)} \frac{1}{\hat{V}^2} \quad : \text{経路角}$$

$$\rho_{eq} = \frac{2}{r} \frac{\Delta}{(L/D)} \left(\frac{1-\hat{V}^2}{\hat{V}^2} \right) \quad : \text{密度}$$

$$h_{eq} = \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{r \rho_{SL}}{2\Delta} \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{\hat{V}^2}{1-\hat{V}^2} \right) \right\} \quad : \text{高度}$$

$$R_{eq} = \frac{r}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \ln \left(\frac{1-\hat{V}^2}{1-\hat{V}_E^2} \right) \quad : \text{ダウンレンジ}$$

無次元化速度を用いると次式で表される。

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{L}{D} \right) \frac{\sqrt{gr}\hat{V}}{2\Delta} + \sqrt{\frac{g}{r}} \left(\frac{\hat{V}^2-1}{\hat{V}} \right)$$

$$\frac{d\hat{V}}{dt} = -\frac{\sqrt{gr}}{2\Delta} \rho \hat{V}^2$$

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{gr} \hat{V} \gamma$$

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{gr} \hat{V}$$

変数変換 $d\hat{V}/dt$ を用いて独立変数を時間 t から無次元化速度 \hat{V} に変更すると

$$\frac{d\gamma}{d\hat{V}} = -\left(\frac{L}{D} \right) \frac{1}{\hat{V}} + \frac{2\Delta}{rp} \frac{1-\hat{V}^2}{\hat{V}^3}$$

$$\frac{dh}{d\hat{V}} = -\frac{2\Delta}{\rho} \frac{\gamma}{\hat{V}}$$

$$\frac{dR}{d\hat{V}} = -\frac{2\Delta}{\rho} \frac{1}{\hat{V}}$$

線形化方程式

基準軌道(平衡滑空飛行軌道)からの変分を δ で表す。

$$\gamma = \delta\gamma + \gamma_{eq}$$

$$h = \delta h + h_{eq}$$

$$R = \delta R + R_{eq}$$

$$\rho = \rho_{eq} (1 - \beta \delta h)$$

従属変数 $\delta\gamma$ δh δR に関する線形方程式は次式で表される。

$$\frac{d\delta\gamma}{d\hat{V}} = \frac{2\beta\Delta}{r\rho_{eq}} \frac{1-\hat{V}^2}{\hat{V}^3} \delta h - \frac{d\gamma_{eq}}{d\hat{V}}$$

$$\frac{d\delta h}{d\hat{V}} = -\frac{2\Delta\beta\gamma_{eq}}{\hat{V}} \delta h - \frac{2\Delta\beta}{\rho_{eq}} \frac{1}{\hat{V}} \delta\gamma$$

$$\frac{d\delta R}{d\hat{V}} = -\frac{2\Delta\beta}{\rho_{eq}} \frac{1}{\hat{V}} \delta h$$

さらに ρ_{eq} を代入して整理すると最終的に次の線形化方程式をえる。

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\gamma}{d\hat{V}} &= \frac{\beta(L/D)}{\hat{V}} \delta h - \left(\frac{d\delta\gamma_{eq}}{d\hat{V}} \right) \\ \frac{d\delta h}{d\hat{V}} &= -\frac{2}{\hat{V}(1-\hat{V}^2)} \delta h - \frac{r(L/D)}{1-\hat{V}^2} \delta\gamma \\ \frac{d\delta R}{d\hat{V}} &= -\frac{\beta r(L/D)\hat{V}}{1-\hat{V}^2} \delta h \end{aligned}$$

ハミルトン関数 H は次式で表される。

$$H = \lambda_\gamma \left\{ \frac{\beta(L/D)}{\hat{V}} \delta h - \left(\frac{d\delta\gamma_{eq}}{d\hat{V}} \right) \right\} - \lambda_h \left\{ \frac{2}{\hat{V}(1-\hat{V}^2)} \delta h + \frac{r(L/D)}{1-\hat{V}^2} \delta\gamma \right\} - \lambda_x \left\{ \frac{\beta r(L/D)\hat{V}}{1-\hat{V}^2} \delta h \right\}$$

このハミルトン関数 H を用いると変数従属変数 $\delta\gamma$ δh δx に関する随伴方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\gamma}{d\hat{V}} &= -\frac{\partial H}{\partial \gamma} = \frac{r(L/D)\hat{V}}{1-\hat{V}^2} \lambda_h \\ \frac{d\lambda_h}{d\hat{V}} &= -\frac{\partial H}{\partial h} = -\frac{\beta(L/D)}{\hat{V}} \lambda_\gamma + \frac{2}{\hat{V}(1-\hat{V}^2)} \lambda_h + \frac{\beta r(L/D)}{1-\hat{V}^2} \lambda_x \\ \frac{d\lambda_R}{d\hat{V}} &= -\frac{\partial H}{\partial R} = 0 \end{aligned}$$

上式から λ_R は一定で 1 と置く。

$$\lambda_R(\hat{V}_f) = 1 : \text{定数}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\gamma}{d\hat{V}} &= \frac{r(L/D)\hat{V}}{1-\hat{V}^2} \lambda_h \\ \frac{d\lambda_h}{d\hat{V}} &= -\frac{\beta(L/D)}{\hat{V}} \lambda_\gamma + \frac{2}{\hat{V}(1-\hat{V}^2)} \lambda_h + \frac{\beta r(L/D)}{1-\hat{V}^2} \lambda_x \end{aligned}$$

の 2 式を次の条件のもとに解けばよい。

$$\lambda_\gamma(\hat{V}_f) = 0$$

$$\lambda_h(\hat{V}_f) = 0$$

10. 最適軌道にもとづく誘導

最適制御問題の定式化とポントリアーギンの最大値の原理

状態拘束：

系の状態方程式が次の微分方程式であらわされ、

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t); \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 : \text{初期値} \quad (1)$$

終端拘束：

$$\bar{\psi}(\bar{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (2)$$

を満たし、

目的関数(評価関数, 汎関数)

$$J = \phi(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} L(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \quad (3)$$

を最小化する制御変数 $\bar{u}^0(t_f)$ を見出す。

ただし

$$\bar{x} = [x_1, x_2 \dots x_n]^T \quad : \text{状態変数ベクトル} \quad (4)$$

$$\bar{u} = [u_1, \dots u_q]^T \quad (q \leq n) \quad : \text{制御変数ベクトル} \quad (5)$$

$$\bar{f} = [f_1, f_2 \dots f_n]^T \quad : \text{状態拘束関数ベクトル} \quad (6)$$

$$\bar{\psi} = [\psi_1, \psi_2 \dots \psi_m]^T \quad (m \leq n+1) \quad : \text{終端拘束関数ベクトル} \quad (7)$$

この制御問題では目的関数(汎関数)に状態拘束と終端拘束が付加されたものになっているから、この状態拘束と終端拘束を見かけ上なくすことができれば変分問題に帰着できる。そこで次の合成目的関数(状態拘束と終端拘束を組み込んだ関数)を導入する。

$$\hat{J} = \phi(\bar{x}(t_f), t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} \left[L(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{\lambda}^T \{ \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) - \dot{\bar{x}} \} \right] dt \quad (8)$$

ここで \bar{v} , $\bar{\lambda}$ はラグランジェ乗数と呼ばれる。特に $\bar{\lambda}$ は随伴変数(Adjoint variable), 補助変数, 共状態変数(Costate variable)とも呼ばれている。終端拘束, 状態拘束が満たされたとき $\hat{J} = J$ と等しくなる。

次に新たな関数, 拡張ハミルトン関数(Hamilton function)を導入する。

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = L(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad : \text{拡張ハミルトン関数} \quad (9)$$

通常, 右辺第2項がハミルトン関数 $H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = L(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$ と呼ばれている。拡張ハミルトン関数を用いると合成目的関数は次式となる。

$$\hat{J} = \phi(\bar{x}(t_f), t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} \left[H(\bar{x}, \bar{u}, t) - \bar{\lambda}^T \dot{\bar{x}} \right] dt \quad (10)$$

(10)式 \hat{J} の第1変分 $\delta\hat{J}$ をもとめると

$$\begin{aligned} \delta\hat{J} = & \phi_{\bar{x}}^T(t_f) \delta\bar{x}_f + \phi_t(t_f) \delta t_f + \bar{v}^T \bar{\psi}_{\bar{x}}(t_f) \delta\bar{x}_f + \bar{v}^T \bar{\psi}_t(t_f) \delta t_f \\ & + \int_0^{t_f} \left[H_{\bar{x}} \delta\bar{x} + H_{\bar{u}} \delta\bar{u} + H_{\bar{\lambda}} \delta\bar{\lambda} - \delta\bar{\lambda}^T \dot{\bar{x}} - \bar{\lambda}^T \delta\dot{\bar{x}} \right] dt + H(t_f) \delta t_f - \bar{\lambda}^T(t_f) \dot{\bar{x}}(t_f) \delta t_f \quad (11) \end{aligned}$$

(11)式の右辺に含まれる $\bar{\lambda}^T \delta\dot{\bar{x}}$ を下記のように部分積分すると次式を得る。

$$\int_0^{t_f} \bar{\lambda}^T \delta\dot{\bar{x}} dt = \left[\bar{\lambda}^T \delta\bar{x} \right]_0^{t_f} - \int_0^{t_f} \dot{\bar{\lambda}}^T \delta\bar{x} dt = \bar{\lambda}^T(t_f) \delta\bar{x}(t_f) - \int_0^{t_f} \dot{\bar{\lambda}}^T \delta\bar{x} dt \quad (12)$$

(12)式の結果を(11)式に代入すると次のように表される。

$$\begin{aligned} \delta\hat{J} = & \left\{ \phi_{\bar{x}}^T(t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}_{\bar{x}}(t_f) \right\} \delta\bar{x}_f \\ & + \left\{ H(t_f) - \bar{\lambda}^T(t_f) \dot{\bar{x}}(t_f) + \phi_t(t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}_t(t_f) \right\} \delta t_f - \bar{\lambda}^T(t_f) \delta\bar{x}(t_f) \\ & + \int_0^{t_f} \left[\left(H_{\bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}}^T \right) \delta\bar{x} + \left(H_{\bar{\lambda}} - \dot{\bar{x}}^T \right) \delta\bar{\lambda} + H_{\bar{u}} \delta\bar{u} \right] dt \quad (13) \end{aligned}$$

次に終端点 $\delta\bar{x}(t_f)$ は右図から

$$\delta\bar{x}(t_f) = \delta\bar{x}_f - \dot{\bar{x}}(t_f) \delta t_f \quad (14)$$

この関係式を代入すると

$$\begin{aligned} \delta\hat{J} = & \left\{ \phi_{\bar{x}}^T(t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}_{\bar{x}}(t_f) - \bar{\lambda}^T(t_f) \right\} \delta\bar{x}_f \\ & + \left\{ H(t_f) + \phi_t(t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}_t(t_f) \right\} \delta t_f \\ & + \int_0^{t_f} \left[\left(H_{\bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}}^T \right) \delta\bar{x} + \left(H_{\bar{\lambda}} - \dot{\bar{x}}^T \right) \delta\bar{\lambda} + H_{\bar{u}} \delta\bar{u} \right] dt \quad (15) \end{aligned}$$

(15)式から $\delta\hat{J} = 0$ であるための必要条件は次式で表される。

このうち (d), (e) 式は特に横断条件といわれる

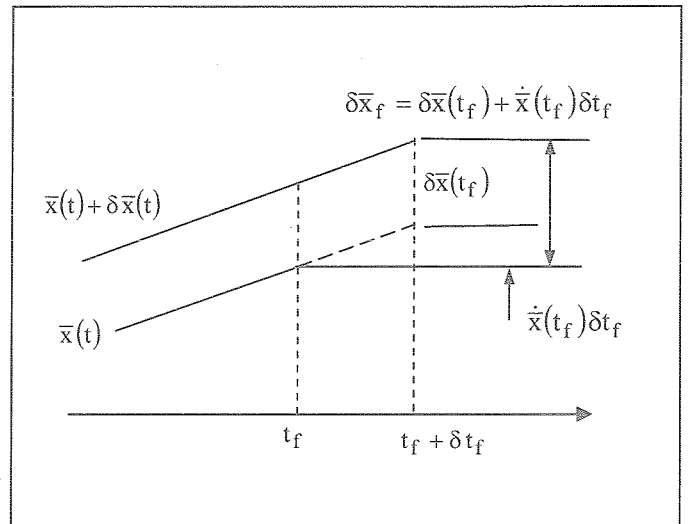
(a) $H_{\bar{u}} = 0$

(b) $H_{\bar{\lambda}} - \dot{\bar{x}}^T = 0$

(c) $H_{\bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}}^T = 0$

(d) $\phi_{\bar{x}}^T(t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}_{\bar{x}}(t_f) - \bar{\lambda}^T(t_f) = 0$: 横断条件(I)

(e) $H(t_f) + \phi_t(t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}_t(t_f) = 0$: 横断条件(II)



(a) は制御変数 \bar{u} に関する必要条件で最適制御変数が得られる。(b) は状態変数 \bar{x} に対する拘束条件(状態変数が満たすべき微分方程式) (c) は随伴変数 $\bar{\lambda}$ に対する拘束条件(随伴変数が満たすべき微分方程式) (d) は随伴変数 $\bar{\lambda}$ の終端条件 $\bar{\lambda}_f$ を決める必要条件 (e) は終端時刻 t_f に対する必要条件を表す。必要条件 (a) - (e) を展開する。(9) 式ハミルトン関数 $H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = L(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$ を微分して代入すると次の通り。

$$(a) \quad H_{\bar{u}}^T(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = L_{\bar{u}}^T(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{f}_{\bar{u}}^T(\bar{x}, \bar{u}, t) \bar{\lambda} = 0 \quad (16)$$

$$(b) \quad \dot{\bar{x}} = H_{\bar{\lambda}}^T \quad (17)$$

$$(c) \quad \dot{\bar{\lambda}} = -H_{\bar{x}}^T = -\left\{ L_{\bar{x}}^T(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{f}_{\bar{x}}^T(\bar{x}, \bar{u}, t) \bar{\lambda} \right\} \quad (18)$$

$$(d) \quad \bar{\lambda}(t_f) = \phi_{\bar{x}}(t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}_{\bar{x}}(t_f) \quad (19)$$

$$(e) \quad H(t_f) + \phi_t(t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}_t(t_f) = 0 \quad (20)$$

特に目的関数が $J = \phi(\bar{x}(t_f), t_f)$ (Mayer 型) の場合には $L = 0$ と置いて次のように簡単になる。

$$(a) \quad H_{\bar{u}}^T(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^T \bar{\lambda} = 0 \quad (21)$$

$$(b) \quad \dot{\bar{x}} = H_{\bar{\lambda}}^T = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (22)$$

$$(c) \quad \dot{\bar{\lambda}} = -H_{\bar{x}}^T = -\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)^T \bar{\lambda} = \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) \quad (23)$$

$$(d) \quad \bar{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} + \bar{v}^T \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \right)_{t=t_f}^T : \text{横断条件 (I)} \quad (24)$$

$$(e) \quad \left(\bar{\lambda}^T \bar{f} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{v}^T \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right)_{t=t_f} = 0 : \text{横断条件 (II)} \quad (25)$$

終端時刻 t_f 自由の場合 条件(e)は必要ない。

目的関数について

目的関数は(3)式から

$$J = \phi(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} L(\bar{x}, \bar{u}, t) dt$$

上式で表される問題をボルザ (Bolza) 型といわれる。また終端状態固定, 終端時間固定の場合には ϕ は意味を失い $\phi(\bar{x}(t_f), t_f) = 0$ と置いて, 積分項のみとなり

$$J = \int_0^{t_f} L(\bar{x}, \bar{u}, t) dt$$

これをラグランジェ (Lagrange) 型, また終端条件のみである場合

$$J = \phi(\bar{x}(t_f), t_f)$$

メーヤ(Mayer)型といわれる。

また目的関数に積分項を含む Bolza 型, あるいは Lagrange 型の場合でも新たな変数 x_{n+1} を追加して

$$x_{n+1} = \int_0^t L(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \quad (26)$$

$$\dot{x}_{n+1} = L(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (27)$$

(27)式で表される状態方程式を 1 つ追加することにより Mayer 型に変換できるので以下 (21)-(25)式を取り扱う。

目的関数の例

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ K_4 \rho^{1/2} V^3 + K_7 \frac{(L^2 + D^2)}{m^2} \right\}$$

$$\phi = \int_{t_0}^{t_f} (Q + KQ^2) dt$$

$$\phi = Q + \mu G$$

$$\phi = -K_1 \phi + K_2 \int_{t_0}^{t_f} \dot{Q} dt \quad \phi = -K_1 \phi + K_2 Q$$

$$K(s_f) = \int_0^{s_f} q_s ds$$

$$\phi = CK^2(s_f) + D \{ h(s_f) - 150000 \}^2 + E \{ v(s_f) - 4000 \}^2$$

$$J = Q(t_f) + K_1 \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{L}{m} \right)^2 + \left(\frac{D}{m} \right)^2 \right\}$$

横断条件について

(24)式において目的関数を次のように拡張すると随伴変数の終端値は次のようにあらわされ, 取り扱いが容易になる。

$$\Phi = \phi + \bar{v}^T \bar{\psi} : \text{拡張目的関数}$$

$$\bar{\lambda}(t_f) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right]_{t=f} : \text{横断条件(I)}$$

または成分別にあらわすと

$$\lambda_j(t_f) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right]_{t=f} \quad (j=1, n)$$

ハミルトン関数について

特に H が時間 t を陽に含まない場合 関数 H を微分して

$$\dot{H} = \left(H_{\bar{x}} \dot{\bar{x}} + H_{\bar{\lambda}} \dot{\bar{\lambda}} \right) + H_{\bar{u}} \dot{\bar{u}} + H_t = 0 \quad (47)$$

右辺第1項は $\dot{\bar{\lambda}} = -H_{\bar{x}}$, $\dot{\bar{x}} = H_{\bar{\lambda}}$, から0, 第2,3項も条件 $H_{\bar{u}} = 0$ $H_t = 0$ から0である。これより関数 H は一定となる。

$$H(t) = \text{const} \quad (48)$$

関数 H は終端時刻 t_f が自由 ($\delta t_f \neq 0$) でも固定 ($\delta t_f = 0$) でも (40) 式 $H = \text{一定}$ が成り立つ。

さらに終端時刻 t_f が自由 ($\delta t_f \neq 0$) であって終端拘束項 (ψ) と終端値項 (ϕ) が t_f を含まない場合, すなわち $\phi_t, \bar{\psi}_t = 0$ ならば (46) 式から $H(t_f) = 0$ となり, (48) 式の右辺 const は0となる。

$$H(t) = 0 \quad (49)$$

この場合ハミルトン関数は常に0である。

(1)-(27) 式に表れるベクトルあるいは行列をあらためて, まとめおくと次の通り。

$$\bar{x} = [x_1, x_2 \dots x_n]^T \quad : \text{状態変数ベクトル}(n \times 1) \quad (4)$$

$$\bar{u} = [u_1, \dots u_q]^T \quad (q \leq n) \quad : \text{制御変数ベクトル}(q \times 1) \quad (q \leq n) \quad (5)$$

$$\bar{f} = [f_1, f_2 \dots f_n]^T \quad : \text{状態拘束関数ベクトル}(n \times 1) \quad (6)$$

$$\bar{\psi} = [\psi_1, \psi_2 \dots \psi_m]^T \quad (m \leq n+1) \quad : \text{終端拘束関数ベクトル} \quad (7)$$

$$\bar{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n]^T \quad : \text{状態変数ベクトル}(n \times 1) \quad (28)$$

$$\bar{v} = [v_1, v_2 \dots v_m]^T \quad (m \times 1) \quad : \text{ラグランジェ未定乗数ベクトル} \quad (29)$$

$$H_{\bar{u}} = \left[\frac{\partial H}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u_p} \right] = [H_{u_1}, \dots H_{u_p}] \quad (1 \times p) \quad (30)$$

$$H_{\bar{x}} = \left[\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right] = [H_{x_1}, H_{x_2}, \dots H_{x_n}] \quad (1 \times n) \quad (31)$$

$$H_{\bar{\lambda}} = \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial H}{\partial \lambda_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \lambda_n} \right] = [H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2}, \dots H_{\lambda_n}] \quad (1 \times n) \quad (32)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad (33)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix} \quad (n \times p) \quad (34)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right] \quad (1 \times n) \quad (35)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (m \times n) \quad (36)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (m \times 1) \quad (37)$$

また添字 \top ()^T は転置行列を表す。

解法の手順

ステップ 1)

状態拘束関数ベクトル \bar{f} と随伴変数ベクトル $\bar{\lambda}$ の内積をとり、ハミルトン関数 H を求める。

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = \bar{\lambda}^T \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (38)$$

ステップ 2)

$$H_{\bar{u}}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = 0 \quad (39)$$

$\bar{u}(p \times 1)$ は p 次元ベクトルであるから p 元の代数方程式となる。これを \bar{u} について解き、最適解 $\bar{u}^0 = \bar{u}^0(\bar{x}, \bar{\lambda}, t)$ を求める。

ステップ 3)

\bar{u}^0 を代入して(消去して)最適ハミルトン関数 H^0 を求める。

$$H^0(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) = H(\bar{x}, \bar{u}^0, \bar{\lambda}, t) \quad (40)$$

ステップ 4)

(40) 式を微分して同様に \hat{f}, \hat{g} を求める。

$$\dot{\bar{x}} = H_{\bar{x}}^0(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) = \hat{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (n \times 1) \quad (40)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_{\bar{\lambda}}^0(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) = \hat{g}(\hat{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (n \times 1) \quad (41)$$

(40), (41) 式の $2n$ 個の微分方程式を解く。

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad : \text{初期条件} \quad (n \times 1) \quad (42)$$

$$\bar{\psi}(\bar{x}(t_f), t_f) = 0 \quad : \text{終端条件} \quad (m \times 1) \quad (43)$$

積分定数は次の条件から決定する。

$$H_{\bar{u}} = 0 \quad : \text{最適条件} \quad (44)$$

$$\bar{\lambda}(t_f) = \phi_{\bar{x}}(t_f) + \bar{v}^T \bar{\psi}_{\bar{x}}(t_f) \quad : \text{随伴変数 } \bar{\lambda}_f \text{ の終端条件 横断条件} \quad (45)$$

$H(t_f) + \phi_{t_f} + \bar{v}^T \bar{\psi}_{t_f} = 0$: 未知量 t_f に対する条件 横断条件 (46)

このように制御変数 \bar{u} に拘束が無い場合には $H_{\bar{u}} = 0$ から \bar{u} をもとめて $\bar{u} = \bar{u}^0$, 拘束条件がある場合には最大原理の条件から \bar{u} をもとめて $\bar{u} = \bar{u}^0$ を消去すると 初期値を $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ (既知), $\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}_0$ (未知), 終端時刻 t_f (未知) とし, 終端条件を (43), (45) (46) 式とする 非線形 2 点境界値問題 (TPBVP : Two Point Boundary Value Problem) となる。

10-1. 最適軌道の近似解

概要：再突入宇宙機の最適軌道は目的関数(コスト関数)を定義し、ポントリヤギンの最大値の定理を適用すると、最終的に2点境界値問題に帰着され、ニュートン・ラフソン法、あるいは勾配法等の数値計算により得られる。

この最適問題を、飛行条件にいくつかの仮定を設けることにより、数値計算によらず解析的に解く試みが Vinh(1969-1982), Shi(1968-1971), Eisler(1986-1994)等により行われており、これらの結果の概要を示す。

最初に2次元問題としてスキップ軌道を対象として最適問題について考える。スキップ軌道については揚抗比が一定の場合には Allen, Eggers, Loh, Arther, Cohen 等により解析解が得られているが(第 章 第項を参照)ここでは揚抗比(揚力係数)を可変として目的関数を最大あるいは最小とする問題について考察する。

(I) 2次元最適問題(スキップ軌道)

スキップ軌道について終端速度 V_f を最大とする最適問題について述べる。ここでいう最適とは終端高度を指定したとき終端速度 V_f を最大にする場合

$\phi = V_f$: 最大化

あるいは終端速度を拘束したとき終端高度 z_f を最大にする場合

$\phi = z_f$: 最大化

と定義する。

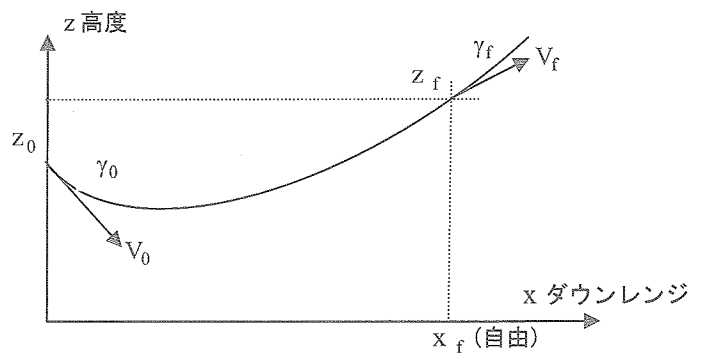
2次元の場合には(1)-(4)式を用いて方位角 ψ を0と置くことにより運動方程式は次のように表される。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{C_D A}{2m} \rho V^2 \quad (7)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{C_L A}{2m} \rho V \quad (8)$$

$$\frac{dz}{dt} = V \sin \gamma \quad (9)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \quad (10)$$



宇宙機の空力特性は放物線ポーラを用いる。(放物線ポーラ(n=2)については宇宙機の空力特性の項参照)放物線ポーラでは抗力係数は直接、揚力係数の2次式として次式で与えられる。

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2 \quad (11)$$

ただし C_D : 抗力係数 C_L : 揚力係数 C_{D0} , K : 定数

制御変数 u は揚力係数 C_L を用いる (揚力係数 C_L モジュレーション)。この揚力係数を固有の値 C_L^* で無次元化したパラメータ η を用いるとさらに簡単化されることからパラメータ η を導入する。

$$C_L = C_L^* \eta \quad (12)$$

C_L^* は揚抗比 L/D 最大時の揚力係数として次式で与えられる。(宇宙機の空力特性の項参照)

$$C_L^* = \sqrt{C_{D0}/K} \quad : \text{定数}$$

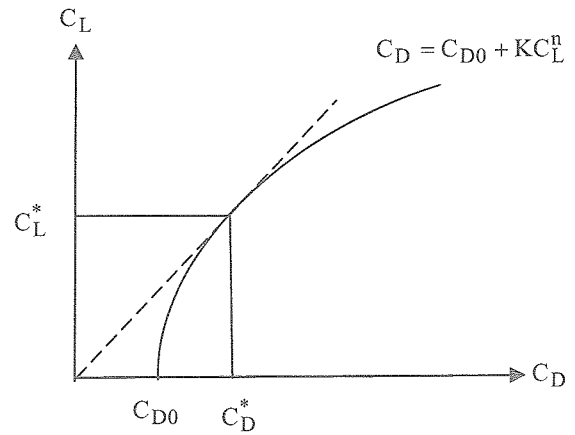
$$C_D^* = 2 C_{D0} \quad : \text{定数}$$

これより空力特性 (抗力係数, 揚抗力比) は η の関数として次式で表される。

$$C_D = C_{D0} (1 + \eta^2) = (C_D^*/2) (1 + \eta^2) \quad (13)$$

$$\frac{L}{D} = \left(\frac{L}{D} \right)_{\max} \frac{2\eta}{1 + \eta^2} \quad (14)$$

ただし $(L/D)_{\max} = C_L^* / C_D^* : \text{定数}$



次に運動方程式を簡単化するために状態変数の無次元化を行う。

ここでは密度 ρ は密度の単位を持つ定数 $(2m\beta/C_L^*A)$ で無次元化, 距離はスケール高度 $1/\beta$ で無次元化 (β は距離の逆数の次元), また速度は周回速度 \sqrt{gr} で無次元化する。

$$\hat{\rho} = \frac{C_L^* A}{2m\beta} \rho \quad : \text{無次元化密度} \quad (15)$$

$$\hat{u} = 2(L/D)_{\max} \ln(V/\sqrt{gr}) \quad : \text{無次元化速度} \quad (16)$$

$$\hat{x} = \beta x \quad : \text{無次元化ダウンレンジ} \quad (17)$$

さらに空力特性 $C_D/C_{D0} = (1 + \eta^2)$, $C_L/C_L^* = \eta$ を代入して整理すると無次元化状態変数に関する運動方程式は次のように整理できる。

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -\frac{C_L^* A}{2m} \rho V (1 + \eta^2) \quad (18)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{C_L^* A}{2m} \rho V \eta \quad (19)$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{C_L^* A}{2m} \rho V \sin \gamma \quad (20)$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{V}{\beta} \cos \gamma \quad (21)$$

ここで(19)式を用いて独立変数を t から γ に変換する。両辺を(19)で割ると係数 $C_L^*A/2m$ は消えて次のようになる。

$$\frac{d\hat{u}}{d\gamma} = -\frac{1+\eta^2}{\eta} = f_{\hat{u}}(\eta) \quad (22)$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\gamma} = -\frac{\sin\gamma}{\eta} = f_{\hat{\rho}}(\gamma, \eta) \quad (23)$$

$$\frac{d\hat{x}}{d\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\hat{\rho}\eta} = f_{\hat{x}}(\gamma, \hat{\rho}, \eta) \quad (24)$$

以上から 2 次元運動方程式は経路角 γ を独立変数, $\hat{u}, \hat{\rho}, \hat{x}$ を状態変数とする極めてシンプルな形で表される。特に速度に関しては制御変数のみの関数となる。この(22)-(24)式を最適問題を考える際の基礎式とする。

最適問題にはいる前に制御変数 $\eta = \text{一定}$ として最適化をおこなわない場合を考えると, $\eta = \text{一定}$ の場合には(22)(23)式はただちに積分できて

$$\hat{u} - \hat{u}_0 = -\left(\frac{1+\eta^2}{\eta}\right)(\gamma - \gamma_0)$$

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_0 = -\left(C_L^*/C_L\right)(\cos\gamma - \cos\gamma_0)$$

(12)(14)式及び(15)(16)式から有次元変数にもどすと次式を得る。

$$\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -\frac{1}{(L/D)_{\max}}\left(\frac{1+\eta^2}{2\eta}\right)(\gamma - \gamma_0) = -\frac{\gamma - \gamma_0}{L/D} \quad (25)$$

$$\rho - \rho_0 = -\frac{2m\beta}{C_L}(\cos\gamma - \cos\gamma_0) = -\frac{2m\beta}{C_D A} \frac{(\cos\gamma - \cos\gamma_0)}{L/D} \quad (26)$$

これは一定揚抗比のスキップ軌道の結果と一致する。

最適問題:

独立変数を γ , 状態変数を $\hat{u}, \hat{\rho}, \hat{x}$ ($n=3$) にとり制御変数 u を η ($m=1$) とすると

$$\bar{x} = [\hat{u} \quad \hat{\rho} \quad \hat{x}]^T \quad : \text{状態変数}(3 \times 1) \quad (27)$$

$$\bar{f} = [f_{\hat{u}}, f_{\hat{\rho}}, f_{\hat{x}}]^T \quad : \text{状態変数}(3 \times 1) \quad (28)$$

$$u = \eta (= C_L) \quad : \text{制御変数}(1 \times 1) \quad (29)$$

(22)-(24)式はベクトル形式で次のように表される。

$$\frac{d\bar{x}}{d\gamma} = \bar{f}(\hat{\gamma}, \bar{x}, \eta) \quad : \text{状態方程式}(3 \times 1) \quad (30)$$

次に(27)式の変数に対応する随伴変数を

$$\bar{\lambda} = [\lambda_{\hat{u}} \quad \lambda_{\hat{\rho}} \quad \lambda_{\hat{x}}]^T : \text{随伴変数ベクトル}(3 \times 1) \quad (31)$$

とするとハミルトン関数Hは次式で表される。

$$H = \bar{\lambda}^T \bar{f} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j f_j = \lambda_{\hat{u}} f_{\hat{u}} + \lambda_{\hat{\rho}} f_{\hat{\rho}} + \lambda_{\hat{x}} f_{\hat{x}} \quad (32)$$

随伴変数ベクトル, 関数ベクトルを代入して

$$H = \lambda_{\hat{u}} \left(-\frac{1+\eta^2}{\eta} \right) + \lambda_{\hat{\rho}} \left(-\frac{\sin \gamma}{\eta} \right) + \lambda_{\hat{x}} \left(\frac{\cos \gamma}{\eta \hat{\rho}} \right) \quad (33)$$

随伴変数 $\lambda_{\hat{u}}$, $\lambda_{\hat{\rho}}$, $\lambda_{\hat{x}}$ に対する微分方程式はハミルトン関数Hから

$$\frac{d\lambda_{\hat{u}}}{d\gamma} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{u}} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{d\lambda_{\hat{\rho}}}{d\gamma} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{\rho}} = \lambda_{\hat{x}} \frac{\cos \gamma}{\hat{\rho}^2 \eta} \quad (35)$$

$$\frac{d\lambda_{\hat{x}}}{d\gamma} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (36)$$

関数Hは状態変数 \hat{u} , \hat{x} を含まないから, 対応する随伴変数の変化率 $d\lambda_{\hat{u}}/d\gamma$, $d\lambda_{\hat{x}}/d\gamma$ は0となる(32), (34)式。これより随伴変数 $\lambda_{\hat{u}}$, $\lambda_{\hat{x}}$ は飛行期間を通じて一定であり, 一定値は終端値条件から定まる。

$$\lambda_{\hat{u}} = v_{\hat{u}} : \text{一定} \quad (37)$$

$$\lambda_{\hat{x}} = v_{\hat{x}} : \text{一定} \quad (38)$$

最適制御変数は関数H(31)式を制御変数 η で偏微分して0と置くと

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta^2} \left\{ (1-\eta^2)\lambda_{\hat{u}} + \lambda_{\hat{\rho}} \sin \gamma - \lambda_{\hat{x}} \frac{\cos \gamma}{\hat{\rho}} \right\} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = -\frac{2\lambda_{\hat{u}}}{\eta}$$

$\partial H/\partial \eta = 0$ から 最適制御変数は次式で与えられる。

$$(1-\eta^2)\lambda_{\hat{u}} = \lambda_{\hat{x}} \frac{\cos \gamma}{\hat{\rho}} - \lambda_{\hat{\rho}} \sin \gamma \quad (40)$$

または

$$\eta^2 = 1 + \frac{\lambda_{\hat{\rho}} \sin \gamma}{\lambda_{\hat{u}}} - \frac{\lambda_{\hat{x}} \cos \gamma}{\lambda_{\hat{u}} \hat{\rho}}$$

ダウンレンジを自由としたとき終端速度を最大化, あるいは終端高度を最大化, する問題を考える。

(1) 終端速度 \hat{u}_f 最大化

終端密度(高度)を指定して, 終端速度 \hat{u}_f を最大化する。

初期, 終端条件が与えられたとき

初期条件は $\gamma = \gamma_0$ において

$$\hat{u} = \hat{u}_0, \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}_0 (\hat{z} = \hat{z}_0), \quad \hat{x} = \hat{x}_0 = 0 \quad (52)$$

終端条件は $\gamma = \gamma_f$ において

$$\hat{x}_f, \hat{u}_f : \text{自由} \quad (53)$$

$$\hat{\rho}_f = \hat{\rho}_{fD} : \text{指定} \quad \text{添字 D は要求値を表す。} \quad (54)$$

終端速度最大化とするために目的関数 ϕ を次のように置く。

$$\phi = -\hat{u}_f \quad (55)$$

終端条件をベクトルで表すと

$$\bar{\Psi} = [0, (\hat{\rho}_f - \hat{\rho}_{fD}), 0]^T$$

横断条件は随伴変数 $\bar{\lambda}$ は拡張目的関数を Φ , ラグランジェ未定乗数ベクトルを \bar{v} と置くと次のよう表される。 $\Phi = \phi + \bar{v}^T \bar{\Psi}$

$$\Phi = -\hat{u}_f + [v_{\hat{u}}, v_{\hat{\rho}}, v_{\hat{x}}] \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\rho}_f - \hat{\rho}_{fD} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

これより随伴変数 $\bar{\lambda}$ の終端値 $\bar{\lambda}_f$ は次のように表される。()項参照

$$\lambda_{\hat{u}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{u})_{\gamma_f} = v_{\hat{u}} = -1 \quad (58)$$

$$\lambda_{\hat{\rho}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{\rho})_{\gamma_f} = v_{\hat{\rho}} \quad : \text{定数} \quad (59)$$

$$\lambda_{\hat{x}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{x})_{\gamma_f} = v_{\hat{x}} = 0 \quad (60)$$

$$\eta^{*2} = 1 - v_{\hat{\rho}} \sin \gamma \quad : \text{Contensou (1965) の解}$$

(45) 式はダウンレンジ $\hat{x}_f = \text{自由}$ の場合の Contensou (1965) の解と呼ばれている。

定数 $v_{\hat{\rho}}$ の決定

定数 $v_{\hat{\rho}}$ は密度の終端条件から次のように求めることができる。

$v_{\hat{\rho}} = a$ と置き, (23) 式の右辺, 制御変数 η に (43) 式的最適値 η^* を代入すると

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\gamma} = -\frac{\sin \gamma}{\eta^*} = -\frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - a \sin \gamma}} \quad (46)$$

上式を積分すると

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_0 = -\int_{\gamma_0}^{\gamma_f} \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - a \sin \gamma}} d\gamma \quad (47)$$

右辺は次の楕円積分で表される。

$$\int \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1-a \sin \gamma}} d\gamma = -\frac{2}{\sqrt{2a}} \{ 2E(u, k) - F(u, k) \} \quad (48)$$

ただし

$$k^2 = (1+a)/2a : \text{定数}$$

$$\gamma' = \pi/2 - \gamma$$

$$ku = \cos(\gamma'/2)$$

$F(u, k)$: 第1種楕円積分

$E(u, k)$: 第2種楕円積分

楕円積分については (補足)楕円積分の項参照

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_0 = -\frac{2}{\sqrt{2a}} [2E\{u(\gamma), k(a)\} - F\{u(\gamma), k(a)\}]_{\gamma_0}^{\gamma} \quad (49)$$

密度の終端値は γ_f において $\hat{\rho}_f = \hat{\rho}_{fD}$ で指定されているから上式で $\gamma = \gamma_f$ と置くと次の関係式(定積分)を得る。

$$\hat{\rho}_f - \hat{\rho}_0 = \Delta\rho_f = -\frac{2}{\sqrt{2a}} [2E\{u(\gamma), k(a)\} - F\{u(\gamma), k(a)\}]_{\gamma_0}^{\gamma_f}$$

左辺の $\Delta\rho_f$ 、及び γ_f, γ_0 は与えられているから上式は a に関する代数方程式となる。

特に経路角が小さい場合には次のように近似できる。

$$(3/2) \Delta\hat{\rho}_f a = -(2-a\gamma_f)(1+a\gamma_f)^{1/2} - (2-a\gamma_0)(1+a\gamma_0)^{1/2} \quad (62)$$

a について整理すると a に関する4次式となる。

$$c_4 a^4 + c_3 a^3 + c_2 a^2 + c_1 a + c_0 = 0 \quad (63)$$

ただし係数は次の通り。

$$c_4 = (81/16) \Delta\hat{\rho}_f^4$$

$$c_3 = -(9/2) \Delta\hat{\rho}_f^2 (\gamma_f^3 + \gamma_0^3)$$

$$c_2 = \left[(27/2) \Delta\hat{\rho}_f^2 (\gamma_f^2 + \gamma_0^2) + (\gamma_f^3 - \gamma_0^3)^2 \right] \quad (64)$$

$$c_1 = -6 (\gamma_f^2 - \gamma_0^2) (\gamma_f^3 - \gamma_0^3)$$

$$c_0 = -36 \Delta\rho_f^2 - 9 (\gamma_f^2 - \gamma_0^2)^2$$

4次式(63)式を解いて a を求める。 a が決定されると密度については次の積分により密度、高度が得られる。この根を a^* とすれば終端速度最大とする最適軌道は次のように第1種、第2種楕円積分で表される。

$a = a^*$: 定数

$$k^* = (1+a^*)/2a^* = k^* : \text{定数}$$

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_0 = -\frac{2}{\sqrt{2a^*}} \left[2E\{u(\gamma), k^*\} - F\{u(\gamma), k^*\} \right]_{\gamma_0}^{\gamma}$$

速度に関しては最適制御変数(43)式を方程式(22)式に代入して次式を得る。

$$\frac{d\hat{u}}{d\gamma} = -\frac{1+\eta^{*2}}{\eta^*} = -\frac{2-a\sin\gamma}{\sqrt{1-a\sin\gamma}}$$

$$\hat{u} - \hat{u}_0 = -\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{2-a\sin\gamma}{\sqrt{1-a\sin\gamma}} d\gamma = -2 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-a\sin\gamma}} + a \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-a\sin\gamma}} d\gamma \quad (50)$$

右辺第1項の積分は(62)式の楕円積分, 第2項の積分は(55)式の楕円積分から得られ, 次式で表される。

$$\hat{u} - \hat{u}_0 = -\frac{2}{\sqrt{2a^*}} \left[2a^* E\{u(\gamma), k^*\} - (a^* + 2) F\{u(\gamma), k^*\} \right]_{\gamma_0}^{\gamma} \quad (51)$$

$$\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -\frac{1}{2(L/D)_{\max}} \frac{2}{\sqrt{2a^*}} \left[2a^* E\{u(\gamma), k^*\} - (a^* + 2) F\{u(\gamma), k^*\} \right]_{\gamma_0}^{\gamma}$$

$$\rho - \rho_0 = -\frac{1}{(L/D)_{\max}} \frac{2m\beta}{C_D^* A} \frac{2}{\sqrt{2a^*}} \left[2E\{u(\gamma), k^*\} - F\{u(\gamma), k^*\} \right]_{\gamma_0}^{\gamma}$$

(2) 終端高度 z_f 最大化

次に終端速度 \hat{u}_f を指定し, 終端高度 z_f 最大化は密度 $\hat{\rho}_f$ 最小化と等価であるから, 終端密度を最小化する。

条件:

初期条件は(52)式と同じ。

終端条件は $\gamma = \gamma_f$ において

$$\hat{x}_f, \hat{\rho}_f : \text{自由} \quad (67)$$

$$\hat{u}_f = \hat{u}_{fD} : \text{指定} \quad (68)$$

終端密度を最小化するために目的関数 ϕ を次のように置く。

$$\phi = \hat{\rho}_f \quad (69)$$

終端条件をベクトルで表すと

$$\bar{\Psi} = [(\hat{u}_f - \hat{u}_{fD}), 0, 0]^T \quad (70)$$

横断条件は同様に $\Phi = \phi + \bar{v}^T \bar{\Psi}$ から

$$\Phi = \hat{\rho}_f + [v_{\hat{u}}, v_{\hat{\rho}}, v_{\hat{x}}] \begin{bmatrix} \hat{u}_f - \hat{u}_{fD} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

これより随伴変数 $\bar{\lambda}$ の終端値は次のように表される。

$$\lambda_{\hat{u}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{u})_{\gamma_f} = v_{\hat{u}} : \text{定数} \quad (72)$$

$$\lambda_{\hat{\rho}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{\rho})_{\gamma_f} = 1 \quad (73)$$

$$\lambda_{\hat{x}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{x})_{\gamma_f} = 0 \quad (74)$$

(68) 式で終端速度が指定されていることから (51) 式で $\gamma = \gamma_f$, $\hat{u} = \hat{u}_{fD}$ と置けば次の関係式 (定積分) を得る。

$$\hat{u}_f - \hat{u}_0 = 2 \left(\frac{L}{D} \right)_{\max} \ln \left(\frac{\hat{u}_f}{\hat{u}_0} \right) \equiv -\Delta \hat{u}_f = - \int_{\gamma_0}^{\gamma_f} \frac{2 + a \sin \gamma}{\sqrt{1 + a \sin \gamma}} d\gamma$$

または () 式から

$$\Delta \hat{u}_f = \frac{2}{\sqrt{2a}} [2a E\{u(\gamma), k(a)\} - (a+2) F\{u(\gamma), k(a)\}]_{\gamma_0}^{\gamma_f} \quad (75)$$

左辺の $\Delta \hat{u}_f$ は既知であり, γ_f, γ_0 は与えられているから上式は a に関する代数方程式である。これを満たす定数 a を逐次近似法で求める。飛行経路角が小さい場合には楕円積分を展開すると a にして次の 4 次式で表される。

$$(4/3) \Delta \hat{u}_f a = -(4 + a \gamma_f)(1 + a \gamma_f)^{1/2} - (4 + a \gamma_0)(1 + a \gamma_0)^{1/2} \quad (76)$$

a について整理すると a に関する 4 次式となる。

$$c_4 a^4 + c_3 a^3 + c_2 a^2 + c_1 a + c_0 = 0 \quad (77)$$

ただし係数は次式で表される。

$$\delta = \Delta \hat{u}_f^2 - 4(\gamma_f - \gamma_0)^2$$

$$\begin{aligned} c_4 &= (\gamma_f^3 - \gamma_0^3)^2 \\ c_3 &= -9 \left[(1/2)(\gamma_f^3 + \gamma_0^3) \delta - 4\gamma_f \gamma_0 (\gamma_f + \gamma_0)(\gamma_f + \gamma_0)^2 \right] \\ c_2 &= 3 \left[(27/16) \delta^2 - 27\gamma_f \gamma_0 \delta + 16(\gamma_f - \gamma_0)(\gamma_f^3 - \gamma_0^3) \right] \\ c_1 &= -108 (\gamma_f + \gamma_0) \delta \\ c_0 &= -144 \delta \end{aligned} \quad (78)$$

4 次式 (77) 式を解いて a を求める。 a が決定されると密度については次の積分により密度、高度が得られる。この根を a^* とすれば終端速度最大とする最適軌道は次のように第 1 種, 第 2 種楕円積分で表される。

$$a = a^*$$

$$k = (1 + a^*) / 2a^* = k^* : \text{定数}$$

上記定数を (65) (66) 式に代入して終端高度最大となる最適軌道が得られる。

Ⅲ. 最適準平衡滑空飛行

平衡滑空飛行の条件は $\gamma \, dy/dt \ll 1$ であるがここでは経路角一定とし微小角と仮定する。(準平衡滑空飛行)

仮定

$$1) \gamma = \gamma_0 \ll 1$$

運動方程式

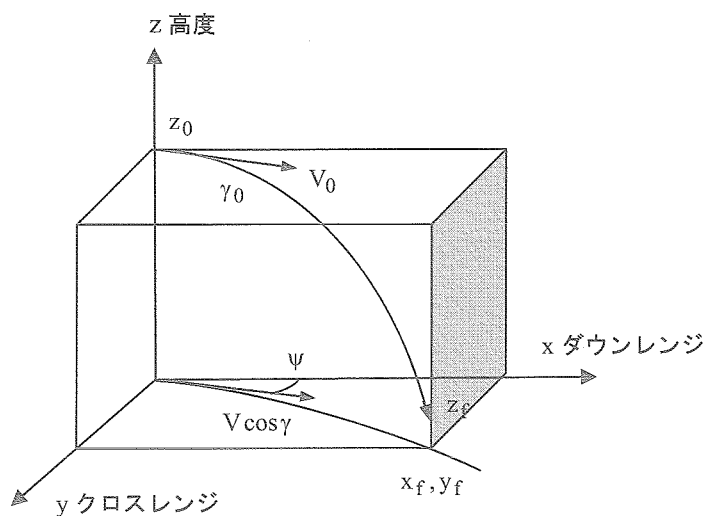
$$(1) \frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m}$$

$$(2) \frac{dz}{dt} = V \sin \gamma$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \cos \psi$$

$$(5) \frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \psi$$

$$(4) \frac{d\psi}{dt} = \frac{L \sin \phi_B}{mV \cos \gamma}$$



地心距離 r で無次元化する。

$$\hat{u} = V^2 / gr$$

$$\hat{z} = z/r$$

$$\hat{x} = x/r$$

$$\hat{y} = y/r$$

また仮定 1) から

$$(L/mg) \cos \phi_B = (1 - \hat{u}^2) \cos \gamma$$

無次元化運動方程式

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -\frac{2DV}{mgr} = -\frac{L}{mg} \frac{2}{L/D} \frac{\sqrt{gr} \hat{u}}{r} = -\frac{2}{(L/D)} \frac{\sqrt{gr} \hat{u} (1 - \hat{u}^2) \cos \gamma}{r \cos \phi_B}$$

を用いて独立変数を t から u に変換すると

$$(1) \frac{d\hat{z}}{d\hat{u}} = -\frac{L}{2D} \frac{\cos \phi_B}{(1 - \hat{u}^2)} \tan \gamma = f_z$$

$$(2) \frac{d\hat{x}}{d\hat{u}} = -\frac{L}{2D} \frac{\cos\phi_B}{(1-\hat{u})} \cos\psi = f_{\hat{x}}$$

$$(3) \frac{d\hat{y}}{d\hat{u}} = -\frac{L}{2D} \frac{\cos\phi_B}{(1-\hat{u})} \sin\psi = f_{\hat{y}}$$

$$(4) \frac{d\psi}{d\hat{u}} = -\frac{L}{2D} \frac{\sin\phi_B}{\hat{u} \cos\psi} = f_{\psi}$$

最適問題にはいる前に制御変数 $L/D=一定$, バンク角 $\phi_B=0$ として最適化をおこなわない場合を考えると, この場合運動方程式は直ちに積分できて

$$\hat{z} - \hat{z}_0 = -\frac{1}{2} \frac{L}{D} \tan\gamma_0 \ln\left(\frac{1-\hat{u}}{1-\hat{u}_0}\right)$$

$$\hat{x} = -\frac{1}{2} \frac{L}{D} \cos\psi_c \ln\left(\frac{1-\hat{u}}{1-\hat{u}_0}\right)$$

$$\hat{y} = -\frac{1}{2} \frac{L}{D} \sin\psi_c \ln\left(\frac{1-\hat{u}}{1-\hat{u}_0}\right)$$

$$\psi = \psi_c$$

方位角一定であるから, あらためて, $\psi = \psi_c$ 方向にダウンレンジベクトル \hat{R} を定義すれば

$$\hat{R} = -\frac{1}{2} \frac{L}{D} \ln\left(\frac{1-\hat{u}}{1-\hat{u}_0}\right)$$

$$\frac{\hat{z} - \hat{z}_0}{\hat{R}} = \tan\gamma_0$$

となる。

最適問題:

独立変数を \hat{u} , 状態変数を $\hat{z}, \hat{x}, \hat{y}, \psi$ ($n=4$) にとり制御変数 u を $L/D, \phi_B$ ($m=2$) とすると

$$\bar{x} = [\hat{z} \ \hat{x} \ \hat{y} \ \psi]^T \quad : \text{状態変数} (4 \times 1) \quad (27)$$

$$\bar{f} = [f_{\hat{u}}, f_{\hat{z}}, f_{\hat{x}}, f_{\hat{y}}]^T \quad : \text{状態変数} (4 \times 1) \quad (28)$$

$$\bar{u} = [L/D, \phi_B]^T \quad : \text{制御変数} (2 \times 1) \quad (29)$$

(22)-(24) 式はベクトル形式で次のように表される。

$$\frac{d\bar{x}}{d\hat{u}} = \bar{f}(\hat{u}, \bar{x}, \bar{u}) \quad : \text{状態方程式} (4 \times 1) \quad (30)$$

次に (27) 式の変数に対応する随伴変数を

$$\bar{\lambda} = [\lambda_{\hat{z}} \ \lambda_{\hat{x}} \ \lambda_{\hat{y}} \ \lambda_{\psi}]^T \quad : \text{随伴変数ベクトル} (4 \times 1) \quad (31)$$

とするとハミルトン関数 H は次式で表される。

$$H = \bar{\lambda}^T \bar{f} = \sum_{j=1}^4 \lambda_j f_j = \lambda_{\hat{z}} f_{\hat{z}} + \lambda_{\hat{x}} f_{\hat{x}} + \lambda_{\hat{y}} f_{\hat{y}} + \lambda_{\psi} f_{\psi} \quad (32)$$

最適制御：

ハミルトン関数 H は

$$H = -\frac{L}{2D} \left\{ \frac{\cos \phi_B}{(1-\hat{u})} (\lambda_{\hat{x}} \cos \psi + \lambda_{\hat{y}} \sin \psi + \lambda_{\hat{h}} \tan \gamma) + \frac{\lambda_{\psi} \sin \phi_B}{\hat{u} \cos \gamma} \right\}$$

随伴方程式：

$$\dot{\lambda}_{\hat{h}} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{h}} = 0$$

$$\dot{\lambda}_{\hat{x}} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} = 0$$

$$\dot{\lambda}_{\hat{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{y}} = 0$$

$$\dot{\lambda}_{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{L}{2D} \frac{(\lambda_{\hat{x}} \sin \psi - \lambda_{\hat{y}} \cos \psi) \cos \phi_B}{(1-\hat{u})}$$

$$\lambda_{\hat{x}} = v_{\hat{x}} : \text{一定}$$

$$\lambda_{\hat{y}} = v_{\hat{y}} : \text{一定}$$

$$\lambda_{\hat{h}} = v_{\hat{h}} : \text{一定}$$

$$\frac{d\lambda_{\psi}}{d\hat{u}} = v_{\hat{x}} \frac{d\hat{y}}{d\hat{u}} - v_{\hat{y}} \frac{d\hat{x}}{d\hat{u}} = \frac{d}{d\hat{u}} (v_{\hat{x}} \hat{y} - v_{\hat{y}} \hat{x})$$

積分して

$$\lambda_{\psi} = v_{\hat{x}} \hat{y} - v_{\hat{y}} \hat{x} + v_{\psi}$$

v_{ψ} は積分定数

初期条件 $\hat{u} = \hat{u}_0$ において

$$\hat{z}(\hat{u}_0) = \hat{z}_0, \hat{x}(\hat{u}_0) = \hat{x}_0 = 0, \hat{y}(\hat{u}_0) = \hat{y}_0 = 0, \psi(\hat{u}_0) = \psi_0 = 0$$

初期条件 $\hat{u} = \hat{u}_f$ において

$$\hat{z}(\hat{u}_f) = \hat{z}_f, \hat{x}(\hat{u}_f) = \hat{x}_f, \hat{y}(\hat{u}_f) = \hat{y}_f, \psi(\hat{u}_f) = \psi_f$$

$$\bar{\Psi} = [\hat{z}_f, \hat{x}_f, \hat{y}_f, \psi_f]^T$$

$$\text{横断条件 } \Phi = \phi + \bar{v}^T \bar{\Psi}$$

$$\Phi = -\hat{x}_f + \begin{bmatrix} v_{\hat{z}}, v_{\hat{x}}, v_{\hat{y}}, v_{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} - \hat{z}_f \\ \hat{x} - \hat{x}_f \\ \hat{y} - \hat{y}_f \\ \psi - \psi_f \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\hat{h}_f} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{h}} \right)_{\gamma_f} = v_{\hat{z}}$$

$$\lambda_{\hat{x}_f} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{x}} \right)_{\gamma_f} = v_{\hat{x}}$$

$$\lambda_{\hat{y}_f} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{y}} \right)_{\gamma_f} = v_{\hat{y}}$$

$$\lambda_{\psi_f} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)_{\gamma_f} = v_{\psi}$$

最適制御変数は

$$F(\phi_B) = \frac{\cos \phi_B}{(1-\hat{u})} \left(\lambda_{\hat{x}} \cos \psi + \lambda_{\hat{y}} \sin \psi + \lambda_{\hat{z}} \tan \gamma \right) + \frac{\lambda_{\psi} \sin \phi_B}{\hat{u} \cos \gamma}$$

と置くと

$$H = -\frac{1}{2} \frac{L}{D} F(\phi_B)$$

$F(\phi_B) > 0$ の範囲で考えると

$$\frac{\partial H}{\partial (L/D)} = -\frac{1}{2} F(\phi_B)$$

から揚抗比は

$$L/D = (L/D)_{\max}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \phi_B} = -\frac{L}{2D} \frac{\partial F(\phi_B)}{\partial \phi_B} = -\frac{L}{2D} \left\{ -\frac{\sin \phi_B}{(1-\hat{u})} \left(\lambda_{\hat{x}} \cos \psi + \lambda_{\hat{y}} \sin \psi + \lambda_{\hat{h}} \tan \gamma \right) + \frac{\lambda_{\psi} \cos \phi_B}{\hat{u} \cos \gamma} \right\} = 0$$

から $\lambda_{\psi} = a_{\hat{x}} \hat{y} - a_{\hat{y}} \hat{x} + a_{\psi}$ を用いてバンク角は次式で表される。

$$\tan \phi_B = \frac{(1-\hat{u})}{\hat{u}} \frac{v_{\hat{x}} \hat{y} - v_{\hat{y}} \hat{x} + v_{\psi}}{(v_{\hat{x}} \cos \psi + v_{\hat{y}} \sin \psi + v_{\hat{z}} \tan \gamma)}$$

γ 一定から \hat{x} , \hat{y} , ψ の関数である。

(1) 最大ダウンレンジ

ダウンレンジ, クロスレンジ自由としたときダウンレンジ最大化を行う。ダウンレンジを最大化することから目的関数を次のように置く。

$$\phi = -\hat{x}_f$$

終端条件は

$$\hat{x}_f \quad \hat{y}_f \quad \psi_f : \text{自由} \quad (124)$$

終端条件を行列で表すと

$$\bar{\Psi} = [v_z, 0, 0, 0]^T$$

横断条件は $\Phi = \phi + \bar{v}^T \bar{\Psi}$ から

$$\Phi = -\hat{x}_f + v_z(\hat{z}_f - \hat{z}_{fD})$$

$$\lambda_{\hat{z}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{z})_{\gamma_f} = v_z$$

$$\lambda_{\hat{x}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{x})_{\gamma_f} = v_{\hat{x}} = -1$$

$$\lambda_{\hat{y}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{y})_{\gamma_f} = v_{\hat{y}} = 0$$

$$\lambda_{\psi_f} = (\partial \Phi / \partial \psi)_{\gamma_f} = v_{\psi} = 0$$

この場合最適制御変数は次式で表される。

$$L/D = (L/D)_{\max}$$

$$\phi_B = 0$$

()式の揚抗比 L/D を $L/D \rightarrow (L/D)_{\max}$ に置き換えればよい。

$$\hat{z} - \hat{z}_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)_{\max} \tan \gamma_0 \ln \left(\frac{1 - \hat{u}}{1 - \hat{u}_0} \right)$$

$$\hat{x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)_{\max} \cos \psi_c \ln \left(\frac{1 - \hat{u}}{1 - \hat{u}_0} \right)$$

$$\hat{y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)_{\max} \sin \psi_c \ln \left(\frac{1 - \hat{u}}{1 - \hat{u}_0} \right)$$

$$\psi = \psi_c$$

ただし速度範囲は

$$\hat{z}_f - \hat{z}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)_{\max} \tan \gamma \ln \left(\frac{1 - \hat{u}_f}{1 - \hat{u}_0} \right)$$

$$\hat{u}_f = 1 - (1 - \hat{u}_0) \exp \left\{ \frac{2(\hat{z}_f - \hat{z}_0)}{(L/D)_{\max} \tan \gamma} \right\}$$

(2) 最大クロスレンジ

ダウンレンジ, クロスレンジ自由としたときクロスレンジ最大化を行う。

クロスレンジを最大化することから目的関数を次のように置く。

$$\phi = -\hat{y}_f$$

終端条件は

$$\bar{\Psi} = [\hat{z}_f, 0, 0, 0]^T$$

横断条件は $\Phi = \phi + \bar{v}^T \bar{\Psi}$ から

$$\Phi = -\hat{y}_f + v_z (\hat{z}_f - \hat{z}_{fd})$$

$$\lambda_{\hat{z}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{z})_{\gamma_f} = v_z$$

$$\lambda_{\hat{x}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{x})_{\gamma_f} = v_{\hat{x}} = 0$$

$$\lambda_{\hat{y}_f} = (\partial \Phi / \partial \hat{y})_{\gamma_f} = v_{\hat{y}} = -1$$

$$\lambda_{\psi_f} = (\partial \Phi / \partial \psi)_{\gamma_f} = v_{\psi} = 0$$

()式に代入して $\lambda_{\psi_f} = \hat{x}_f + v_{\psi} = 0$ から

$$v_{\psi} = -\hat{x}_f$$

バンク角は次式で与えられ

$$\tan \phi_B = \frac{(1 - \hat{u})}{\hat{u}} \frac{\hat{x} - \hat{x}_f}{(v_z \tan \gamma - \sin \psi)}$$

バンク角は $\hat{x} - \hat{x}_f$ に比例するが、バンク角は $-\phi_{B\max} \leq \phi_B \leq \phi_{B\max}$ で制約されているので最大値を取ると $\phi_B = \phi_{B\max}$ となる。

したがってこの場合最適制御変数は次式で表される。

$$L/D = (L/D)_{\max}$$

$$\phi_B = \phi_{B\max}$$

$$(L/D)_{C\max} = (L/D)_{\max} \cos \phi_{B\max} / 2$$

$$(L/D)_{S\max} = (L/D)_{\max} \sin \phi_{B\max} / 2$$

と置くと運動方程式()()式から

$$(1) \frac{d\hat{z}}{d\hat{u}} = -\left(\frac{L}{D}\right)_{C\max} \frac{\tan \gamma_0}{(1 - \hat{u})}$$

$$(4) \frac{d\psi}{d\hat{u}} = -\left(\frac{L}{D}\right)_{S\max} \frac{1}{\cos \gamma_0} \frac{1}{\hat{u}}$$

積分を行うと

$$\hat{z} - \hat{z}_0 = -\left(\frac{L}{D}\right)_{C\max} \tan \gamma_0 \ln \left(\frac{1 - \hat{u}}{1 - \hat{u}_0} \right)$$

$$\psi = -\left(\frac{L}{D}\right)_{S\max} \frac{1}{\cos \gamma_0} \ln \left(\frac{\hat{u}}{\hat{u}_0} \right)$$

これは揚抗比 L/D を最大、バンク角を最大とした平衡滑空飛行の結果と一致する。

()式から終端速度は

$$\hat{u}_f = 1 - (1 - \hat{u}_0) \exp \left\{ \frac{(\hat{z}_f - \hat{z}_0)}{(L/D)_{C_{\max}} \tan \gamma_0} \right\}$$

ダウンレンジ、クロスレンジは次式で計算できる。

$$\hat{x} = -\left(\frac{L}{D}\right)_{C_{\max}} \int_{\hat{u}_0}^{\hat{u}} \frac{1}{1-\hat{u}} \cos \left[-\left(\frac{L}{D}\right)_{C_{\max}} \frac{1}{\cos \gamma_0} \ln \left(\frac{\hat{u}}{\hat{u}_0} \right) \right] d\hat{u}$$

$$\hat{y} = -\left(\frac{L}{D}\right)_{C_{\max}} \int_{\hat{u}_0}^{\hat{u}} \frac{1}{1-\hat{u}} \sin \left[-\left(\frac{L}{D}\right)_{C_{\max}} \frac{1}{\cos \gamma_0} \ln \left(\frac{\hat{u}}{\hat{u}_0} \right) \right] d\hat{u}$$

最大フットプリントを得るには高度自由として $v_{\hat{z}} = 0$ と置けば、最適バンク角は次式で表される。

$$\tan \phi_B = \frac{(1 - \hat{u})}{\hat{u}} \frac{v_{\hat{x}} \hat{y} - v_{\hat{y}} \hat{x} + v_{\psi}}{(v_{\hat{x}} \cos \psi + v_{\hat{y}} \sin \psi)}$$

上式は Fave (1968) の解と呼ばれている。

10-2. 間接法

最適問題の数値解法は大別して I. 間接法 (Indirect Method) と II. 直接法 (Direct Method) に分類される。

I. 間接法 (Indirect Method)

1) 摂動法 (Perturbation Method)

① 摂動関数法 (Method of Perturbation Functions)

② 補助関数法 (Method of Adjoint Functions)

2) 準線形化法 (Quasilinearization Methods)

'Differential Variations' Hestenes (1949) 'Quasilinearization' Bellman and Kalaba (1965) 'Generalized Newton-Raphson' Menneth and McGill (1966)

① 一般化ニュートン・ラフソン法 (Generalized Newton-Raphson Method, GNR)

② 修正ニュートン・ラフソン法 (Modified Generalized Newton-Raphson Method, MGNR)

③ 修正準線形化法 (Modified Quasilinearization Method, MQR)

3) 第2変分法

II. 直接法 (Direct Methods)

1) 勾配法 (Gradient Methods)

① 最急降下法 (Method of Steepest Descent, MSD)

直接法については次項に述べる。

I. 間接法 (Indirect Method)

$J = \phi$: 目的関数

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

$$\dot{\bar{x}} = -H_{\bar{\lambda}}^T \quad \dot{\bar{\lambda}} = -H_{\bar{x}}^T \quad H_{\bar{u}}^T = 0$$

$\hat{H}_{\bar{u}} = 0$ $\hat{H}_{\bar{u}\bar{u}} > 0$: Legendre-Clebsch Condition を満たすハミルトン関数を

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = \hat{H}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) \quad \text{と置く。}$$

$$\begin{aligned}\bar{L}(\bar{x}_0, t_0) &= 0 \quad (\Phi_{\bar{x}} + \bar{\lambda}^T)_{t_0} d\bar{x}_0 = 0 \\ \bar{M}(\bar{x}_f, t_f) &= 0 \quad (\Phi_{\bar{x}} + \bar{\lambda}^T)_{t_f} d\bar{x}_f = 0 \quad (\Phi_t + \hat{H})_{t_f} dt_f = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \phi(\bar{x}_f, t_f) + \bar{\mu}^T \bar{L}(\bar{x}_f, t_f) + \bar{v}^T \bar{M}(\bar{x}_f, t_f) \\ \dot{\bar{x}} &= -\hat{H}_{\bar{\lambda}}^T = \bar{f} \\ \dot{\bar{\lambda}} &= -\hat{H}_{\bar{x}}^T = \bar{g}\end{aligned}$$

状態変数, 随伴変数 $\bar{x}, \bar{\lambda}$ をまとめて

$$\bar{z}^T = [\bar{x}^T : \bar{\lambda}^T]$$

と置くと関数ベクトルは次式で表される。

$$\bar{F}^T = \left[\dot{\bar{x}}^T : \dot{\bar{\lambda}}^T \right] = [H_{\bar{\lambda}} : -H_{\bar{x}}]$$

非線形微分方程式

$$\dot{\bar{z}} = F(\bar{z}, t)$$

$$\bar{z}^T(t_0) = [\bar{x}^T(t_0) : \bar{\lambda}^T(t_0)]$$

$$\bar{z}^T(t_f) = [\bar{x}^T(t_f) : \bar{\lambda}^T(t_f)]$$

$$\bar{x}^T(t_0): \text{既知}, \bar{\lambda}^T(t_0): \text{未知}$$

I. 摂動法 (PM法)

$\delta \bar{z} = \bar{z}_{n+1} - \bar{z}_n$ と置いて線形化し, 1次項のみをとると

$$\dot{\bar{z}}_{n+1} = \dot{\bar{z}}_n + (\partial \bar{F} / \partial \bar{z})_n (\bar{z}_{n+1} - \bar{z}_n)$$

ここで感度行列

$$A = (\partial \bar{F} / \partial \bar{z}) \quad (2n \times 2n)$$

線形方程式

$$\delta \dot{\bar{z}} = A \delta \bar{z}$$

終端条件

$$d\bar{h}(\bar{z}_f, t_f) = (\partial \bar{h} / \partial \bar{z})_f d\bar{z}_f + (\partial \bar{h} / \partial t)_f dt_f$$

$$d\bar{z}_f = \delta \bar{z}_f + \dot{\bar{z}}_f dt_f$$

$$\dot{\bar{h}}_f = (dh/dt)_f = (\partial \bar{h} / \partial \bar{z})_f \dot{\bar{z}}_f + (\partial \bar{h} / \partial t)_f \text{ と置けば}$$

$$d\bar{h}(\bar{z}_f, t_f) = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial z}\right)_f \delta \bar{z}_f + \dot{h}_f dt_f$$

線形微分方程式

$$\delta \dot{\bar{z}} = A \delta \bar{z}$$

$$\delta z_f = \pi \delta \bar{z}_0$$

を解いて

$$d\bar{h}(\bar{z}_f, t_f) = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial z}\right)_f \pi \delta \bar{z}_0 + \dot{h}_f dt_f \quad (2n+1)$$

(2n+1)個の代数方程式であり $d\bar{h}$ 与えると $\delta \bar{z}_0, dt_f$ (2n+1)が未知変数が求まる。

初期値 $\bar{\lambda}_0$ t_f を更新する方法について述べる。

① MPF 法

線形斉次微分方程式

$$\delta \bar{z} = [\delta \bar{x}, \delta \bar{\lambda}]$$

$$\delta \dot{\bar{z}} = A \delta \bar{z} \quad (1) \quad (2n \times 1)$$

(1)式の解を

$$\delta \bar{z}_f = \Phi(t_f, t_0) \delta \bar{z}_0$$

終端条件は

$$d\bar{h}(\bar{z}_f, t_f) = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial z}\right)_f \Phi(t_f, t_0) \delta \bar{z}_0 + \dot{h}_f dt_f$$

$$d\bar{h}(\bar{z}_f, t_f) = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}}\right)_f [\Phi_1 : \Phi_2] \begin{bmatrix} \delta \bar{x}_0 \\ \delta \bar{\lambda}_0 \end{bmatrix} + \dot{h}_f dt_f$$

$$d\bar{h}(\bar{z}_f, t_f) = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}}\right)_f [\Phi_2] \delta \bar{\lambda}_0 + \dot{h}_f dt_f$$

$$\dot{\Phi}_2(t, t_0) = A \Phi_2(t, t_0)$$

$$\Phi_2^T(t_0, t_0) = [0 : I] [I] : (n \times n)$$

(n+1)個の代数方程式を得る。これを解いて未知変数は $\delta \bar{\lambda}_0, dt_f$ を求める。

② MAF 法

$$\delta \dot{\bar{z}} = A \delta \bar{z} \quad (1) \quad (2n \times 1)$$

に対する随伴方程式を次式で表す。

$$\dot{\bar{\lambda}} = -A^T \bar{\lambda} \quad (2) \quad (2n \times 1)$$

(1)式の両辺に $\bar{\lambda}^T$ を掛け、(2)式の両辺に $\delta \bar{z}^T$ を掛けた後、両者を加えると $d(\bar{\lambda}^T \delta \bar{z}) / dt = 0$
 $\bar{\lambda}^T \delta \bar{z} = \text{const}$ が得られる。これより時刻 $t = t_0, t_f$ において次式が成り立つ。

$$\bar{\lambda}_f^T \delta \bar{z}_f = \bar{\lambda}_0^T \delta \bar{z}_0 \quad (3)$$

(2)式の解を $\bar{\lambda} = \Theta^T(t, t_0) \bar{\lambda}_0$ と置いて

$$\dot{\Theta}^T(t, t_0) = -A^T \Theta^T(t, t_0)$$

上式を初期値： $\Theta(t_0, t_0) = [\delta z_1(t_0) : \dots : \delta z_{2n}(t_0)] = [I]$ ($2n \times 2n$) としての逆方向に積分して $[t_f, t_0]$ 終端では

$$\bar{\Lambda}_f = \Theta^T(t_f, t_0) \bar{\Lambda}_0$$

(3) 式に代入して

$$\bar{\Lambda}_f^T \delta \bar{z}_f = \bar{\Lambda}_0^T \Theta(t_f, t_0) \delta \bar{z}_f = \bar{\Lambda}_0^T \delta \bar{z}_0$$

$$\delta \bar{z}_f = \Theta(t_f, t_0)^{-1} \delta \bar{z}_0 = \Theta(t_0, t_f) \delta \bar{z}_0 \text{ より}$$

$$\delta \bar{z}_f = \Theta(t_0, t_f) \delta \bar{z}_0$$

終端条件：

$$d\bar{h}(\bar{z}_f, t_f) = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right)_f \hat{\Theta}(t_0, t_f) \delta \bar{z}_0 + \dot{\bar{h}} dt_f$$

$$\Theta(t_f, t_f) = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(t_f) & \dots & \Lambda_{1n}(t_f) \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{n+1,1}(t_f) & \dots & \Lambda_{n+1,n}(t_f) \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right)_f [I]$$

$$\Theta(t_0, t_f) = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right)_f \hat{\Theta}(t_0, t_f) \quad (n+1) \times 2n$$

II MPF 法 (Metod of Perturbation Function)

解法(1)

状態変数, 随伴変数に関する微分方程式次式(40)(41)式を再記すると

$$\dot{\bar{x}} = H_{\bar{\lambda}}^0(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) = \hat{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (40)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_{\bar{x}}^0(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) = \hat{g}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (41)$$

状態変数 \bar{x} , 随伴変数 $\bar{\lambda}$ を合わせて従属変数 \bar{z} と対応する関数ベクトルを \bar{F} 次式で定義する

$$\bar{z} \equiv [\bar{x}, \bar{\lambda}]^T \quad (50)$$

$$\bar{F} \equiv \begin{bmatrix} \hat{H}_{\bar{\lambda}}^T \\ -\hat{H}_{\bar{x}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \\ \hat{g}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \end{bmatrix} \quad (51)$$

この従属変数 \bar{z} と対応する関数ベクトルを \bar{F} から(40)(41)式はまとめて次式で表される。

$$\dot{\bar{z}} = \bar{F}(\bar{z}, t) \quad (2n \times 1) \quad (52)$$

いま変数 \bar{z} の初期値 \bar{z}_0 と時間 t_0, t_f を仮定する。時刻の初期値 t_0 は既知として、初期値 \bar{z}_0 のうち \bar{x}_0 は既知であるから、 $\bar{\lambda}_0, t_f$ を仮定して上式を積分して軌道を得る。この軌道には終端条件を満たさない。そこでこの終端条件を満たすように初期値 $\bar{\lambda}_0, t_f$ を更新する方法について述べる。最初に終端条件について考えると

(1) 終端条件: \bar{h}

いま状態ベクトル \bar{x} ($n \times 1$) のうち x_j が特定の値 x_{jf} に拘束されている場合を考えると

$x_j(t_f) = x_{jf}$ ($j=1 \cdots m$) または

$$\bar{x}_f = [x_1(t_f) \cdots x_m(t_f), x_{m+1}(t_f) \cdots x_n(t_f)]^T \quad (n \times 1) \quad (53)$$

$$\bar{\lambda}_f = [v_1(t_f) \cdots v_m(t_f), (\partial\phi/\partial x_{m+1})_f \cdots (\partial\phi/\partial x_n)_f]^T$$

ラグランジェ乗数 v_j ($j=1 \cdots m$) は拘束条件 $x_j(t_f) = x_{jf}$ ($j=1 \cdots m$) から決定できるから拘束条件に対応する随伴変数 λ_{jf} ($j=1, m$) を除く。終端拘束の状態変数に対する終端条件と終端自由の状態変数に対応する随伴変数 λ_f ($j=m+1, n$) と時刻 t_f に対応してハミルトン関数の終端値 $H(t_f)$ を加えて終端条件をあらわす関数ベクトル $\bar{h}(\bar{z}_f, t_f)$ を次式で定義する。

$$\bar{h}(\bar{z}_f, t_f) = \begin{bmatrix} z_1(t_f) - z_{1fD} \\ \vdots \\ z_m(t_f) - z_{mfD} \\ \cdots \cdots \cdots \\ (\partial\phi/\partial z_{m+1})_f \\ \vdots \\ (\partial\phi/\partial z_n) \\ H(t_f) \end{bmatrix} \quad (58)$$

上式 \bar{h} は \bar{z}, t の関数であるから微分して $t=t_f$ での終端条件は

$$d\bar{h} = \bar{h}_{j+1} - \bar{h}_j = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right)_f d\bar{z}_f + \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right)_f dt_f \quad (59)$$

一方 \bar{z}_f の変分は $d\bar{z}_f = \delta\bar{z}_f + \dot{\bar{z}}_f dt_f$ から $d\bar{z}_f$ を消去して

$$d\bar{h} = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right)_f \delta\bar{z}_f + \left\{ \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right)_f \left(\frac{d\bar{z}}{dt} \right)_f + \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right)_f \right\} dt_f \quad (60)$$

$$d\bar{h} = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right)_f \delta\bar{z}_f + \left(\dot{\bar{h}} \right)_f dt_f \quad (61)$$

ただし

$$\left(\dot{\bar{h}} \right)_f = \left(\partial \bar{h} / \partial \bar{z} \right)_f \left(d\bar{z} / dt \right)_f + \left(\partial \bar{h} / \partial t \right)_f \quad (62)$$

繰返し数 $j+1$ で拘束条件が満たされたとすると $\bar{h}_{j+1} = 0$ とおいて

$$-\bar{h}_j = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right)_f \delta\bar{z}_f + \left(\dot{\bar{h}} \right)_f dt_f \quad (63)$$

(2) 線形化

非線形微分方程式 $\dot{\bar{z}} = \bar{F}(\bar{z}, t)$ をテーラ一級数展開して1次項をとると

$$\dot{\bar{z}}_{j+1} = \dot{\bar{z}}_j + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \right)_j (\bar{z}_{j+1} - \bar{z}_j) + \cdots \quad (64)$$

ただし $\delta\bar{z} = \bar{z}_{j+1} - \bar{z}_j$ 次の線形1次微分方程式を得る。

$$\delta \dot{\bar{z}} = A \delta \bar{z} \quad (2n \times 1) \quad (65)$$

ここで \bar{F}, \bar{z} は $2n \times 1$ ベクトルであるから係数行列 A は $2n \times 2n$ の行列となり, j 番目の勾配で評価する。

$$A = \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \right)_j \quad (2n \times 2n) \quad (66)$$

この行列 A は遷移行列 (Transition Matrix), あるいは影響関数行列 (Influence Function Matrix) と称する。解を

$$\delta \bar{z} = \Phi(t, t_0) \delta \bar{z}_0 \quad (67)$$

と置く。(67) 式を (65) 式に代入して行列 $\Phi(t, t_0)$ ($2n \times 2n$) は次の微分方程式をとくことにより得られる。また (67) 式から $\Phi(t, t_0)$ の初期値 $\Phi(t_0, t_0)$ は単位行列となる。

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A \Phi(t, t_0) \quad (2n \times 2n) \quad (68)$$

$$\Phi(t_0, t_0) = [I] \quad (69)$$

$\delta \bar{z}_f$ を求めるには $\delta \bar{z}_f = \Phi(t_f, t_0) \delta \bar{z}_0$ から終端時刻 $t = t_f$ での $\Phi(t_f, t_0)$ を求めなければならない。この為には初期条件 (69) 式のもとに $2n \times 2n$ 個の微分方程式 (68) 式を解く必要がある。状態変数の数が $n = 5$ の場合には解くべき微分方程式の数は $4n^2 = 4 \times 5^2 = 100$ となり, 100 元の連立 1 次微分方程式を解くことになる。そこで解くべき微分方程式の数数を減らす方法を考える。

変数の定義から初期値は $\delta \bar{z}_0 = [\delta \bar{x}_0, \delta \bar{\lambda}_0]^T$ である。そこで $\Phi(t, t_0) : (2n \times 2n)$ を $\Phi_1(t, t_0) : (2n \times n)$ と $\Phi_2(t, t_0) : (2n \times n)$ の 2 つに分割して次式で表す。

$$\Phi(t, t_0) = [\Phi_1(t, t_0) : \Phi_2(t, t_0)] \quad (2n \times 2n) \quad (70)$$

(67) 式に代入して終端 $t = t_f$ では $\delta \bar{z}_0 = [\delta \bar{x}_0, \delta \bar{\lambda}_0]^T$ から

$$\delta \bar{z}_f = [\Phi_1(t_f, t_0) : \Phi_2(t_f, t_0)] \delta \bar{z}_0 = [\Phi_1(t_f, t_0) : \Phi_2(t_f, t_0)] \begin{bmatrix} \delta \bar{x}_0 \\ \delta \bar{\lambda}_0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

ここで状態変数の初期値に対する変分は $\delta \bar{x}_0 = 0$ であるから $\delta \bar{z}_f$ は $\Phi_2(t_f, t_0), \delta \bar{\lambda}_0$ で表される。

$$\delta \bar{z}_f = \Phi_2(t_f, t_0) \delta \bar{\lambda}_0 \quad (72)$$

$\Phi_2(t_f, t_0)$ は次の微分方程式を積分して得られる。

$$\dot{\Phi}_2(t, t_0) = A \Phi_2(t, t_0) \quad (2n \times n) \quad (73)$$

$$\Phi_2(t_0, t_0) = [I]$$

これより遷移行列を分割しない場合に比べて 1/2 に減少する。N=5 の場合解くべき微分方程式は 50 個となる。さらに解くべき方程式の減少化については IV 項に示す

(3) 更新量: $\delta\bar{\lambda}_0, \delta t_f$

次に終端条件(63)式 $-\bar{h}_j = (\partial\bar{h}/\partial\bar{z})_f \delta\bar{z}_f + (\dot{\bar{h}})_f dt_f$ に(72)式 $\delta\bar{z}_f$ を代入して添字 j は省略

$$-\bar{h} = \left(\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}} \right)_f \Phi_2(t_f, t_0) \delta\bar{\lambda}_0 + (\dot{\bar{h}})_f dt_f \quad (74)$$

行列形式であらわすと。

$$d\bar{h} = \left[\left(\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}} \right)_f \Phi_2(t_f, t_0) \delta\bar{\lambda}_0 : (\dot{\bar{h}})_f \right] \begin{bmatrix} \delta\bar{\lambda}_0 \\ \delta t_f \end{bmatrix} \quad (75)$$

上式から $\bar{\lambda}_0, t_f$ の更新量 $\delta\bar{\lambda}_0, \delta t_f$ を求めると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \delta\bar{\lambda}_0 \\ \delta t_f \end{bmatrix} = \left[\left(\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}} \right)_f \Phi_2(t_f, t_0) \delta\bar{\lambda}_0 : \dot{\bar{h}}_f \right]^{-1} d\bar{h} \quad (76)$$

解法 II

(1) 線形化微分方程式

状態変数, 随伴変数に関する微分方程式次式(40)(41)式を再記すると

$$\dot{\bar{x}} = \hat{H}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) = \hat{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (40)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\hat{H}_{\bar{\lambda}}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) = \hat{g}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (41)$$

(40)式を $\bar{\lambda}_0$ で微分して左辺の微分の順序をいれかえると

$$\frac{\partial\dot{\bar{x}}}{\partial\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial\lambda_0} \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial\lambda_0} \right) \quad (77)$$

を得る。同様に(41)式についても微分すると次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial\lambda_0} \right) = \frac{\partial\hat{f}}{\partial\bar{x}} \frac{\partial\bar{x}}{\partial\lambda_0} + \frac{\partial\hat{f}}{\partial\bar{\lambda}} \frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda_0} = \hat{f}_{\bar{x}} \frac{\partial\bar{x}}{\partial\lambda_0} + \hat{f}_{\bar{\lambda}} \frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda_0} \quad (78)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda_0} \right) = \frac{\partial\hat{g}}{\partial\bar{x}} \frac{\partial\bar{x}}{\partial\lambda_0} + \frac{\partial\hat{g}}{\partial\bar{\lambda}} \frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda_0} = \hat{g}_{\bar{x}} \frac{\partial\bar{x}}{\partial\lambda_0} + \hat{g}_{\bar{\lambda}} \frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda_0} \quad (79)$$

前項では $\bar{x}, \bar{\lambda}$ を要素とするベクトル \bar{z} を定義したが, ここでは $(\partial\bar{x}/\partial\lambda_0)$ $(\partial\bar{\lambda}/\partial\lambda_0)$ を要素とするベクトル \bar{z} を定義する。

$$\bar{z} = [\bar{z}_1, \bar{z}_2]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{x}}{\partial\lambda_0} & \frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda_0} \end{bmatrix}^T = [\bar{x}_{\bar{\lambda}_0}, \bar{\lambda}_{\bar{\lambda}_0}]^T \quad (2n \times 1) \quad (80)$$

と置くと, (78)(79)式をまとめて次式で表される。 $\partial\bar{x}_0/\partial\lambda_0 = [0]$, $\partial\bar{\lambda}_0/\partial\lambda_0 = [1]$ から \bar{z} の初期値は次の通り。

$$\dot{\bar{z}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{\bar{x}} & \hat{f}_{\bar{\lambda}} \\ \hat{g}_{\bar{x}} & \hat{g}_{\bar{\lambda}} \end{bmatrix} \bar{z} = A \bar{z} \quad (2n \times 1) \quad (81)$$

$$\bar{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (82)$$

行列 A は遷移行列 (Transition Matrix) である。

$$A = \begin{bmatrix} \hat{f}_{\bar{x}} & \hat{f}_{\bar{\lambda}} \\ \hat{g}_{\bar{x}} & \hat{g}_{\bar{\lambda}} \end{bmatrix} (2n \times 2n) \quad (83)$$

ここで $\bar{z} = [\bar{x}, \bar{\lambda}]^T$ $\bar{F} = [\hat{f}, \hat{g}]^T$ と置けば

$$A = \begin{bmatrix} \hat{f}_{\bar{x}} & \hat{f}_{\bar{\lambda}} \\ \hat{g}_{\bar{x}} & \hat{g}_{\bar{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \bar{F} \\ \partial \bar{z} \end{bmatrix}$$

と表されるから (66) 式と等価である。

(2) 終端条件 :

$$\bar{h} = [\bar{z}(\bar{x}_f, \bar{\lambda}_f), H_f]^T \quad (84)$$

$\bar{h}(\bar{x}_f, \bar{\lambda}_f)$ は状態変数 $\bar{x}_f, \bar{\lambda}_f$ に関する終端条件 $\bar{x}_f, \bar{\lambda}_f, H_f$ は随伴変数の初期値 $\bar{\lambda}_0$ と終端時刻 t_f の関数で表されるから次のようにも表される。

$$\bar{h} = \bar{h}(\bar{\lambda}_0, H(t_f)) \quad (86)$$

次に $\bar{\lambda}_0$ と終端時刻 t_f をまとめてベクトル \bar{y} で表す。

$$\bar{y} = [\bar{\lambda}_0, t_f]^T \quad (87)$$

$$\Delta \bar{h} = \bar{h}(\bar{y}) - \bar{h}_D \quad (88)$$

ここで \bar{h}_D は設定値 (定数)。上式を満たす根 \bar{y} を求める。推定値を \hat{y} とすれば $\hat{y} = \bar{y} + \delta \bar{y}$ (89)

(86) 式 \bar{h} を \bar{y} で級数展開すると

$$\hat{h} = \bar{h}(\bar{y}) + \frac{\partial \bar{h}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \delta \bar{y} = \bar{h}(\bar{y}) + \bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) \delta \bar{y} \quad (90)$$

ただし $\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \partial \bar{h}(\bar{y}) / \partial \bar{y} = \bar{h}_{\bar{y}}^*(\bar{y})$

ノミナル軌道で $\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \bar{h}_{\bar{y}}^*(\bar{y})$ と置けば, 求める更新値 $\delta \hat{y} (= \delta \bar{\lambda}_0, t_f)$ は次式で得られる。

$$\delta \bar{y} = [\bar{h}_{\bar{y}}^*(\bar{y})]^{-1} \{ \bar{h}_D - \bar{h}(\bar{y}) \} \quad (91)$$

次に上式の $\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y})$ を求める。 $\bar{h} = \bar{h}(\bar{x}, \bar{\lambda})$ から

$$\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\lambda}} \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{y}} \right) \quad (92)$$

または

$$\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix} \quad (93)$$

ここで (87) 式 $\bar{y} = [\bar{\lambda}_0 \quad t_f]^T$ (40) (41) 式 $\dot{\bar{x}} = \hat{f}(\bar{x}, \lambda)$ $\dot{\bar{\lambda}} = \hat{g}(\bar{x}, \bar{\lambda})$ を用いると $\bar{x} \bar{\lambda}$ の \bar{y} に関する変化率は次式で表される

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{\lambda}_0} \vdots \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \right)_{t_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{\bar{\lambda}_0} \vdots \hat{f}_f \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{\lambda}_0} \vdots \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial t} \right)_{t_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{\bar{\lambda}_0} \vdots \hat{g}_f \end{bmatrix} \quad (94)$$

次に $[\bar{h}_{\bar{x}}, \bar{h}_{\bar{\lambda}}]$ を求める。 $\bar{h} = [\bar{z}, H]^T$ を $\bar{x}, \bar{\lambda}$ で微分して (40) (41) 式

$\dot{\bar{\lambda}} = -H_{\bar{x}}^0 = \hat{g}$, $\dot{\bar{x}} = H_{\bar{\lambda}}^0 = \hat{f}$ を代入すると次式を得る。

$$[\bar{h}_{\bar{x}}, \bar{h}_{\bar{\lambda}}] = \begin{bmatrix} \bar{z}_{\bar{x}} & \bar{z}_{\bar{\lambda}} \\ H_{\bar{x}}^0 & H_{\bar{\lambda}}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{\bar{x}} & \bar{z}_{\bar{\lambda}} \\ -\hat{g}_f & \hat{f}_f \end{bmatrix} \quad (96)$$

(94) - (96) 式を (93) 式に代入して

$$\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \begin{bmatrix} \bar{z}_{\bar{x}} & \bar{z}_{\bar{\lambda}} \\ H_{\bar{x}}^0 & H_{\bar{\lambda}}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{\bar{\lambda}_0} & \hat{f}_f \\ \bar{\lambda}_{\bar{\lambda}_0} & \hat{g}_f \end{bmatrix} \quad (97)$$

(97) 式の逆行列を求めることにより $\bar{\lambda}_0, t_f$ の更新量 $\delta \bar{\lambda}_0, \delta t_f$ は (91) 式から次式で表される。

$$\delta \bar{y} = \begin{bmatrix} \delta \bar{\lambda}_0 \\ \delta t_f \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{z}_{\bar{x}} & \bar{z}_{\bar{\lambda}} \\ -\hat{g}_f & \hat{f}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{\bar{\lambda}_0} & \hat{f}_f \\ \bar{\lambda}_{\bar{\lambda}_0} & \hat{g}_f \end{bmatrix} \right\}_{t_f}^{-1} (\hat{h} - \bar{h}) \quad (98)$$

(3) 計算ステップ

初期値 $\bar{\lambda}_0, t_f$ の更新量 $\delta \bar{y}$ は (91) 式あるいは (98) 式から得れるがこの更新量に乗数 Δs (スカラー値) を乗じた量だけ更新すると

$$\bar{y}_{j+1} = \bar{y}_j + \delta \bar{y}$$

$$\delta \bar{y} = [\bar{h}_{\bar{y}}^*(\bar{y})]^{-1} \{ \hat{h} - \bar{h}(\bar{y}) \} \Delta s$$

$$0 < \Delta s \leq 1$$

線形性が成り立つ範囲内で

$$\delta \bar{y} \rightarrow \Delta \bar{y}$$

$$\bar{h}_{\bar{y}}^*(\bar{y}) \rightarrow \frac{\bar{h}_{j+1} - \bar{h}_j}{\Delta \bar{y}}$$

と置くと

$$\bar{h}_{j+1} - \bar{h}_j = \Delta s (\hat{h} - \bar{h})$$

または

$$\frac{\Delta \bar{h}}{\Delta s} = \hat{h} - \bar{h}$$

極限では

$$\frac{d\bar{h}}{ds} = \hat{h} - \bar{h}$$

この方程式の解は

$$\bar{h}(s) = \bar{h}_0 e^{-s} + \hat{h}(1 - e^{-s}), \quad \bar{h}(0) = \bar{h}_0$$

$\bar{h}(s) \rightarrow \hat{h}$ であるためには s は大きな値が要求される。 $0 < \Delta s \leq 1$ から繰返し数 $n = s / \Delta s$ も大きくなる。ここで s の代わりに R を次式で定義する。 $|\hat{h} - \bar{h}|$ は残差の 2 乗和の平方から得られるノルム

$$R = \left| \hat{h} - \bar{h} \right|_s = \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (\hat{h} - h_j)^2 s}$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta s} = \left| \hat{h} - \bar{h} \right|$$

$$\Delta \bar{y} = \bar{y}_{j+1} - \bar{y}_j = \left[\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) \right]_j^{-1} \frac{\left\{ \hat{h} - \bar{h}(\bar{y}_j) \right\}}{\left| \hat{h} - \bar{h}(\bar{y}_j) \right|} \Delta R$$

$$\left| \hat{h} - \bar{h}(\bar{y}_j) \right| \rightarrow \Delta R \text{ ならば } \Delta \bar{y} = \left[\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) \right]_j^{-1} \left\{ \hat{h} - \bar{h}(\bar{y}_j) \right\} \Delta s$$

$$\Delta R = \left| \hat{h} - \bar{h} \right| \Delta s$$

$$\tilde{h}_{j+1} = \bar{h}_j + \frac{\hat{h} - \bar{h}_j}{\left| \hat{h} - \bar{h}_j \right|} \Delta R$$

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\left| \bar{h}_{j+1} - \bar{h}_j \right|}{\left| \tilde{h}_{j+1} - \bar{h}_j \right|} \leq 1 + \varepsilon$$

III 再突入問題 (MFP 法)

最適の定義 $\phi = -K_1 \phi_f + K_2 \dot{q}_f$

速度座標系近似運動方程式

$$\frac{dr}{dt} = V \sin \gamma \quad (1)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V \cos \gamma}{r} \quad (2)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma = \frac{C_D A}{2} \rho V^2 - \frac{\mu \sin \gamma}{r^2} \quad (3)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{mV} + \frac{V^2}{r} \cos \gamma - \frac{g}{V} \cos \gamma = \frac{C_L A}{2m} \rho V + \frac{V \cos \gamma}{r} - \frac{\mu \cos \gamma}{r^2 V} \quad (4)$$

$$\rho = \rho_{SL} e^{-\beta h} \quad \rho_{SL} = 1.2255 \text{ Kg/m}^3 \quad (5)$$

$$g = \mu/r^2 \quad (6)$$

空力特性：

ニュートン極超音速空力特性

$$C_L = 1.82 \cos \alpha \sin^2 \alpha \quad C_D = C_{D0} + 1.46 \sin^3 \alpha$$

上記空力特性を次式で近似する。

$$C_L = 1.2 \cos \alpha \sin \alpha \quad (7)$$

$$C_D = C_{D0} + 1.8 \sin^2 \alpha \quad (8)$$

ノーズ伝導加熱率

$$C_{5N} = C_{HN} (\rho/\rho_{SL})^{1/2} (V/\sqrt{g r_e})^{3.15} \quad C_{HN} = 6.52131 \times 10^7 \text{ cal/m}^2 \text{ sec} \quad (11)$$

状態変数ベクトル(5x1)

$$\bar{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [r, \phi, V, \gamma, \dot{Q}]^T \quad (12)$$

$$\rho = \rho_{SL} \exp\{-\beta(x_1 - r_e)\}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3 \sin x_4 = f_1 \quad (13)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_3 \cos x_4}{x_1} = f_2 \quad (14)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{C_D A}{2m} \rho x_3^2 - \frac{\mu \sin x_4}{x_1^2} = f_3 \quad (15)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{1}{x_3} \left\{ \frac{C_L q}{2m} \rho x_3^2 + \frac{\cos x_4}{x_1} \left(x_3^2 - \frac{\mu}{x_1} \right) \right\} \quad (16)$$

(11) 式の対数をとって微分すると $\bar{\rho} = e^{-\beta h}$ $\dot{\bar{\rho}} = \bar{\rho}(-\beta \dot{h})$ から

$$\frac{dx_5}{dt} = C_{5N} \left(3.15 \frac{\dot{V}}{V} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) = C_{5N} \left(\frac{3.15 f_3}{x_3} - \frac{\beta f_1}{2} \right) \quad (17)$$

仮定

(a) 状態変数の数 $n=5$ とし、状態方程式に時刻 t は含まない

(b) 制御変数 $\bar{u} = \alpha$ とし迎角を選ぶ。

- (c) ハミルトン関数 H に時刻 t は含まない
 (d) 計算終了条件を時刻 t の代わりに状態変数 x_1 (例えば高度) に選ぶ。
 (e) 状態変数 x_j ($j=2,5$) は自由(拘束なし)とする。

最適化の目標は飛行距離を最大, 加熱率最小化する。これに対して目的関数(コスト関数)を次のように置く

$$\phi(x_f) = -K_1 x_{2f} + K_2 x_{5f}$$

ここで右辺第1項の負符号は飛行距離を最大にするために付加したものである。

K_1, K_2 : 重み係数

ハミルトン関数 :

$$H = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5$$

$$H = -\lambda_1 (x_3 \sin x_4) - \lambda_2 \left(\frac{x_3 \cos x_4}{x_1} \right) - \lambda_3 \left(\frac{C_D A q}{m} + \frac{\mu \sin x_4}{x_1^2} \right) \\ - \lambda_4 \left\{ \frac{C_L A q}{m x_3} + \cos x_4 \left(-\frac{x_3}{x_1} + \frac{\mu}{x_1^2 x_3} \right) \right\} - \lambda_5 \left\{ 3.15 C_{5N} \left(\frac{C_D A q}{m x_3} + \frac{\mu \sin x_4}{x_1^2 x_3} \right) - \frac{\beta C_{5N} x_3 \sin x_4}{2} \right\}$$

随伴方程式

$$\text{動圧に関して } \partial q / \partial x_1 = -\beta q \quad \partial q / \partial x_3 = 2q / x_3$$

$$\dot{\lambda}_1 = -H_{x_1} = \lambda_2 \left(\frac{x_3 \cos x_4}{x_1^2} \right) - \lambda_3 \left(-\frac{\beta C_D A q}{m} - \frac{2\mu \sin x_4}{x_1^3} \right) \\ - \lambda_4 \left\{ -\frac{\beta C_L A q}{m x_3} + \cos x_4 \left(\frac{x_3}{x_1^2} - \frac{2\mu}{x_1^3 x_3} \right) \right\} - \lambda_5 \left\{ 3.15 C_{5N} \left(-\frac{\beta C_D A q}{m x_3} - \frac{2\mu \sin x_4}{x_1^3 x_3} \right) \right\}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -H_{x_2} = 0$$

$$\dot{\lambda}_3 = -H_{x_3} = -\lambda_1 (\sin x_4) - \lambda_2 \left(\frac{\cos x_4}{x_1} \right) - \lambda_3 \left(\frac{2C_D A q}{m x_3} \right) - \lambda_4 \left\{ \frac{C_L A q}{m x_3^2} + \frac{C_L A q}{m x_3^2} - \frac{\cos x_4}{x_1} \left(1 - \frac{\mu}{x_1 x_3^2} \right) \right\} \\ - \lambda_5 \left\{ \frac{3.15 C_{5N}}{x_3^2} \left(\frac{2C_D A q}{m} - \frac{\mu \sin x_4}{x_1^2} \right) - \frac{\beta C_{5N} \sin x_4}{2} \right\}$$

$$\dot{\lambda}_4 = -H_{x_4} = -\lambda_1 x_3 \cos x_4 + \lambda_2 \frac{x_3 \sin x_4}{x_1} - \lambda_3 \frac{\mu \cos x_4}{x_1^2} + \lambda_4 \frac{\sin x_4}{x_1 x_3} \left(-x_3^2 + \frac{\mu}{x_1} \right) \\ - \lambda_5 C_{5N} \cos x_4 \left(\frac{3.15 \mu}{x_1^2 x_3} - \frac{\beta x_3}{2} \right)$$

$$\dot{\lambda}_5 = -H_{x_5} = 0$$

() 式から

$$\lambda_2 = \text{一定}$$

$$\lambda_5 = \text{一定}$$

最適制御則は $H_\alpha = 0$ から得られる。

$$() () \text{式から } \partial C_L / \partial \alpha = 1.2 \cos 2\alpha \quad \partial C_D / \partial \alpha = 1.8 \sin 2\alpha$$

$$H_\alpha = \left(\frac{Aq}{m} \right) \left\{ 1.8 \sin 2\alpha \left(-\lambda_3 - \lambda_5 \frac{3.15 C_{5N}}{x_3} \right) - \lambda_4 \frac{1.2 \cos 2\alpha}{x_3} \right\} = 0$$

最適迎角は次式で表される。

$$\alpha_{OPT} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{-\lambda_4}{1.5 x_3 (\lambda_3 + \lambda_5 3.15 C_{5N} / x_3)} \right\}$$

() 式 $C_{5N} = C_{HN} \bar{\rho}^{1/2} \bar{V}^{3.15}$ から

$$C_{5N x_3} = 3.15 C_{HN} \bar{\rho}^{1/2} \bar{V}^{3.15} / \bar{V} = 3.15 C_{5N} / x_3$$

$$C_3 = -\lambda_3 - \lambda_5 3.15 C_{5N} / x_3 = -\lambda_3 - \lambda_5 C_{5N x_3}$$

と置けば

$$\alpha_{OPT} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\lambda_4}{1.5 x_3 C_3}$$

w ベクトル:

$$\bar{w} = [x_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, H]^T$$

$$\partial w / \partial x_j \text{ を求める, 例えば } x_1 \text{ の時 } \partial w / \partial x_1 = [1, 0, 0, 0, 0, H_{x_1}]^T \quad \text{他も同様}$$

これより行列: $[\bar{w}_{\bar{x}} \quad \bar{w}_{\bar{\lambda}}]$ は次の行列で表される。

$$[\bar{w}_{\bar{x}} \quad \bar{w}_{\bar{\lambda}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{f}_1 & -\bar{f}_2 & -\bar{f}_3 & -\bar{f}_4 & -\bar{f}_5 & -\bar{g}_1 & -\bar{g}_2 & -\bar{g}_3 & -\bar{g}_4 & -\bar{g}_5 & -\bar{g}_5 \end{bmatrix}$$

遷移行列は

$$A = \begin{bmatrix} \bar{f}_{\bar{x}} & \bar{f}_{\bar{\lambda}} \\ \bar{g}_{\bar{x}} & \bar{g}_{\bar{\lambda}} \end{bmatrix} \quad (10 \times 10)$$

$$\bar{f}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & a_{54} & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{f}_{\bar{\lambda}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{38} & a_{39} & a_{310} \\ 0 & 0 & a_{48} & a_{49} & a_{410} \\ 0 & 0 & a_{58} & a_{59} & a_{510} \end{bmatrix}$$

$$H = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 = 0$$

から x_1 を消去して

$$\bar{w} = [\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5]^T$$

$$\bar{y} = [\lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}, \lambda_{50}]^T$$

$$\bar{\lambda}^* = [\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5]^T$$

$$\bar{w}_y = \bar{w}_x \bar{x}_y + \bar{w}_\lambda \bar{\lambda}_y \text{ において } \bar{w} \text{ は } \bar{x} \text{ を含まないから } \bar{w}_x = \bar{0}$$

$$\bar{w}_y = \bar{w}_\lambda \bar{\lambda}_y$$

$$\bar{w}_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w}_y = \bar{w}_\lambda \bar{\lambda}_y^*$$

$$\bar{w}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1] : \text{単位行列}$$

$$\bar{w}_y = \bar{\lambda}_y^*$$

仮定(a) (d) から

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u) \quad \bar{x}_0 : \text{初期値(既知)} \quad (1)$$

$$\bar{u} = u \quad (2)$$

$$H = 0 \quad (3)$$

仮定(d) から $t - t_f = 0$ の代わりに計算終了条件を

$$\Omega = x_1 - \hat{x}_{1f} = 0 \quad (4)$$

とする。

ハミルトン関数 H を求める。

$$H(\bar{x}, \bar{\lambda}, u) = \bar{\lambda}^T \bar{f}(\bar{x}, u) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 + \lambda_5 f_5 = \sum_{n=1}^5 \lambda_n f_n$$

u で微分して次式から最適制御変数を求める。

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 + \lambda_5 f_5)}{\partial u} = 0$$

制御変数を状態変数, 随伴変数で表し $u = u(\bar{x}, \bar{\lambda})$ をハミルトン関数 H に代入して u を消去

したハミルトン関数 \hat{H} を求める。

$$H(\bar{x}, \bar{\lambda}, u) = \hat{H}(\bar{x}, \bar{\lambda})$$

関数 \hat{H} を $\bar{x}, \bar{\lambda}$ でそれぞれ微分して状態変数, 随伴変数に関する微分方程式を求める。

$$\dot{\bar{x}} = \hat{H}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \hat{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (40)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\hat{H}_{\bar{\lambda}}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \hat{g}(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (41)$$

あるいは

$$\dot{x}_j = \hat{f}_j(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (j=1,5)$$

$$\dot{\lambda}_j = \hat{g}_j(\bar{x}, \bar{\lambda}, t) \quad (j=1,5)$$

目的関数 $\phi(\bar{x}_f)$ が次式で与えられるものとする。

$$\phi(\bar{x}_f) = \hat{K}_1 x_{2f} + \hat{K}_2 x_{5f}$$

目的関数 $\phi(\bar{x}_f)$ の状態変数に関する変化率は次式で表される

$$\partial\phi/\partial x_2 = \hat{K}_2$$

$$\partial\phi/\partial x_5 = \hat{K}_5$$

$$\partial\phi/\partial x_j = 0 \quad (j=2,5)$$

仮定 $\hat{H}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$ から

$$\hat{H}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \lambda_1 \hat{f}_1 + \lambda_2 \hat{f}_2 + \lambda_3 \hat{f}_3 + \lambda_4 \hat{f}_4 + \lambda_5 \hat{f}_5 = 0$$

から λ_1 を求める。

$$\lambda_1 = -(\lambda_2 \hat{f}_2 + \lambda_3 \hat{f}_3 + \lambda_4 \hat{f}_4 + \lambda_5 \hat{f}_5) / \hat{f}_1$$

終端値は

$$\lambda_{1f} = -(\lambda_2 K_2 + \lambda_5 K_5) / \hat{f}_{1f}$$

以上から変数 λ_1 は残りの λ_j ($j=2,5$) f_j ($j=1,5$) から決まるので変数から除く。

また変数 x_1 は計算終了条件として時刻 t 代わりにもちいているから変数から除く。

これより変数 x_1 を取り除き、また x_j ($j=2,5$) は自由から取り除くことができる。上記理由から変数 λ_1 をまた仮定(c)から H を取り除くと、結局終端条件 \bar{h} は $\bar{h} = \bar{h}(\bar{\lambda}_{j0})$ ($j=2,5$) で表される。

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} \lambda_2 - \hat{K}_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 - \hat{K}_5 \end{bmatrix}$$

初期値 \bar{y} から t_f を取り除くと

$$\bar{y} = [\lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}, \lambda_{50}]^T$$

$$\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\lambda}} \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{y}} \right)$$

$\bar{h} = \bar{h}(\bar{\lambda}_j)$ ($j=2,5$) から \bar{h} に \bar{x} は含まれないことから \bar{x} に関する偏微分は 0

$$\bar{h}_{\bar{x}} = [0]$$

$\bar{h} = \bar{h}(\bar{\lambda}_j)$ ($j=2,5$) から λ_1 に関する偏微分は 0

$$\bar{h}_{\bar{\lambda}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (4 \times 5)$$

これより \bar{h} の初期値に関する $\bar{h}_{\bar{y}}$ は $\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \bar{h}_{\bar{\lambda}} \bar{\lambda}'_{\bar{y}}$, $\bar{\lambda}_j$ の添字は 2 から始まるので添字を 1 つずらして、新たに随伴変数 λ'_j を $\lambda'_{j-1} = \lambda_j$ と置くと

$$\bar{\lambda}' = [\lambda'_{10}, \lambda'_{20}, \lambda'_{30}, \lambda'_{40}]^T$$

$$\bar{\lambda} = [\lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}, \lambda_{50}]^T$$

$$\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \bar{h}_{\bar{\lambda}} \bar{\lambda}'_{\bar{y}}$$

$$\bar{h}_{\bar{\lambda}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \quad (4 \times 4)$$

$$\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \bar{\lambda}'_{\bar{y}}$$

変数 \bar{z} から \bar{x} を取り除くと

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{\lambda_0} \\ \bar{\lambda}_{\lambda_0} \end{bmatrix} = \bar{\lambda}_{\lambda_0} \quad (4 \times 1)$$

新たに定義した随伴変数 $\bar{\lambda}'$ であらわすと

$$\bar{z}' = \bar{\lambda}'_{\lambda_0} \quad (4 \times 1)$$

$$\bar{h}_{\bar{y}}(\bar{y}) = \bar{z}'_f$$

右辺を x_j, λ_j ($j=1,5$) で微分して遷移行列 A を求める

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \lambda_5} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \hat{g}_5}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \hat{g}_5}{\partial \lambda_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \lambda'_1} & \dots & \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \lambda'_4} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \hat{g}_5}{\partial \lambda'_1} & \dots & \frac{\partial \hat{g}_5}{\partial \lambda'_4} \end{bmatrix} \quad (4 \times 4)$$

以上から

$$\dot{\bar{z}}' = A\bar{z}' \quad (4 \times 1)$$

仮定(a)-(e)を設定すると計算すべき遷移行列の数は $A(4 \times 4)$, 16 個で解くべき微分方程式の数は (4×1) , 4 個となる。

(補足)

線形微分方程式の解法

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x}$$

$$\bar{x}(t_0) = [I]$$

$$\bar{x}(t) \bar{x}^{-1}(\tau) \equiv \Phi(t, \tau)$$

遷移行列の特性

$$\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t)$$

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tau) \Phi^{-1}(t, \tau) &= \Phi(t, \tau) \Phi(\tau, t) = [I] \\ &= \Phi^T(t, \tau) \Phi^T(\tau, t) = [I] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi^T(t, \tau)}{\partial t} \Phi^T(\tau, t) + \Phi^T(t, \tau) \frac{\partial \Phi(\tau, t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi^T(t, \tau)}{\partial t} = \Phi^T(t, \tau) A^T \quad \Phi(\tau, \tau) = [I]$$

$$\Phi^T(t, \tau) A^T \Phi^T(\tau, t) + \Phi^T(t, \tau) \frac{\partial \Phi^T(\tau, t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi^T(\tau, t)}{\partial t} = -A^T \Phi^T(\tau, t)$$

10-3. 直接法

最適軌道は次の状態方程式と初期条件

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (1)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad : \text{初期値} \quad (2)$$

満たす \bar{x}, \bar{u} のなかから目的関数 J (Mayer 型)

$$J = \phi(\bar{x}(t_f), t_f) \quad (3)$$

を最小にする \bar{x}, \bar{u} を求めることである。

ここで制御変数 $\bar{u}(t)$ (時間の関数) を与えると, (1) (2) 式を解くと \bar{x} が (積分により) 定まり, 得られた \bar{x} を (3) 式に代入して目的関数 J の値が確定できる。したがって J は $\bar{u}(t)$ の関数であり, これを $J = J(\bar{u})$ と表す。ここで J が有限な値を持つような関数 $\bar{u}(t)$ の集合を考えると, 最適問題は関数の集合 $\bar{u}(t)$ のなかから J が最小となるような関数 $\bar{u}(t)$ を求める問題となる。この最適問題に対して勾配法を適用する。

制御変数 $\bar{u}(t)$ に拘束がない場合を考える。最初に時間関数 $\bar{u}_0(t)$ を予測する。探索方向を表す時間関数 $\bar{s}(t)$ を決め $J\{\bar{u}_0(t) + \alpha\bar{s}_0(t)\}$ を計算する。これは変数 α の関数となるから $J(\alpha)$ となるので $J(\alpha)$ を最小化する $\alpha = \alpha_{\min}$ を求めて $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_0(t) + \alpha_{\min}\bar{s}_0(t)$ と置いて, この操作を繰り返す。

問題は探索方向 $\bar{s}_0(t)$ を求めることであるが, 勾配法では $\bar{u} = \bar{u}_0$ の置ける勾配

$$\bar{s}_0 = - \left. \frac{\partial J(\bar{u})}{\partial \bar{u}} \right|_0$$

により求める。

目的関数の勾配が求まると最急降下法, 共役勾配法, 準ニュートン法など各種最適探索法により $J(\alpha)$ を最小化する。

拘束条件なしの場合

- 1) 最急降下法
- 2) 修正 Powell 法
- 3) 共役勾配法 Fletcher-Reeves 法
- 4) 修正ニュートン法
- 5) 準ニュートン法 (DFP 法)

拘束条件付きの場合

- 6) ペナルティ法
- 7) ペナルティ乗数法

共役勾配法 (Fletcher-Reeves 法) による計算法

(1) 任意の時間関数 $\bar{u}_0(t)$ $t_0 \leq t \leq t_f$ を与える

(2) $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$ $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ を用いて $\bar{x}_0(t) = \bar{x}(t, \bar{u}_0)$ を求める。 $\dot{\bar{\lambda}}(t, \bar{u}) = -\bar{f}_{\bar{x}}\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_f$ を用いて $t = t_f$ から $t = t_0$ まで逆時間に解き $\bar{\lambda}_0(t) = \bar{\lambda}(t, \bar{u}_0)$ を求めるこれより勾配 $J_{\bar{u}_0}$ を計算して

- $\bar{s} = -J_{\bar{u}0}$ とする。 $i=0$
- (3) $i=0$ の時には(4)へ、 $i \geq 1$ の時には $\beta_i = (J_{u_i} J_{u_i}) / (J_{u_{i-1}} J_{u_{i-1}})$ を求めて $\bar{s}_i = -J_{\bar{u}i} + \beta_i \bar{s}_{i-1}$ と置く。
- (4) $J(\bar{u}_i + \alpha \bar{s}_i)$ を最小とする α を求めこれを α_i として、 $\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + \alpha_i \bar{s}_i$ と置く
- (5) \bar{u}_{i+1} を用いて(2)と同様に $\bar{x}_{i+1}(t) = \bar{x}(t, \bar{u}_{i+1})$, $\bar{\lambda}_{i+1}(t) = \lambda(t, \bar{u}_{i+1})$ を求める、これより勾配 $J_{\bar{u}i+1}$ を求める。
- (6) $J_{\bar{u}i+1}$ が十分0に近ければ停止、大きければ $i=i+1$ として(3)に戻る。

勾配の計算法

$$t = [t_0, t_f]$$

$$\phi = \phi(\bar{x}(t_f), t_f) : \text{目的関数}$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}\{\bar{x}(t), \bar{u}(t), t\} : \text{状態方程式}$$

$$\psi = \psi(\bar{x}(t_f), t_f) = 0 : \text{拘束条件}$$

$$t_0, x(t_0) : \text{既知}$$

ここで

$$\bar{x} = [x_1, \dots, x_n]^T (n \times 1) \text{状態変数行列}$$

$$\bar{f} = [f_1, \dots, f_n]^T (n \times 1) \text{状態関数行列}$$

$$\bar{u} = [u_1, \dots, u_r]^T (r \times 1) \text{制御変数行列}$$

$$\bar{\psi} = [\psi_1, \dots, \psi_m]^T (m \times 1) \text{拘束関数行列}$$

$$\Omega(t_f) = 0 : \text{停止条件}$$

ノミナル制御変数を $\bar{u}^*(t)$ とし、初期条件を \bar{x}_0 、停止条件 $\Omega=0$ として状態方程式 $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}^*, t)$ を積分して得られる軌道を $\bar{x}(t) = \bar{x}^*(t)$ と置いてノミナル軌道とする。

次に制御変数を $\bar{u}^*(t)$ から $\delta \bar{u}$ だけ変化させて目的関数が減少するように軌道を修正する。制御変数を $\delta \bar{u}$ だけ変化させたとき軌道の変動を $\delta \bar{x}$ とすれば

$$\delta \bar{u} = \bar{u} - \bar{u}^* \quad (1)$$

$$\delta \bar{x} = \bar{x} - \bar{x}^* \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(\delta \bar{x}) = F(t) \delta \bar{x} + G(t) \delta \bar{u} \quad (3)$$

$$\bar{F}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^* & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)^* & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)^* \end{bmatrix} (n \times n), \quad \bar{G}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)^* & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_r}\right)^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)^* & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_r}\right)^* \end{bmatrix} (r \times r)$$

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = -F^T(t) \bar{\lambda} \quad (4)$$

(4) 式の転置を取り、 $(\delta \bar{x})$ を掛けると

$$\frac{d\bar{\lambda}^T}{dt}(\delta\bar{x}) = -\bar{\lambda}^T F(t)\delta\bar{x} \quad (5)$$

(3) 式に $\bar{\lambda}^T$ を掛けて (5) 式を加えると

$$\bar{\lambda}^T \frac{d}{dt}(\delta\bar{x}) + \frac{d\bar{\lambda}^T}{dt}(\delta\bar{x}) = \bar{\lambda}^T F(t)\delta\bar{x} - \bar{\lambda}^T F^T(t)\delta\bar{x} + \bar{\lambda}^T G(t)\delta\bar{u}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{\lambda}^T \delta\bar{x}) = \bar{\lambda}^T G(t)\delta\bar{u}$$

$t = [t_0, t_f]$ 間で積分すると

$$(\bar{\lambda}^T \delta\bar{x})_{t=t_f} - (\bar{\lambda}^T \delta\bar{x})_{t=t_0} = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}^T G(t)\delta\bar{u} dt$$

$$\lambda_{\phi}^T(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)_{t=t_f}^* \quad \lambda_{\psi}^T(t_f) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \right)_{t=t_f}^* \quad \lambda_{\Omega}^T(t_f) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}} \right)_{t=t_f}^*$$

$$\delta\phi = (\lambda_{\phi}^T \delta\bar{x})_{t=t_f}$$

$$\delta\psi = (\lambda_{\psi}^T \delta\bar{x})_{t=t_f}$$

$$\delta\Omega = (\lambda_{\Omega}^T \delta\bar{x})_{t=t_f}$$

$$d\phi = \delta\phi + \dot{\phi} dt_f$$

$$d\psi = \delta\psi + \dot{\psi} dt_f$$

$$d\Omega = \delta\Omega + \dot{\Omega} dt_f$$

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi}^T(t) G(t)\delta\bar{u} dt + (\bar{\lambda}_{\phi}^T \delta\bar{x})_{t=t_0} + \dot{\phi} dt_f$$

$$d\psi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\psi}^T(t) G(t)\delta\bar{u} dt + (\bar{\lambda}_{\psi}^T \delta\bar{x})_{t=t_0} + \dot{\psi} dt_f$$

$$d\Omega = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\Omega}^T(t) G(t)\delta\bar{u} dt + (\bar{\lambda}_{\Omega}^T \delta\bar{x})_{t=t_0} + \dot{\Omega} dt_f$$

$\bar{\lambda}_{\phi}^T(t)$, $\bar{\lambda}_{\psi}^T(t)$, $\bar{\lambda}_{\Omega}^T(t)$ の計算は

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = -F^T(t)\bar{\lambda}$$

の微分方程式を条件

$$\lambda_{\phi}^T(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)_{t=t_f}^* \quad \lambda_{\psi}^T(t_f) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \right)_{t=t_f}^* \quad \lambda_{\Omega}^T(t_f) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}} \right)_{t=t_f}^*$$

のもとに解くことにより得られる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right] (1 \times n)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}} = \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial x_n} \right] (1 \times n)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (m \times n)$$

$$\dot{\phi} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \bar{f} \right)_{t=t_f}^* \quad \dot{\psi} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \bar{f} \right)_{t=t_f}^* \quad \dot{\Omega} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}} \bar{f} \right)_{t=t_f}^*$$

$d\phi$ が最大または最小となる $d\bar{u}$ を求める。

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi}^T(t) G(t) \delta \bar{u} dt + \left(\bar{\lambda}_{\phi}^T \delta \bar{x} \right)_{t=t_0} + \dot{\phi} dt_f$$

$$d\bar{\psi} = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\psi}^T(t) G(t) \delta \bar{u} dt + \left(\bar{\lambda}_{\psi}^T \delta \bar{x} \right)_{t=t_0} + \dot{\bar{\psi}} dt_f$$

$$d\Omega = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\Omega}^T(t) G(t) \delta \bar{u} dt + \left(\bar{\lambda}_{\Omega}^T \delta \bar{x} \right)_{t=t_0} + \dot{\Omega} dt_f = 0$$

$$(dP)^2 = \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T(t) W(t) \delta \bar{u}(t) dt$$

$d\Omega = 0$ から

$$dt_f = -\frac{1}{\dot{\Omega}} \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\Omega}^T(t) G(t) \delta \bar{u} dt - \frac{1}{\dot{\Omega}} \left(\bar{\lambda}_{\Omega}^T \delta \bar{x} \right)_{t=t_0}$$

$$\bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T(t) = \bar{\lambda}_{\phi}^T(t) - \frac{\dot{\phi}}{\dot{\Omega}} \bar{\lambda}_{\Omega}^T(t)$$

$$\bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t) = \bar{\lambda}_{\psi}^T(t) - \frac{\dot{\bar{\psi}}}{\dot{\Omega}} \bar{\lambda}_{\Omega}^T(t)$$

と置けば

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T(t) G(t) \delta \bar{u} dt + \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T(t_0) \delta \bar{x}(t_0)$$

$$d\bar{\psi} = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t) G(t) \delta \bar{u} dt + \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t_0) \delta \bar{x}(t_0)$$

$$(dP)^2 = \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T(t) W(t) \delta \bar{u}(t) dt$$

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T(t) G(t) - \bar{v}^T \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t) G(t) - \mu \delta \bar{u}^T W(t) \right\} \delta \bar{u} dt$$

$$+ \left\{ \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T(t_0) - \bar{v}^T \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t_0) \right\} \delta \bar{x}(t_0) + \bar{v}^T d\bar{\psi} + \mu (dP)^2$$

$\delta \bar{u}$ の変分をとると

$$\delta(d\phi) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T(t)G(t) - \bar{v}^T \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t)G(t) - 2\mu \delta \bar{u}^T W(t) \right\} \delta^2 \bar{u} \, dt = 0$$

$$2\mu \delta \bar{u}^T W(t) = \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T(t)G(t) - \bar{v}^T \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t)G(t)$$

$$\delta \bar{u}^T = \frac{1}{2\mu} \left\{ \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T(t) - \bar{v}^T \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t) \right\} G(t) W^{-1}(t)$$

$$\delta \bar{u} = \frac{1}{2\mu} W^{-1}(t) G^T(t) \left\{ \bar{\lambda}_{\phi\Omega}(t) - \bar{\lambda}_{\psi\Omega}(t) \bar{v} \right\}$$

() 式に代入して

$$d\bar{\psi} = \frac{1}{2\mu} \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t) G(t) W^{-1}(t) G^T(t) \left\{ \bar{\lambda}_{\phi\Omega}(t) - \bar{\lambda}_{\psi\Omega}(t) \bar{v} \right\} dt + \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t_0) \delta \bar{x}(t_0)$$

$$I_{\psi\phi} \equiv \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t) G(t) W^{-1}(t) G^T(t) \bar{\lambda}_{\phi\Omega}(t) \, dt$$

$$I_{\psi\psi} \equiv \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t) G(t) W^{-1}(t) G^T(t) \bar{\lambda}_{\psi\Omega}(t) \, dt$$

と置けば

$$d\bar{\psi} = \frac{1}{2\mu} (I_{\psi\phi} - I_{\psi\psi} \bar{v}) + \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t_0) \delta \bar{x}(t_0)$$

定数ベクトル \bar{v} を求めると

$$\bar{v} = \frac{1}{I_{\psi\psi}} \left\{ -2\mu \left(d\bar{\psi} - \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t_0) \delta \bar{x}(t_0) \right) + I_{\psi\phi} \right\}$$

$$d\bar{\beta} = d\bar{\psi} - \bar{\lambda}_{\psi\Omega}^T(t_0) \delta \bar{x}(t_0) \text{ と置けば}$$

$$\bar{v} = -2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta} + I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi\phi}$$

() 式に代入して

$$\delta \bar{u} = \frac{1}{2\mu} W^{-1}(t) G^T(t) \left\{ \lambda_{\phi\Omega}(t) - \lambda_{\psi\Omega}(t) \bar{v} \right\}$$

$$(dP)^2 = \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T(t) W(t) \delta \bar{u}(t) \, dt$$

被積分関数

$$\delta \bar{u}^T W \delta \bar{u}$$

$$= (1/2\mu)^2 \left\{ \lambda_{\phi\Omega}^T(t) - \bar{v}^T \lambda_{\psi\Omega}^T(t) \right\} G(t) W^{-1} G^T(t) \left\{ \lambda_{\phi\Omega}(t) - \lambda_{\psi\Omega}(t) \bar{v} \right\}$$

$$= (1/2\mu)^2 \left\{ \lambda_{\phi\Omega}^T(t) G W^{-1} G^T \lambda_{\phi\Omega}(t) - \lambda_{\phi\Omega}^T(t) G W^{-1} G^T \lambda_{\psi\Omega} \bar{v} \right\}$$

$$+ (1/2\mu)^2 \left\{ -\bar{v}^T \lambda_{\psi\Omega}^T(t) G W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega}(t) + \bar{v}^T \lambda_{\psi\Omega}^T(t) G W^{-1} G^T \lambda_{\psi\Omega}(t) \bar{v} \right\}$$

$$\begin{aligned}
I_{\phi\phi} &= \lambda^T \phi_{\Omega}(t) G W^{-1} G^T \lambda_{\phi\Omega}(t) \\
I_{\psi\phi} \bar{v} &= I_{\psi\phi} \left(-2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta} + I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi\phi} \right) \quad \bar{v}^T I_{\psi\phi} = \left(-2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta}^T + I_{\psi\phi}^T I_{\psi\psi}^{-1} \right) I_{\psi\phi} \\
\bar{v}^T I_{\psi\psi} \bar{v} &= \left(-2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta}^T + I_{\psi\phi}^T I_{\psi\psi}^{-1} \right) I_{\psi\psi} \left(-2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta} + I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi\phi} \right) \\
&= \left(-2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta}^T \right) I_{\psi\psi} \left(-2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta} \right) + \left(-2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta}^T \right) I_{\psi\psi} \left(I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi\phi} \right) \\
&\quad + \left(I_{\psi\phi}^T I_{\psi\psi}^{-1} \right) I_{\psi\psi} \left(-2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta} \right) + \left(I_{\psi\phi}^T I_{\psi\psi}^{-1} \right) I_{\psi\psi} \left(I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi\phi} \right) \\
&= (-2\mu)^2 d\bar{\beta}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta} - 2\mu \left(I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta}^T I_{\psi\phi} \right) - 2\mu \left(I_{\psi\phi}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\bar{\beta} \right) + \left(I_{\psi\phi}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi\phi} \right)
\end{aligned}$$

(別解)

上記線形1次微分方程式の解は次式で表される。(補足参照)

$$\delta \bar{x}(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) G(t) \delta \bar{u}(t) dt$$

ここで $\Phi(t, t_k)$: 遷移行列

$$\text{解: } \delta \bar{x}(t) = \Phi(t, t_k) \delta \bar{x}(t_k)$$

$$\dot{\Phi}(t, t_k) = F(t) \Phi(t, t_k) \text{ ならば } \rightarrow \dot{\Phi}(t_k, t) = -\Phi(t_k, t) F(t)$$

随伴方程式

$$H = \bar{\lambda}^T (F(t) \delta \bar{x} + G(t) \delta \bar{u}) \text{ から}$$

$$\dot{\delta \bar{\lambda}} = -\partial H / \partial (\delta \bar{x})$$

したがって

$$\delta \dot{\bar{\lambda}} = -F(t) \delta \bar{\lambda}$$

$$\bar{\lambda}(t_f) = \left(\partial J / \partial \bar{x} \right)_f^T : \text{横断条件}$$

$\delta \bar{\lambda}$ に関する線形微分方程式の解は

$$\delta \bar{\lambda}(t) = \Phi'(t, t_k) \delta \bar{\lambda}(t_k)$$

$$\dot{\Phi}'(t, t_k) = -F(t) \Phi'(t, t_k) \rightarrow \dot{\Phi}'^T(t, t_k) = -\Phi'^T(t, t_k) F(t)$$

$$\delta \bar{\lambda}(t) = \Phi'(t, t_f) \delta \bar{\lambda}(t_f)$$

$$\Phi^T(t_k, t) = \Phi'(t, t_k)$$

$$\bar{\lambda}(t) = \Phi^T(t_f, t) \left(\partial J / \partial \bar{x} \right)_f^T$$

$$\delta J = J \{ \bar{x}(t_f) + \delta \bar{x}(t_f) \} - J \{ \bar{x}(t_f) \}$$

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \bar{x}} \right)_{t=t_f} \delta \bar{x}(t_f) \quad \text{または} \quad \delta J = \delta \bar{x}^T(t_f) \left(\partial J / \partial \bar{x} \right)_f^T$$

() 式の転置をとると

$$\begin{aligned}\delta \bar{x}^T(t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T(t) G^T(t) \Phi^T(t_f, t) dt \\ \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T G^T(t) \Phi^T(t_f, t) \left(\frac{\partial J}{\partial \bar{x}} \right)_f^T dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T G^T(t) \bar{\lambda}(t) dt\end{aligned}$$

ハミルトン関数 $H = \bar{f}^T \bar{\lambda}$

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^T \bar{\lambda}(t) = G^T(t) \bar{\lambda}(t)$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right) dt$$

$$J_{\bar{u}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{u}}$$

$\partial H / \partial \bar{u}$: 感度関数 (Influence Function) Green 関数 (Greens Function)

$$\delta \bar{u} = K \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^T$$

のとき δJ は最大となる。

$$\delta J = K \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^2 dt$$

$\delta \bar{u}$ に対する拘束

$$\int_{t_0}^{t_f} (\delta \bar{u})^2 dt = \varepsilon^2$$

ε : 既知定数

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right) dt + \mu \left\{ \varepsilon^2 - \int_{t_0}^{t_f} (\delta \bar{u})^2 dt \right\} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right) - \mu \delta \bar{u} \right\} dt + \mu \varepsilon^2\end{aligned}$$

$$\delta(\delta J) = \int_{t_0}^{t_f} \delta(\delta \bar{u}^T) \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right) - 2\mu \delta \bar{u} \right\} dt = 0$$

$$\delta \bar{u} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)$$

$$\int_{t_0}^{t_f} (\delta \bar{u})^2 dt = \frac{1}{4\mu^2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^2 dt = \varepsilon^2$$

$$\mu = \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^2 dt}$$

(4) 式の両辺に $\delta \bar{x}^T$ を掛けて転置を取ると

$$\dot{\bar{\lambda}}^T \delta \bar{x} = -\bar{\lambda}^T \bar{F} \delta \bar{x} \quad (6)$$

(3) 式の両辺に $\bar{\lambda}^T$ を掛けて

$$\bar{\lambda}^T \delta \dot{\bar{x}} = \bar{\lambda}^T \bar{F} \delta \bar{x} + \bar{\lambda}^T \bar{G} \delta \bar{u}$$

(6) 式を用いると

$$\bar{\lambda}^T \delta \dot{\bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}}^T \delta \bar{x} = \bar{\lambda}^T \bar{G} \delta \bar{u}$$

左辺は

$$\frac{d}{dt} (\bar{\lambda}^T \delta \bar{x}) = \bar{\lambda}^T \bar{G} \delta \bar{u}$$

$$(\bar{\lambda}^T \delta \bar{x})_f - (\bar{\lambda}^T \delta \bar{x})_0 = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}^T \bar{G}) \delta \bar{u} dt$$

目的関数：

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right) \delta \bar{x} = d\phi$$

$$\bar{\lambda}_{\phi f}^T = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)_f$$

$$(\lambda_{\phi}^T \delta \bar{x})_f = \delta \phi_f$$

$$\delta \phi = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}_{\phi}^T \bar{G}) \delta \bar{u} dt + (\bar{\lambda}_{\phi}^T \delta \bar{x})_0$$

$$\bar{\lambda}_{\bar{u}} = \bar{\lambda}_{\phi}^T \bar{G} = \bar{\lambda}_{\phi}^T \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^*$$

$$\delta \phi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\bar{u}} \delta \bar{u} dt + (\bar{\lambda}_{\phi}^T \delta \bar{x})_0$$

拘束条件：

$$\psi(\bar{x}_f) = 0$$

$$\lambda_{\psi f} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \right)_f$$

$$\delta\psi = \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\psi}^T G \right) \delta\bar{u} dt + \left(\bar{\lambda}_{\psi}^T \delta\bar{x} \right)_0$$

停止条件：

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{x}} \right) \delta\bar{x} = d\Omega$$

$$\bar{\lambda}_{\Omega f}^T = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{x}} \right)_f$$

$$\left(\lambda_{\Omega}^T \delta\bar{x} \right)_f = \delta\Omega_f = 0$$

$$\delta\Omega = \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\Omega}^T G \right) \delta\bar{u} dt + \left(\bar{\lambda}_{\Omega}^T \delta\bar{x} \right)_0$$

$$d\phi = \delta\phi_f + \dot{\phi} dt_f$$

$$d\Omega = \delta\Omega_f + \dot{\Omega} dt_f$$

ここで

$$\dot{\phi} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}} \bar{f} \right)_f$$

$$\dot{\Omega} = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\Omega}{\partial\bar{x}} \bar{f} \right)_f$$

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi}^T G \delta\bar{u} dt + \left(\bar{\lambda}_{\phi}^T \delta\bar{x} \right)_0 + \dot{\phi} dt_f$$

$$d\Omega = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\Omega}^T G \delta\bar{u} dt + \left(\bar{\lambda}_{\Omega}^T \delta\bar{x} \right)_0 + \dot{\Omega} dt_f = 0$$

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\phi}^T - \frac{\dot{\phi}}{\dot{\Omega}} \bar{\lambda}_{\Omega}^T \right) G \delta\bar{u} dt - \left\{ \left(\bar{\lambda}_{\phi}^T - \frac{\dot{\phi}}{\dot{\Omega}} \bar{\lambda}_{\Omega}^T \right) \delta\bar{x} \right\}_0$$

$$\bar{\lambda}_{\phi\Omega f} = \left(\bar{\lambda}_{\phi}^T - \frac{\dot{\phi}}{\dot{\Omega}} \bar{\lambda}_{\Omega}^T \right)_f^*$$

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G \delta\bar{u} dt - \left(\bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T \delta\bar{x} \right)_0$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta\bar{u}^T W \delta\bar{u} dt$$

$$v^T d\phi - v^T \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G \delta \bar{u} dt + v^T \left(\bar{\lambda}_{\Omega}^T \delta \bar{x} \right)_0 = 0$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\delta u^T W - \bar{v}^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G \right) \delta \bar{u} dt + \bar{v}^T \left\{ d\phi - \left(\bar{\lambda}_{\Omega}^T \delta \bar{x} \right)_0 \right\}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \delta \bar{u}} = \int_{t_0}^{t_f} \left(2\delta u^T W - \bar{v}^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G \right) \delta \bar{u} dt = 0$$

$$\delta u^T = \frac{1}{2} \bar{v}^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G W^{-1}$$

$$\delta u = \frac{1}{2} W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega} \bar{v}$$

$$d\phi - \left(\bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T \delta \bar{x} \right)_0 = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G \delta \bar{u} dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega} \bar{v} dt = \frac{1}{2} R \bar{v}$$

$$I_{\phi\phi} = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega} dt$$

$$\bar{v} = 2I_{\phi\phi}^{-1} \left[d\phi - \left(\bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T \delta \bar{x} \right)_0 \right]$$

$$\delta u = W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega} I_{\phi\phi}^{-1} \left[d\phi - \left(\bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T \delta \bar{x} \right)_0 \right]$$

$$\Lambda_1(t) = W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega}(t)$$

$$\delta u = \Lambda_1(t) I_{\phi\phi}^{-1} \left[d\phi - \left(\bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T \delta \bar{x} \right)_0 \right]$$

積分を行うと

$$\left(\bar{\lambda}^T \delta \bar{x} \right)_f - \left(\bar{\lambda}^T \delta \bar{x} \right)_0 = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}^T G \delta \bar{u} dt \quad \left(\bar{\lambda}^T \delta \bar{x} \right)_0 = 0$$

終端時刻 t_f における目的関数 ϕ , 停止条件 Ω の変動は ϕ, Ω が \bar{x}, t の関数であるから

$$d\phi = \phi_{\bar{x}_f} \delta \bar{x}_f + \phi_{\bar{u}_f} \delta \bar{u}_f + \dot{\phi} \delta t_f$$

$$d\Omega = \Omega_{\bar{x}_f} \delta \bar{x}_f + \Omega_{\bar{u}_f} \delta \bar{u}_f + \dot{\Omega} \delta t_f$$

ここで

$$\bar{\lambda}_{\phi_f}^T = \phi_{\bar{x}_f}$$

$$\bar{\lambda}_{\Omega_f}^T = \Omega_{\bar{x}_f}$$

と置くとベクトル $\bar{\lambda}_{\phi}, \bar{\lambda}_{\Omega}$ の横断条件を表す。

停止条件 $d\Omega = 0$ から時刻の変動 δt_f が次式で得られる。

$$\delta t_f = -\frac{\Omega_{\bar{x}_f}}{\dot{\Omega}} \delta \bar{x}_f = -\frac{\bar{\lambda}_{\Omega}^T}{\dot{\Omega}} \delta \bar{x}_f$$

また目的関数の変動は δt_f を消去して次式で表される。

$$d\phi = \bar{\lambda}_{\phi_f}^T \delta \bar{x}_f - \frac{\dot{\phi}}{\Omega} \bar{\lambda}_{\Omega}^T \delta t_f$$

次に $\bar{\lambda}^T$ に $\bar{\lambda}_{\phi_f}^T$, $\bar{\lambda}_{\Omega_f}^T$ を代入すると

$$\bar{\lambda}_{\phi_f}^T \delta \bar{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi}^T G \delta \bar{u} dt$$

$$\bar{\lambda}_{\Omega_f}^T \delta \bar{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\Omega}^T G \delta \bar{u} dt$$

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\phi} - \frac{\dot{\phi}}{\Omega} \bar{\lambda}_{\Omega} \right)^T G \delta \bar{u} dt$$

ここであらためて

$$\bar{\lambda}_{\phi\Omega} = \bar{\lambda}_{\phi} - \frac{\dot{\phi}}{\Omega} \bar{\lambda}_{\Omega}$$

と置くと目的関数の変化は次のように表される。

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G \delta \bar{u} dt$$

次の制御変数の変動の 2 乗和の平均値を次式で定義する。

$$(dP)^2 \equiv \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T W \delta \bar{u} dt$$

いまラグランジェ乗数を μ とすると

$$\mu (dP)^2 - \mu \int_{t_0}^{t_f} \delta \bar{u}^T W \delta \bar{u} dt = 0$$

() 式に加えると

$$d\phi = \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G - \mu \delta \bar{u}^T W \right) \delta \bar{u} dt + \mu (dP)^2$$

$\delta \bar{u}$ に対する変動をとり, これを 0 と置くと

$$\delta(d\phi) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G - 2\mu \delta \bar{u}^T W \right) \delta^2 \bar{u} dt = 0$$

$$\bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G - 2\mu \delta \bar{u}^T W = 0$$

$$\delta \bar{u}^T = \frac{1}{2\mu} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G W^{-1}$$

転置を取ると

$$\delta \bar{u} = \frac{1}{2\mu} \bar{\lambda}_{\phi\Omega} G^T W^{-1}$$

() 式に代入して

$$(dP)^2 = \frac{1}{4\mu^2} \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega} dt$$

ここで

$$I_{\phi\phi} \equiv \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\phi\Omega} dt$$

と置く。() 式から μ を求めると

$$\mu = \pm 2 \sqrt{\frac{I_{\phi\phi}}{(dP)^2}}$$

$$\delta \bar{u}^T = \pm \sqrt{(dP)^2 / I_{\phi\phi}} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G W^{-1} \text{ から}$$

$$d\phi = \pm \sqrt{(dP)^2 / I_{\phi\phi}} \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \lambda_{\phi\Omega} dt$$

$I_{\phi\phi}$ の定義から

$$d\phi = \pm \sqrt{(dP)^2} I_{\phi\phi}$$

P に対する変化率は

$$\frac{d\phi}{dP} = \pm \sqrt{I_{\phi\phi}}$$

III 再突入問題(勾配法)

$\delta \bar{u} = \bar{u} - \bar{u}^*$: 制御変数

$\delta \bar{x} = \bar{x} - \bar{x}^*$: 状態変数

\bar{u}^*, \bar{x}^* : ノミナル軌道値

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u})$$

線形化

$$\delta \dot{\bar{x}} = \bar{f}_{\bar{x}}^* \delta \bar{x} + \bar{f}_{\bar{u}}^* \delta \bar{u} = \bar{F} \delta \bar{x} + \bar{G} \delta \bar{u}$$

ただし

$$\bar{F} = \bar{f}_{\bar{x}}^*$$

$$\bar{G} = \bar{f}_{\bar{u}}^*$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\bar{F}^T \bar{\lambda}$$

$\delta \bar{x}^T$ を両辺に掛けて転置を取ると

$$\delta \bar{x}^T \dot{\bar{\lambda}} = -\delta \bar{x}^T \bar{F}^T \bar{\lambda}$$

$$\dot{\bar{\lambda}}^T \delta \bar{x} = -\bar{\lambda}^T \bar{F} \delta \bar{x}$$

()式の両辺に $\delta \bar{\lambda}^T$ 掛けて転置を取ると

$$\bar{\lambda}^T \delta \dot{\bar{x}} = \bar{\lambda}^T \bar{F} \delta \bar{x} + \bar{\lambda}^T \bar{G} \delta \bar{u}$$

$\bar{\lambda}^T \delta \bar{x}$ の微分をとり上式ををもちいると

$$\frac{d}{dt}(\bar{\lambda}^T \delta \bar{x}) = \bar{\lambda}^T \delta \dot{\bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}}^T \delta \bar{x}$$

$$= (\bar{\lambda}^T \bar{F} \delta \bar{x} + \bar{\lambda}^T \bar{G} \delta \bar{u}) - \bar{\lambda}^T \bar{F} \delta \bar{x} = \bar{\lambda}^T \bar{G} \delta \bar{u}$$

または

$$\bar{\lambda}_f^T \delta \bar{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}^T \bar{G} \delta \bar{u}) dt + \bar{\lambda}_0^T \delta \bar{x}_0$$

コスト関数, 終了条件

$$\Phi = \Phi(\bar{x}_f)$$

$$\bar{\Omega} = x_{1f} - x_{Dif} = 0$$

時間変化率

$$d\Phi = \Phi_{\bar{x}_f} \delta \bar{x}_f + \Phi_{\bar{u}_f} \delta \bar{u}_f + \dot{\Phi} \delta t_f$$

$$d\Omega = \Omega_{\bar{x}_f} \delta \bar{x}_f + \Omega_{\bar{u}_f} \delta \bar{u}_f + \dot{\Omega} \delta t_f$$

$$\Phi_{\bar{u}_f} \Omega_{\bar{u}_f} = 0$$

$$d\Phi = \Phi_{\bar{x}_f} \delta \bar{x}_f + \dot{\Phi} \delta t_f$$

$$d\Omega = \Omega_{\bar{x}_f} \delta \bar{x}_f + \dot{\Omega} \delta t_f$$

$$\bar{\lambda}_{\Phi_f}^T \equiv \Phi_{\bar{x}_f}$$

$$\bar{\lambda}_{\Omega_f}^T \equiv \Omega_{\bar{x}_f}$$

$$d\Phi = \bar{\lambda}_{\Phi_f}^T \delta \bar{x}_f + \dot{\Phi} \delta t_f$$

$$d\Omega = \bar{\lambda}_{\Omega_f}^T \delta \bar{x}_f + \dot{\Omega} \delta t_f$$

$t = t_f$ において $\Omega = 0$ より

$$d\Omega = \bar{\lambda}_{\Omega_f}^T \delta \bar{x}_f + \dot{\Omega} \delta t_f = 0$$

$$\delta t_f = -\frac{\bar{\lambda}_{\Omega_f}^T}{\dot{\Omega}} \delta \bar{x}_f$$

上式に代入 δt_f を消去するとコスト関数は

$$d\Phi = \bar{\lambda}_{\Phi_f}^T \delta \bar{x}_f - \frac{\dot{\Phi}}{\Omega} \bar{\lambda}_{\Omega_f}^T \delta \bar{x}_f$$

$$\bar{\lambda}_f^T \delta \bar{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}^T G \delta \bar{u}) dt + \bar{\lambda}_0^T \delta \bar{x}_0 \text{ において}$$

$$\bar{\lambda}^T = \bar{\lambda}_{\Phi}^T, \bar{\lambda}_{\Omega}^T$$

$$\bar{\lambda}_{\Phi_f}^T \delta \bar{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}_{\Phi}^T G \delta \bar{u}) dt + \bar{\lambda}_{\Phi_0}^T \delta \bar{x}_0$$

$$\bar{\lambda}_{\Omega_f}^T \delta \bar{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}_{\Omega}^T G \delta \bar{u}) dt + \bar{\lambda}_{\Omega_0}^T \delta \bar{x}_0$$

$$t = t_0 \quad \delta \bar{x}_0 = 0 \text{ より右辺第 2 項は 0}$$

$$\bar{\lambda}_{\Phi_f}^T \delta \bar{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}_{\Phi}^T G \delta \bar{u}) dt$$

$$\bar{\lambda}_{\Omega_f}^T \delta \bar{x}_f = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}_{\Omega}^T G \delta \bar{u}) dt$$

$$\text{上式を } d\Phi = \bar{\lambda}_{\Phi_f}^T \delta \bar{x}_f - \frac{\dot{\Phi}}{\Omega} \bar{\lambda}_{\Omega_f}^T \delta \bar{x}_f \text{ に代入して}$$

$$d\Phi = \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\Phi} - \frac{\dot{\Phi}}{\Omega} \bar{\lambda}_{\Omega} \right)^T G \delta \bar{u} dt$$

$$\bar{\lambda}_{\Phi\Omega} \equiv \bar{\lambda}_{\Phi} - \frac{\dot{\Phi}}{\Omega} \bar{\lambda}_{\Omega}$$

$$d\Phi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G \delta \bar{u} dt$$

制御変数の変分の 2 乗和を

$$(dP)^2 = \int_{t_0}^{t_f} (\delta \bar{u}^T W \delta \bar{u}) dt$$

W: 重み (対称) 行列

上式に対してラグランジェ乗数を適用して

$$\mu (dP)^2 - \mu \int_{t_0}^{t_f} (\delta \bar{u}^T W \delta \bar{u}) dt = 0$$

$$d\Phi = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G \delta \bar{u} dt \text{ 式は}$$

$$d\Phi = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G - \mu \delta \bar{u}^T W) \delta \bar{u} dt + \mu (dP)^2$$

上式の変分をとると

$$\delta(d\Phi) = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G - 2\mu \delta \bar{u}^T W) \delta^2 \bar{u} dt = 0$$

上式から

$\bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G - 2\mu \delta \bar{u}^T W = 0$ 従って制御変数は

$$\delta \bar{u}^T = \frac{1}{2\mu} \bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G W^{-1}$$

$$(\text{dP})^2 = \frac{1}{4\mu^2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\Phi\Omega} \right) dt$$

または

$$2\mu = \pm \left[\frac{1}{(\text{dP})^2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\Phi\Omega} \right) dt \right]^{1/2}$$

ここで

$$I_{\Phi\Phi} \equiv \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\Phi\Omega} \right) dt$$

と置けば

$$2\mu = \pm \left\{ \frac{I_{\Phi\Phi}}{(\text{dP})^2} \right\}^{1/2}$$

制御変数の修正量

$$\delta \bar{u}^T = \pm \left\{ \frac{(\text{dP})^2}{I_{\Phi\Phi}} \right\}^{1/2} \bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G W^{-1}$$

これよりコスト関数は

$$\text{d}\Phi = \pm \left\{ \frac{(\text{dP})^2}{I_{\Phi\Phi}} \right\}^{1/2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G W^{-1} G^T \bar{\lambda}_{\Phi\Omega} \right) dt = \pm \left\{ (\text{dP})^2 I_{\Phi\Phi} \right\}^{1/2}$$

コスト関数の変化率、勾配は

$$\frac{\text{d}\Phi}{\text{dP}} = -\sqrt{I_{\Phi\Phi}}$$

最適値になると 0 に近づく。

漸化式

$$\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i - \left\{ \frac{(\text{dP})^2}{I_{\Phi\Phi}} \right\}^{1/2} \bar{\lambda}_{\Phi\Omega}^T G W^{-1}$$

$$\Phi_{i+1 \text{ est}} = \Phi_i - \left\{ (\text{dP})^2 I_{\Phi\Phi} \right\}^{1/2}$$

線形性チェック

$$\Phi_{i+1} \leq \Phi_{i+1 \text{ est}} + \varepsilon (\Phi_i - \Phi_{i+1 \text{ est}}) = \Phi_i - (1-\varepsilon) \left\{ (\text{dP})^2 I_{\Phi\Phi} \right\}^{1/2}$$

$$\bar{\lambda}_{\Phi\Omega} = \bar{\lambda}_{\Phi} - \frac{\dot{\Phi}}{\Omega} \bar{\lambda}_{\Omega}$$

$$\bar{\lambda} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{\Phi} & \bar{\lambda}_{\Omega} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda}_{\Phi\Omega}$$

横断条件：

$$\bar{\lambda}_f = \Phi \bar{x}_f - \frac{\dot{\Phi}}{\dot{\Omega}} \Omega \bar{x}_f$$

$$d\bar{u}^T = - \left\{ \frac{(dP)^2}{I_{\Phi\Phi}} \right\}^{1/2} \bar{\lambda}^T G W^{-1}$$

$$I_{\Phi\Phi} = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}^T G W^{-1} G^T \bar{\lambda}) dt$$

勾配法の演算

1. FG 行列の計算

$$\bar{F} = \bar{f}_x \quad (n \times n)$$

$$\bar{G} = \bar{f}_v \quad (n \times 1)$$

2.

$$K_3 = \frac{\dot{\Phi}}{\dot{\Omega}}$$

3. コスト関数と時間変化率

$$\Phi = -K_1 x_{2f} + K_2 x_{5f}$$

時間変化率

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_{\bar{x}_f} \dot{\bar{x}}_f = -K_1 \dot{x}_{2f} + K_2 \dot{x}_{5f} = -K_1 f_{2f} + K_2 f_{5f}$$

停止条件と時間変化率

$$\Omega = x_{1f} - x_{D1f}$$

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{\bar{x}_f} \dot{\bar{x}}_f = \dot{x}_{1f} = f_{1f}$$

$$K_3 = \frac{-K_1 f_{2f} + K_2 f_{5f}}{f_{1f}}$$

随伴方程式

$$\bar{\lambda} = -\bar{F}^T \bar{\lambda}$$

$$\bar{\lambda}_f = \Phi_{x_f} - K_3 \Omega_{x_f}$$

4.

$$K_4 = \left\{ \frac{(dP)^2}{I_{\Phi\Phi}} \right\}^{1/2}$$

$$d\bar{u}^T = -K_4 \bar{\lambda}^T G W^{-1}$$

ただし

$$I_{\Phi\Phi} = \int_{t_0}^{t_f} (\bar{\lambda}^T G G^T \bar{\lambda}) dt$$

$$\dot{I}_{\Phi\Phi} = \bar{\lambda}^T G G^T \bar{\lambda}$$

ここで

$$\begin{aligned}
W &= [I] \\
G &= f_u \\
g_i &= f_{i_\alpha} \quad (i=1, n) \\
g_i &= f_{i_\alpha} \quad (i=1, n) \\
f_1 &= -x_3 \sin x_4 \\
f_2 &= x_3 \cos x_4 / x_1 \\
f_3 &= \mu \sin x_4 / x_1^2 - C_D Q B_3 \\
f_4 &= \left\{ \left(\mu / x_1 - x_3^2 \right) \cos x_4 - C_L Q B_3 \right\} / x_3 \\
f_5 &= C_{5B} (19f_3 / 6x_3 - \beta f_1) \\
g_1 &= 0 \\
g_2 &= 0 \\
g_3 &= -Q B_3 C_{D_\alpha} \\
g_4 &= -Q B_3 C_{L_\alpha} / x_3 \\
f_5 &= 19C_{5B} g_3 / 6x_3
\end{aligned}$$

随伴方程式

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\lambda}} &= g(\bar{x}, \bar{\lambda}) = -\bar{f}_{\bar{x}}^T \bar{\lambda} : \text{ニュートン法} \\
\dot{\bar{\lambda}} &= g(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u}) = -\bar{f}_{\bar{x}}^T \bar{\lambda} = -\bar{F}^T \bar{\lambda} : \text{勾配法}
\end{aligned}$$

\bar{F} 行列の要素

$$\begin{aligned}
f_3 &= -\frac{C_D \hat{A}}{2} \rho V^2 - g \sin \gamma \\
f_2 &= \frac{V \cos \gamma}{r} + \lambda_V \left(-\frac{C_D \hat{A}}{2} \rho V^2 - g \sin \gamma \right) + \lambda_\gamma \left(\frac{C_L \hat{A}}{2} \rho V + \frac{V \cos \gamma}{r} - \frac{g \cos \gamma}{V} \right) \\
&\quad + \lambda_Q C'_{H_N} \rho^{0.5} V^{3.15} \left(-\frac{3.15 C_D \hat{A}}{2} \rho V - \frac{3.15 \mu \sin \gamma}{V r^2} - \frac{\beta V \sin \gamma}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= V \sin \gamma \\
f_{11} &= f_{12} = f_{15} = 0 \\
f_{13} &= \sin \gamma \\
f_{14} &= V \cos \gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= V \cos \gamma / r \\
f_{22} &= f_{25} = 0 \\
f_{21} &= -V \cos \gamma / r^2 \\
f_{23} &= \cos \gamma / r \\
f_{24} &= -V \sin \gamma / r \\
f_3 &= -\left(C_D \hat{A} / 2 \right) \rho V^2 - \mu \sin \gamma / r^2 \\
f_{32} &= f_{35} = 0
\end{aligned}$$

$$C_D = C_{D0} + 1.8 \sin^2 \alpha$$

$$f_{31} = (C_D \hat{A} / 2) \rho \beta V^2 - 2 \mu \sin \gamma / r^2$$

$$f_{33} = -(C_D \hat{A} / 2) 2 \rho V$$

$$f_{34} = -\mu \cos \gamma / r^2$$

ステップサイズ

$$(dP)^2 = \int_{t_0}^t (\delta \bar{u}^T W \delta \bar{u}) dt$$

$\delta \bar{u} = 1^\circ$ にとると

$$(dP)^2 = W t_f / 57.3^2$$

ただし $W = 1$

10-4. Λ マトリックス誘導

最適軌道を基準とした誘導則 (Neighboring Optimum Method)

再突入軌道の最適問題は目的関数 $J = \phi(\bar{x}_f, t_f)$ が極値をとるように変分 δJ を $\delta J = 0$ と置いて必要条件を求めた。(最大値の原理) 逆に必要条件を満たす最適軌道を求めたとき制御変数 \bar{u}^* は一意的に決まる (開ループ軌道)。しかし実際の再突入軌道では初期条件や大気条件 (大気モデル, 重力モデル) が最適軌道を求めたときの条件とは異なる。そこで最適軌道からのずれを制御変数を修正して $\bar{u} = \bar{u}^* + \delta \bar{u}$, 最適軌道に沿うように軌道の制御あるいは誘導を行う方法 (Neighboring Optimum Method) について記述する。

1) Payne の方法

目的関数を Mayer 型にとる。

$$J = \phi(\bar{x}_f) \quad (1)$$

状態方程式と随伴方程式は

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}) \quad (2)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -(\partial \bar{f} / \partial \bar{x})^T \bar{\lambda} \quad (3)$$

ハミルトン関数は状態関数ベクトル, 随伴関数ベクトルの内積から次式で表される。

$$H(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{u}) = \bar{\lambda}^T \bar{f} \quad (4)$$

ハミルトン関数を用いると (2), (3) 式は次のようにも表される。

$$\dot{\bar{x}} = \partial H / \partial \bar{\lambda} \quad (5)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\partial H / \partial \bar{x} \quad (6)$$

また最適条件は次式で表される。

$$H_{\bar{u}} = \bar{\lambda}^T (\partial \bar{f} / \partial \bar{u}) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix} \quad (n \times p)$$

初期条件は 初期時刻 $t = t_0$ で

$$\bar{x}_0 = [x_{10}, \dots, x_{m0} : x_{m+10}, \dots, x_{n0}]^T \quad (6)$$

終端条件は 終端時刻 $t = t_f$ での状態変数 \bar{x}_f のうち, $x_{1fD} \cdots x_{mfD}$ が指定 (添字 D は指定値) $x_{m+1f} \cdots x_{nf}$ を自由とする。

$$\begin{aligned} \bar{x}_f &= \left[\underline{x_{1fD}, \dots, x_{mfD}} : x_{m+1f}, \dots, x_{nf} \right]^T \quad (x_{1fD}, \dots, x_{mfD} : \text{指定}, \quad x_{m+1f}, \dots, x_{nf} : \text{自由}) \quad (7) \\ \bar{\lambda}_f &= \left[\lambda_{1f}, \dots, \lambda_{mf} : \underline{0_{m+1f}, \dots, 0_{nf}} \right]^T \quad (8) \end{aligned}$$

終端値が自由に対応する随伴変数は 0 である。

ここで, 終端条件のうち $\bar{x}_f, \bar{\lambda}_f$ で指定されていない成分を取って, あらたに変数 \bar{z}_f を定義する。

ハミルトン関数に時刻 t が陽に含まれていないことから $H(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$ この変分をとると

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \delta \bar{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \delta \bar{x} = \bar{f} \delta \bar{\lambda} - \dot{\bar{\lambda}} \delta \bar{x} = \bar{f} \delta \bar{\lambda} + \left(\partial \bar{f} / \partial \bar{x} \right)^T \bar{\lambda} \delta \bar{x} = 0 \quad (9)$$

上記代数式から $\bar{\lambda}$ ベクトルは独立ではなく, いずれか 1 つの随伴変数は残りの随伴変数で表される。 λ_m は $\lambda_m = f(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$ で表されるから

$$\bar{z}_f = \left[\lambda_{1f}, \dots, \lambda_{m-1f}, t_f : \underline{x_{m+1f}, \dots, x_{nf}} \right]^T \quad (n \times 1) \quad (10)$$

これから (2), (3) 式を最適条件 (7) のもとに, 終端条件 (9) を初期値として逆方向 $t_f \rightarrow t_0$ に積分し, 最適軌道を求める。

まず最適軌道を既知として基準軌道からの変分を $\delta \bar{x}$, $\delta \bar{\lambda}$ とする。 $\delta \bar{x}$, $\delta \bar{\lambda}$ に関する変分方程式は (2) (3) 式から

$$\frac{d(\delta \bar{x})}{dt} = H_{\bar{x}\bar{x}} \delta \bar{x} + H_{\bar{x}\bar{u}} \delta \bar{u} \quad (11)$$

$$\frac{\partial(\delta \bar{\lambda})}{\partial t} = -H_{\bar{x}\bar{x}} \delta \bar{x} - H_{\bar{x}\bar{\lambda}} \delta \bar{\lambda} - H_{\bar{x}\bar{u}} \delta \bar{u} \quad (12)$$

(7) 式から $\delta H_{\bar{u}}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}) = H_{\bar{u}\bar{x}} \delta \bar{x} + H_{\bar{u}\bar{\lambda}} \delta \bar{\lambda} + H_{\bar{u}\bar{u}} \delta \bar{u} = 0$ これより制御変数 \bar{u} の変分 $\delta \bar{u}$ は次のようになる。

$$\delta \bar{u} = -\left(H_{\bar{u}\bar{u}} \right)^{-1} \left(H_{\bar{u}\bar{x}} \delta \bar{x} + H_{\bar{u}\bar{\lambda}} \delta \bar{\lambda} \right) \quad (13)$$

また, 変数 \bar{z} の変分 $\delta \bar{z}$ は (10) 式から

$$\begin{aligned} \delta \bar{z} &= \left[\delta \lambda_1, \dots, \delta \lambda_{m-1}, \delta t : \delta x_{m+1f} \cdots \delta x_{nf} \right]^T \\ &= \left[\delta z_1, \dots, \delta z_{m-1}, \delta z_m : \delta z_{m+1} \cdots \delta z_n \right]^T \end{aligned} \quad (14)$$

であり \bar{z} の \bar{z}_1, \bar{z}_n に関する変化率は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z_1} &= \frac{\partial \bar{z}}{\partial \lambda_1} = [1, 0, \dots, 0_n]^T \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial z_n} &= \frac{\partial \bar{z}}{\partial \lambda_n} = [0, 0, \dots, 1_n]^T \end{aligned} \quad (15)$$

δz_1 に対応する $\delta x(t)$ の解を $R_1(t)$, $\delta \lambda(t)$ の解を $S_1(t)$ とし, 同様に $R_j(t)$, $S_j(t)$ ($j=2, n$) とおく

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{x}(t) \\ \delta \bar{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t) \\ S(t) \end{bmatrix} \bar{z}_f \quad (16)$$

ここで $R = \{R_1, R_2 \dots R_n\}$ $S = \{S_1, S_2 \dots S_n\}$

(16) 式で $t=t_0$ とおくと終端値 \bar{z}_f は次のように初期値を用いて表わすことができる。

$$\bar{z}_f = \bar{R}(t_0)^{-1} \delta \bar{x}_0 \quad (17)$$

これを(16)式に代入して

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{x}(t) \\ \delta \bar{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t) \\ S(t) \end{bmatrix} R^{-1}(t_0) \delta \bar{x}_0 \quad (18)$$

さらに(13)式 $\delta \bar{u} = -(H_{\bar{u}\bar{u}})^{-1} (H_{\bar{u}\bar{x}} \delta \bar{x} + H_{\bar{u}\bar{\lambda}} \delta \bar{\lambda})$ に代入して

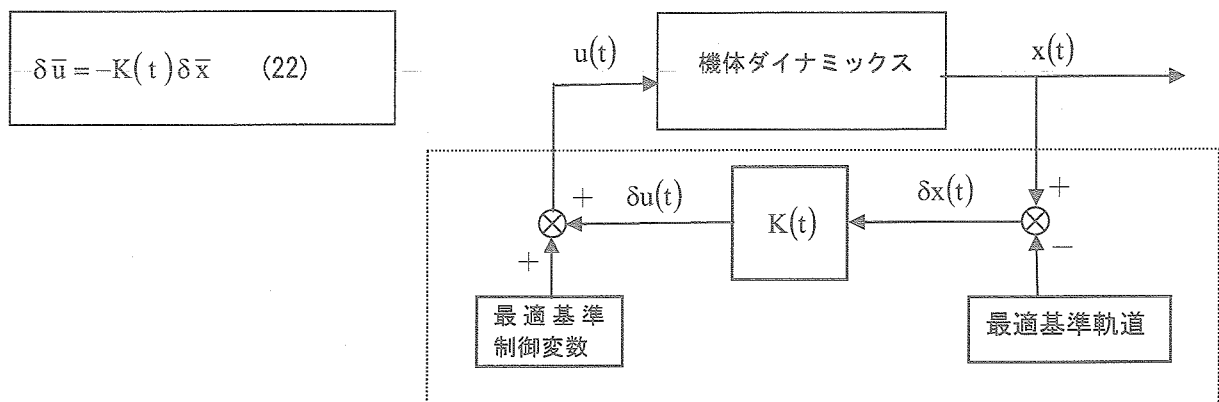
$$\delta \bar{u} = -(H_{\bar{u}\bar{u}})^{-1} \{H_{\bar{u}\bar{x}} R(t) + H_{\bar{u}\bar{\lambda}} S(t)\} R^{-1}(t_0) \delta \bar{x}_0 \quad (19)$$

これを整理すると一般に $t_0 \leq t \leq t_f$ 間の t に対してフィードバック量は次式で表される。

$$\delta \bar{u} = -(H_{\bar{u}\bar{u}})^{-1} \{H_{\bar{u}\bar{x}} + H_{\bar{u}\bar{\lambda}} S(t) R^{-1}(t)\} \delta \bar{x} \quad (20)$$

ここでゲイン $K(t)$ を次のようにおけば

$$K(t) = -(H_{\bar{u}\bar{u}})^{-1} \{H_{\bar{u}\bar{x}} + H_{\bar{u}\bar{\lambda}} S(t) R^{-1}(t)\} \quad (21)$$



2) Bryson の方法

目的関数を Mayer 型 $J = \phi(\bar{x}(t_f), t_f)$ にとる。

状態方程式と随伴方程式は

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}) \quad (1)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -(\partial \bar{f} / \partial \bar{x})^T \bar{\lambda} \quad (2)$$

ハミルトン関数を用いると最適条件は

$$H_{\bar{u}} = \bar{\lambda}^T (\partial \bar{f} / \partial \bar{u}) = 0 \quad (3)$$

$$\text{初期条件は初期時刻 } t=t_0 \text{ で } \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (4)$$

$$\text{終端拘束は } t=t_f \text{ で } \bar{\psi}\{\bar{x}(t_f), t_f\} = \bar{\psi}_f \quad (5)$$

Mayer 型なので横断条件は以下のとおりとなる。

$$\bar{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} + \bar{v}^T \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \right)_{t=t_f}^T \quad : \text{横断条件(I)} \quad (6)$$

$$\left(\bar{\lambda}^T \bar{f} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{v}^T \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right)_{t=t_f} = 0 \quad : \text{横断条件(II)} \quad (7)$$

ただし

$$\bar{x} = [x_1, x_2 \dots x_n]^T \quad : \text{状態変数ベクトル}$$

$$\bar{u} = [u_1, \dots, u_q]^T \quad (q \leq n) \quad : \text{制御変数ベクトル}$$

$$\bar{f} = [f_1, f_2 \dots f_n]^T \quad : \text{状態拘束関数ベクトル}$$

$$\bar{\psi} = [\psi_1, \psi_2 \dots \psi_m]^T \quad (m \times 1) \quad : \text{終端拘束関数ベクトル}$$

$$\bar{v} = [v_1, v_2 \dots v_m]^T \quad (m \times 1) \quad : \text{ラグランジェ未定乗数ベクトル}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right] \quad (1 \times n) \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (m \times n)$$

$$H = \bar{\lambda}^T \bar{f} \quad : \text{ハミルトン関数} \quad (8)$$

$$\Phi = \phi + \bar{v}^T \bar{\psi} \quad : \text{拡張目的関数} \quad (9)$$

これから最適フィードバック量の計算を行う。

(1) 式の変分をとると $\bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$

$$\frac{d(\delta\bar{x})}{dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \delta\bar{x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \delta\bar{u} \text{ から}$$

$$\frac{d(\delta\bar{x})}{dt} - \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \bar{x}} \delta\bar{x} = \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \bar{u}} \delta\bar{u} \quad (n \times 1) \quad (10)$$

(2) 式は $\dot{\bar{\lambda}} = -H_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t)$ の変分をとると

$$\frac{\partial(\delta\bar{\lambda})}{\partial t} = -\frac{\partial H_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} \delta\bar{x} - \frac{\partial H_{\bar{x}}}{\partial \lambda} \delta\bar{\lambda} - \frac{\partial H_{\bar{x}}}{\partial \bar{u}} \delta\bar{u} \text{ から}$$

$$\frac{\partial(\delta\bar{\lambda})}{\partial t} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} \delta\bar{x} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \lambda} \delta\bar{\lambda} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \delta\bar{u} \quad (n \times 1) \quad (11)$$

(3) 式は $(\partial \bar{f} / \partial \bar{u})^T \bar{\lambda} = H_{\bar{u}}^T(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t)$ から $(\partial \bar{f} / \partial \bar{u}) \bar{\lambda} = H_{\bar{u}}^T(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = 0$ であらわされ

$H_{\bar{u}}^T(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = 0$ の変分をとると

$$\delta H_{\bar{u}} = \frac{\partial H_{\bar{u}}}{\partial \bar{x}} \delta\bar{x} + \frac{\partial H_{\bar{u}}}{\partial \lambda} \delta\bar{\lambda} + \frac{\partial H_{\bar{u}}}{\partial \bar{u}} \delta\bar{u} = 0 \text{ から}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right) \delta\bar{x} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right) \delta\bar{\lambda} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \delta\bar{u} \quad (12)$$

初期条件(4), 終端条件(5)式の変分をとると

$$\delta\bar{x}(t_0) = \delta\bar{x}_0 \quad (n \times 1) \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \delta\bar{x} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \delta t = d\bar{\Psi}_f \quad (m \times 1) \quad (14)$$

(6) 式の変分は

$$\left[\delta\bar{\lambda} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} \delta\bar{x} - \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \right)^T d\bar{v} - \left\{ \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right) \right\}^T dt_f \right]_{t=t_f} = 0 \quad (n \times 1) \quad (15)$$

(7) 式の変分は

$$\left[\bar{f}^T \delta\bar{\lambda} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x} \partial t} \delta\bar{x} - \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \right)^T d\bar{v} - \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right\}^T dt_f \right]_{t=t_f} = 0 \quad (1 \times 1) \quad (16)$$

$$\text{ただし } d\bar{v}^T = \frac{\partial \bar{v}^T}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \bar{v}^T}{\partial \bar{x}} \delta\bar{x}$$

(15) (16) 式の導出は補足参照。

(12) 式から $\delta\bar{u}$ を求めると

$$\delta\bar{u} = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \delta\bar{x} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{\lambda} \partial \bar{u}} \delta\bar{\lambda} \right) \quad (17)$$

(17) 式の $\delta\bar{u}$ を (10) (11) に代入して $\delta\bar{u}$ を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta\bar{x})}{dt} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \right) \delta\bar{x} &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \right) \delta\bar{u} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\delta\bar{\lambda}) + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} \delta\bar{x} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{\lambda}} \delta\bar{\lambda} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \right) \delta\bar{u} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta\bar{x})}{dt} &= \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{\lambda} \partial \bar{x}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{\lambda} \partial \bar{u}} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \right) \right\} \delta\bar{x} + \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{\lambda} \partial \bar{u}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{\lambda}} \right) \right\} \delta\bar{\lambda} = C_1(t) \delta\bar{x} + C_2(t) \delta\bar{\lambda} \\ \frac{d(\delta\bar{\lambda})}{dt} &= \left\{ -\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \right) \right\} \delta\bar{x} + \left\{ -\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{\lambda}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{\lambda}} \right) \right\} \delta\bar{\lambda} = C_3(t) \delta\bar{x} + C_4(t) \delta\bar{\lambda} \end{aligned} \quad (18) (19)$$

(18) (19) 式右辺で $C_4(t) = -C_1(t)^T$ (転置) となる。(18) (19) 式を行列形式で表すと

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\bar{x} \\ \delta\bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t) & C_2(t) \\ C_3(t) & -C_1(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\bar{x} \\ \delta\bar{\lambda} \end{bmatrix} \quad (20)$$

ただし

$$C_1(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{\lambda} \partial \bar{x}} - \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{\lambda} \partial \bar{u}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \right) = H_{\bar{\lambda}\bar{x}} - H_{\bar{\lambda}\bar{u}} H_{\bar{u}\bar{u}}^{-1} H_{\bar{u}\bar{x}} \quad (21)$$

$$C_2(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{\lambda} \partial \bar{u}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{\lambda}} \right) = H_{\bar{\lambda}\bar{u}} H_{\bar{u}\bar{u}}^{-1} H_{\bar{u}\bar{\lambda}} \quad (22)$$

$$C_3(t) = -\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \right) = -H_{\bar{x}\bar{x}} + H_{\bar{x}\bar{u}} H_{\bar{u}\bar{u}}^{-1} H_{\bar{u}\bar{x}} \quad (23)$$

$$-C_1^T(t) = -\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{\lambda}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{\lambda}} \right) = -H_{\bar{x}\bar{\lambda}} + H_{\bar{x}\bar{u}} H_{\bar{u}\bar{u}}^{-1} H_{\bar{u}\bar{\lambda}} \quad (24)$$

独立な終端値を成分として終端条件を \bar{h}_f で表わすと

$$\bar{h}_f = [\delta v_1 \cdots \delta v_m : \delta x_{m+1} \cdots \delta x_n]^T \quad (n \times 1) : \text{終端条件} \quad (25)$$

(20) 式の解を $X(t, t_f)$ とすれば

$$\begin{bmatrix} \delta\bar{x}(t) \\ \delta\bar{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\bar{x}\bar{h}}(t) & X_{\bar{x}\bar{\psi}}(t) \\ X_{\bar{\lambda}\bar{h}}(t) & X_{\bar{\lambda}\bar{\psi}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\bar{h}_f \\ d\bar{\psi}_f \end{bmatrix} \quad (26)$$

(26)式から

$$\delta\bar{x}(t) = X_{\bar{x}\bar{h}}(t)d\bar{h}_f + X_{\bar{x}\bar{\psi}}(t)d\bar{\psi}_f \quad (27)$$

$t = t_0$ において変動 $d\bar{h}_f$ を初期値で表わす

$$d\bar{h}_f = \left[X_{\bar{x}\bar{h}}(t_0) \right]^{-1} \left[\delta\bar{x}(t_0) - X_{\bar{x}\bar{h}}(t_0)d\bar{\psi}_f \right] \quad (28)$$

この $d\bar{h}_f$ を代入して

$$\begin{bmatrix} \delta\bar{x}(t) \\ \delta\bar{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\bar{x}\bar{h}}(t) & X_{\bar{x}\bar{\psi}}(t) \\ X_{\bar{\lambda}\bar{h}}(t) & X_{\bar{\lambda}\bar{\psi}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\bar{x}\bar{h}}^{-1}(t_0)\delta\bar{x}_0 - X_{\bar{x}\bar{h}}^{-1}(t_0)X_{\bar{x}\bar{h}}(t_0)d\bar{\psi}_f \\ d\bar{\psi}_f \end{bmatrix} \quad (29)$$

右辺第2項を $\delta\bar{x}(t_0), d\bar{\psi}_f$ の列ベクトルで表すと

$$\begin{bmatrix} \delta\bar{x}(t) \\ \delta\bar{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\bar{x}\bar{h}}(t) & X_{\bar{x}\bar{\psi}}(t) \\ X_{\bar{\lambda}\bar{h}}(t) & X_{\bar{\lambda}\bar{\psi}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\bar{x}\bar{h}}^{-1}(t_0) & -X_{\bar{x}\bar{h}}^{-1}(t_0)X_{\bar{x}\bar{h}}(t_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\bar{x}_0 \\ d\bar{\psi}_f \end{bmatrix} \quad (30)$$

(17)式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta\bar{u} &= -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} & \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\bar{x}\bar{h}}(t) & X_{\bar{x}\bar{\psi}}(t) \\ X_{\bar{\lambda}\bar{h}}(t) & X_{\bar{\lambda}\bar{\psi}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\bar{x}\bar{h}}^{-1}(t_0) & -X_{\bar{x}\bar{h}}^{-1}(t_0)X_{\bar{x}\bar{h}}(t_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\bar{x}_0 \\ d\bar{\psi}_f \end{bmatrix} \quad (31) \\ &= -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2}\right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} X_{\bar{x}\bar{h}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{\lambda}} X_{\bar{\lambda}\bar{h}} \right), \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} X_{\bar{x}\bar{\psi}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{\lambda}} X_{\bar{\lambda}\bar{\psi}} \right) \right] \begin{bmatrix} X_{\bar{x}\bar{h}}^{-1}(t_0) & -X_{\bar{x}\bar{h}}^{-1}(t_0)X_{\bar{x}\bar{h}}(t_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\bar{x}_0 \\ d\bar{\psi}_f \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式で

$$\Lambda_1(t) = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2}\right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} X_{\bar{x}\bar{h}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{\lambda}} X_{\bar{\lambda}\bar{h}} \right) \quad (32)$$

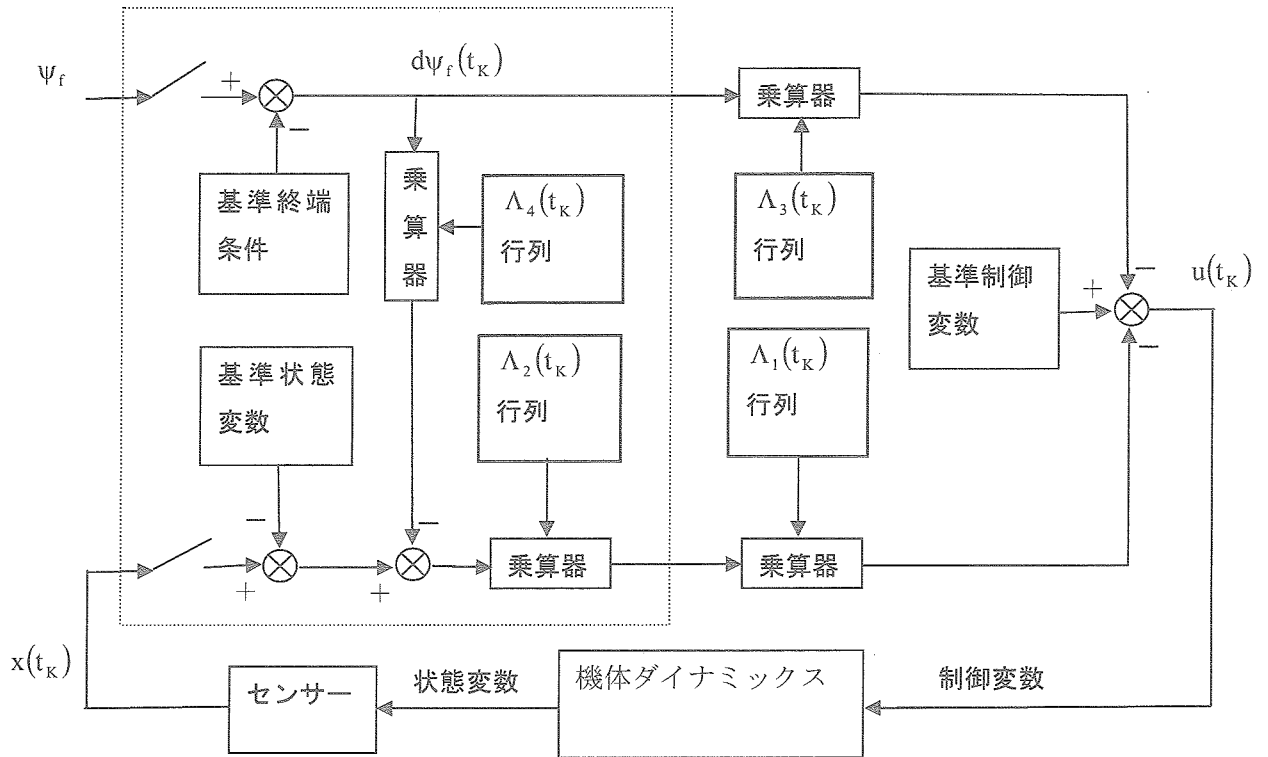
$$\Lambda_3(t) = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2}\right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} X_{\bar{x}\bar{\psi}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{\lambda}} X_{\bar{\lambda}\bar{\psi}} \right) \quad (33)$$

$$\Lambda_2(t_0) = X_{\bar{x}\bar{h}}^{-1}(t_0) \quad (34)$$

$$\Lambda_4(t_0) = X_{\bar{x}\bar{h}}(t_0) \quad (35)$$

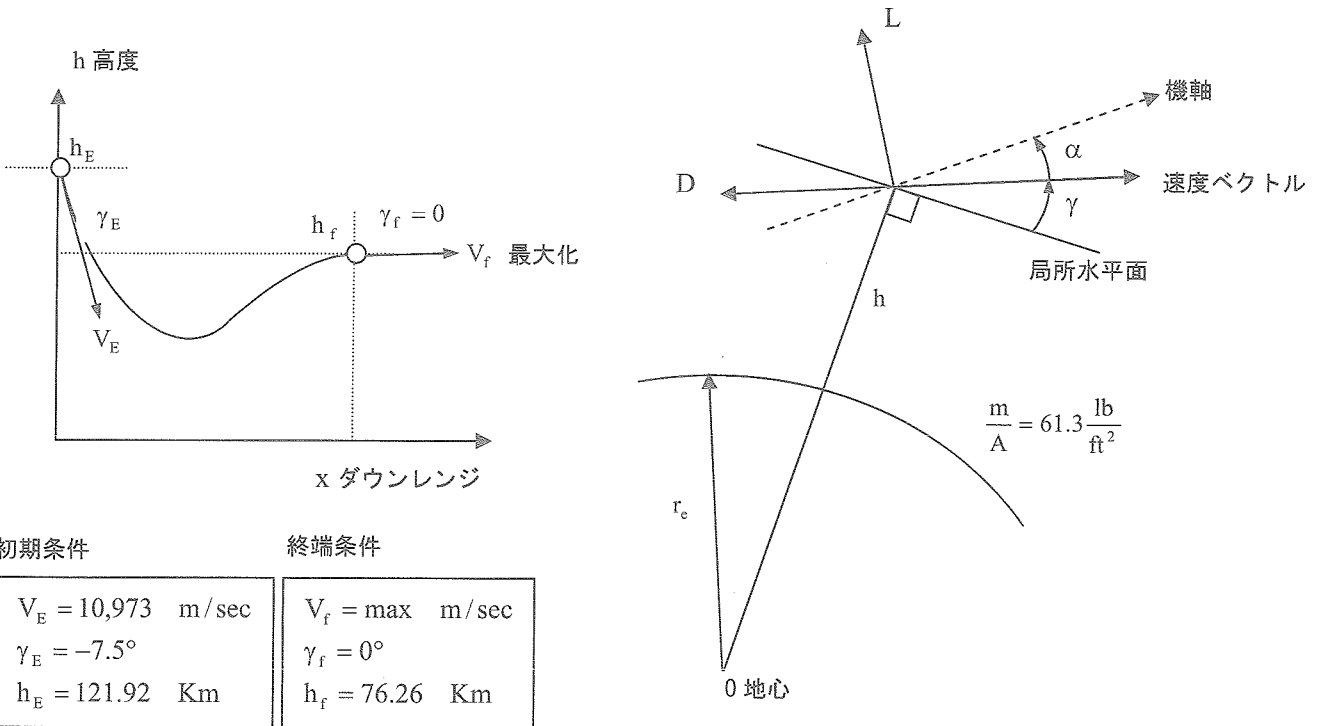
と置くと $\delta\bar{u}$ は次のようになる。 $\Lambda_2(t_0), \Lambda_4(t_0)$ は初期値により定まる定数行列。

$$\delta\bar{u} = -\left[\Lambda_1(t), \Lambda_3(t) \right] \begin{bmatrix} \Lambda_2(t_0) & -\Lambda_2(t_0)\Lambda_4(t_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\bar{x}_0 \\ d\bar{\psi}_f \end{bmatrix} \quad (36)$$



解析例

スキップ軌道に関する最適近似解は 10-1 項に示したがここではΛマトリックス誘導を用いてスーパーサーキュラ速度 ($V > 7.91\text{Km/sec}$) で再突入する宇宙機を迎角モジュレーションにより終端速度を最大化する例について示す。



初期条件	終端条件
$V_E = 10,973 \text{ m/sec}$	$V_f = \text{max} \text{ m/sec}$
$\gamma_E = -7.5^\circ$	$\gamma_f = 0^\circ$
$h_E = 121.92 \text{ Km}$	$h_f = 76.26 \text{ Km}$

運動方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{C_D A \rho V^2}{2m} - g \sin \gamma = f_1$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{C_L A \rho V}{2mV} + \frac{V}{R+h} \cos \gamma - \frac{g}{V} \cos \gamma = f_2$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma = f_3$$

ハミルトン関数は $H = \bar{f}^T \bar{\lambda} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i f_i = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ から

$$H = \lambda_v \left\{ -\frac{C_D A \rho V^2}{2m} - g \sin \gamma \right\} + \lambda_\gamma \left\{ \frac{C_L A}{2m} \rho V + \frac{V}{R+h} \cos \gamma - \frac{g}{V} \cos \gamma \right\} + \lambda_h (V \sin \gamma)$$

随伴方程式 $\dot{\bar{\lambda}} = -(\partial \bar{f} / \partial \bar{x}) \bar{\lambda}$ から

$$\dot{\lambda}_h = -\lambda_v \left\{ -\frac{2g}{(R+h)} \sin \gamma - \frac{C_D A V^2}{2m} \frac{d\rho}{dh} \right\} - \lambda_\gamma \left\{ \frac{C_L A V}{2m} \frac{d\rho}{dh} - \frac{V}{(R+h)^2} \cos \gamma + \frac{2g}{(R+h)V} \cos \gamma \right\}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_V &= -\lambda_h \sin \gamma - \lambda_V \left(-\frac{2C_D A \rho V}{2m} \right) - \lambda_\gamma \left\{ \frac{C_L A}{2m} \rho + \frac{1}{R+h} \cos \gamma + \frac{g}{V^2} \cos \gamma \right\} \\ \dot{\lambda}_\gamma &= -\lambda_h (V \cos \gamma) - \lambda_V (-g \cos \gamma) - \lambda_\gamma \left(-\frac{V}{R+h} + \frac{g}{V} \right) \sin \gamma\end{aligned}$$

最適条件は

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \lambda_\gamma - V \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \lambda_V = 0$$

初期値

$$V(t_0) = V_0 \quad \gamma(t_0) = \gamma_0 \quad h(t_0) = h_0$$

終端条件

$$\begin{aligned}\gamma(t_f) &= \gamma_f & h(t_f) &= h_f \\ \bar{\Psi}(t_f) &= \begin{bmatrix} h(t_f) - \hat{h}_f \\ \gamma(t_f) - \hat{\gamma}_f \end{bmatrix}\end{aligned}$$

随伴変数の終端値は次のように表わされる。

$$\bar{\lambda}(t_f) = \begin{bmatrix} \partial \phi / \partial V \\ \partial \phi / \partial \gamma + v_\gamma (\partial \Psi_\gamma / \partial \gamma) \\ \partial \phi / \partial h + v_h \partial \Psi_h / \partial h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ v_\gamma \\ v_h \end{bmatrix}$$

ハミルトン関数 H に時間 t は陽にあらわれないことから $H(t_f) = 0$

$$\left[-\lambda_V \left\{ -\frac{C_D A \rho V^2}{2m} - g \sin \gamma \right\} + \lambda_\gamma \left\{ \frac{C_L A}{2m} \rho V + \frac{V \cos \gamma}{R+h} - \frac{g \cos \gamma}{V} \right\} + \lambda_h (V \sin \gamma) \right]_{t=t_f} = 0$$

状態変数に関する摂動方程式 10-4. 2) 項 (10)-(17) 式に対して

$$\begin{aligned}\delta \bar{x} &= [\delta V \quad \delta \gamma \quad \delta h]^T \\ \delta \bar{\lambda} &= [\delta \lambda_V \quad \delta \lambda_\gamma \quad \delta \lambda_h]^T \\ \delta \bar{u} &= \delta \alpha \\ \text{と置くと}\end{aligned}$$

$$\delta \dot{\bar{x}} = [A] \delta \bar{x} + [B] \delta \bar{u}$$

$$\delta \dot{\bar{\lambda}} = -[C] \delta \bar{x} - [D] \delta \bar{\lambda} - [E] \delta \bar{u}$$

各係数行列 $[A]$ - $[E]$ はハミルトン関数 H を用いて次式で計算できる。

$$[A] = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_v} \right) & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_v} \right) & \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_\gamma} \right) & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_\gamma} \right) & \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_\gamma} \right) \\ \sin \gamma & V \cos \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad [B] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{\rho V^2 A}{2m} \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \\ \frac{\rho V A}{2m} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial H}{\partial V} \right) & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial H}{\partial V} \right) & \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial H}{\partial V} \right) \\ \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial H}{\partial \gamma} \right) & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial H}{\partial \gamma} \right) & \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial H}{\partial \gamma} \right) \\ \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial H}{\partial h} \right) & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial H}{\partial h} \right) & \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial H}{\partial h} \right) \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{C_D A \rho V}{m} & \frac{\partial}{\partial \lambda_\gamma} \left(\frac{\partial H}{\partial V} \right) & \sin \gamma \\ -g \cos \gamma & \frac{\partial}{\partial \lambda_\gamma} \left(\frac{\partial H}{\partial \gamma} \right) & V \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_v} \left(\frac{\partial H}{\partial h} \right) & \frac{\partial}{\partial \lambda_\gamma} \left(\frac{\partial H}{\partial h} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[E] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\rho V A}{m} \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) \lambda_v - \frac{\rho A}{2m} \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \lambda_\gamma \\ 0 \\ \frac{V^2 A}{2m} \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right) \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) \lambda_v - \frac{V A}{2m} \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right) \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \lambda_\gamma \end{bmatrix}$$

初期条件に対する変分は

$$\delta V(t_0) = \delta V_0$$

$$\delta \gamma(t_0) = \delta \gamma_0$$

$$\delta h(t_0) = \delta h_0$$

終端条件に対する変分は

$$dh_f = \delta h(t_f) + (V \sin \gamma)_{t=t_f} dt_f$$

$$d\gamma_f = \delta \gamma(t_f) + \left\{ \frac{C_L A \rho V}{2m} + \left(\frac{V}{R+h} - \frac{g}{V} \right) \cos \gamma \right\}_{t=t_f} dt_f$$

$$\delta \lambda_v(t_f) + \left[\frac{C_D A \rho V}{m} \lambda_v + \left\{ \frac{C_L A \rho}{2m} + \left(\frac{1}{R+h} + \frac{g}{V^2} \right) \cos \gamma \right\} \lambda_\gamma - \sin \gamma \lambda_h \right]_{t=t_f} dt_f = 0$$

$$\delta\lambda_\gamma(t_f) + \left[g \cos \gamma \lambda_v + \left(\frac{V}{R+h} - \frac{g}{V} \right) \sin \gamma \lambda_\gamma - V \cos \gamma \lambda_h \right]_{t=t_f} dt_f + dv_\gamma = 0$$

$$\delta\lambda_h(t_f) + \left[\left(-\frac{2g \sin \gamma}{R+h} + \frac{C_D AV^2}{2m} \frac{\partial \rho}{\partial h} \right) \lambda_v + \left\{ \left(\frac{V}{(R+h)^2} - \frac{2g}{V(R+h)} \right) \cos \gamma - \frac{C_L AV}{2m} \frac{\partial \rho}{\partial h} \right\} \lambda_\gamma \right]_{t=t_f} dt_f + dv_h = 0$$

$$\left[- \left\{ g \cos \gamma \lambda_v + \left(\frac{V}{R+h} - \frac{g}{V} \right) \sin \gamma \lambda_\gamma - V \cos \gamma \lambda_h \right\} \delta \gamma \right. \\ \left. + \left\{ \left\{ \frac{C_L AV}{2m} \frac{\partial \rho}{\partial h} - \frac{1}{(R+h)} \left(\frac{V}{R+h} - \frac{2g}{V} \right) \cos \gamma \right\} \lambda_\gamma + \left(\frac{2g \sin \gamma}{R+h} - \frac{C_D AV^2}{2m} \frac{\partial \rho}{\partial h} \right) \lambda_v \right\} \delta h \right. \\ \left. + \left\{ \frac{C_L A \rho V}{2m} + \left(\frac{V}{R+h} - \frac{g}{V} \right) \cos \gamma \right\} \delta \lambda_\gamma + \left(\frac{C_d A \rho V^2}{2m} + g \sin \gamma \right) \delta \lambda_v + V \sin \gamma \delta \lambda_h \right]_{t=t_f} = 0$$

制御変数(迎角)の変分は

$$\delta\alpha = - \left(\frac{1}{\partial^2 H / \partial \alpha^2} \right) \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \bar{x}} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \bar{\lambda}} \right] \begin{bmatrix} \delta \bar{x} \\ \delta \bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$- \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \right) = - \begin{bmatrix} \frac{\rho VA}{m} \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) \lambda_v - \frac{\rho A}{2m} \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \lambda_\gamma \\ 0 \\ \left\{ \frac{V^2 A}{2m} \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) \lambda_v - \frac{VA}{2m} \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \lambda_\gamma \right\} \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{\rho V^2 A}{2m} \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \\ \frac{\rho VA}{2m} \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これより制御変数は次式で表される。

$$\delta\alpha = - \left(\frac{1}{\partial^2 H / \partial \alpha^2} \right) (D_1 \delta v + D_2 \delta h + D_3 \delta \lambda_v + D_4 \delta \lambda_\gamma)$$

(補足)

(6) 式から

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\lambda} &= \left(\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\bar{x}}\right)\delta\bar{x} = -\left(\frac{\partial H}{\partial\bar{x}}\right)\delta t + \left(\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\bar{x}}\right)\delta\bar{x} \\
\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \bar{v}^T \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) &= \delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \delta\bar{v}^T \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \bar{v}^T \delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta t + \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta\bar{x} + \left(\frac{\partial\bar{v}^T}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\bar{v}^T}{\partial\bar{x}}\delta\bar{x}\right)\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right) + \bar{v}^T \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\delta t + \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right)\delta\bar{x}\right\} \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \bar{v}^T \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right)\right\}\delta\bar{x} + d\bar{v}^T \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right) + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \bar{v}^T \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right\}\delta t \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{v}^T\bar{\psi}}{\partial t}\right)\right\}\delta\bar{x} + d\bar{v}^T \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right) + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\bar{v}^T\bar{\psi}}{\partial t}\right)\right\}\delta t \\
&= \left\{\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}\partial t}(\phi + \bar{v}^T\bar{\psi})\right\}\delta\bar{x} + d\bar{v}^T \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right) + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\phi + \bar{v}^T\bar{\psi})\right)\right\}\delta t \\
&= \frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{x}\partial t}\delta\bar{x} + d\bar{v}^T \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right) + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right\}\delta t
\end{aligned}$$

(7) 式から

$$\begin{aligned}
\delta(\bar{\lambda}^T\bar{f}) &= \delta H = \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial H}{\partial\bar{x}}\right)\delta\bar{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial\bar{\lambda}}\right)\delta\bar{\lambda} + \left(\frac{\partial H}{\partial\bar{u}}\right)\delta\bar{u} = \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial H}{\partial\bar{x}}\right)\delta\bar{x} + \bar{f}^T\delta\bar{\lambda} \\
\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}} + \bar{v}^T \frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right) &= \delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\right) + \delta\bar{v}^T \left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right) + \bar{v}^T \delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\right)\delta t + \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\right)\delta\bar{x} + \left(\frac{\partial\bar{v}^T}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\bar{v}^T}{\partial\bar{x}}\delta\bar{x}\right)\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right) + \bar{v}^T \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\delta t + \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right)\delta\bar{x}\right\} \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\right) + \bar{v}^T \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right)\right\}\delta\bar{x} + d\bar{v}^T \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right) + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\right) + \bar{v}^T \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\right\}\delta t \\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{\partial\bar{v}^T\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right)\right\}\delta\bar{x} + d\bar{v}^T \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right) + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\bar{v}^T\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right)\right\}\delta t \\
&= \left\{\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}(\phi + \bar{v}^T\bar{\psi})\right\}\delta\bar{x} + d\bar{v}^T \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right) + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}}(\phi + \bar{v}^T\bar{\psi})\right)\right\}\delta t \\
&= \frac{\partial^2\Phi}{\partial\bar{x}^2}\delta\bar{x} + d\bar{v}^T \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right) + \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{x}}\right)\right\}\delta t
\end{aligned}$$

ただし
$$d\bar{v}^T = \frac{\partial \bar{v}^T}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \bar{v}^T}{\partial \bar{x}} \delta \bar{x}$$

10-5. 線形フィードバック誘導

ここでは状態方程式が線形システム方程式で表せる場合の誘導方式について、具体例を用いて説明する。

1) 最適レギュレータの導出

状態方程式が次の線形微分方程式で表され

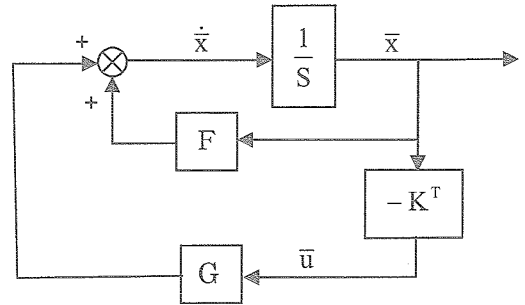
$$\dot{\bar{x}} = F\bar{x} + G\bar{u} \quad \bar{x}_0 = \bar{x}(t_0) \quad (1) \text{目的関数}$$

$$J = \int_0^{t_f} (\bar{x}^T A \bar{x} + \bar{u}^T B \bar{u}) dt$$

を最小にする問題を考える。随伴変数 $\bar{\lambda}(t)$ を導入して

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}) = \frac{1}{2} (\bar{x}^T A \bar{x} + \bar{u}^T B \bar{u}) + \bar{\lambda}^T (F\bar{x} + G\bar{u})$$

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} \quad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$$



最適条件は

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0$$

(1) 式を満たす \bar{x}, \bar{u} は

$$\bar{u} = -B^{-1} G^T \bar{\lambda}$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -A \bar{x} - F^T \bar{\lambda}$$

これらをまとめると状態変数ベクトル \bar{x} と随伴変数 $\bar{\lambda}$ を状態量とする

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -GB^{-1}G^T \\ -A & -F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

なる拡大形が得られる。上式は初期条件 $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ および終端条件 $\bar{\lambda}(t_f) = 0$ のもとで解く2点境界値問題となる。

このままでは状態フィードバックの制御入力 \bar{u} は求められないので

$$\bar{\lambda} = S\bar{x}$$

とすると

$$-\dot{S}(t) = S(t)F + F^T S(t) - S(t)GB^{-1}G^T P(t) + A$$

$$P(t_f) = 0$$

上式は終端条件が与えられて逆時間向きに解くことができる。そこで $\tau = t_f - t$ とすると

$$\frac{dS(\tau)}{dt} = S(\tau)F + F^T S(\tau) - S(\tau)GB^{-1}G^T S(\tau) + A \quad S(0) = 0$$

と初期値問題に変換できる。また定常状態では $\dot{P}=0$ であるから

$$S(\tau)A + F^T S(\tau) - S(\tau)GB^{-1}G^T S(\tau) + A = 0$$

2) 線形フィードバック誘導の具体例

有翼再突入宇宙機が着陸場に近づいて来たある地点から、滑走路の延長上の所定の位置において滑走路方向を向くまでの間の飛行を例題に最適誘導則を導出してみる。

1-1 セグメント方式

ここでは、初期状態から終端状態までの間を一つのセグメントとした場合の誘導則を求める。

仮定 i) $\gamma \ll 1$

速度座標系近似運動方程式を以下のとおりとする。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \quad (1)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{m} \cos \phi_B + g \cos \gamma \quad (2)$$

$$V \cos \gamma \frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{m} \sin \phi_B \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma \cos \psi \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \psi \quad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (6)$$

空力特性は、

揚力：

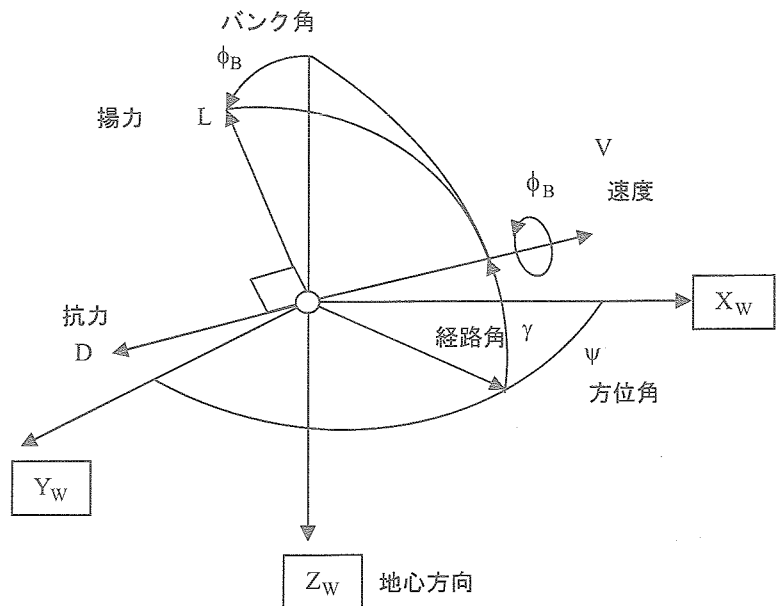
$$L = q A C_{L\alpha} (\alpha - \alpha_0) \quad (8)$$

抗力：

$$D = q A \left\{ C_{D0} + K C_{L\alpha}^2 (\alpha - \alpha_0)^2 \right\} \quad (9)$$

揚抗比：

$$\frac{L}{D} = \frac{C_{L\alpha} (\alpha - \alpha_0)}{C_{D0} + K C_{L\alpha}^2 (\alpha - \alpha_0)^2} \quad (10)$$



最大揚抗比：

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{KC_{D0}}} \quad (11)$$

ただし

$$(\alpha - \alpha_0)_{L/D\max} = \sqrt{C_{D0}/KC_{L\alpha}^2} \quad (12)$$

なお、亜音速滑空飛行では

$$D = mg \sin \gamma \quad (13)$$

$$L = -m g \cos \gamma / \cos \phi_B \quad (14)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{L \sin \phi_B}{m V \cos \gamma} = -\frac{g \tan \phi_B}{V} \quad (15)$$

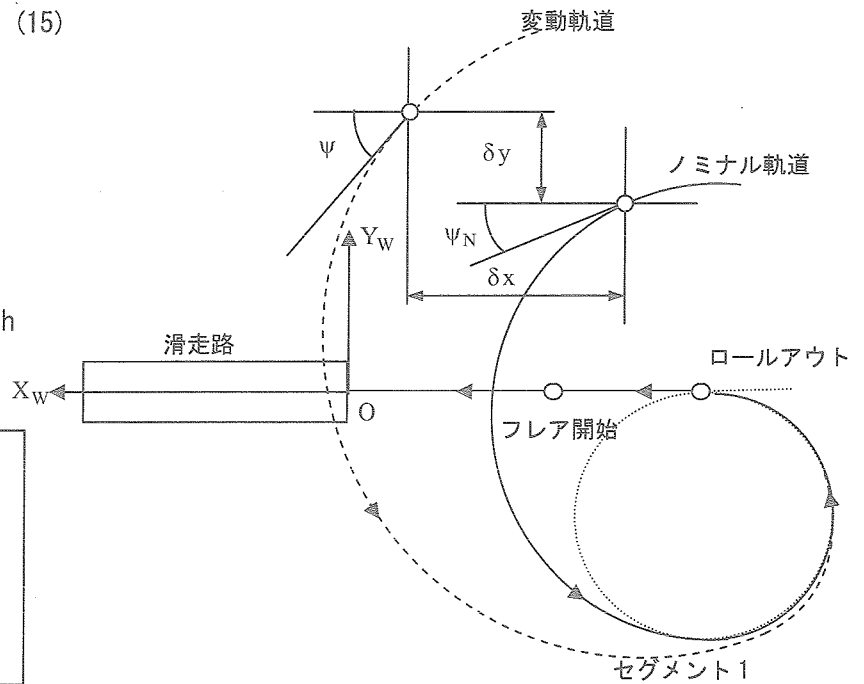
(15)式から旋回半径 R は

$$R \dot{\psi} = V \cos \gamma \text{ から}$$

$$R = -\frac{V^2 \cos \gamma}{g \tan \phi_B} \quad (16)$$

次に独立変数を時刻 t から高度 h に変換すると Z=h から

$\frac{dx}{dh} = \cos \psi / \tan \gamma \quad (17)$
$\frac{dy}{dh} = \sin \psi / \tan \gamma \quad (18)$
$\frac{d\psi}{dh} = 1 / R \tan \gamma \quad (19)$



ここで

$$\ell = 2mK/\rho C_{L\alpha} A : \text{定数}$$

$$\delta = \sqrt{2KC_{D0}/C_{L\alpha}} \rightarrow \delta^2 = 2KC_{D0}/C_{L\alpha} : \text{定数}$$

と置き、迎角 α を無次元化すると

$$\hat{\alpha} = K(\alpha - \alpha_0)$$

(13),(14)式および(10)式から

$$\tan \gamma = -\frac{1}{(L/D) \cos \phi_B} = -\frac{\hat{\alpha} + \delta^2/2\hat{\alpha}}{\cos \phi_B}$$

(3)式および揚力加速度 $L/m = \rho V^2 C_{L\alpha} A / 2m = \rho V^2 C_{L\alpha} (\alpha - \alpha_0) A / 2m$ から

$$R = \frac{2mK \cos^2 \gamma}{\rho C_{L\alpha} A \hat{\alpha} \sin \phi_B} = \frac{\ell \cos^2 \gamma}{\hat{\alpha} \sin \phi_B}$$

(14)式を用いて

$$\frac{V^2}{g} = -\frac{2mK \cos \gamma}{\rho C_{L\alpha} A \hat{\alpha} \cos \phi_B}$$

$$\frac{V^2}{g\ell} = -\frac{\cos \gamma}{\hat{\alpha} \cos \phi_B}$$

次に(17), (18)および(19)式を線形化すると (導出は補足参照)

$$\frac{d\delta x}{dh} = -\frac{\sin \psi}{\tan \gamma} d\psi + \frac{\cos \psi}{\sin^2 \gamma} d\gamma$$

$$\frac{d\delta y}{dh} = \frac{\cos \psi}{\tan \gamma} d\psi + \frac{\sin \psi}{\sin^2 \gamma} d\gamma$$

$$\frac{d\delta \psi}{dh} = \frac{1}{R \sin^2 \gamma} d\gamma - \frac{1}{R^2 \tan \gamma} dR$$

行列形式で表すと

$$\frac{\partial}{\partial h} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \psi / \tan \gamma \\ 0 & 0 & \cos \psi / \tan \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_N \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi / \sin^2 \gamma & 0 \\ \sin \psi / \sin^2 \gamma & 0 \\ 1/R \sin^2 \gamma & 1/R^2 \tan \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \gamma \\ \delta R \end{bmatrix}$$

ここでノミナル値からの差分を

$$\delta \alpha = \alpha - \alpha_N$$

$$\delta \phi_B = \phi_B - \phi_{BN}$$

と置くと

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = -\frac{K}{\cos \phi_B} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\bar{\alpha}^2} \right) \cos^2 \gamma$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \phi_B} = -\frac{\bar{\alpha} + \delta^2 / 2\hat{\alpha}}{\cos \phi_B} \frac{\sin \phi_B}{\cos \phi_B} = -\frac{\sin 2\gamma}{2} \frac{\sin \phi_B}{\cos \phi_B}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = -\frac{K\ell \cos^2 \gamma}{\hat{\alpha}^2 \sin \phi_B} - \frac{K\ell \sin 2\gamma}{\hat{\alpha} \sin \phi_B} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = -KR \left\{ \frac{1}{\bar{\alpha}} + \frac{\sin 2\gamma}{\cos \phi_B} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\hat{\alpha}^2} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \phi_B} = \frac{\ell \cos^2 \gamma}{\bar{\alpha} \sin \phi_B} \frac{\cos \phi_B}{\sin \phi_B} - \frac{2\ell \cos \gamma \sin \gamma}{\bar{\alpha} \sin \phi_B} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi_B} = R \left\{ \frac{1}{\tan \phi_B} + 2 \tan \phi_B \sin^2 \gamma \right\}$$

状態変数, 制御変数をベクトル表示を行うと

$$\bar{x} = [\delta x \quad \delta y \quad \delta \psi]$$

$$\bar{u} = [\delta \alpha \quad \delta \phi_B]$$

システム方程式は次式で表される。

$$d\bar{x}/dh = F\bar{x} + G\bar{u}$$

ここで係数行列は

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \psi / \tan \gamma \\ 0 & 0 & \cos \psi / \tan \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_N$$

$$G = \begin{bmatrix} \partial \gamma / \partial \alpha & \partial \gamma / \partial \phi_B \\ \partial R / \partial \alpha & \partial R / \partial \phi_B \end{bmatrix}_N$$

目的関数として 最小 2 乗誤差を定義すれば

$$J = \frac{1}{2} (\bar{x}^T S_f \bar{x})_{h=h_f} + \frac{1}{2} \int_{h_0}^{h_f} (\bar{u}^T B \bar{u}) dh$$

ここで S_f B は重み行列

$$S_f = \begin{bmatrix} \delta x_f^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \delta y_f^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \psi_f^{-2} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{h - h_f} \begin{bmatrix} \delta \alpha_m^{-2} & 0 \\ 0 & \delta \phi_{Bm}^{-2} \end{bmatrix}$$

この目的関数を最小とする線形フィードバック制御量は次式で与えられる。

$$\bar{u} = -C(h)\bar{x}$$

$$C = B^{-1}G^T S$$

ここで S は次のリカッチ行列方程式の解である。

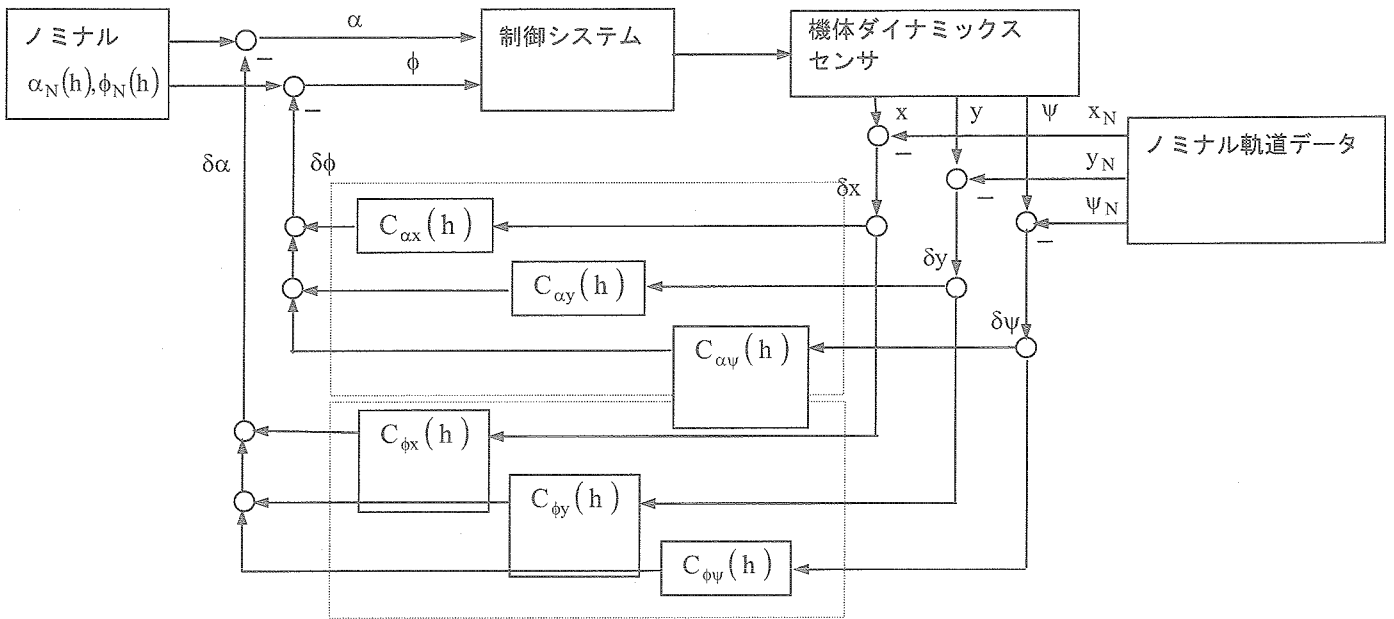
$$\frac{dS}{dh} = -SF - F^T S + SGB^{-1}G^T S$$

境界条件は $S(h_f) = S_f$ である。

$\bar{u} = -C(h)\bar{x}$ を成分で表すと

$$\begin{bmatrix} \alpha(h) \\ \phi(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(h) \\ \phi(h) \end{bmatrix}_N - \begin{bmatrix} C_{\alpha x}(h) & C_{\alpha y}(h) & C_{\alpha \psi}(h) \\ C_{\phi x}(h) & C_{\phi y}(h) & C_{\phi \psi}(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_N(h) \\ y - y_N(h) \\ \psi - \psi_N(h) \end{bmatrix}$$

線形誘導則ブロック図



(補足)

$$\frac{dy}{dh} = \sin \psi / \tan \gamma \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \frac{dy}{dh} = \cos \psi / \tan \gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{dy}{dh} = \sin \psi / \sin^2 \gamma$$

$$\frac{d\psi}{dh} = 1 / R \tan \gamma \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{d\psi}{dh} = 1 / R \sin^2 \gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{d\psi}{dh} = -1 / R^2 \tan \gamma$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dx}{dh} \right) dx = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dx}{dh} \right) dy = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dy}{dh} \right) dx = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dy}{dh} \right) dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\psi}{dh} \right) dx = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\psi}{dh} \right) dy = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{d\psi}{dh} \right) d\psi = 0$$

$$\frac{d \delta x}{dh} = -\frac{\sin \psi}{\tan \gamma} d\psi + \frac{\cos \psi}{\sin^2 \gamma} d\gamma$$

$$\frac{d \delta y}{dh} = \frac{\cos \psi}{\tan \gamma} d\psi + \frac{\sin \psi}{\sin^2 \gamma} d\gamma$$

$$\frac{d \delta \psi}{dh} = \frac{1}{R \sin^2 \gamma} d\gamma - \frac{1}{R^2 \tan \gamma} dR$$

II 3-セグメント方式

ここでは、初期状態から終端状態までの間を三つのセグメントとした場合の誘導則を求め
る。

運動方程式は1項1-セグメント方式の(1)-(6)と同じである。

空力特性は、

揚力計数：

$$C_L = a + b\alpha$$

抗力係数：

$$C_D = c + dC_L^2 = c + d(a + b\alpha)^2$$

揚力：

$$L = \frac{C_L A \rho V^2}{2} = q A C_L (\alpha - \alpha_0) \quad (8)$$

抗力：

$$D = \frac{C_D A \rho V^2}{2} = q A \{ C_{D0} + K C_{L\alpha}^2 (\alpha - \alpha_0)^2 \} \quad (9)$$

動圧：

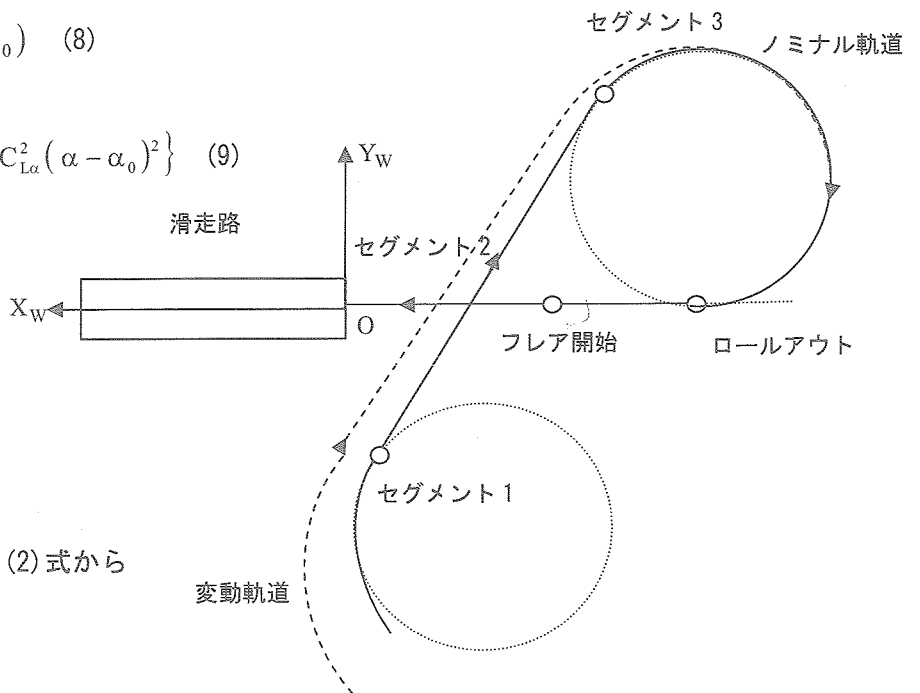
$$q = \rho V^2 / 2$$

(1) (6) 式から経路角

$$\sin \gamma = - \frac{D}{m \left(V \frac{dV}{dh} + g \right)} \quad (10)$$

ここで $d\gamma/dt \approx 0$ と仮定すると(2)式から

$$\cos \gamma = \frac{L \cos \phi_B}{mg} \quad (11)$$



(11) 式を用いて(3)-(5)式の $\cos \gamma$ を消去すると x, y 面内の変化率, 及び方位角の変化率は次
式で表される。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{VL \cos \phi_B \cos \psi}{mg} \quad (12)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{VL \cos \phi_B \sin \psi}{mg} \quad (13)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{g \tan \phi_B}{V} \quad (14)$$

次に運動方程式を線形化する

状態変数, 制御変数のノミナル値からの変動を次のように置くと

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - X_N \\ Y - Y_N \\ \psi - \psi_N \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_N \\ \phi_B - \phi_{BN} \end{bmatrix} \quad (16)$$

(12)-(14)式は次のように表される。

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = F\bar{X} + G\bar{u}$$

ここで行列係数 F, G は次のように求めることができる。

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-VL \cos \phi_B \sin \psi}{mg} \\ 0 & 0 & \frac{VL \cos \phi_B \cos \psi}{mg} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3 \times 3) \quad (17)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial \phi_B} \\ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial \phi_B} \\ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \phi_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho Ab V^3 \cos \phi_B \cos \psi}{2mg} & \frac{-VL \sin \phi_B \cos \psi}{mg} \\ \frac{\rho Ab V^3 \cos \phi_B \sin \psi}{2mg} & \frac{-VL \sin \phi_B \sin \psi}{mg} \\ 0 & \frac{g}{V \cos^2 \phi_B} \end{bmatrix} \quad (3 \times 2) \quad (18)$$

次に目的関数を 2 次形式として次のように定義する。

$$J = \frac{1}{2} \left(\bar{X}^T S_F \bar{X} \right)_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_{t=t_0}^{t=t_f} \left(\bar{u}^T B \bar{u} + \bar{X}^T A \bar{X} \right) dt \quad (19)$$

ここで S_F, B は重み対称行列

$$S_F = \begin{bmatrix} 1/\Delta X_f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\Delta Y_f^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\Delta \psi_f^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/\Delta \alpha_0^2 & 0 \\ 0 & 1/\Delta \phi_{B0}^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

(19) 式の目的関数を最小とする最適フィードバック量は

$$\bar{u}(t) = -C(t) \bar{X}(t) \quad (22)$$

$G(t)$ は最適フィードバックゲインで次式で与えられる。

$$C(t) = B^{-1}(t)G^T(t)S(t) \quad (23)$$

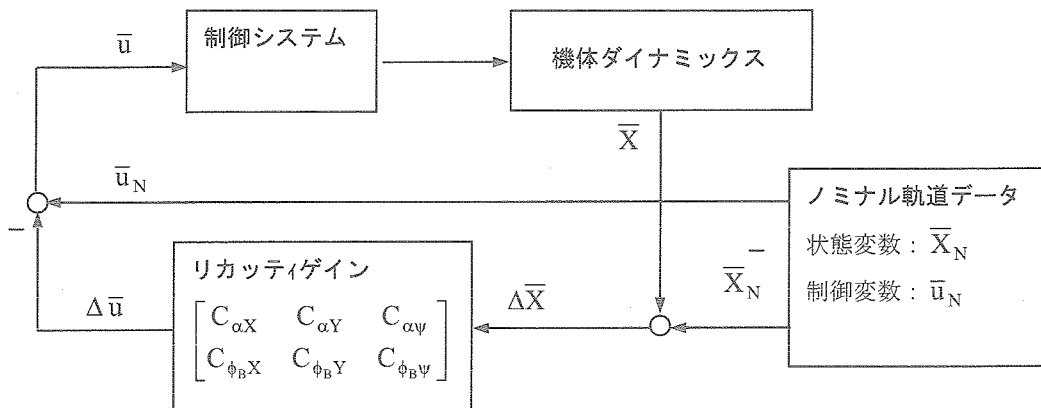
行列 $S(t)$ は次のリカッチ行列方程式の解である。

$$\frac{dS}{dt} + SF + F^T S - SGB^{-1}G^T S = 0 \quad (24)$$

ただし $S(t_f) = S_f$

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \phi_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_N(t) \\ \phi_{BN}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{\alpha X}(t) & C_{\alpha Y}(t) & C_{\alpha \psi}(t) \\ C_{\phi_B X}(t) & C_{\phi_B Y}(t) & C_{\phi_B \psi}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_N \\ Y - Y_N \\ \psi - \psi_N \end{bmatrix}$$

線形誘導則ブロック図



数値例

$$m = 58,974 \text{ Kg}$$

$$A = 109.2 \text{ m}^2$$

$$\rho = 0.1225 \exp(-9466/h)$$

初期値

$$X_f = 0 \quad Y_f = 0 \quad h_f = 1006.8 \text{ m} \quad V_f = 115.2 \text{ m/sec}$$

$$\psi_f = 0, 360, 720^\circ$$

11. クローズドフォーム誘導

イクスプリシット法, すなわち, 基準軌道を用いない誘導の例としてクローズドフォーム誘導について述べる。

この誘導法は揚抗比の大きな, 揚力体/有翼型回収体の誘導に利用でき, 簡単な論理でインプリシット法には無い利点を有している。

ここではまず一般的な方式について紹介し, その後実際にスペースシャトルで用いられている方式について紹介する。

11-1. クローズドフォーム誘導

1 速度座標系での表記

回収体の速度軸座標での運動方程式は次のように表される。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \quad (1)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = \frac{D}{m} \left(\frac{L}{D} \right) \cos \phi_B + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \quad (2)$$

$$V \cos \gamma \frac{d\psi}{dt} = \frac{D}{m} \left(\frac{L}{D} \right) \sin \phi_B + \frac{V \cos^2 \gamma \cos \psi \tan \phi}{r} \quad (3)$$

$$g = \mu / R \quad (4)$$

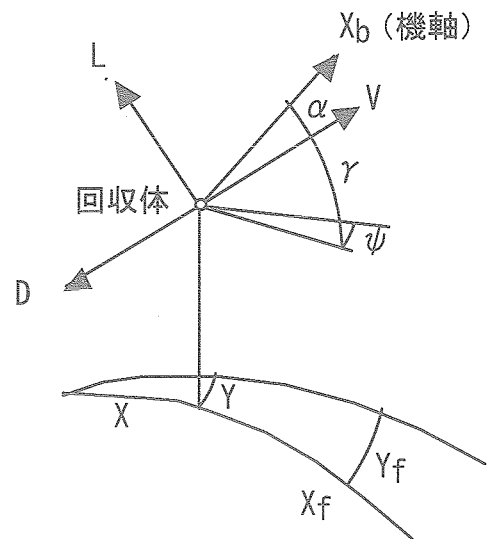
$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma \quad (5)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{r} \quad (6)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r \cos \phi} - \Omega \quad (7)$$

但し, V : 速度, L : 揚力 $=\frac{1}{2}\rho V^2 C_L A$, D : 抗力 $=\frac{1}{2}\rho V^2 C_D A$, γ : 飛行経路角, m : 回収体質量, h : 高度, ϕ : ヘッディング角, α : 迎え角, X : ダウンレンジ, Y : クロスレンジ

回収体の運動を飛行面内(2次元)に限定し, 前述の運動方程式から回収体の飛行経路角 γ が微小($\gamma \ll 1$)とすれば, 高度変化率は次式で表される。



$$\frac{dh}{dt} = V\gamma \quad (8)$$

上式を更に微分して

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{dV}{dt}\gamma + V\frac{d\gamma}{dt} \quad (9)$$

が得られる。一方、加速度 dV/dt は重力の成分 ($g \sin(\gamma)$) に比べ空気力 (抗力) の方が大きいと仮定すれば

$$\frac{dV}{dt} = -g(D/m) - g\sin(\gamma) = -g(D/m) \quad (10)$$

となり、上式と合わせて次式が成立する。

$$V\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2} + g(D/m)\frac{dh}{dt}/V \quad (11)$$

(2) 式で $\gamma=0$ とし、上式に代入すると揚抗比 (L/D) は次式で表される。

$$\frac{L}{D}\cos(\phi) = \left\{ 1 - \hat{V}^2 + \frac{1}{g}\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{D/m}{\hat{V}\sqrt{gR}}\frac{dh}{dt} \right\} \frac{1}{D/m} \quad (12)$$

但し、 $\hat{V} = V/\sqrt{gR}$: 無次元化速度

1 等抗力加速度飛行の場合

回収体が等抗力加速度飛行を行う場合の飛行経路角 γ は

$$\gamma = -\frac{2}{\beta R} \frac{D/m}{\hat{V}^2}$$

で与えられ、高度変化率は次式で表される。

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{gR}\hat{V}\gamma = -\frac{2\sqrt{gR}}{\beta R} \frac{D/m}{\hat{V}^2}$$

また、高度方向加速度は (D/M) が一定である事、及び $\frac{d\hat{V}}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{\gamma m}}$ より、

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \left(\frac{d}{d\hat{V}}\right)\left(\frac{d\hat{V}}{dt}\right) = -\frac{2g}{\beta R} \frac{(D/m)^2}{\hat{V}^2}$$

が成り立つ。

従って、平衡滑空飛行の場合には次式が成り立つ。

$$\frac{1}{g}\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{(D/m)}{\sqrt{gR}\hat{V}}\frac{dh}{dt} = -\frac{4}{\beta R} \frac{(D/m)^2}{\hat{V}^2}$$

この結果から、等抗力加速度飛行を行うのに要求される揚抗比 (L/D) は次式で与えられる。

$$\frac{L}{D} \cos(\phi) = \frac{1 - \hat{V}^2}{D/m} - \frac{4}{\beta R} \frac{(D/m)}{\hat{V}^2}$$

一方、等抗力加速度飛行を行う場合の飛行距離 X の速度 V に関する変化率は、 $dV/dt = -g(D/m)$ = 一定と仮定して、

$$\frac{dX}{d\hat{V}} = -\frac{R_0 \hat{V}}{D/m}$$

で与えられる。上式を現時点の無次元化速度から目標点における速度 (終端速度= V_f) まで積分する

$$\int_X^{X_f} dx = -\frac{R_0 \hat{V}}{D/m} \int_{\hat{V}}^{\hat{V}_f} \hat{V} d\hat{V}$$

ことにより、目標点までの飛行距離 (レンジ・ツー・ゴー) は次式で表される。

$$X_f - X = \frac{R_0}{2(D/m)} (\hat{V}^2 - \hat{V}_f^2)$$

但し、 X_f : 目標点までの距離, V_f : 目標点における速度

上式から現時点の計測値 ; 位置 X, 速度 V と目標点の位置 X_f , 目標点における速度 V_f が与えられた時要求される空力抗力 $(D/m)_c$ 及び要求揚抗比 $\{(L/D) \cos \phi\}_c$ は次式で示される。

$$(D/m)_c = \frac{R_0}{2(X_f - X)} (\hat{V}^2 - \hat{V}_f^2)$$

$$\{(L/D) \cos(\phi)\}_c = \frac{1 - \hat{V}^2}{(D/m)_c} - \frac{4}{\beta R} \frac{(D/m)_c}{\hat{V}^2}$$

II 平衡滑空飛行の場合

回収体が平衡滑空飛行を行う際の飛行経路角 γ は微小であり、次式で表される。

$$\gamma = -\frac{2}{\beta R (L/D) \cos \phi_B (V/gR)^2}$$

この変化率は上式を微分して次式を得る。

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{4(D/m)}{\beta R (L/D)} \frac{\sqrt{g}}{\gamma \hat{V}^3}$$

$$\text{但し, } \frac{d\hat{V}}{dt} = -\sqrt{\frac{gD}{\gamma m}}$$

従って、平衡滑空飛行の場合

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{dV}{dt} \gamma + V \frac{d\gamma}{dt}$$

は次のように表される。

$$\frac{1}{g} \frac{d^2h}{dt^2} + \frac{(D/m) dh}{\sqrt{gR\hat{V}} dt} = -\frac{4}{\beta R(L/D)} \frac{(D/m)}{\hat{V}^2} \approx 0$$

上式の右辺はきわめて小さく通常無視できる。この結果、平衡滑空飛行の場合に要求される揚抗比 (L/D) は(12)式に代入して

$$\frac{L}{D} \cos(\phi) = \frac{1 - \hat{V}^2}{D/m}$$

が得られる。

一方平衡滑空飛行における飛行距離 X の速度 V に関する変化率は次式で表される。

$$\frac{dX}{d\hat{V}} = -R_0 \left(\frac{L}{D} \right) \cos(\phi) \frac{\hat{V}}{(1 - \hat{V}^2)}$$

上式を現時点の速度 V から終端速度 Vf まで積分する

$$\int_X^{X_f} dx = - \int_{\hat{V}}^{\hat{V}_f} R_0 \left(\frac{L}{D} \right) \cos(\phi) \frac{\hat{V}}{1 - \hat{V}^2} d\hat{V}$$

ことにより、目標点までの飛行距離 (レンジ・ツー・ゴー) は次式で表される。

$$X_f - X = \frac{R_0 L}{2 D} \cos(\phi) \ln \left(\frac{1 - \hat{V}_f^2}{1 - \hat{V}^2} \right)$$

また、前述の要求揚抗比 (L/D) cos(φ) を用いると次式となる。

$$X_f - X = \frac{R_0}{2} \frac{1 - \hat{V}^2}{(D/m)} \cos(\phi) \ln \left(\frac{1 - \hat{V}_f^2}{1 - \hat{V}^2} \right)$$

上式から現時点の計測値；位置 X, 速度 V と目標点の位置 Xf, 目標点における速度 Vf が与えられた時要求される空力抗力 (D/m)c 及び要求揚抗比 {(L/D) cos φ}c は次式で示される。

$$(D/m)_c = \frac{R_0(1 - \hat{V}^2)}{2(X_f - X)} \ln \left(\frac{1 - \hat{V}_f^2}{1 - \hat{V}^2} \right)$$

$$\{(L/D)\cos(\phi)\}_c = \frac{1-\hat{V}^2}{(D/m)_c}$$

III 一定高度飛行の場合

回収体が一定高度で飛行する場合にはその定義から高度変化率及び加速度はいずれも 0 である。従って要求揚抗比は結果的に平衡滑空飛行の場合と同様に次式で表される。

$$\frac{L}{D}\cos(\phi) = \frac{1-\hat{V}^2}{D/m}$$

一定高度飛行における飛行距離 X の速度に関する変化率は

$$\frac{dX}{d\hat{V}} = -\frac{2}{g\rho} \frac{m}{C_D A} \frac{1}{\hat{V}}$$

で与えられる。高度が一定であるため大気密度 (ρ) が一定である事を考慮して、現時点の速度から目標点における終端速度 V_f まで積分する。

$$\int_X^{X_f} dX = -\frac{2}{g\rho} \frac{m}{C_D A} \int_{\hat{V}}^{\hat{V}_f} \frac{d\hat{V}}{\hat{V}}$$

この積分により目標点までの飛行距離 (レンジ・ツー・ゴー) は次式で表される。

$$X_f - X = \frac{2}{g\rho} \frac{m}{C_D A} \ln\left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_f}\right)$$

又は、 $\frac{D}{m} = \frac{R_0}{2} g \rho \hat{V}^2 \frac{C_D A}{m}$ を用いると次のように表される。

$$X_f - X = R_0 \frac{\hat{V}^2}{D/m} \ln\left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_f}\right)$$

上式から現時点の計測値；位置 X 、速度 V と目標点の位置 X_f 、目標点における速度 V_f が与えられた時要求される空力抗力 $(D/m)_c$ 及び要求揚抗比 $\{(L/D)\cos(\phi)\}_c$ は次式で示される。

$$(D/m)_c = \frac{R_0}{(X_f - X)} \hat{V}^2 \ln\left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_f}\right)$$

$$\{(L/D)\cos(\phi)\}_c = \frac{1-\hat{V}^2}{(D/m)_c}$$

以上は各飛行モード（等抗力加速度飛行, 平衡滑空飛行, 等高度飛行）で飛行した場合に位置（X）が所定の位置（Xf）に一致するのに必要な, 揚抗比（L/D）とバンク角（ $\cos(\phi)$ ）の積（誘導コマンド）を表している。

この場合ダウンレンジ（X）のみを合わせようとしているため, 回収体の軌道運動は振動（フゴイド振動）を生じる。この振動をおさえるため誘導コマンドにダンピング項を追加する。その結果ダウンレンジ制御は次式で表される。

ダウンレンジ制御

$$\left(\frac{L}{D}\right) \cos \phi_B = \zeta(\sigma, V) + K_D (\gamma^* - \gamma)$$

但し,

$$\gamma^* = -\frac{2}{\zeta \beta R \left(\frac{V^2}{gR}\right)}$$

$$\zeta(\sigma, V) = \frac{2\sigma}{R \ln \left\{ \frac{1 - \left(\frac{V^2}{gR}\right)_f}{1 - \left(\frac{V^2}{gR}\right)} \right\}}$$

II 局所水平座標系での表記

回収体の局所水平座標系運動方程式は次のように表される。（再突入宇宙機の運動方程式の項参照）

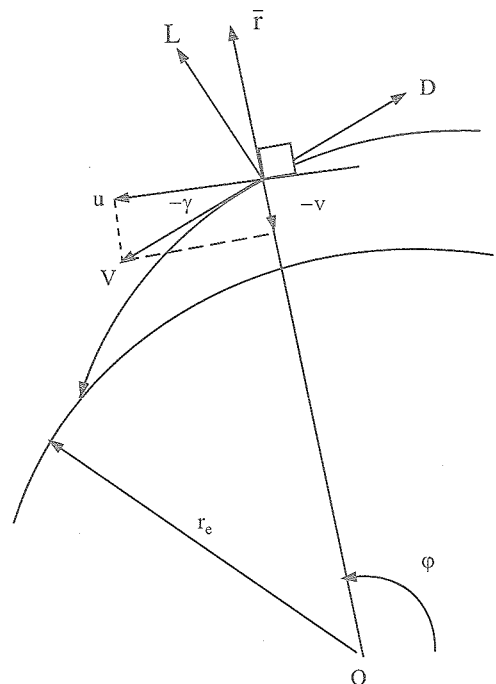
$$\frac{du}{dt} = -\frac{uv}{r} - \frac{D}{m} \cos \gamma \left(1 + \frac{L}{D} \tan \gamma\right) \approx -\frac{\rho V^2}{2\Delta} \cos \gamma$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u^2}{r} - \frac{D}{m} \left(\sin \gamma + \frac{L}{D} \cos \gamma\right) - g$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma$$

$$\frac{ds}{dt} = V$$

$$\frac{dR}{dt} = V \cos \gamma$$



方位角が小さく $\psi \ll 1$ z 方向速度が $w \ll u, V$ と仮定して垂直方向, ダウンレンジ方向, クロスレンジ方向の無次元化加速度 $\hat{a}_v \hat{a}_d \hat{a}_h$ (g 単位) を次式で定義する。

$$mg \hat{a}_v = m \left(\dot{v} - \frac{u^2}{r} \right) = L \cos \phi_B \cos \gamma - D \sin \gamma - mg \quad (1)$$

$$mg \hat{a}_d = m \left(\dot{u} + \frac{uv}{r} \right) = -(L \cos \phi_B \sin \gamma + D \cos \gamma) \quad (2)$$

$$mg \hat{a}_h = m \dot{w} = L \sin \phi_B \cos \psi \quad (3)$$

ここで, 垂直方向加速度, ダウンレンジ方向加速度, クロスレンジ方向加速度, ダウンレンジ, 飛行方位角の導出を行う。

①垂直方向加速度 \hat{a}_v の導出

速度を周回円軌道速度 \sqrt{gr} で無次元化すると水平方向, 垂直方向の速度は

$$\hat{V} = V / \sqrt{gr} \quad (4)$$

$$v = \dot{h} \quad : \text{垂直方向速度} \quad (5)$$

$$u = V \cos \gamma = \hat{V} \sqrt{gr} \cos \gamma \quad : \text{水平方向速度} \quad (6)$$

垂直方向の速度 (5) 式を微分して加速度が $\dot{v} = \ddot{h}$ で表され, また遠心力項は $u^2/r = V^2 \cos^2 \gamma = g \hat{V}^2 \cos^2 \gamma$ で表されるから垂直方向加速度 \hat{a}_v は次式となる。

$$\hat{a}_v = \frac{1}{g} \left(\dot{v} - \frac{u^2}{r} \right) = \frac{\ddot{h}}{g} - \hat{V}^2 \cos^2 \gamma \quad (7)$$

②ダウンレンジ方向加速度 \hat{a}_d の導出

水平方向の速度 (6) 式を微分して, $\dot{u} = \dot{V} \cos \gamma - V \sin \gamma \dot{\gamma}$, 第 2 項を無視すれば次式で近似できる

$$\hat{a}_d = \frac{1}{g} \left(\dot{u} + \frac{uv}{r} \right) = \frac{1}{g} \left\{ \dot{V} \cos \gamma - V \sin \gamma \left(\dot{\gamma} - \frac{V \cos \gamma}{r} \right) \right\} \approx \frac{1}{g} \frac{d\hat{V}}{dt} \sqrt{gr} \cos \gamma \quad (8)$$

地表面に沿った飛行レンジ R は平均地球半径を r , 地心角を ϕ とすればを用いて $R = r\phi$ から次式が成り立ち, また $u = r\dot{\phi}$ から飛行レンジの時間変化率 $d(R/r)/dt$ は次式で表され

$$\frac{d(R/r)}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{u}{r} = \frac{\sqrt{gr} \hat{V} \cos \gamma}{r} \quad (9)$$

(8) 式の右辺は次のようになる。

$$\frac{1}{g} \frac{d\hat{V}}{dt} \sqrt{gr} \cos \gamma = \frac{1}{g} \frac{d\hat{V}}{d(R/r)} \frac{d(R/r)}{dt} \sqrt{gr} \cos \gamma = \hat{V} \cos^2 \gamma \frac{d\hat{V}}{d(R/r)}$$

これを (8) 式に代入してダウンレンジ方向加速度 \hat{a}_d は次式となる。

$$\hat{a}_d = \frac{d\hat{V}}{d(R/r)} \hat{V} \cos^2 \gamma \quad (10)$$

③クロスレンジ方向加速度 a_h の導出

飛行方位角を ψ , 飛行面内の曲率半径を r_c とすればクロスレンジ方向速度 w は

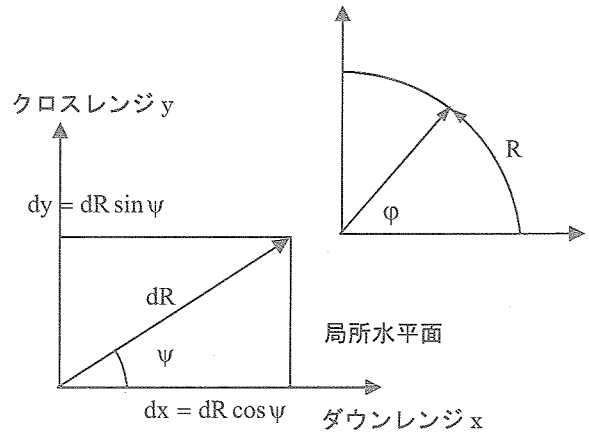
$$w = r_c \dot{\psi} = V \cos \gamma \cos \psi \approx \sqrt{gr} \hat{V} \cos \gamma$$

加速度は次式で表される。

$$\dot{w} = u\dot{\psi} = \frac{uw}{r_c} = -\frac{gr \hat{V} \cos^2 \gamma}{r_c} \approx -\frac{gr \hat{V}}{r_c}$$

(3) 式に代入してクロスレンジ方向加速度 \hat{a}_h は次式となる。

$$\hat{a}_h = -\frac{\hat{V}^2 r}{r_c} \quad (11)$$



④ダウンレンジの導出

遠心力項に比べて加速度項が十分大きい仮定すると (2) (8) 式から $\dot{u} \gg uv/r$ と置いて

$$m \left(\dot{u} + \frac{uv}{r} \right) \approx m \frac{d\hat{V}}{dt} \sqrt{gr} \cos \gamma = -(L \cos \phi_B \sin \gamma + D \cos \gamma)$$

経路角が微小, また抗力が揚力に比べて大きいと仮定すると $\cos \gamma \approx 1$, $D \cos \gamma \gg L \cos \phi_B \sin \gamma$

無次元化加速度 $d\hat{V}/dt$ は次式で近似できる

$$\frac{d\hat{V}}{dt} = -\frac{(L \cos \phi_B \sin \gamma + D \cos \gamma)}{m \sqrt{gr} \cos \gamma} \approx -\frac{D}{m \sqrt{gr}} \quad (12)$$

またダウンレンジの変化率は (9) 式 $d(R/r)/dt \approx \sqrt{gr} \hat{V}/r$ で表されるから (無次元化) 速度 \hat{V} の変化率は (9) 式を (12) 式で除して次式で表される。

$$\frac{d(R/r)}{d\hat{V}} = -\frac{mg}{D} \hat{V} \quad (13)$$

⑤飛行方位角 ψ の導出

水平方向の加速度は

$$V \frac{d\psi}{dt} = g \hat{a}_h = L \sin \phi_B / m$$

(12) 式の $d\hat{V}/dt$ を用いて独立変数を \hat{V} に変換すると

$$\frac{d\psi}{d\hat{V}} = -\frac{L}{D} \sin\phi_B \frac{1}{\hat{V}}$$

$$\frac{d\psi}{d\hat{V}} = \frac{L}{D} \sin\phi_B \frac{1}{\hat{V}} \quad (14)$$

これまで導出した結果を用いて等抗力加速度飛行の場合、平衡滑空飛行の場合、そして等高度飛行の場合の誘導コマンドを導出する。

I 等抗力加速度飛行の場合 (D: 一定)

①ダウンレンジ

$a_d \approx -D/mg$: 一定を(13)式に代入して

$$\frac{d(R/r)}{d\hat{V}} = -\frac{mg}{D} \hat{V} = \frac{\hat{V}}{a_d}$$

積分して

$$\frac{R}{r} = \frac{\hat{V}^2 - \hat{V}_f^2}{2a_d}$$

$$a_d = \frac{\hat{V}^2 - \hat{V}_f^2}{2(R/r)}$$

②バンク角

前提条件より抗力Dが一定である事から、その時間微分は0となる。従って、

$$D = gr\rho\hat{V}^2/2\Delta = \text{一定から} \quad \rho\hat{V}^2 + 2\rho\hat{V}\dot{\hat{V}} = 0$$

等温大気モデルから密度の変化率は次の通り。

$$\rho = \rho_{SL} \exp(-\beta h) \rightarrow \dot{\rho} = -\rho\beta\dot{h}$$

両式から

$$\dot{h} = \frac{2\dot{\hat{V}}}{\beta\hat{V}}$$

$$\sqrt{gr} \frac{d\hat{V}}{dt} = -D/m \approx ga_d \rightarrow \dot{\hat{V}} = -a_d \sqrt{g/r}$$

これより高度に関する変化率は次のように表される。

$$\frac{\dot{h}}{\sqrt{gr}} = -\frac{2a_d}{\beta r} \frac{1}{\hat{V}} \quad (15)$$

さらに微分して

$$\frac{\ddot{h}}{g} = \frac{2a_d}{\beta\sqrt{gr}} \frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}^2} = -\frac{2a_d^2}{\beta r} \frac{1}{\hat{V}^2} \quad (16)$$

一方(1)式、及び $a_d \approx D/mg$ を用いて次式を得る。

$$L\cos\phi_B - mg = m(\ddot{h} - g\hat{V}^2)$$

$$\frac{\ddot{h}}{g} = \hat{V}^2 - 1 + \frac{L\cos\phi_B}{mg} = \hat{V}^2 - 1 + a_d(L/D)\cos\phi_B \quad (17)$$

バンク角 ϕ_B は(16)(17)式から

$$\cos\phi_B = \frac{1 - \hat{V}^2 - 2a_d^2/\beta r\hat{V}^2}{a_d(L/D)} \quad (18)$$

ここで

$2a_d^2/\beta r\hat{V}^2 \ll 1$ と近似できることから

$$\cos\phi_B \approx (1 - \hat{V}^2)/a_d(L/D)$$

$$\sin\phi_B = \sqrt{a_d^2(L/D)^2 - (1 - \hat{V}^2)^2} / a_d(L/D) \quad (19)$$

③方位角

(19)式を(14)式に代入して

$$\frac{d\psi}{d\hat{V}} = \frac{L}{D} \sin\phi_B \frac{1}{\hat{V}}$$

$$\frac{d\psi}{d\hat{V}} = \frac{\sqrt{a_d^2(L/D)^2 - (1 - \hat{V}^2)^2}}{a_d \hat{V}}$$

ここで

$$a_L \equiv a_d(L/D)$$

$$x \equiv 1 - \hat{V}^2$$

と置くと

$d\hat{V} = -dx/2\hat{V}$ により、

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{2a_d} \frac{\sqrt{a_L^2 - x^2}}{1-x} = -\frac{1}{2a_d} \left\{ 1+x + \frac{(a_L^2-1)}{1-x} \right\} \frac{1}{\sqrt{a_L^2 - x^2}}$$

$$\psi_f - \psi = \frac{1}{2a_d} \left[\sqrt{a_L^2 - (1 - \hat{V}^2)^2} - \sin^{-1} \left(\frac{1 - \hat{V}^2}{a_L} \right) + J_A \right]_{\hat{V}_f}^{\hat{V}}$$

但し $J_A \equiv \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{a_L^2 - x^2}}$, 積分結果については補足参照

また $a_L \leq x$ 従って $a_d(L/D) \leq 1 - \hat{V}^2$ の場合には $\sqrt{\quad}$ の内容は負となり解は得られない。

これは等抗力飛行に必要な揚力が得られず、等抗力飛行が維持できないことを表しており、平衡滑空飛行に移行する。

特に

揚抗比 L/D : 一定

バンク角 ϕ_B : 一定 の場合

(18)式より

$$\frac{L}{D} = \frac{1 - \hat{V}^2 - 2a_d^2 / \beta r \hat{V}^2}{a_d \cos \phi_B}$$

であるので、これを(14)式に代入して

$$\frac{d\psi}{d\hat{V}} = \frac{\tan \phi_B}{a_d} \left(\frac{1}{\hat{V}} - \hat{V} - \frac{2a_d^2}{\beta r} \frac{1}{\hat{V}^3} \right)$$

これを積分して

$$\psi_f - \psi = \frac{\tan \phi_B}{a_d} \left[\ln \hat{V} - \frac{\hat{V}^2}{2} + \frac{a_d^2}{\beta r} \frac{1}{\hat{V}^2} \right]_{\hat{V}}^{\hat{V}_f}$$

II 平衡滑空飛行の場合 ($\ddot{h} = 0$)

①ダウレンジ

$$(7) \text{式から } a_v = \ddot{h}/g - \hat{V}^2 \cos^2 \gamma \approx -\hat{V}^2 \quad (\gamma \ll 1)$$

(1) 式で $\gamma \ll 1$ とし、これに上式を代入すると、

$$L \cos \phi_B - mg = mg a_v \approx -mg \hat{V}^2$$

これを mg について整理して、

$$mg = L \cos \phi_B / (1 - \hat{V}^2)$$

(13)式に代入して

$$\frac{d(R/r)}{d\hat{V}} = -\frac{mg}{D} \hat{V} = \frac{L \cos \phi_B}{D} \frac{\hat{V}}{1 - \hat{V}^2}$$

積分して

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)_V \ln \left(\frac{1 - \hat{V}_f^2}{1 - \hat{V}^2} \right) \quad (20)$$

$$(L/D)_V = -(1 - \hat{V}^2) / a_d \text{ から}$$

$$a_d = \frac{1}{2} \frac{(1 - \hat{V}^2)}{(R/r)} \ln \left(\frac{1 - \hat{V}_f^2}{1 - \hat{V}^2} \right)$$

②方位角

(14) 式を揚抗比 L/D , バンク角 ϕ_B が一定と仮定して積分すると

$$\psi_f - \psi = \frac{L}{D} \sin \phi_B \ln \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_f} \right) \quad (21)$$

Ⅲ 等高度飛行の場合 ($\dot{h} = \ddot{h} = 0$)

① ダウンレンジ

高度一定であるので高度変化率 $\dot{h} = 0$ 高度 $h = h_c$ 密度 $\rho_c = \rho_{SL} e^{-\beta h_c}$ から

$$D = \frac{C_D A}{2} \rho V^2 = \frac{m \rho_c}{2\Delta} g r \hat{V}^2 \quad (22)$$

(13) 式に代入して

$$\frac{d(R/r)}{d\hat{V}} = -\frac{mg}{D} \hat{V} = -\frac{2\Delta}{r\rho_c} \frac{1}{\hat{V}}$$

これを積分してレンジは次式で表される。

$$\frac{R}{r} = -\frac{2\Delta}{r\rho_c} \ln \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_f} \right) \quad (23)$$

ここで $2\Delta/r\rho_c = \hat{V}^2/a_d$ から

$$a_d = -\frac{\hat{V}^2}{(R/r)} \ln \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_f} \right)$$

②方位角 高度一定であるので $r=0$ 。これを(2)に代入して整理し、さらに(22)式を代入すると、

$$a_d = \frac{D}{mg} = \frac{C_D A \rho_c}{2mg} g r \hat{V}^2 = K_1 \hat{V}^2$$

但し

$$K_1 = C_D A g r \rho_c / 2mg = r \rho_c / 2\Delta$$

方位角の速度に関する変化率は

$$\frac{d\psi}{d\hat{V}} = \frac{\sqrt{K_1^2 (L/D)^2 \hat{V}^4 - (1 - \hat{V}^2)^2}}{K_1 \hat{V}^3}$$

ここで

$$a = K_1^2 (L/D)^2 - 1$$

$$x \equiv \hat{V}^2$$

と置くと

$$d\hat{V} = dx / 2\hat{V}$$

これを上式に代入すると、

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2K_1} \frac{\sqrt{ax^2 + 2x - 1}}{x^2}$$

積分を実行すると

$$\psi_f - \psi = \frac{1}{2K_1} \left[\frac{\sqrt{a\hat{V}^4 + 2\hat{V}^2 - 1}}{\hat{V}^2} + aJ_F + J_G \right]_{\bar{V}}$$

積分結果については補足参照

【泉注：以下<補足>までの間は計算例を示す予定だったと考えられるが、今回はそのままとする。】

制御則：

$$\Delta(L/D)_v = K_a (a_{dc} - a_d) + (K_{\dot{h}} / \sqrt{gr}) (\dot{h}_c - \dot{h})$$

$$K_{\dot{h}} = 42\sqrt{-K_a}$$

$$K_a < -4$$

$$10 < K_{\dot{h}} < 900$$

姿勢コマンド：

(17) 式より

$$\ddot{h}_c / g = \hat{V}^2 - 1 + a_{dc} (L/D) \cos \phi_B$$

制御則からの寄与成分を加えて次式で与える。

$$\cos(\phi_B) = \frac{\{1 - \hat{V}^2 + \ddot{h}_c / g + \Delta(L/D)\}}{a_{dc}(L/D)}$$

レンジ制御：

抗力加速度を () 式, 表-1 に示す。

方位制御：

レンジ要求を満たす揚抗比を制御する。() 式, 表-1

誘導則：

ψ_e : 方位角誤差

平坦地球, 円軌道の場合

$$S = R\psi_e / \sin \psi_e$$

$$\Psi_c = 2\psi_e$$

<補足>

I. ③の積分について

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{c-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \left| \frac{-2(x-1)+2k-2\sqrt{k(c-x^2)}}{x-\lambda} \right| \quad (k \geq 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sin^{-1} \left[\frac{-2(x-1)+2k}{\sqrt{4c(x-1)}} \right] \quad (k \leq 0) \end{aligned}$$

$$k = c - 1$$

III. ②の積分について

$$I = \int \frac{\sqrt{ax^2+2x-1}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax^2+2x-1}}{x} + aI_F + J_G$$

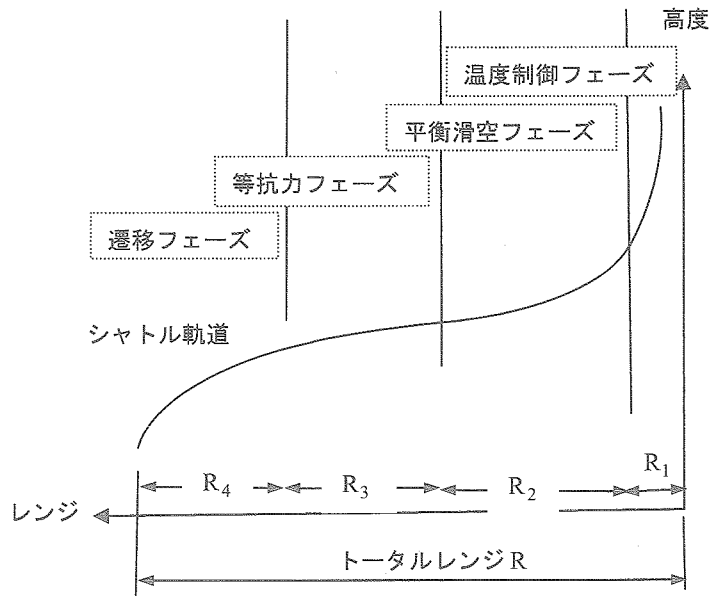
$$I_F = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$I_G = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

11-2. クローズドフォーム誘導(スペースシャトルの誘導)

11-2-1 再突入フェーズの誘導

スペースシャトルでは大気圏に突入後、一定高度まで軌道をそれぞれの飛行環境の特徴に合わせて右図のようにA)温度制御フェーズB)平衡滑空フェーズC)等(一定)抗力フェーズD)遷移フェーズの4つのフェーズに分割している。このように分割することにより各フェーズでの軌道の制御を行う。宇宙機のダイナミクスで述べたように大気圏に突入後の最初のフェーズでは通常、等揚抗比 L/D で飛行する。この場合飛行経路角は負から次第に大きくなり正となり



高度は増加する。このフェーズは一般にスキップフェーズと称する。このフェーズで問題となるのは空力加熱率であり、経路角が零近傍(プルアップ時)で最初に空力加熱率最大となる。この空力加熱率が過度にならないように揚抗比を変化させて軌道の制御を行うことから温度制御フェーズと称している。平衡滑空フェーズでは平衡滑空条件(経路角, 経路角変化率が微小)を満たすように揚抗比を変化させて、また等抗力フェーズでは抗力加速度が一定となるように揚抗比を変化させて軌道制御を行う。最後の遷移フェーズでは速度がかなり減少することからエネルギー(位置エネルギーと速度エネルギーの和)を独立変数として軌道の制御を行う。

ここで軌道の誘導すなわちレンジングを導出する。まず、経路角が小さい場合と仮定して、速度、レンジに関する微分方程式 $dV/dt \approx -D/m$, $dR/dt \approx V$ から独立変数を時刻 t から速度 V に変換すると

$$\frac{dR}{dV} = -\frac{V}{D_m} \quad (1)$$

ただし $D_m = D/m$: 抗力加速度, D : 抗力, m 機体質量。

で表されるから各フェーズでの抗力プロファイル D を速度 V の関数として仮定すれば

$$D_m = D_m(V) \quad (2)$$

$$R - R_C = - \int \left(\frac{V}{D_m} \right) dV \quad (3)$$

上式を積分することでレンジが得られる。

(I) 縦の誘導

ここでは再突入フェーズにおける縦の誘導について示す。各フェーズ毎の飛行レンジ及びその合計としての総飛行レンジの予測式と、各飛行フェーズ間の切り替え条件の導出を行う。

ここで導出した結果については後の表-1 にまとめてある。

(1) 予測飛行レンジ

A) 等加熱率フェーズの飛行レンジ

Detra, Kemp, Riddle (1957) (空力加熱率の項参照)によると澱点での \dot{Q}_{ST} は次式で表される。

$$\dot{q}_{ST} = 11353.8 \frac{17600}{\sqrt{R_N/0.3048}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{26000 \times 0.3048} \right)^{3.15} \frac{\text{joule}}{\text{m}^2 \text{sec}} \quad (4)$$

ここで R_N : ノーズ半径 (m), ρ_{SL} : 海面上密度 = 1.225 Kg/m³, 再突入速度を $V_E = 26000 \text{ft/sec}$ (= 7925m/sec), 11353.8 は単位変換定数 (1Btu/ft² = 11353.8 joule/m²)

これらの数値を(4)式に代入すると

$$\dot{q}_{ST} = \left\{ \frac{110 \times 10^6}{7925^{3.15} \sqrt{1.225}} \right\} \sqrt{\rho} V^{3.15} \frac{\text{joule}}{\text{m}^2 \text{sec}} \quad (5)$$

ただし $R_N = 1 \text{ m}$

スペースシャトルの誘導では速度の指数を 3.15 の代わりに 2.75 をとっているから

$$\dot{q}_{ST} = C_{IHDT} \sqrt{\rho} V^{2.75} \quad (6)$$

と置き $V = 6309 \text{m/sec}$ で両式が一致するように定数 C_{IHDT} を決めると

$$C_{IHDT} = 5.053 \times 10^{-3}$$

$$\dot{q}_{ST} = C_{IHDT} \sqrt{\rho} V^{2.75} \text{ joule/m}^2 \text{sec} \quad (7)$$

抗力加速度は次式で表されるから

$$D_m = (C_D A / 2m) \rho V^2 \text{ m/sec}^2 \quad (8)$$

密度 ρ を消去して抗力加速度をパラメータに表す。指数を $a = 2.75$ として

$$\dot{q}_{ST} = \frac{C_{IHDT}}{\sqrt{C_D A / 2m}} \sqrt{D_m} V^{(a-1)} \text{ joule/m}^2 \text{sec} \quad (9)$$

等(一定)空力加熱率の条件は $\dot{q}_{ST} = C_{IHDT} \sqrt{\rho} V^a$ から

$$\frac{d\dot{q}_{ST}}{dt} = C_{IHDT} \sqrt{\rho} V^{a-1} (\dot{\rho} V + 2a\rho\dot{V}) = -C_{IHDT} \sqrt{\rho} V^{a-1} \left(\frac{\dot{h}}{h_S} V + 2a D_m \right) \quad (10)$$

ここで密度と速度の変化率は

$$\dot{\rho} = -\rho\beta\dot{h} = -\rho\left(\frac{\dot{h}}{h_S}\right) \quad h_S = 1/\beta \quad : \text{スケール高度} \quad (11)$$

$$\dot{V} = -D_m \quad (= -D/m) \quad (12)$$

これより等(一定)空力加熱率で飛行する為には次の高度変化率が要求される。

$$\frac{\dot{h}}{h_S} = -\frac{2a D_m}{V} \quad (13)$$

等加熱率フェーズでは抗力加速度を速度 D_m を $V_{CG} \leq V \leq V_S$ の間で次の2次式で近似する。

$$D_m = C_1 + C_2 V + C_3 V^2 \quad (14)$$

上式の係数は以下のように求める。

空力加熱率の変化率は $D_m = (C_D A / 2m) \rho V^2$ m/sec² を微分して

$$\dot{D}_m = (C_D A / 2m) \rho V^2 \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{2\dot{V}}{V} \right) = -D_m \left(\frac{\dot{h}}{h_S} + \frac{2D_m}{V} \right) \quad (15)$$

さらに $\dot{D}_m = (C_2 + 2C_3 V)(dV/dt) = -(C_2 + 2C_3 V)D_m$ から

$$\frac{\dot{h}}{h_S} = -\frac{\dot{D}_m}{D_m} - \frac{2D_m}{V} = -\frac{2C_1 + C_2 V}{V} \quad (16)$$

等(一定)空力加熱率飛行の条件(13)式と比較すると

$$2a D_m = 2C_1 + C_2 V \quad (17)$$

C_1 を消去すると次の関係式を得る。

$$2(a-1)D_m = -C_2 V - 2C_3 V^2 \quad (18)$$

次に抗力加速度 D_m の速度 V に関する変化率 dD_m/dV を求めると

$$2(a-1) \left(\frac{dD_m}{dV} \right) = -C_2 - 4C_3 V \quad (19)$$

(14) 式を速度 V で微分して $C_2 + 2C_3 V = dD_m/dV$ から

$$(2a-1) \left(\frac{dD_m}{dV} \right) = -2C_3 V \quad (20)$$

以上から

$$C_3 = -\frac{(2a-1)}{2V} \left(\frac{dD_m}{dV} \right) \quad (21)$$

$$C_2 = 2a \left(\frac{dD_m}{dV} \right) \quad (22)$$

$$C_1 = D_m - C_2 V - C_3 V^2 \quad (23)$$

ここでこれらの係数 C_1, C_2, C_3 を決定する。パラメータは速度 V と抗力加速度の速度変化率である。そこで等空力加熱率フェーズと平衡滑空フェーズの切替時の速度と抗力加速度の変化率を

$$V = V_{Bl}$$

$$\left(\frac{dD_m}{dV} \right)_{V=V_{Bl}} = \frac{D_{mBl}}{V_{Bl}} \quad (24)$$

と置き

$$AK = -2a(D_{mBl}/V_{Bl}) \quad (25)$$

$$C_{Z2} = -4aV_{Bl}/(2a-1) \quad (26)$$

とすれば上記係数は次のように簡単な形で表される。

$$C_3 = -AK / C_{Z2} \quad (27)$$

$$C_2 = C_3 C_{Z2} \quad (28)$$

$$C_1 = D_{mBl} - C_2 V_{Bl} - C_3 V_{Bl}^2 \quad (29)$$

この切替時の速度 V_{Bl} は空力加熱率が許容範囲内で最大となる速度で一定とする。切替時の抗力加速度 $D_{mBl}(\rho, V_{Bl})$ は可変である。これより係数 C_1, C_2, C_3 は $D_{mBl}(\rho, V_{Bl})$ の関数となる $D_{mBl}(\rho, V_{Bl})$ が与えられると抗力加速度の係数が求まるので等空力加熱率フェーズのレンジは次の積分により得られる。

$$R_1 = - \int_{V_s}^{V_{Bl}} \left(\frac{V}{C_1 + C_2 V + C_3 V^2} \right) dV \quad (30)$$

(30) 式は初等関数で表すことができ、積分結果は表-1 に示す。

いま $V = V_{CG}$ を平衡滑空飛行フェーズ終端速度(等抗力フェーズとの切替速度)とすれば次フェーズの平衡滑空飛行での飛行レンジは次式で表される(次項参照)

$$R_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{V_S^2 - V_{Bl}^2}{D_{mBl}} \right) \ln \left(\frac{V_S^2 - V_{CG}^2}{V_S^2 - V_{Bl}^2} \right) \quad (31)$$

V_S, V_{Bl}, V_{CG} を一定とすると, (31) 式の右辺は $D_{mBl}(\rho, V_{Bl})$ のみの関数となる。したがって温度制御フェーズと平衡滑空飛行の飛行レンジ $R_1 + R_2$ は $D_{mBl}(\rho, V_{Bl})$ により決定される。逆に飛行レンジが要求飛行レンジを満たすように $D_{mBl}(\rho, V_{Bl})$ を決定する。

B) 平衡滑空フェーズでの飛行レンジ

宇宙機の世界座標での運動方程式で速度ベクトルに垂直方向の方程式は次式で表され, 平衡滑空飛行の条件 $\gamma, d\gamma/dt \ll 1$ から

$$\begin{aligned} V \frac{d\gamma}{dt} &= L_m \cos \phi_B + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \\ &\approx \left(\frac{L}{D} \right) D_m \cos \phi_B - g \left(1 - \frac{V^2}{gr} \right) = 0 \end{aligned}$$

上式から抗力加速度を求めると次の通り。ただし $V_S = \sqrt{gr}$

$$D_m = \frac{1}{(L/D) \cos \phi_B} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2} \right) g$$

$(L/D) \cos \phi_B$ が一定とすると平衡滑空フェーズでの抗力加速度は速度 V の2次式で表される。

(3) 式に代入して平衡滑空フェーズでの飛行レンジ R_2 は次式で表される。

$$\begin{aligned} R_2 &= \int \left(\frac{V}{D_m} \right) dV = \frac{(L/D) \cos \phi_B V_S^2}{2g} \int \frac{1}{2} \left(\frac{V}{V_S^2 - V^2} \right) dV \\ &= \frac{(L/D) \cos \phi_B V_S^2}{2g} \ln \left(\frac{V_S^2 - V_{CG}^2}{V_S^2 - V^2} \right) \end{aligned}$$

$V = V_{Bl}$ において $(L/D) \cos \phi_B = (V_S^2 - V_{Bl}^2) / D_{mBl} V_S^2$ が成り立つから $(L/D) \cos \phi_B$ を消去して

$$R_2 = \frac{1}{2} \frac{(V_S^2 - V_{Bl}^2)}{D_{mBl}} \ln \left(\frac{V_S^2 - V_{CG}^2}{V_S^2 - V^2} \right)$$

C) 等抗力飛行フェーズでの飛行レンジ

等抗力飛行フェーズでは抗力加速度が一定と仮定していることから抗力加速度レベルを D_{CG} とすれば

$$D_m = D_{CG}$$

これより飛行レンジ R_3 は

$$R_3 = \int \left(\frac{V}{D_m} \right) dV = \frac{1}{D_{CG}} \int V dV$$

$$R_3 = \frac{V_{CG}^2 - V_{TRAN}^2}{2D_{CG}}$$

D) 遷移フェーズでの飛行レンジ

宇宙機の速度が次第に低下して $V = V_Q$ (一定値) になると等抗力飛行フェーズから遷移フェーズに移行する。大気圏突入後等抗力飛行までは速度が非常に大きく、位置エネルギーに比べて速度エネルギーが十分大きいと仮定して独立変数として速度を用いたが、遷移フェーズでは速度の低下にともなって位置エネルギーの割合が大きくなるので、速度のかわりにエネルギーを独立変数として用いる。エネルギー(単位密度当たり)は次式で定義される。

$$E = gh + \frac{V^2}{2}$$

抗力加速度の定義式 $D_m = (C_D A / 2m) \rho V^2$ から V^2 を消去すると

$$E = gh + \left(\frac{m}{C_D A \rho} \right) D_m$$

または

$$D_m = (C_D A \rho / m) (E - gh)$$

遷移フェーズでは高度の変化が小さいと仮定して $C_5 = (C_D A \rho / m)$ と置けば

$$D_m - D_{mF} = C_5 \{ (E - E_F) - g(h - h_F) \} \approx C_5 (E - E_F)$$

$$D_m - D_{mF} = C_5 (E - E_F) \quad (32)$$

ここでエネルギーの高度変化率を求めると

$$\frac{dE}{dh} = g + V \left(\frac{dV}{dh} \right) = g + V \left(\frac{dV}{dt} \right) \left(\frac{dt}{dh} \right) \approx - \frac{D_m}{\sin \gamma} \quad (33)$$

ただし $dV/dt = -D_m$ $dh/dt = V \sin \gamma$

飛行レンジの高度に対する変化率は $dR/dt = V \cos \gamma$ から

$$\frac{dR}{dh} = \left(\frac{dR}{dt} \right) \left(\frac{dt}{dh} \right) = \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \quad (34)$$

両式から

$$\frac{dR}{dE} = \left(\frac{dR}{dh} \right) \left(\frac{dh}{dE} \right) = - \frac{\cos \gamma}{D_m} \quad (35)$$

これより遷移フェーズでの飛行距離は(3)式の代わりに次式を用いる。また経路角が小さいと仮定しているから $\cos \gamma = 1$ と置いて次式で近似する。

$$R = - \int \frac{\cos \gamma}{D_m} dE \approx - \int \frac{dE}{D_m} \quad (36)$$

(32)式の抗力加速度を用いると

$$R_4 = - \int \frac{dE}{D_F + C_5(E - E_F)}$$

$$R_4 = \left(\frac{E - E_F}{D - D_F} \right) \ln \left(\frac{D}{D_F} \right)$$

以上からトータルの予測飛行レンジは次式で表される。

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

(2)各フェーズの切換条件

2-1 等加熱率フェーズと平衡滑空飛行フェーズの切換条件

等加熱率フェーズの加熱率は(9)式から

$$\dot{q}_{ST} = \frac{C_{IHDT}}{\sqrt{C_D A / 2m}} \sqrt{D_m} V^{(a-1)} \text{ joule/m}^2 \text{ sec}$$

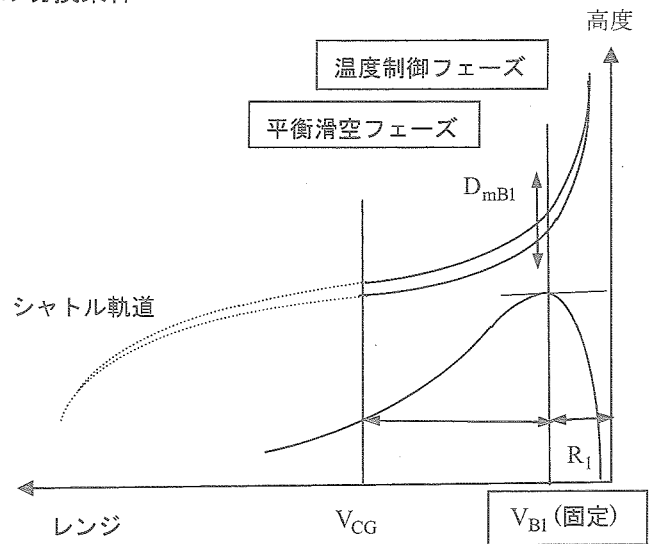
$$a = 2.75$$

平衡滑空飛行フェーズでの抗力加速度は

$$D_m = \frac{1}{(L/D) \cos \phi_B} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2} \right) g$$

切換点 $V = V_{Bl}$ では両式が成り立つから加熱率は速度の関数として次式で表される。加熱率最大となる速度を求め

$$\dot{q}_{ST} = \frac{C_{IHDT}}{\sqrt{C_D A / 2m}} \frac{V_S^{1.75}}{\sqrt{(L/D) \cos(\phi_B)}} g \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_S} \right)^2 \right\}^{0.5} \left(\frac{V}{V_S} \right)^{1.75} = K \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V_S} \right)^2 \right\}^{0.5} \left(\frac{V}{V_S} \right)^{1.75}$$



上式を微分して0と置き加熱率最大となる速度を求める。

$$\frac{dq_{ST}}{d(V/V_S)} = -0.75K \left\{ 1 - (V/V_S)^2 \right\}^{-0.5} (V/V_S)^{1.75} (V/V_S)^{-1} \left\{ 1.75/0.75 - (V/V_S)^2 \right\} = 0$$

これより加熱率最大となる速度は次の値で与えられる。

$$V_{BI}/V_S = \sqrt{1.75/0.75}$$

$$V_{BI} = 6309 \text{ m/sec} \quad \text{ただし } V_S = 7908.74 \text{ m/sec}$$

2-2 平衡滑空飛行フェーズと等抗力フェーズの切換条件

平衡滑空飛行フェーズでの抗力加速度は以下の式で表される。

$$D_m = \frac{(1 - V^2/V_S^2)}{(L/D) \cos \phi_B} g \quad (37)$$

バンク角 ϕ_B 揚抗比 L/D が一定と仮定すると平衡滑空飛行フェーズでは抗力加速度は速度の低下にともなって増加する。このとき空力荷重 G は

$$G = \sqrt{L_m^2 + D_m^2} = \sqrt{1 + (L/D)^2} D_m$$

で表され、空力荷重 G の許容値を

$$G = ALFM g \quad ALFM : \text{定数}$$

と置けば切換時の抗力加速度 D_{mCG} は次式で表される。

$$D_m = D_{mCG}$$

$$D_{mCG} = \frac{G}{\sqrt{1 + (L/D)^2}} = \frac{ALFM g}{\sqrt{1 + (L/D)^2}}$$

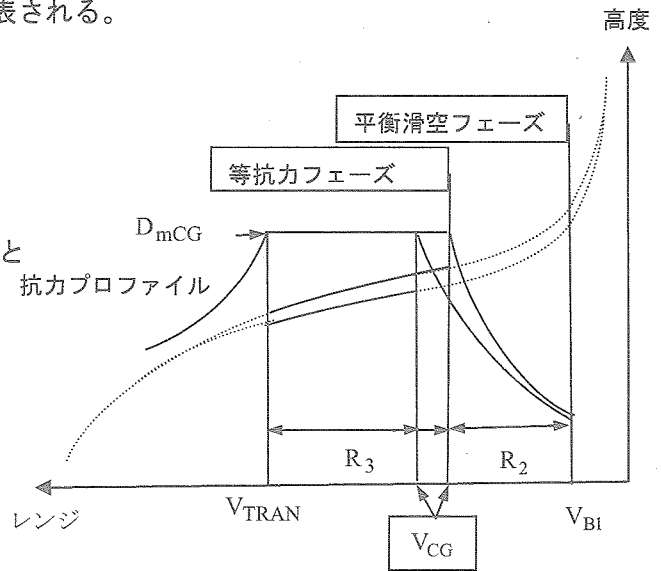
(37) 式に代入して切換時の速度 V_{CG} を求めると

$$V_{CG} = V_S \sqrt{1 - \left\{ D_{CG} (L/D) / g \right\} \cos \phi_B}$$

または

$$V_{CG} = V_S \sqrt{1 - \left\{ \frac{ALFM (L/D)}{\sqrt{1 + (L/D)^2}} \right\} \cos \phi_B}$$

で与えられる。



2-3 等抗力フェーズと遷移フェーズの切換条件

速度が一定値 V_Q に達したときに等抗力フェーズから遷移フェーズへ切換切り換える。

$$V = V_Q \text{ (一定)}$$

2-4 遷移フェーズの終了条件

速度が一定値 V_{TAEM} に達したときに遷移フェーズを終了して、次フェーズのエネルギー制御フェーズ(TAEM: Terminal Area Energy Managment)に移行する。

$$V = V_{TAEM} \text{ (一定)}$$

(II) 軌道制御

ここではまず、(I)項で求めた関係式から軌道制御を行うために必要な基準要求揚抗比と基準高度変化率を導出する。その後それに添って飛行するための指令揚抗比を求め、それを実現するための指令バンク角を求める。

ここで導出した基準高度変化率と基準揚抗比については後の表-2にまとめてある。

(1) 基準要求揚抗比/高度変化率

抗力加速度の時間変化率は(15)式から次のように表せた。

$$\dot{D}_m = -D_m \left(\frac{\dot{h}}{h_s} + \frac{2D_m}{V} \right)$$

これより高度変化率は次のようになる。

$$\dot{h}_{ref} = -h_s \left(\frac{\dot{D}_m}{D_m} + \frac{2D_m}{V} \right) \quad (38)$$

上式をさらに微分すると

$$\ddot{h} = -h_s \left(\frac{2\dot{D}_m}{V} + \frac{2D_m^2}{V^2} + \frac{\ddot{D}_m}{D_m} - \frac{\dot{D}_m^2}{D_m^2} \right)$$

一方経路角が小さいと仮定しているから

$$\dot{h} = V\gamma$$

$$\ddot{h} = \dot{V}\gamma + V\dot{\gamma}$$

経路角が小さい場合には運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -D_m \\ V\dot{\gamma} &= -g\left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) + \left(\frac{L}{D}\right)D_m \\ \ddot{h} &= -D_m \frac{\dot{h}}{V} - g\left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) + \left(\frac{L}{D}\right)D_m \\ &\quad - \frac{h_s}{D_m} \left(\frac{2D_m\dot{D}_m}{V} + \frac{2D_m^3}{V^2} + \ddot{D}_m - \frac{\dot{D}_m^2}{D_m} \right) = -\frac{h_s}{D_m} \left(\frac{D_m\dot{D}_m}{V} + \frac{2D_m^3}{V^2} \right) - g\left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) + \left(\frac{L}{D}\right)D_m\end{aligned}$$

整理して揚抗比に関して次式を得る。

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{ref}} = \frac{g}{D_m} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) - \frac{h_s}{D_m} \left\{ \frac{\ddot{D}_m}{D_m} - \frac{\dot{D}_m}{D_m} \left(\frac{\dot{D}_m}{D_m} - \frac{3D_m}{V} \right) + \frac{4D_m^2}{V^2} \right\} \quad (39)$$

上式は飛行フェーズによらず一般に成り立つ。前項で述べたように各フェーズでの抗力加速度は速度の関数として与えられていることから上式により各フェーズの飛行に要求される揚抗比が得られる。

A) 等加熱率フェーズの基準揚抗比/高度変化率

(14)式 $D_m = C_1 + C_2 V + C_3 V^2$ から

\dot{D}_m/D_m , \ddot{D}_m/D_m^2 を求めると $\dot{V} = -D_m$ に留意して次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\dot{D}_m}{D_m} &= -C_2 V - 2C_3 V \\ \frac{\ddot{D}_m}{D_m^2} &= \frac{(C_2 + 2C_3 V)^2}{D_m} + 2C_3\end{aligned}$$

基準揚抗比の一般式に代入して、等加熱率フェーズの基準揚抗比は次式で表される。

$$\begin{aligned}\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{ref}} &= \frac{g}{D_m} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) - \frac{4h_s C_1}{V^2} - \frac{h_s C_2}{V} \\ \dot{h}_{\text{ref}} &= -\frac{h_s(2C_1 + C_2 V)}{V}\end{aligned}$$

B) 平衡滑空フェーズの基準揚抗比/高度変化率

$D_m = \frac{1}{(L/D)\cos\phi_B} \left(1 - V^2/V_S^2\right)$ から \dot{D}_m/D_m , \ddot{D}_m/D_m^2 をもとめると $\dot{V} = -D_m$ に留意して次式を得る。

$$\frac{\dot{D}_m}{D_m} = \frac{g}{(L/D)} \frac{2V}{V_S^2}$$

$$\frac{\dot{D}_m}{D_m} = -\frac{g}{(L/D)V_S^2} + \left(\frac{g}{L/D}\right)^2 \left(\frac{2}{V_S^2}\right)^2 \frac{1}{D_m}$$

基準揚抗比の一般式に代入して、平衡滑空フェーズの基準揚抗比は次式で表される。

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{ref}} = \frac{g}{D_m} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) - \frac{4h_s D_m}{V^2 \left(1 - V^2/V_S^2}\right)$$

$$\dot{h}_{\text{ref}} = -\frac{2h_s D_m}{V \left(1 - V^2/V_S^2}\right)}$$

C) 等抗力飛行フェーズの基準揚抗比/高度変化率

等抗力飛行フェーズでは抗力加速度が一定という条件から

$$\dot{D}_m = \ddot{D}_m = 0$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{ref}} = \frac{g}{D_m} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) - \frac{4h_s D_m}{V^2}$$

$$\dot{h}_{\text{ref}} = -\frac{2h_s D_m}{V}$$

D) 遷移フェーズの基準揚抗比/高度変化率

遷移フェーズでは(32)式で高度の変化が小さいと仮定し $C_5 = C_D A \rho / m$ (一定)と近似した。これより抗力加速度は速度の二乗に比例する。

$$D_m = (C_D A \rho / m) \left(V^2 / 2\right) \approx C_5 \left(V^2 / 2\right)$$

これを微分すると

$$\frac{\dot{D}_m}{D_m} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{2\dot{V}}{V} \approx \frac{2\dot{V}}{V}$$

また経路角が小さいと仮定しているから高度変化率 \dot{h} , 加速度 \dot{V} は次式で表される。

$$\dot{h} = V\gamma$$

$$\dot{V} = -D_m - g\gamma$$

両式から経路角を消去すると

$$\dot{V} = -D_m - g(\dot{h}/V)$$

上式に代入して $2D_m/V = C_5 V$ なる関係式をもちいると

$$\frac{\dot{D}_m}{D_m} = \frac{2\dot{V}}{V} = -C_5 V - \frac{2g}{V^2} \dot{h}$$

高度変化率の一般式(38)に代入して

$$\dot{h} = -h_s \left(-C_5 V - \frac{2g\dot{h}}{V^2} + \frac{2D_m}{V} \right)$$

高度変化率 \dot{h} を求めると遷移フェーズでの基準高度変化率は次の通り。

$$\dot{h}_{\text{ref}} = -h_s \frac{(2D_m V - C_5 V^3)}{V^2 + 2gh_s}$$

$$\dot{V} = \frac{V}{(V^2 + 2gh_s)} \left(\frac{\dot{D}_m}{D_m} - \frac{VD_m}{gh_s} \right)$$

$$\ddot{h} = -h_s \frac{(2D_m - 3C_5 V^2) \dot{V} (V^2 + 2gh_s) - (2D_m V - C_5 V^3) 2V \dot{V}}{(V^2 + 2gh_s)^2}$$

$$= -h_s \left\{ -2D_m V^2 - C_5 V^4 + 2gh_s (2D_m - 3C_5 V^2) \right\} \frac{\dot{V}}{(V^2 + 2gh_s)^2}$$

$$\frac{\ddot{D}_m}{D_m} = \frac{\dot{D}_m^2}{D_m^2} - \frac{\ddot{h}}{h_s} - \frac{2\dot{D}_m V - 2D_m \dot{V}}{V^2}$$

(39) 式にこれらを代入する事で基準揚抗比が得られる。詳細は表-2 を参照。

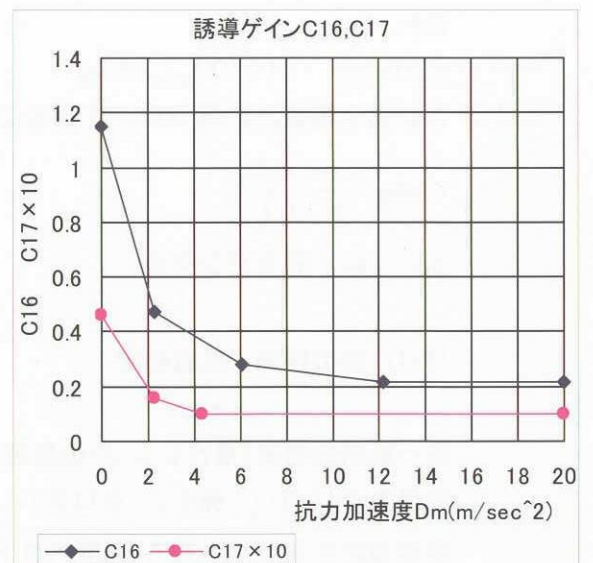
$$\left(\frac{L}{D} \right)_{\text{ref}} = \frac{g}{D_m} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2} \right) - \frac{h_s}{D_m} \left\{ \frac{\ddot{D}_m}{D_m} - \frac{\dot{D}_m}{D_m} \left(\frac{\dot{D}_m}{D_m} - \frac{3D_m}{V} \right) + \frac{4D_m^2}{V^2} \right\}$$

(2) 指令揚抗比

指令揚抗比は基準揚抗比に加えて、抗力加速度と高度変化率の基準値からの差にゲインを掛けて次式で計算する。

$$(L/D)_{VC} = (L/D)_{VC\text{ref}} + C_{16} (D_m - D_{m\text{ref}}) + C_{17} (\dot{h} - \dot{h}_{\text{ref}})$$

$(L/D)_{VC\text{ref}}, D_{m\text{ref}}, \dot{h}_{\text{ref}}$ は各フェーズに対応して与えられる。またゲイン C_{16}, C_{17} はそれぞれ抗力加速度と高度変化率に対するゲインで速度の関数として与える。



(3) 制御変数

揚抗比は迎角とバンク角の2変数の関数として次のように表される。

$$(L/D)_v = \{(L/D)(\alpha)\} \cos \phi_B : \text{飛行面内揚抗比}$$

$$(L/D)_n = \{(L/D)(\alpha)\} \sin \phi_B : \text{飛行面外揚抗比}$$

そこで迎角については速度の関数として予め与えると揚抗比はバンク角の関数として与えられる。

$$\alpha = \alpha_c(V) : \text{迎角}$$

したがってこの迎角で表される揚抗比を $(L/D)_{nom}$ とあらわすと $(L/D)_{nom}$ も速度の関数として表される。

$$(L/D)_{nom} = (L/D)(\alpha_c)$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{nom} = \frac{C_{L0} \sin^2 \alpha_c \cos \alpha_c}{C_{D0} + C_{DL} \sin^3 \alpha_c}$$

空力係数の例

$$C_{L0} = 2.3$$

$$C_{D0} = 0.0378$$

$$C_{DL} = 2.09$$

これより指令揚抗比 $(L/D)_{VC}$ は次式であらわされ、

$$(L/D)_{VC} = (L/D)_{nom} \cos \phi_B$$

この指令揚抗比を $(L/D)_{VC}$ を得るのに必要なバンク角 ϕ_{BC} は次式で表される

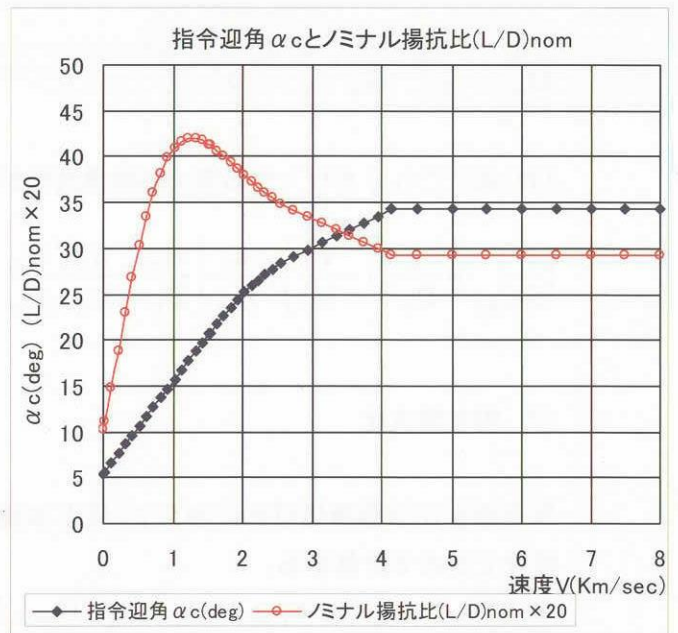
$$\cos \phi_B = \frac{(L/D)_{VC}}{(L/D)_{nom}}$$

$$\phi_{BC} = \phi_B : \text{指令バンク角}$$

(III) 横の誘導・軌道制御

飛行面内の制御(飛行レンジ)の誘導を行うためにバンク角 ϕ_{BC} をとると、必然的に飛行面外の揚力が $(L/D)_n$ 発生し、クロスレンジ方向誤差が発生する。

宇宙機の位置ベクトル \bar{r} 、速度ベクトル \bar{v} から局所水平面内で飛行方位角 ψ がえられ、また位置ベクトル \bar{r} と目標位置ベクトル \bar{r}_T (既知) から目標飛行方位角 ψ_T が得られる。これよ



り方位角誤差 $\Delta\psi$ は次式で表される。

$$\Delta\psi = \psi - \psi_T$$

この方位角誤差 $\Delta\psi$ にデッドバンド幅を設定してこの値を超えると指令バンク角の方向（符号）を逆転させる（ $\phi_{BC} \rightarrow -\phi_{BC}$ ）。このようにすると飛行方位角は常に目標からデッドバンドで決まる所定の範囲に制限される。縦の誘導に対すしては指令バンク角の方向が変わっても飛行面内の揚力はバンク角の余弦値で算出することから、大きさは変わらないため、影響は無い。

$$|\Delta\psi| = GYB \text{ (定数) ならば}$$

$$\phi_{BC} \rightarrow -\phi_{BC}$$

速度が小さくなった所でデッドバンドの幅を小さくすることにより、クロスレンジ方向の誘導精度を向上する事が出来る。

尚、実際にはバンク角を逆転させるのには有限の時間がかかる事から実際の飛行方位角は設定したデッドバンドをオーバーシュートする。このため、デッドバンドをあまり小さくする事は出来ない。さらに、バンク角を逆転している最中は要求より小さなバンク角となることからその間は計画している軌道より高めに飛行する事になる。この効果を打ち消すためにバンク角逆転期間中だけ迎え角を調整するようなことも行われている。

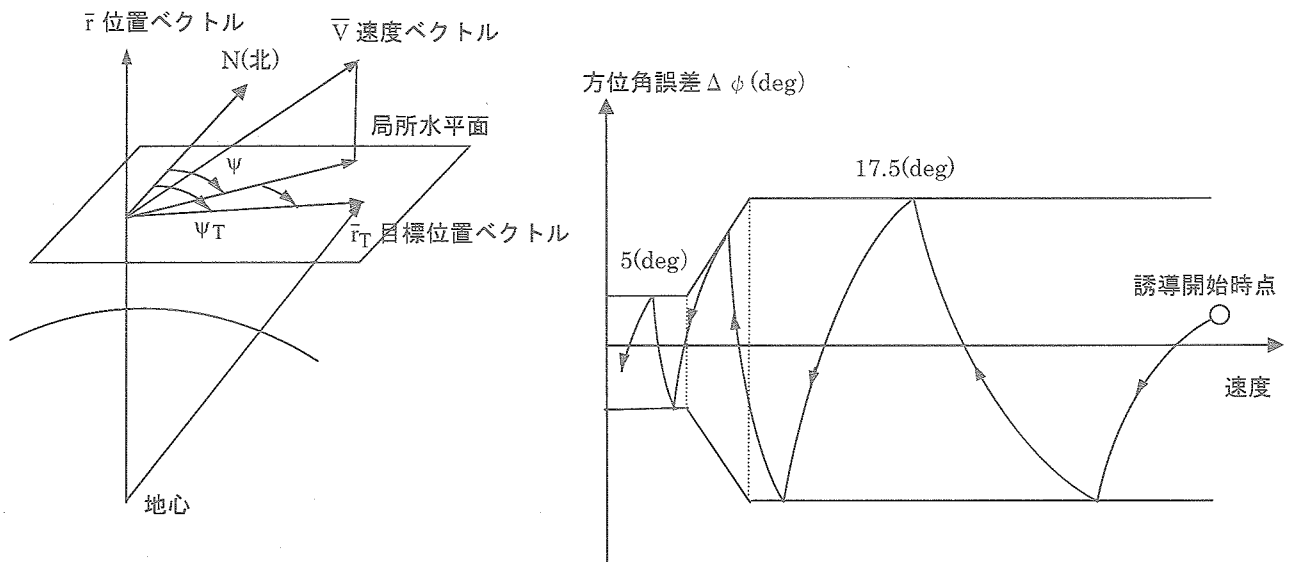


表-1 予測レンジR

フェーズ	抗力加速度 D_m	レンジ予測式 R
温度制御 フェーズ	$C_1 + C_2V + C_3V^2$	$Q = 4C_3C_1 - C_2^2$ $Q > 0$ $R_1 = \frac{1}{2C_3} \left[\ln(C_1 + C_2V + C_3V^2) \right]_{V_f}^{V_f} + \frac{C_2}{C_3\sqrt{Q}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{2C_3V + C_2}{\sqrt{Q}} \right) \right]_{V_f}^{V_f}$ $Q < 0$ $R_1 = \frac{1}{2C_3} \left[\ln(C_1 + C_2V + C_3V^2) \right]_{V_f}^{V_f} + \frac{C_2}{2C_3\sqrt{-Q}} \left[\ln \left(\frac{2C_3V + C_2 - \sqrt{-Q}}{2C_3V + C_2 + \sqrt{-Q}} \right) \right]_{V_f}^{V_f}$
平衡滑空 フェーズ	$\frac{g}{(L/D)} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2} \right)$	$R_2 = \left(\frac{V_S^2 - V^2}{2D_m} \right) \ln \left(\frac{V_F^2 - V_S^2}{V^2 - V_S^2} \right)$
等抗力 フェーズ	C_4	$R_3 = \frac{V^2 - V_F^2}{2C_4}$
遷移フェーズ	$D_{mF} + C_5(E - E_F)$	$R_4 = \frac{E - E_F}{D_m - D_{mF}} \ln \left(\frac{D_m}{D_{mF}} \right)$

表-2 基準高度変化率, 基準揚抗比

フェーズ	抗力加速度 D_m	基準高度変化率 \dot{h}_{ref}	基準揚抗比 $(L/D)_{ref}$
温度制御 フェーズ	$C_1 + C_2 V + C_3 V^2$	$-\frac{h_s}{V}(2C_1 + C_2 V)$	$\frac{g}{D_m} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) - \frac{4h_s C_1}{V^2} - \frac{h_s C_2}{V}$
平衡滑空 フェーズ	$\frac{g}{(L/D)} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right)$	$-\frac{h_s}{V} \left(\frac{2D_m}{1 - V^2/V_S^2}\right)$	$\frac{g}{D_m} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) - \frac{4h_s D_m}{V^2 \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right)}$
等抗力 フェーズ	C_4	$-h_s \frac{2D_m}{V}$	$\frac{g}{D_m} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) - \frac{4h_s D_m}{V^2}$
遷移フェーズ	$D_F + C_5(E - E_F)$	$-h_s \left(\frac{2D_m V - C_5 V^3}{V^2 + 2h_s g}\right)$	$\frac{g}{D_m} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right) +$ $\frac{2V\dot{h}_{ref} + \frac{2\dot{h}_{ref}^2}{D_m} - h_s C_5 V^2 + 2D_m h_s + 2g\dot{h}_{ref} \frac{h_s}{V} - \frac{3C_5 V g \dot{h}_{ref} h_s}{D_m}}{V^2 + 2gh_s}$ $+ \frac{\dot{h}_{ref}}{V} + \frac{g}{D_m} \frac{\dot{h}_{ref}^2}{V^2}$

11-2-2 TAEM フェーズの誘導

TAEM フェーズは前段の熱や機体にかかる荷重の厳しい再突入フェーズから引き継ぎ、後段滑走路に正確に着陸させるアプローチ・ランディングフェーズへつなぐ飛行フェーズである。このフェーズでは、種々の制約のために再突入フェーズでは吸収しきれない軌道やエネルギーの誤差を吸収し、所定の精度で滑走路に正対させる役割をもっている。

TAEM 誘導則では飛行フェーズを4つのフェーズに分割する。また基準飛行パラメータエネルギー E_N 、高度 h_N 、動圧 q_N 、高度変化率 $(dh/dR)_N$ をあらかじめ滑走路座標座標原点までの予測飛行距離 R の関数(1次または2次関数)で与える。従って各フェーズにはいる前に予測飛行距離 R の計算が必要となる。

①S-ターン・フェーズ

S-ターンフェーズでは飛行経路をアライメント円の外側に膨らませる事により飛行距離を長くし、過剰エネルギーの消散を容易にする。従って宇宙機のエネルギーが自動着陸(A/L)のインターフェース条件を超える場合のみこのフェーズに入り、軌道変更による効果に加え垂直尾翼に装備されているスピードブレーキ(スプリット・ラダー)、及び動圧を変化させることによりエネルギーの消散をはかる。

②アクイジション・フェーズ

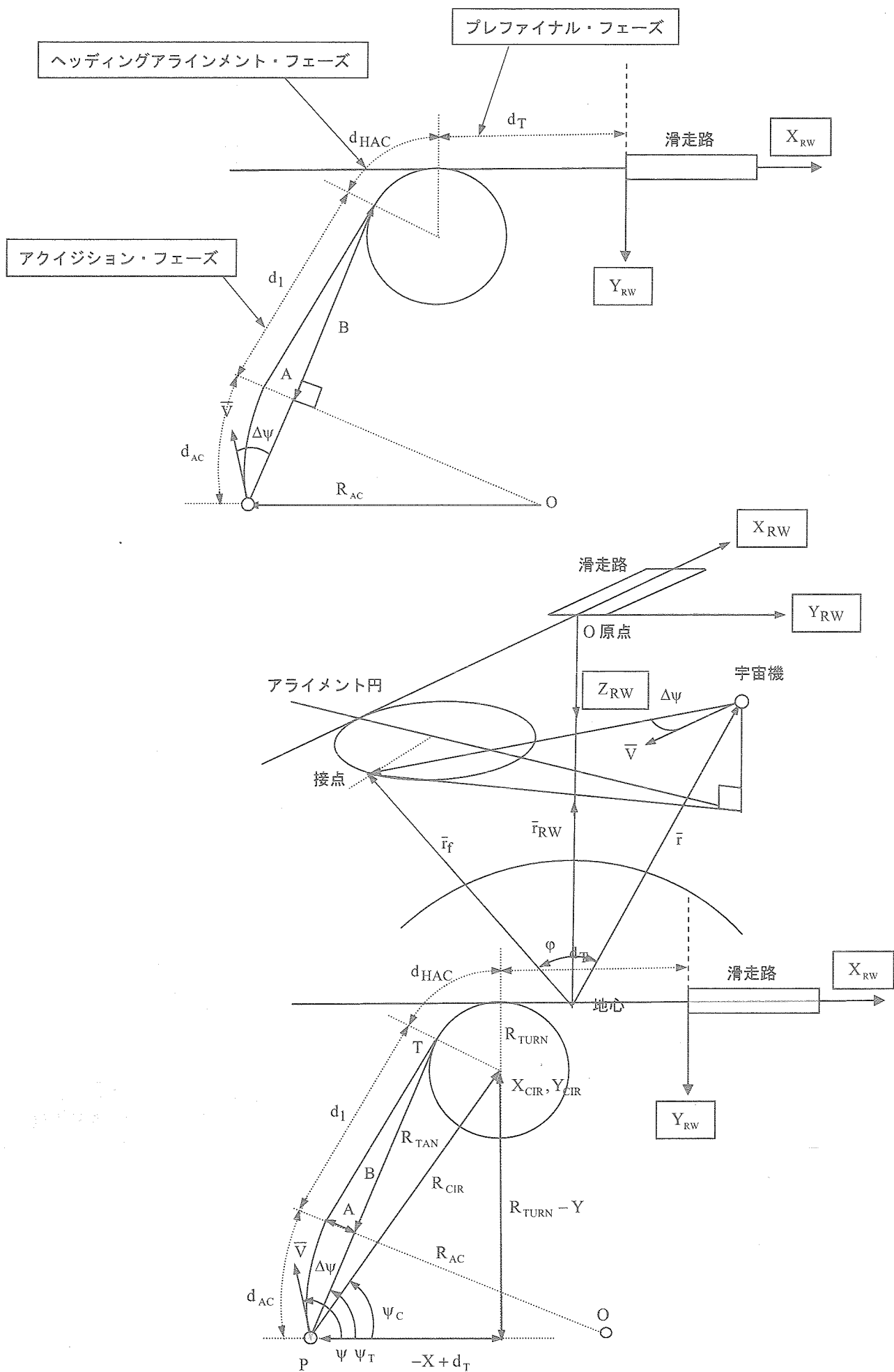
アクイジション・フェーズでは宇宙機の飛行経路がアラインメント・シリンダ(半径約6Km)に接するように制御する。アラインメント・シリンダとの接点は最終着陸条件を満たすように選ぶ。エネルギーの消散は宇宙機が亜音速($M < 1$)の場合にはスピードブレーキと動圧を併用して行う。超音速($M > 1$)の場合にはスピードブレーキの操作は行わない。(一定開度)

③ヘディングアラインメント・フェーズ

ヘディングアラインメント・フェーズでは宇宙機をアラインメント・シリンダに沿って周回させる。エネルギー消散の方法はアクイジション・フェーズの場合と同じである。宇宙機は最終アプローチ面に対して $\pm 20^\circ$ になるように制御する。

④プレファイナル・フェーズ

最終アプローチ面に対して横方向の位置、およびその変化率の制御を行う。また縦方向の制御はスピードブレーキと動圧の操作により、自動着陸のインターフェース条件(高度3Km, 速度149m/sec, 滑走路面に対する方位角 $\pm 10^\circ$)を満たすように制御する。



1) 予測距離の計算

TAEM の誘導を行うためには現在位置から滑走路端（滑走路座標座標原点）までの飛行経路を地上に投影した予測距離を推定する必要が有る。ここではその導出を行う。

①S-ターン, アクイジション・フェーズ

現在位置を $P(X, Y)$ とする。

現在位置から見たアラインメント円の中心は

$$X_{\text{CIR}} = -X + d_T$$

$$Y_{\text{CIR}} = R_{\text{TURN}} - Y$$

アラインメント円の中心までの距離

$$R_{\text{CIR}} = \sqrt{X_{\text{CIR}}^2 + Y_{\text{CIR}}^2}$$

アラインメント円の接点までの距離

$$R_{\text{TAN}} = \sqrt{R_{\text{CIR}}^2 - R_{\text{TURN}}^2}$$

アラインメント円の中心ま
で方位角

$$\tan \psi_C = Y_{\text{CIR}} / X_{\text{CIR}}$$

アラインメント円の接点ま
での方位角

$$\psi_T = \psi_C - \tan^{-1}(R_{\text{TURN}} / R_{\text{TAN}})$$

現在の速度ベクトルの方位角 ψ とすれば方位角誤差は

$$\Delta\psi_T = \psi - \psi_T$$

アクイジションフェーズでの旋回半径は平均バンク角を ϕ_{avg} とすれば、水平方向の運動方程式から

$$R_{\text{AC}} = V_H V / g \tan \phi_{\text{avg}}$$

ここで

V_H : 速度の水平面内成分

平均バンク角はマッハ数の関数として次式で与える。

$$\phi_{\text{avg}} = \phi_{\text{avgC}} - \phi_{\text{avgS}} M_{\infty}$$

アクイジションフェーズの旋回半径は

$$d_{\text{AC}} = R_{\text{AC}} \Delta\psi$$

また距離 A, B, d_1 は幾何学的関係から

$$A = R_{\text{AC}} (1 - \cos \Delta\psi)$$

$$B = R_{\text{TAN}} - R_{\text{AC}} \sin |\Delta\psi|$$

$$d_1 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

以上から滑走路原点までの予測距離は次式で表される。

$$R_{\text{PRED}} = d_{\text{AC}} + d_1 + d_{\text{HAC}} + d_{\text{T}}$$

②ヘッディングアライメント・フェーズ

アライメント円周上の予測距離は

$$d_{\text{HAC}} = R_{\text{TURN}} \tan^{-1} \left(\frac{|X_{\text{CIR}}|}{|Y_{\text{CIR}}|} \right)$$

従って滑走路原点までの予測距離は次式で表される。

$$R_{\text{PRED}} = d_{\text{HAC}} + d_{\text{T}}$$

③プレファイナル・フェーズ

このフェーズでの予測距離は簡単に次式で表される。

$$R_{\text{PRED}} = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

2) 基準軌道

$$DR_{\text{PRED}} = R_{\text{PRED}} + X_{\text{ALI}}$$

$$E/W = H + V^2/2g$$

基準エネルギー

$$E_{\text{N}} = \underline{E_{\text{NC1}}} + \underline{E_{\text{NC2}}} \left(DR_{\text{pred}} - \underline{R_{\text{N1}}} \right)$$

$$H_{ref} = H_{ALI} - T_{GGS} DR_{pred}$$

$$\bar{Q}_{ref} = \bar{Q}_{UL} + \bar{Q}_{BC2} DR_{pred} \quad DR_{pred} \leq \bar{P}_{CQ}$$

$$\bar{Q}_{ref} = \bar{Q}_{LL} + \bar{Q}_{BC1} (DR_{pred} - \bar{P}_{CQ}) \quad DR_{pred} \geq \bar{P}_{CQ}$$

高度誤差

$$\delta H_{error} = H_{ref} - H$$

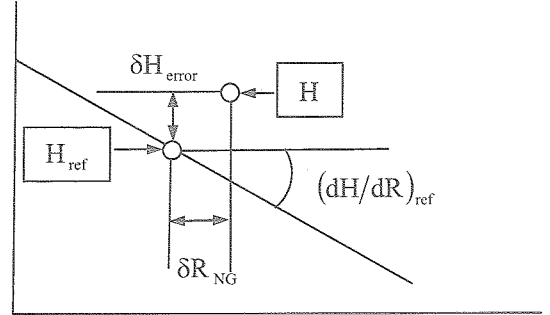
飛行経路角

$$(dH/dR)_{ref} = -\bar{P}_{GC} \quad DR_{pred} \geq \bar{P}_C$$

$$(dH/dR)_{ref} = T_{GGS} - DR_{pred} (2C_3 + 3C_4 DR_{pred}) \quad DR_{pred} \leq \bar{P}_C$$

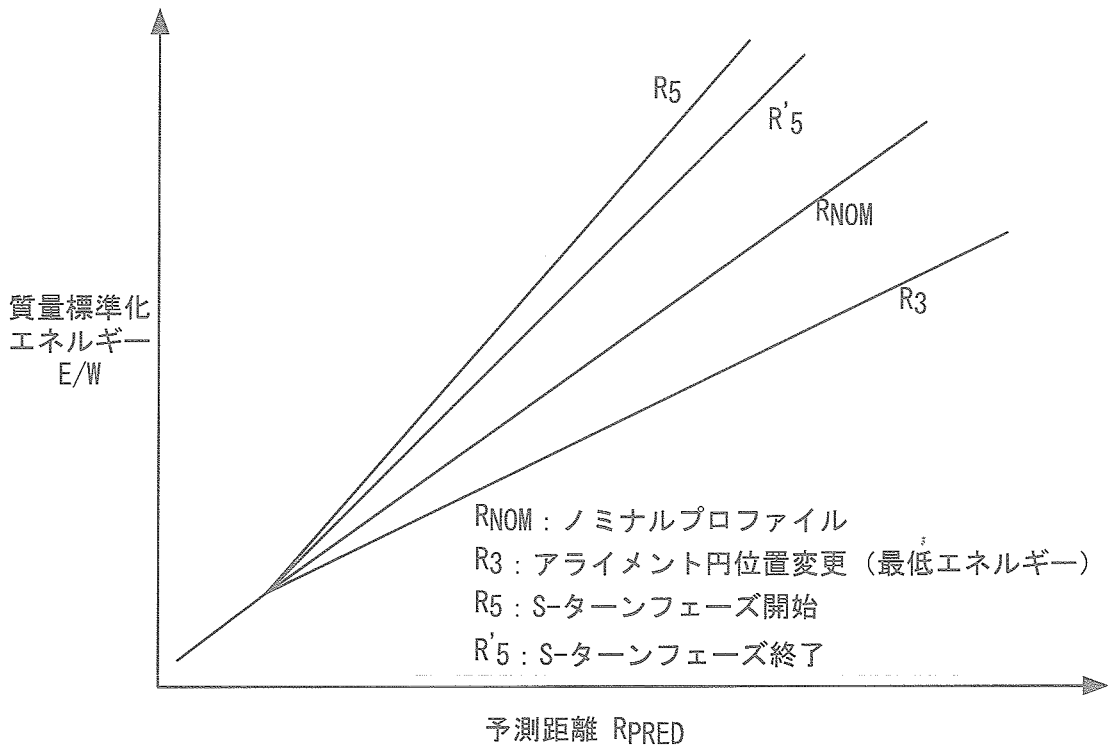
レンジ誤差

$$\delta R_{NG} = H_{error} / (dH/dR)_{ref}$$



3) 誘導フェーズの切り替え

TAEM フェーズに入るとまず S-ターンフェーズに入るか、直接アクイジッションフェーズを開始するか決める必要が有るが、その基準は図に示す様な切り替え線を用いている。



TAEM フェーズ開始時に E/W が R5 より大きいと余分なエネルギー消散のために S-ターンを行い、R'5 より小さくなるとアクイジッションフェーズを開始する。また、R3 より小さいと

とエネルギー不足を補うためにアライメント円の位置を滑走路に近づける様に変更する。

次に、アライメント円からの距離が所定の値（4,000ft）に達した所でヘディング・アライメント・フェーズに移行する。その後飛行方位角が滑走路方向から所定の範囲（20°）以内になった所でプレファイナル・フェーズに移行する。

4)各フェーズの誘導

① S-ターン・フェーズ

本フェーズでは飛行方位角をアライメント円から遠ざかる方向に向けて旋回を行いつつ、過剰なエネルギーを消散するためにエネルギー減少率が最大となる様にスピードブレーキ及び動圧を調整する。つまり、3)項で示した図において傾きが最大となるような飛行を行う。

重量に対し標準化した回収機のエネルギーは

$$E/W = h + \frac{V^2}{2g}$$

ただし $W=mg$

これを滑走路端までのレンジ R で微分すると

$$\frac{d(E/W)}{dR} = \frac{d(E/W)}{dt} \frac{dt}{dR} = \frac{d\left(h + \frac{V^2}{2g}\right)}{dt} \frac{1}{\frac{dR}{dt}}$$

より

$$\frac{d(E/W)}{dR} = \left(\dot{h} + \frac{V\dot{V}}{g} \right) \frac{1}{V \cos(\gamma)} = \left(\frac{\dot{h}}{V} + \frac{\dot{V}}{g} \right) \frac{1}{\cos(\gamma)}$$

ここで速度方向の運動方程式は

$$W\dot{V} = -W \sin(\gamma) - D$$

または

$$\frac{D}{W} = -\sin(\gamma) - \frac{\dot{V}}{g} = -\left(\frac{\dot{h}}{V} + \frac{\dot{V}}{g} \right)$$

よりエネルギー変化率は

$$\frac{d(E/W)}{dR} = -\frac{D}{W \cos(\gamma)} \frac{1}{\cos(\gamma)}$$

となる。

ここで、抗力 D は

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 C_D A = q C_D A$$

また動圧 q は

$$q = \frac{W \cos(\gamma)}{C_L A \cos(\phi)}$$

であることからこれらを代入すると

$$\frac{d(E/W)}{dR} = -\frac{D}{W} \frac{1}{\cos(\gamma)} = -\frac{q C_D A}{C_L A \cos(\phi)} = -\frac{1}{(L/D) \cos(\phi)}$$

従ってエネルギー減少率を最大、つまりエネルギー変化率最小とするためには

- ・ $\cos(\phi)$ を最小…バンク角を最大
- ・ L/D を最小…迎え角を最小 (L/D と迎え角は迎え角が小さい領域ではほぼ比例する)
…動圧最大

- ・ D を最大…スピードブレーキ開度を最大

とするのが良い。

つまり、迎え角を小さくすると飛行経路角が大きくなることで飛行高度が下がり密度 ρ の濃い領域を飛行する事となる。これに比例して動圧 q が大きくなる。従って動圧が大きくなるように飛行する事でエネルギーの消散が早くなる。

以上により具体的誘導コマンドは以下のとおりとなる。

バンク角 ϕ :

$$\phi = \pm 50^\circ$$

スピードブレーキ開度 δ_{SB} :

$$\delta_{SB} = 87.2^\circ \quad (\text{マッハ1以上})$$

$$\delta_{SB} = 55^\circ \quad (\text{マッハ1未満})$$

動圧 q :

$$q = 300 \text{ lb/ft}^2$$

② アクイジション・フェーズ

このフェーズでは横方向としてアライメント円に接するように機体を誘導すると共に、縦方向として予め設定されたエネルギー変化率になるように飛行を行う。

横方向では次式のように飛行方向とアライメント円接線方向の差に比例したバンク角コマンドを生成する。

$$\phi_c = G_\phi(\psi - \psi_T) = G_\phi \Delta\psi_T$$

縦方向では、レンジの変化に対するエネルギーの勾配が予め設定したエネルギー勾配になるようスピードブレーキ開度を調整する。ただし、エネルギー勾配の誤差が大きい場合には動圧制御も実施する。

現在のエネルギー勾配は

$$\bar{E} = \frac{\Delta(E/W)}{\Delta R} = \frac{(E/W)_{I-1} - (E/W)_I}{\left(\frac{V_H \Delta t}{\cos(\phi)}\right)}$$

但し、 $(E/W)_I$ ：I番目の計算サイクルにおけるE/W、 $\left(\frac{V_H \Delta t}{\cos(\phi)}\right)$ ：地表面投影飛行距離（バンク角におけるエネルギー・ロス）、 Δt ：計算間隔

一方要求エネルギー勾配は

$$\bar{E}_D = \frac{(E/W) - (E/W)_D}{2500ft}$$

但し、 $(E/W)_D$ ：現在から2500ftだけ滑走路に近い位置におけるノミナル(E/D)。2500ftはシミュレーションにより決定。

スピードブレーキ開度 δ_{SB} は

$$\delta_{SBC} = 55^\circ \quad (\text{マッハ1以上})$$

$$\delta_{SBC} = G_{SB} \delta \bar{E} = G_{SB} (\bar{E}_D - \bar{E}) \quad (\text{マッハ1未満})$$

$$\text{但し } 0 \leq \delta_{SBC} \leq 87.2^\circ$$

動圧は各計算サイクルごとに以下のように修正する。

$$\delta E < 13 \text{ の時} : \bar{Q}_{REF} = \bar{Q}_{NOM} - 1$$

$$13 < \delta E < 87 \text{ の時} : \bar{Q}_{REF} = \bar{Q}_{NOM}$$

$$87 < \delta E \text{ の時} : \bar{Q}_{REF} = \bar{Q}_{NOM} + 1$$

③ ヘディングアライメント・フェーズ

このフェーズでは横方向としてアライメント円に添って旋回するように機体を誘導すると共に、縦方向として予め設定されたエネルギー変化率になるように飛行を行う。

横方向ではアライメント円に添う様によりバンク角コマンドを生成する。

$$\phi_C = \phi_{NOM} + G_R \Delta R + G_{\dot{R}} \Delta \dot{R} \quad (\text{極性はアライメント円に添って旋回する様に設定})$$

但し、最大 60° で制限する。

ここで $\phi_{NOM}=30^\circ$: アライメント円の半径 18,000ft を旋回するためのノミナルバンク角。

縦方向はアクイジッション・フェーズと同じである。

④ プレファイナル・フェーズ

このフェーズでは次のフェーズである進入・着陸フェーズにスムーズに移行できるように飛行経路を調整する。

縦方向としては、進入・着陸フェーズのステープ・グライド・スロープを捉えるように高度・高度変化率を合わせると共に、対気速度を所定の値に合わせるように飛行する。

高度・高度変化率誤差に対して、垂直方向加速度コマンド Δn_{zc} を計算する。

$$\Delta n_{zc} = G_{GAL} \left(1 + \frac{G_{INT}}{S} \right) \left(\text{limit}_{h_{TL}}^{h_{UL}} (G_I (h_{REF} - h) - V \sin(\gamma_{REF})) - \dot{h} \right)$$

$$h_{REF} = (X_A - X) \tan(\gamma_{REF})$$

$$G_{GAL} = 0.01$$

$$G_{INT} = 0.02$$

$$G_I = 0.1$$

但し、実際の Δn_{zc} コマンドは $-0.75g \sim +0.75g$ に制限をしている。

この Δn_{zc} は制御系に送られ、そこでエレボン舵角コマンドとなり高度の制御が行われる。

対気速度については、進入・着陸インタフェースの動圧条件 $q=285\text{lb/ft}^2$ (対気速度 290knots に対応。) にエア・データ・システムで計測した値を合わせるようにスピード・ブレーキの舵角 δ_{SBC} を調整する。

$$\delta_{SBC} = \delta_{SBO} - G_{SB} (\bar{q}_{COM} - \bar{q})$$

$$G_{SB} = 3$$

$$\delta_{SBO} = 65^\circ$$

但し、実際の δ_{SBC} コマンドは $0\sim 98.6^\circ$ で制限される。

横方向では滑走路の延長線上で滑走路方向に飛行するように、滑走路の延長線からの変位及びその時間変化率をバンク角により制御している。

$$\phi_C = -(K_Y \text{limit}_{-2500\text{ft}}^{2500\text{ft}}(Y) + K_{\dot{Y}} \text{limit}_{-200\text{ft/s}}^{200\text{ft/s}}(\dot{Y}))$$

$$K_Y = 0.02$$

$$K_{\dot{Y}} = -.25$$

但し、実際の ϕ_C コマンドは $\pm 60^\circ$ で制限される。

11-2-3 アプローチ・ランディング・フェーズ

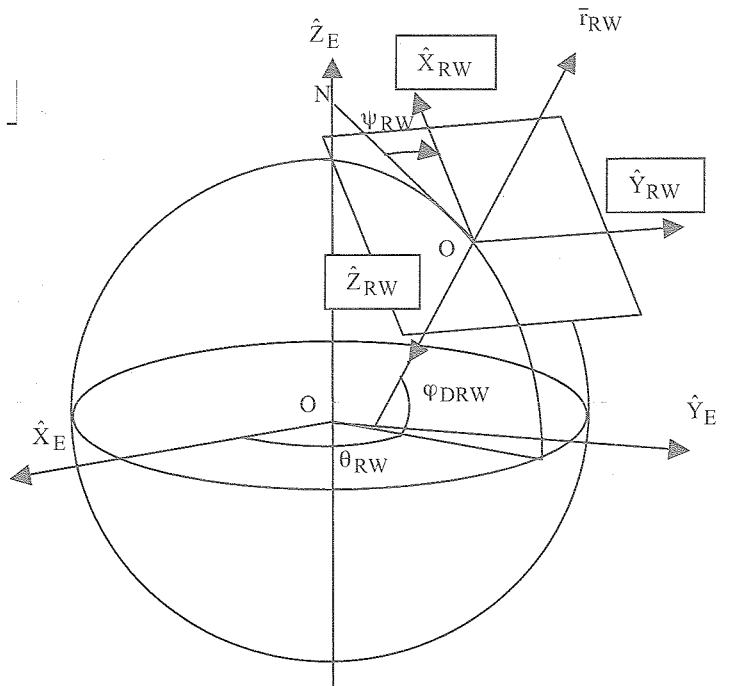
TAEM フェーズが終了するアライメント円と滑走路延長線の接点付近から滑走路へ向けて進入し、スムーズに着陸する飛行フェーズである。

本フェーズの基本的な飛行は航空機のそれと類似しているが、大きく異なるのは 22° という急なグライドスロープを持つ事と、接地するまでの間にプリフレア、ファイナルフレアの2段階の引き起こし（フレア）を行う事である。この2つのフレアの間には短期間であるが約 1.5° の緩いグライドスロープを持つ。

11-2-4 グリニッジ基準地球固定座標と滑走路座標基準地球固定座標の関係

滑走路座標基準地球固定座標はグリニッジ基準地球固定座標を基準として次の回転により得られる

$$[\hat{R}_W] = [\psi_{RW}] \downarrow [-(\varphi_{DRW} + 90^\circ)] \downarrow [\theta_{RW}] \downarrow [\hat{E}]$$



10., 11. 項の参考文献

- Donald C. Cheatham John W. Young and John M. Eggleston "The Variation and Control Of Range Traveled in the Atmosphere by A High-Drag Variable-Lift" NASA TN D-230 March 1960
- John M. Eggleston, Sheldon Baron, Donald C. Cheatham "Fixed-Base Simulation Study of a Pilots Ability to Control a Winged Satellite Vehicle During High-Drag Variable Lift Entries" NASA TN D-238 April 1960
- John W. Young "A method for Longitudinal and Lateral Range Control for A High-Drag Low-Lift Vehicles Entering the Atmosphere of Rotating Earth" NASA TN D-954 September 1961
- Rodney C. Wingrove "Atmosphere Entry Guidance and Control" Control Guidance and Navigation 1955 29-42
- Rodney C. Wingrove "Survey of Atmosphere Re-Entry Guidance and Control Method" AIAA Journal VO.1, NO. 9, September 1963 2019-2029
- Rodney C. Wingrove "Trajectory Control Problems in Planetary Entry of Manned Vehicles" J. Spacecraft VO. 2, NO. 6, Nov.-Dec. 1965 883-888
- F. J. Carroll, et all 'Guidance and Navigation for Entry Vehicles' NASA Space Vehicle Design Criteria (Guidance and Control) NASASP-8015
- R. S. Crowder and J. D. Moote 'Apollo Entry Aerodynamics' J. Spacecraft, VOL. 6, NO. 3, March 1969, 302-307
- C. A. Syverson, B. L. Swenson, J. L. Anderson and G. C. Kenyon 'Some Considerations of The Performance of a Maneuverable, Lifting -Body, Entry Vehicle' Advances in the Astronautical Sciences Volume 16, Part one Technical Sessions Space Rendezvous, Rescue, and Recovery An American Astronautical Society Publication 10-12 September 1963
- Donald C. Cheatham John W. Young and John M. Eggleston "The Variation and Control Of Range Traveled in the Atmosphere by A High-Drag Variable-Lift" NASA TN D-230 March 1960
- John M. Eggleston, Sheldon Baron, Donald C. Cheatham "Fixed-Base Simulation Study of a Pilots Ability to Control a Winged Satellite Vehicle During High-Drag Variable Lift Entries" NASA TN D-238 April 1960
- John W. Young "A method for Longitudinal and Lateral Range Control for A High-Drag Low-Lift Vehicles Entering the Atmosphere of Rotating Earth" NASA TN D-954 September 1961
- Dean R. Chapman "An Approximate Method for Studying Entry into Planetary Atmospheres" NACA TN 4276 1958, NASA TR R-11 1959
- Dean R. Chapman and Arline K. Kapphan "Table of Z Functions for Atmosphere Entry Analyses" NASA TR R-106 1961
- Rodney C. Wingrove "A Study of Guidance to Reference Trajectories for Lifting Reentry at Supercircular Velocity" NASA TR R-151 December 1963
- Rodney C. Wingrove, Robert E. Coate "Pilot Simulator Tests of Guidance System which can Continuously Predict Landing Point of a Low L/D Vehicle During Atmosphere Re-Entry" NASA TN D-787 March 1961

- Laurence D. Perlmutter "Reference Trajectory Re-Entry Guidance without Prelaunch Data Storage" J. Spacecraft Rocket VOL. 2, NO. 6, Nov.-Dec. 1965
- R. K. Chenandl. Pfeffer "Terminal Guidance System for Soft Landing" Guidance and Control Edited by Robert E. Roberson, James S. Farrir Academic Press. New York, London 1962
- A. Busemann, N. X. Vinh, and G. F. Kelley "Optimum Maneuvers of Skip Vehicle with Bounded Lift Constraints" Journal of Optimization Theory and Applications Vol. 3, No. 4, 1969 243-262
- J. W. Griffin, JR. N. X. Vinh "Three-Dimensional Optimal Maneuvers of Hypervelocity Vehicles" AIAA Guidance, Control and Flight Mechanics Conference Hofstra University, Hempstead, New York/ August 16-18, 1971 AIAA Paper No. 71-920, 1-29
- Adolf X. Busemann, N. X. Vinh and Robert D. Culp "Optimum Three-Dimensional Atmospheric Entry from the Analytical Solution of Chapmans Exact Equation" NASA-CR-132571 N75-17395, 1975
- N. X. Vinh, A. Busemann and R. D. Culp "Optimum three-dimensional atmospheric entry" Acta Astronautics Vol. 2, February, 1975, 593-661
- N. X. Vinh, N. A. Bletsos, and A. Busemann and R. D. Culp "Flight with Lift Modulation in-side a Planetary Atmosphere" AIAA Journal VOL. 15, NO. 11, November, 1977, 1617-1623
- N. X. Vinh and J. S. Chern "Three-Dimensional Optimum Maneuvers of a Hypersonic Velocity Vehicle" IAF Preprint IAF-79-F-184, September 17-22, 1979
- Nguyen. X. Vinh and Der-Ming Ma "Optimal Plane Change by Low Aerodynamic Forces" J. Guidance VOL. 10, NO. 3, May-June 1987 255-261
- Nguyen. X. Vinh and Der-Ming Ma "Optimal Plane Change by Low Aerodynamic Forces" J. Guidance VOL. 10, NO. 3, May-June 1987 255-261
- G. Richard Eisler, David G. Hull "Optimal Desending, Hypersonic Turn to Heading" J. Guidance VOL. 10, NO. 3, 1987, 255-261, AIAA-86-2134, 1986, 248-252
- G. Richard Eisler, David G. Hull "Maximum Terminal Velocity Turns at Constant Altitude" AIAA-87-2566, 398-405, 1987 398-40
- G. Richard Eisler, David G. Hull "Guidance Law for Planar Hypersonic Descent to a Point" J. Guidance VOL. 16, NO. 2, 1993 400-402
- G. Richard Eisler, David G. Hull "Guidance Law for Hypersonic Descent to a Point" Journal of Guidance, Control and Dynamics Vol. 17, No. 4. July-August 1994 649-654
- David G. Hull, J. M. Gilter, and J. L. Speyer and J. Mapar "Minimum Energy-Loss Guidance for Aeroassisted Orbital Plane Change" J. Guidance VOL. 8, NO. 4, July-August, 1985, 487-493
- David G. Hull, James R. MacClendon, and Jason L. Speyer "Improved Aero-Assisted Plane Change Using Successive Approximation" AIAA-86-2135, 1986, 253-258

- David Mishne, and Jason L. Speyer "Optimal Control of Aeroassisted Plane Change Maneuver Using Feedback Expansion" AIAA-86-2136, 1986, 259-271
- Jason L. Speyer and M. Edward Womble "Approximate Optimal Atmospheric Entry Trajectory" AIAA Guidance, Control and Flight Mechanics Conference Hofstra University, Hempstead, New York/ August 16-18, 1971 AIAA Paper No. 71-919, 1971, 1-11
- Jason L. Speyer and M. Edward Womble "Approximate Optimal Atmospheric Entry Trajectories" J. Spacecraft VOL. 8, NO. 11, November, 1971 1120-1125
- Yun-Yuan Shi "Optimal Lift Control of a Hypersonic Glider" AIAA Journal VOL. 6, NO. 6, June, 1968 1169-117
- Yun-Yuan Shi, L. Pottsepp "Asymptotic Expansion of A Hypervelocity Atmospheric Entry Problem" AIAA Journal VOL. 7, NO. 2, February, 1969, 353-355
- Yun-Yuan Shi, L. Pottsepp, and M. C. Eckstein "Optimal Lift Control of a Hypersonic Lifting Body during Atmospheric Entry" AIAA Journal VOL. 7, NO. 12, December, 1969 2233-2240
- Yun-Yuan Shi, L. Pottsepp "A Matched Asymptotic Solution for Skipping Entry into Planetary Atmosphere" AIAA Journal VOL. 9, NO. 4, April, 1971, 736-738
- Yun-Yuan Shi "Matched Asymptotic Solutions for Optimum Lift Controlled Atmospheric Entry" AIAA Journal VOL. 9, NO. 11, November, 1971, 2229-2238
- Jeng-Shing Chern and Ching-Yew Yang Nguyen. X. Vinh and George R. Hwang
"Optimal Three-Dimensional Reentry Trajectories Subject to Deceleration and Heating Constraints" IAF Preprint IAF-82-309, 33th Congress of the International Astronautical Federation September 27-October 2, 1982, Paris, France
- William E. Henson Gerald A. Robertson "A Comparison of the Gradient and Newton-Raphson Techniques for Reentry Trajectory Optimization" Air Force Institute of Technology Wright-Patterson AFB Ohio, June 1972, AD-745998, GGC/EE/72-5
- Arthur L. Greensite "Elements of Modern Control Theory" 1970, Macmillan & Co. Ltd.
- J. A. Payne "Computational Methods in Optimal Control Problems", Advances in Control Systems Theory and Applications Edited by C. T. Leondes Volume 7, 1969, 73-164 Academic Press New York and London
- J. F. Andrus, and C. F. Suchomel "A Steepest Descents Method for Reentry Optimization" Computers & Structures, Vol. 5, PP95-100, Pergamon Press 1975, Printed in Great Britain
- R. K. Mehra and A. E. Bryson Jr. "Conjugate Gradient Methods with an Application to V/STOL Flight-Pass Optimization" J. Aircraft VOL. 8, NO. 2, March-April 1969, 123-128
- Henry J. Kelley and Geraldine E. Myers "Conjugate Direction for Parameter Optimization" Astronautica Acta VOL. 16, NO. 1, 1971, 45-51
- Henry J. Kelley "Gradient Theory of Optimal Flight Paths" ARS Journal October, 1960, 947-954

Cornelius T. Leondes and C. A. Wu "The Conjugate Gradient Method and its Application To Aerospace Vehicle Guidance and Control-I. Basic Results in the Conjugate Gradient Method" *Astronautica Acta* VOL. 17, NO. 6, 1972, 871-880

Cornelius T. Leondes and C. A. Wu "The Conjugate Gradient Method and its Application to Aerospace Vehicle Guidance and Control-Part II Marsentry Guidance and Control" *Astronautica Acta* VOL. 17, NO. 6, 1972, 881-890

Richard E. Kopp, H. Gardner Moyer "Trajectory Optimization Techniques" *Advances in Control Systems Theory and Applications* Edited by C. T. Leondes VOLUME 4, 1966, 103-155 Academic Press New York and London

L. S. Lasdon, S. K. Mitter and A. D. Waren "The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems" *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL. AC-12, NO. 2, April 1967 132-138

Arthur E. Bryson, Walter F. Denham, Frank J. Carroll, and Kinya, Mikami "Determination of Lift to Drag Programs to Minimize Re-Entry Heating" *Journal of the Aerospace Sciences*-April 1962 420-430

A. E. Bryson, W. F. Denham "A Steepest-Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems" *Journal of Applied Mechanics*, June 1962, 247-257

R. W. Johnson C. T. Leondes and J. A. Pane "Optimum Design and Guidance Law Formulation of Entry Vehicles for Guidance Parameters and Temperature Accumulation along Optimum Entry Trajectories" *Optimum Guidance Formulation of Entry Vehicles* 191-213

J. A. Payne "Computational Methods in Optimal Control Problem" *Advances in Control Systems Theory and Applications*, Edited by C. T. Leondes Volume 7, 1969 Academic Press New York and London 73-164

John V. Breakwell, Jason L. Speyer and Arthur E. Bryson "Optimization and Control of Nonlinear Systems Using The Second Variation" *J. S. I. A. Control Ser. A*, Vol. 1, No. 2, 1963 193-223

William C. Hoffman and John Zvara "A Landing Approach Guidance Scheme for Unpowered Lifting Vehicles" *J. Spacecraft* VOL. 7, NO. 2, February 1970 196-202

Surjit S. Grewal, William P. Schneider, Pat G. Hedgcoxe "Riccati Controlled Terminal Landing of Unpowered Lifting Vehicles" *IFAC Symposium, 1976 Automatic Control in Space Volume 2: Contributed Papers* 294-308

田中俊輔, 池田茂 "回収体の軌道と誘導について" *日本航空学会誌* Vol. 30. NO. 347, 82-12

池内正巳, 田中俊輔, 池田茂 "クローズド・フォーム回収体誘導" 第26回宇宙科学技術講演会 December, 1982

池内正巳, 田中俊輔, 池田茂 "高揚力回収体の誘導付3次元シミュレーション" 第27回宇宙科学技術講演会 October, 1983

下平勝幸, 田中俊輔, 滝沢悦貞 “ClosedForm 誘導則による有翼回収機のリエントリー・シミュレーション” 宇宙輸送シンポジウム 1986

Jon C. Harpold “Shuttle Entry Guidance” AAS 78-147 Proceedings of the 25th AAS Anniversary Conference October 30–November 2, 1978

Jon C. Harpold “Atmospheric Guidance Techniques and Performance” AIAA Guidance and Control Conference August 9–11, 1982, 82-1600 531–537

Jon C. Harpold Donald E. Gravert “Space Shuttle Entry Guidance Performance Results” J. Guidance VOL. 6, NO. 6, Nov.–Dec. 1983, 442–447

William C. Hoffman and John Zvara “A Landing Approach Guidance Scheme for Unpowered Lifting Vehicles” J. spacecraft VOL. 7, NO. 2, February 1970, 196–202

Roger A. Metzler and William F. Powers “Optimization Techniques Applied to Space Shuttle Explicit Re-Entry Guidance Law Design” Journal of the Astronautical Sciences VOL. XXVI, NO. 1, Jan.–Mar. 1978 47–68

Raymond Morth “An Explicit Automatic Terminal Energy Management Guidance Technique For Space Shuttle” AIAA Guidance and Control Conference Stanford, California/August 14–16, 1972 AIAA Paper NO. 72-833

Lawrence E. Tannas, Jr. “Re-Entry Guidance through Closed-Form Equations” AIAA Journal June 1967 1102–1109

Lawrence E. Tannas, Jr., Toney R. Perkins “Simulation Evaluation of Closed Form Reentry Guidance” AIAA Guidance and Control Conference August 14–16 1967, AIAA Paper NO. 67-597

Richard M. Terasaki “A Guidance Scheme for Lifting Reentry” AIAA Guidance and Control Conference August 12–14 1963, AIAA Paper NO. 63-320

Lawrence E. Tannas, Jr. “Re-Entry Guidance through Closed-Form Equations” AIAA Journal June 1967 1102–1109

Lawrence E. Tannas, Jr., Toney R. Perkins “Simulation Evaluation of Closed Form Reentry Guidance” AIAA Guidance and Control Conference August 14–16 1967, AIAA Paper NO. 67-597

Tatsushi. Izumi, Tomoichi. Sato, Syunsuke. Tanaka, Yoshisada. Takizawa, Tsunekazu. Kimura “Navigation and Guidance of the H-II Orbiting Plane”

あとがき

本資料は宇宙航空研究開発機構 航法・誘導・軌道力学・軌道解析技術ユニット の事務局の依頼により執筆したものである。再突入問題に興味のある若い研究者の一助になれば幸いである。

今後の予定としては全体的に説明が十分でない(舌足らず)の感があるのでさらにわかりやすく説明を追加し, また一部未完の部分もあるのでこれを補填していきたいと思っている。さらに本資料では最適軌道等数値計算までは行っていないので, 引き続き数値計算による各種誘導法の比較検討を行う予定である。

最後に本資料作成に当たって種々の支援をいただいた宇宙航空研究開発機構情報技術共同研究センター主任開発部員池田茂氏に感謝いたします。

宇宙航空研究開発機構情報技術共同研究開発センター

平成 16 年 3 月 田中俊輔

付録-1 再突入宇宙機の運動方程式(その1)

概要:

再突入宇宙機の運動を支配する運動方程式は解析の目的によって種々の座標系が用いられ、またその表記法もベクトル形式の表示、あるいは行列形式の表示と様々である。再突入宇宙機の運動は慣性座標より、回転座標で表した方が解析に便利なることから回転座標を中心に記述する。また運動方程式は成分分解が容易な行列形式で表す。

回転座標の基準座標に対する回転角速度ベクトルは基準座標と回転座標の座標変換行列とその変化率から得られる(補足参照)ことを用いて、再突入宇宙機の運動方程式を導出する。ベクトル演算による運動方程式の導出、あるいはラグランジェ関数による運動方程式の導出を補足に示す。

宇宙機の運動方程式を記述する際に基準となる座標系のうち最も基本となる座標系は慣性座標であるから最初に慣性座標での運動方程式について述べ、以下次の回転座標での運動方程式を導出する。また再突入宇宙機に加わる空気力、重力を各座標で表す。

(I) 慣性直交座標 $[\hat{i}]$ に於ける運動方程式

(II) 機体質量中心回転座標 $[\hat{R}]$ に於ける運動方程式

(1) 回転座標 $[\hat{R}]$ に於ける運動方程式(一般)

(2) 局所水平面座標 $[\hat{H}]$ に於ける運動方程式

(3) 速度軸座標 $[\hat{V}]$ に於ける運動方程式

(I) 慣性直交座標 $[\hat{i}]$ に於ける運動方程式

慣性座標も定義により様々な表し方がある。よく用いられる定義は春分点方向に1軸(\hat{X}_I 軸)をとり黄道面を基準にして黄道面に垂直方向に1軸をとる場合、あるいは地球の赤道面を基準として、地球自転軸方向に1軸(\hat{Z}_I 軸)をとる場合等がある。春分点基準赤道面座標を定義すると、宇宙機の緯度、経度を知るためには、基準時刻(元紀)において春分点から計ったグリニッジの位置、(赤道面内のグリニッジ恒星時角)の計算が必要となり、かなり煩雑となる。そこで簡易な方法としては次に定義するように、基準時刻(元紀)におけるグリニッジ方向に1軸(\hat{X}_I 軸)をとり、地球自転軸方向に1軸(\hat{Z}_I 軸)を取った慣性座標を定義する。

(1) 座標の定義 $[\hat{i}]$

赤道面内においてグリニッジ子午面と赤道面との交線方向に \hat{X}_I 軸を、地球自転軸方向に \hat{Z}_I 軸を、また \hat{X}_I 、 \hat{Z}_I 軸と右手直交方向に \hat{Y}_I 軸をとり、 $t = t_0$ (基準時刻)において慣性空間に固定した座標とする。

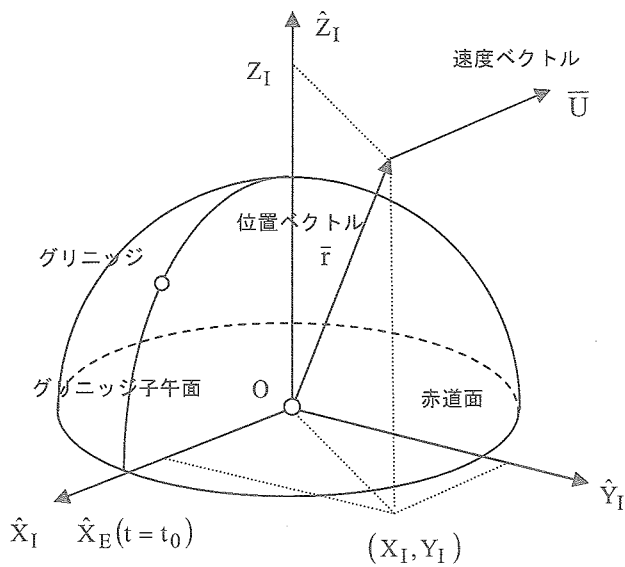


図-1 慣性座標

ここでは慣性直交座標 $[\hat{i}]$ を次式で表記する。

$$[\hat{i}] = [\hat{x}_I \ \hat{y}_I \ \hat{z}_I]^T \quad (1)$$

原点：地球中心

\hat{x}_I ： $t=t_0$ 時点のグリニッジ子午面と赤道面との交線方向

\hat{y}_I ： $=\hat{z}_I \times \hat{x}_I$, 右手直交方向

\hat{z}_I ：地球自转轴方向

ここでは $\hat{\cdot}$ は単位ベクトルを、また $[\]^T$ は転置を表す。

慣性直交座標 $[\hat{i}]$ における位置、速度ベクトルを \bar{r} 、 \bar{U} で表す。

$$\{\bar{r}\}_I = [X_I \ Y_I \ Z_I]^T \quad (2)$$

$$\{\bar{U}\}_I = [\dot{X}_I \ \dot{Y}_I \ \dot{Z}_I]^T \quad (3)$$

(2) 慣性座標系 $[\hat{i}]$ に於ける運動方程式

宇宙機の運動方程式をベクトルで表示するとニュートンの法則から次のように表される。

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{U} \quad (4)$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{\bar{F}_I}{m} + \bar{g}_I \quad (5)$$

(4), (5) 式は独立変数を t , 従属変数を $[X_I \ Y_I \ Z_I \ \dot{X}_I \ \dot{Y}_I \ \dot{Z}_I]$ とする 6 元 1 次連立常微分方程式, あるいは従属変数を $[X_I \ Y_I \ Z_I]$ と 3 元 2 次連立常微分方程式となる。これを数値積分を行って従属変数を求める。従属変数が求まると地心距離, 経度引数 θ (赤道面内で \hat{X}_I 軸からの角度, 経度ではないことに注意), 緯度 φ は次のようにあらわされる。

$$U = \sqrt{\dot{X}_I^2 + \dot{Y}_I^2 + \dot{Z}_I^2} \quad : \text{慣性速度} \quad (6)$$

$$r = \sqrt{X_I^2 + Y_I^2 + Z_I^2} \quad : \text{地心距離} \quad (7)$$

$$\theta = \tan^{-1}(Y_I/X_I) \quad : \text{経度引数} \quad (8)$$

$$\varphi = \sin^{-1}(Z_I/r) \quad : \text{緯度} \quad (9)$$

慣性座標系によれば宇宙機の運動方程式は (4), (5) 式の極めてシンプルな形で表記できるが, (5) 式右辺の空力加速度, 重力加速度を慣性座標 $[\hat{i}]$ で求める必要がある。空気力は一般に空力座標 $[\hat{a}]$ で表されるから空力座標で表された空気力を慣性座標に座標変換する必要があり

$$F_I/m = [D_a^I] (F_a/m) + \bar{g}_I \quad (10)$$

慣性座標 $[\hat{i}]$ での空気力 :

$$[D_a^I] = [D_E^I] [D_H^E] [D_F^H] [D_V^F] [D_a^V] = [-\omega_e(t-t_0)]_Z [-\theta]_Z [\varphi]_Y [\psi]_X [-\gamma]_Y [-\phi_B]_Y$$

$$\begin{bmatrix} F_{XI}/m \\ F_{YI}/m \\ F_{ZI}/m \end{bmatrix} = [D_a^I] \begin{bmatrix} L/m \\ 0 \\ -D/m \end{bmatrix}$$

その座標変換行列 $[D_a^I]$ はかなり煩雑なものとなる。

(II) 機体質量中心回転座標 $[\hat{R}]$ に於ける運動方程式

再突入宇宙機のダイナミクスを慣性座標で解いて各種飛行パラメータを得るには $[X_I \ Y_I \ Z_I \ \dot{X}_I \ \dot{Y}_I \ \dot{Z}_I]$ を必要に応じて他の座標へ座標変換しなければならない。そこで直接再突入宇宙機の各種飛行パラメータを直接得るために運動方程式を質量中心を原点とする回転座標で表すことが多い。そこで宇宙機の質量中心に原点を置く回転座標 $[\hat{R}]$ による運動方程式を考える。

(1) 回転座標 $[\hat{R}]$ に於ける運動方程式 (一般)

以下 2 つの座標系を定義する。

① 地球中心地球固定回転座標の定義 $[\hat{E}]$ (Earth Fixed Earth Fixed Coordinate)

原点を地球中心とし, グリニッジ子午面と赤道面との交線方向に \hat{X}_E 軸, 地球自転軸方向に \hat{Z}_E 軸, $\hat{X}_E \hat{Z}_E$ 軸となす右手直交方向に \hat{Y}_E 軸をとり, 地球とともに回転する座標である。こ

の座標はまた E-F-G 座標 (Earth Fixed Greenwich Coordinate) とも称されている。
 回転座標 $[\hat{E}]$ を次のように表す。

$$[\hat{E}] = [\hat{X}_E \quad \hat{Y}_E \quad \hat{Z}_E]^T \quad (11)$$

\hat{X}_E : グリニッジ子午線方向

\hat{Y}_E : $= \hat{Z}_E \times \hat{X}_E$ 右手直交方向

\hat{Z}_E : 地球自転軸方向

$[\hat{E}]$ 座標における位置, 速度ベクトルを次式で表記する。

$$\{\bar{r}\}_E = [X_E \quad Y_E \quad Z_E]^T \quad (12)$$

$$\{\bar{v}\}_E = [V_{XE} \quad V_{YE} \quad V_{ZE}]^T \quad (13)$$

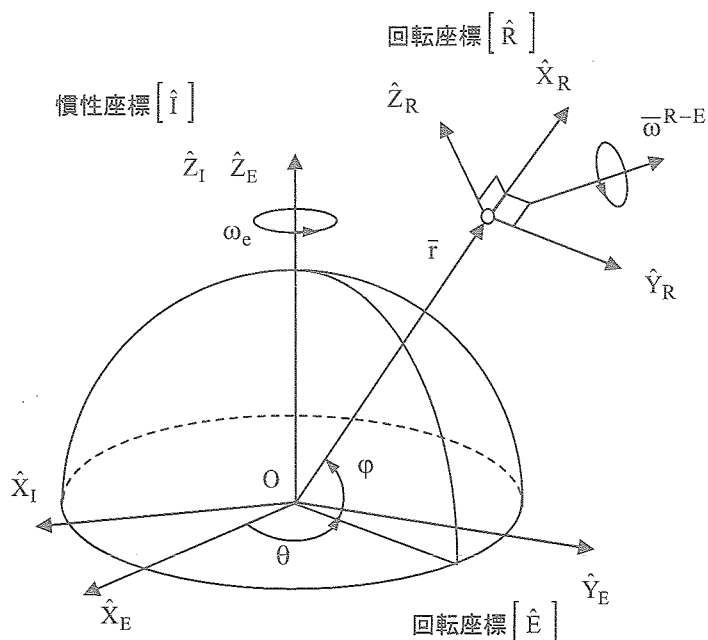
② 質量中心回転座標 $[\hat{R}]$

宇宙機の質量中心を原点とする任意の直行回転座標 $[\hat{R}]$ を次式で定義する。

$$[\hat{R}] = [\hat{X}_R \quad \hat{Y}_R \quad \hat{Z}_R]^T \quad (14)$$

$$\{\bar{r}\}_R = [X_R \quad Y_R \quad Z_R]^T \quad (15)$$

$$\{\bar{v}\}_R = [V_{XR} \quad V_{YR} \quad V_{ZR}]^T \quad (16)$$



回転座標における速度ベクトルを \bar{V} 、慣性座標における速度ベクトルを \bar{U} とすれば

$$\bar{V} = \frac{\delta_E \bar{r}}{\delta_E t} \quad (17)$$

$$\bar{U} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\delta_E \bar{r}}{\delta_E t} + \bar{\omega}^{E-I} \times \bar{r} = \bar{V} + \bar{\omega}^{E-I} \times \bar{r} \quad (18)$$

$\delta_x(\)/\delta_x t$ は回転座標 $[\hat{X}]$ での微分、 $d(\)/dt$ は慣性座標での微分を表す。また $\bar{\omega}^{X-I}$ は慣性座標に対する回転座標 $[\hat{X}]$ の回転角速度ベクトルを表す(上記の場合 $[\hat{X}] = [\hat{E}]$)

(18) 式の \bar{U} を微分して(4) 式の $\bar{U} = d\bar{r}/dt$ を用いると

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{\omega}^{E-I} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{\omega}^{E-I} \times \bar{U} \quad (19)$$

慣性座標からみた回転座標 $[\hat{R}]$ での加速度は次式で表される。

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\delta_R \bar{V}}{\delta_R t} + \bar{\omega}^{R-I} \times \bar{V} \quad (20)$$

(20) 式の $d\bar{V}/dt$ と (18) 式の \bar{U} を (19) 式に代入して慣性座標での加速度は次のように表される。

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \left(\frac{\delta_R \bar{V}}{\delta_R t} + \bar{\omega}^{R-I} \times \bar{V} \right) + \bar{\omega}^{E-I} \times \left(\bar{V} + \bar{\omega}^{E-I} \times \bar{r} \right) \quad (21)$$

ここで $\bar{\omega}^{R-I} = \bar{\omega}^{R-E} + \bar{\omega}^{E-I}$ であるから慣性座標での加速度は次式で表される。

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \left(\frac{\delta_R \bar{V}}{\delta_R t} + \bar{\omega}^{R-E} \times \bar{V} \right) + 2\bar{\omega}^{E-I} \times \bar{V} + \bar{\omega}^{E-I} \times \left(\bar{\omega}^{E-I} \times \bar{r} \right) \quad (22)$$

(5) 式に代入して運動方程式をベクトル形式で表示すると次式で表される。

$$\frac{\delta_R \bar{V}}{\delta_R t} + \left\{ \left(\bar{\omega}^{R-E} + 2\bar{\omega}^{E-I} \right) \times \bar{V} \right\}_R + \left\{ \bar{\omega}^{E-I} \times \left(\bar{\omega}^{E-I} \times \bar{r} \right) \right\}_R = \frac{\bar{F}_R}{m} + \bar{g}_R \quad (23)$$

ただし \bar{F}_R/m , \bar{g}_R は回転座標での空力加速度, 重力加速度

(23) 式ではベクトルの外積演算が必要となる。ここで歪対称行列を次式で定義する。

$$[\bar{\omega} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} : \text{歪対称行列} \quad (24)$$

歪対称行列を用いるとベクトルの外積演算 $\bar{\omega} \times \bar{r} = (\omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}) \times (r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k})$ は次の行列演算で容易に求めることができる。

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = [\bar{\omega} \times] \bar{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ \omega_Y & \omega_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_X \\ r_Y \\ r_Z \end{bmatrix} \quad (25)$$

運動方程式は行列形式として次式で表される。

$$\frac{\delta_R \bar{V}}{\delta_R t} + \left\{ \left([\bar{\omega}^{R-E} \times] + 2[\bar{\omega}^{E-I} \times] \right) \bar{V} \right\}_R + \left\{ [\bar{\omega}^{E-I} \times] [\bar{\omega}^{E-I} \times] \bar{r} \right\}_R = \frac{\bar{F}_R}{m} + \bar{g}_R \quad (26)$$

以下回転座標系 $[\hat{R}]$ を具体的に与えて各ケースについて考えることとする。

(2) 局所水平面座標 $[\hat{H}]$ に於ける運動方程式

(3) 速度軸座標 $[\hat{V}]$ に於ける運動方程式

(2) 局所水平面座標系 $[\hat{H}]$ (Local Horizontal Coordinate) に於ける運動方程式

① 局所水平座標系 $[\hat{H}]$ の定義

局所水平座標 $[\hat{H}]$ はベクトル的には宇宙機の位置ベクトル \bar{r} と地球自転ベクトル \hat{Z}_I のなす面に垂直方向に \hat{Y}_H 、 \bar{r} ベクトル方向に \hat{X}_H ベクトルをとる。また \hat{X}_H 、 \hat{Y}_H ベクトルと右手直行方向に $\hat{Z}_H (= \hat{X}_H \times \hat{Y}_H)$ をとった座標と定義する。これを局所水平座標 $[\hat{H}]$ (Local Horizontal Coordinate) と称することとする。また $[\hat{H}]$ 座標は次の座標の回転でも得られる(1)最初に $[\hat{H}]$ は $[\hat{E}]$ と一致しているものとして \hat{Z}_E 軸周りに λ (θ (経度)), (2)回転後の \hat{Y} 軸周りに $-\phi$ (地心緯度, 北緯を正とするために $-$ 符号とする)だけ回転して得られる座標である。

$$[\hat{H}] = [\hat{X}_H \ \hat{Y}_H \ \hat{Z}_H]^T \quad (27)$$

\hat{X}_H : 地心位置ベクトル方向 (天頂方向)

\hat{Y}_H : 東方向

\hat{Z}_H : 北方向

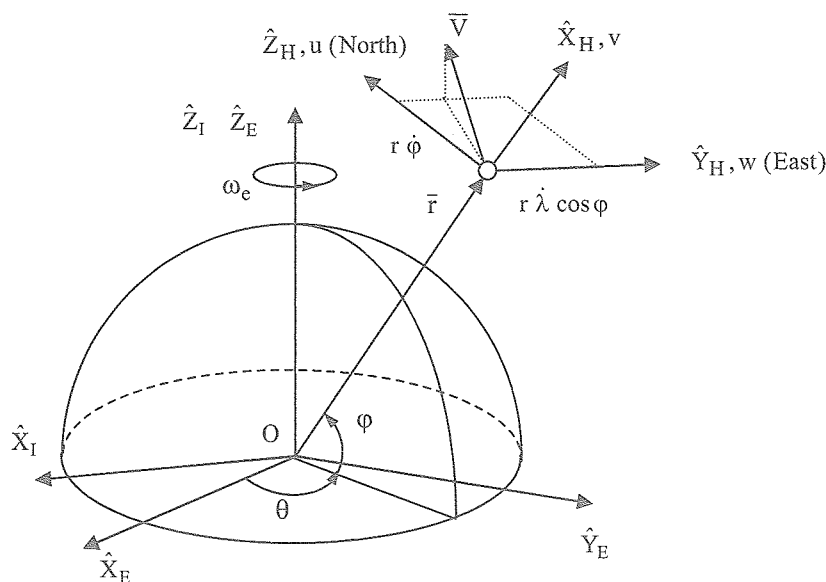
$[\hat{H}]$ 座標での位置ベクトル, 速度ベクトルを次のように表記する。

$$\{\bar{r}\}_H = [X_H \ Y_H \ Z_H]^T \quad (28)$$

$$\{\bar{V}\}_H = [V_{XH} \ V_{YH} \ V_{ZH}]^T \quad (29)$$

または

$$\{\bar{V}\}_H = [v \ w \ u]^T \quad (30)$$



② $[\hat{E}]$ 座標の $[\hat{i}]$ 座標に対する回転角速度： $\{\bar{\omega}^{E-I}\}_H$

$[\hat{E}]$ 座標の定義から $[\hat{i}]$ 座標に対する回転角速度 $\bar{\omega}^{E-I}$ は地球自転角速度であるから直感的に $\bar{\omega}^{E-I} = \omega_e \hat{Z}_E$ (ω_e :地球回転角速度)であることがわかるが、ここで用いている手法を形式的にあてはめてもとめる。回転角速度ベクトル $\bar{\omega}^{E-I}$ は座標変換行列 $[D_I^E]$ とその時間変化率の転置行列 $[\dot{D}_I^E]$ を掛けて次式で得られる。(補足参照)

経度引数(慣性座標 \hat{X}_I からの角度)を Θ とすると座標変換行列 $[D_I^E]$ は

$[D_I^E] = [\Theta]_Z$ から

$$[\bar{\omega}^{E-I} \times] = [D_I^E] [\dot{D}_I^E]^T = \Theta \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \Theta & -\cos \Theta & 0 \\ \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \dot{\Theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで $\dot{\Theta} = \omega_e (= 0.729211586 \times 10^{-4} \text{ rad})$ であるから

$$[\bar{\omega}^{E-I} \times]_E = \omega_e \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

ベクトル表示では

$$\{\bar{\omega}^{E-I}\}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \quad (33)$$

この回転角速度ベクトル $\bar{\omega}^{E-I}$ を $[\hat{H}]$ 座標で表すと座標変換行列 $[D_E^H]$ を掛けて次のようになる。

$$\{\bar{\omega}^{E-I}\}_H = [D_E^H] \{\bar{\omega}^{E-I}\}_E = [-\varphi]_Y [\lambda]_Z \{\bar{\omega}^{E-I}\}_E = \begin{bmatrix} \omega_e \sin \varphi \\ 0 \\ \omega_e \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (34)$$

行列表示では

$$\left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right]_H = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_e \cos \varphi & 0 \\ \omega_e \cos \varphi & 0 & -\omega_e \sin \varphi \\ 0 & \omega_e \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

2重積を求めると

$$\left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right]_H \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right]_H = \omega_e^2 \begin{bmatrix} -\cos^2 \varphi & 0 & \sin \varphi \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin \varphi \cos \varphi & 0 & -\sin^2 \varphi \end{bmatrix} \quad (36)$$

③ $[\hat{H}]$ 座標の $[\hat{E}]$ 座標に対する回転角速度： $\bar{\omega}^{H-E}$

$[\hat{E}]$ 座標を基準として $[\hat{H}]$ 座標の $[\hat{E}]$ 座標に対する座標変換行列を $[D_E^H]$ 、 $[\hat{E}]$ 座標に対する回転角速度ベクトルを $\bar{\omega}^{H-E}$ とする。

座標変換行列 $[D_E^H]$ とその時間変化率は次式で表される。

$$[D_E^H] = [-\varphi]_Y [\theta]_Z \quad (37)$$

$$[\dot{D}_E^H] = [-\dot{\varphi}]_Y [\theta]_Z + [-\varphi]_Y [\dot{\theta}]_Z \quad (38)$$

これより回転角速度ベクトル $\bar{\omega}^{H-E}$ は座標変換行列 $[D_E^H]$ とその時間変化率の転置行列 $[\dot{D}_E^H]^T$ を掛けて次式で得られる。

$$\begin{aligned} \left[\bar{\omega}^{H-E} \times \right] &= [D_E^H] [\dot{D}_E^H]^T \\ &= [-\varphi]_Y [\lambda]_Z \left\{ [-\dot{\varphi}]_Y [\theta]_Z + [-\varphi]_Y [\dot{\theta}]_Z \right\}^T = [-\varphi]_Y [\theta]_Z [\theta]_Z^T [-\dot{\varphi}]_Y^T + [-\varphi]_Y [\theta]_Z [\dot{\theta}]_Z^T [-\varphi]_Y^T \\ &= [-\varphi]_Y [-\dot{\varphi}]_Y^T + [-\varphi]_Y [\theta]_Z [\dot{\theta}]_Z^T [-\varphi]_Y^T \end{aligned} \quad (39)$$

行列 $[\theta]_Z$ は正則直交行列であるから $[\theta]_Z [\theta]_Z^T = [1]$ (単位行列)であり、 $[\hat{H}]$ 座標の $[\hat{E}]$ 座標に対する回転角速度ベクトル $\bar{\omega}^{H-E}$ は次のようにあらわされる。

$$\left[\bar{\omega}^{H-E} \times \right]_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\varphi} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \cos \varphi & 0 \\ \dot{\theta} \cos \varphi & 0 & -\dot{\theta} \sin \varphi \\ 0 & \dot{\theta} \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \cos \varphi & -\dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \cos \varphi & 0 & -\dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} & \dot{\theta} \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

ベクトルで表すと

$$\left\{ \bar{\omega}^{H-E} \right\}_H = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \sin \varphi \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (41)$$

(40)式に2×(41)式を加えると次式を得る。

$$\left\{ \left[\overline{\omega}^{H-E} \times \right] + 2 \left[\overline{\omega}^{E-I} \times \right] \right\}_H = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta} + 2\omega_e) \cos \varphi & -\dot{\phi} \\ (\dot{\theta} + 2\omega_e) \cos \varphi & 0 & -(\dot{\theta} + 2\omega_e) \sin \varphi \\ \dot{\phi} & (\dot{\theta} + 2\omega_e) \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

④ 速度と位置の変化率 (キネマティクス)

[\hat{H}]座標での速度 V は次式で表される。

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{V} \right\}_H &= \frac{\delta_H \bar{r}}{\delta t} + \left[\overline{\omega}^{H-E} \times \right]_H \left\{ \bar{r} \right\}_H = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \cos \varphi & -\dot{\phi} \\ \dot{\theta} \cos \varphi & 0 & -\dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\phi} & \dot{\theta} \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \cos \varphi \\ r \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{XH} \\ V_{YH} \\ V_{ZH} \end{bmatrix} \quad (43) \end{aligned}$$

一方 [\hat{H}]座標での速度は(29)式と置いたから両式を比較して次式を得る。

$$\dot{r} = V_{XH} \quad (44)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_{YH}}{r \cos \varphi} \quad (45)$$

$$\dot{\phi} = \frac{V_{ZH}}{r} \quad (46)$$

(44)-(46)式はキネマティクスと呼ばれる。

⑤ コリオリ加速度 :

(42)式からコリオリ加速度を求めると

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\overline{\omega}^{H-E} \times \right] + 2 \left[\overline{\omega}^{E-I} \times \right] \right\}_H \left\{ \overline{V} \right\}_H &= \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta} + 2\omega_e) \cos \varphi & -\dot{\phi} \\ (\dot{\theta} + 2\omega_e) \cos \varphi & 0 & -(\dot{\theta} + 2\omega_e) \sin \varphi \\ \dot{\phi} & (\dot{\theta} + 2\omega_e) \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{XH} \\ V_{YH} \\ V_{ZH} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -V_{YH} (\dot{\theta} + 2\omega_e) \cos \varphi - V_{ZH} \dot{\phi} \\ V_{XH} (\dot{\theta} + 2\omega_e) \cos \varphi - V_{ZH} (\dot{\theta} + 2\omega_e) \sin \varphi \\ V_{XH} \dot{\phi} + V_{YH} (\dot{\theta} + 2\omega_e) \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (47) \end{aligned}$$

⑥ 遠心力加速度 :

(36)式から遠心力加速度は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\overline{\omega}^{E-I} \times \right] \left[\overline{\omega}^{E-I} \times \right] \bar{r} \right\}_H &= \left\{ \left[\overline{\omega}^{E-I} \times \right]_H \left[\overline{\omega}^{E-I} \times \right]_H \right\} [r \ 0 \ 0]^T \\ &= r \omega_e^2 \cos \varphi \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (48) \end{aligned}$$

⑦ 運動方程式：

回転座標 $[\hat{R}]$ での運動方程式(一般式)において $[\hat{R}] \rightarrow [\hat{H}]$ とおき

$$\frac{\delta_H \bar{V}}{\delta_H t} + \left\{ \left([\bar{\omega}^{H-E} \times] + 2[\bar{\omega}^{E-I} \times] \right) \bar{V} \right\}_H + \left\{ [\bar{\omega}^{E-I} \times] [\bar{\omega}^{E-I} \times] \bar{r} \right\}_H = \frac{\bar{F}_H}{m} + \bar{g}_H \quad (49)$$

⑤⑥項から $[\hat{H}]$ 座標における運動方程式として次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{XH} & -V_{YH}(\dot{\theta} + 2\omega_e)\cos\varphi - V_{ZH}\dot{\varphi} & -r\omega_e^2\cos^2\varphi \\ \dot{V}_{YH} + V_{XH}(\dot{\theta} + 2\omega_e)\cos\varphi - V_{ZH}(\dot{\theta} + 2\omega_e)\sin\varphi & 0 & 0 \\ \dot{V}_{ZH} + V_{XH}\dot{\varphi} + V_{YH}(\dot{\theta} + 2\omega_e)\sin\varphi & +r\omega_e^2\cos\varphi\sin\varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{XH}/m \\ F_{YH}/m \\ F_{ZH}/m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{XH} \\ g_{YH} \\ g_{ZH} \end{bmatrix} \quad (50)$$

また(44)-(46)式を用いて速度成分で表すと次式で表される。

$$\dot{V}_{XH} - \frac{V_{YH}^2}{r} - \frac{V_{ZH}^2}{r} - 2\omega_e V_{YH} \cos\varphi - r\omega_e^2 \cos^2\varphi = F_{XH}/m + g_{XH} \quad (51)$$

$$\dot{V}_{YH} + \frac{V_{XH}V_{YH}}{r} - \frac{V_{YH}V_{ZH}}{r} \tan\varphi + 2\omega_e(V_{XH} \cos\varphi - V_{ZH} \sin\varphi) = F_{YH}/m + g_{YH} \quad (52)$$

$$\dot{V}_{ZH} + \frac{V_{XH}V_{ZH}}{r} + \frac{V_{YH}^2}{r} \tan\varphi + 2\omega_e V_{YH} \sin\varphi + r\omega_e^2 \cos\varphi \sin\varphi = F_{ZH}/m + g_{ZH} \quad (53)$$

または(30)式の速度表記および $[\hat{H}]$ における空力加速度、重力加速度を用いれば次式で表される。

$$\dot{v} - \frac{u^2}{r} - \frac{w^2}{r} - 2\omega_e w \cos\varphi - r\omega_e^2 \cos^2\varphi = (L \cos\phi_B/m) \cos\gamma - (D/m) \sin\gamma - g \quad (54)$$

$$\dot{w} + \frac{vw}{r} - \frac{uw}{r} \tan\varphi + 2\omega_e(v \cos\varphi - u \sin\varphi) = (L \sin\phi_B/m) \cos\psi - \left\{ (L \cos\phi_B/m) \sin\gamma + (D/m) \cos\gamma \right\} \sin\psi \quad (55)$$

$$\dot{u} + \frac{uv}{r} + \frac{w^2}{r} \tan\varphi + 2\omega_e w \sin\varphi + r\omega_e^2 \cos\varphi \sin\varphi = -(L \sin\phi_B/m) \sin\psi - \left\{ (L \cos\phi_B/m) \sin\gamma + (D/m) \cos\gamma \right\} \cos\psi \quad (56)$$

地球の回転を無視して $\omega_e = 0$ と置けば 地球固定の場合の運動方程式を得る。

$$\dot{v} - \frac{u^2}{r} - \frac{w^2}{r} = (L \cos\phi_B/m) \cos\gamma - (D/m) \sin\gamma - g \quad (57)$$

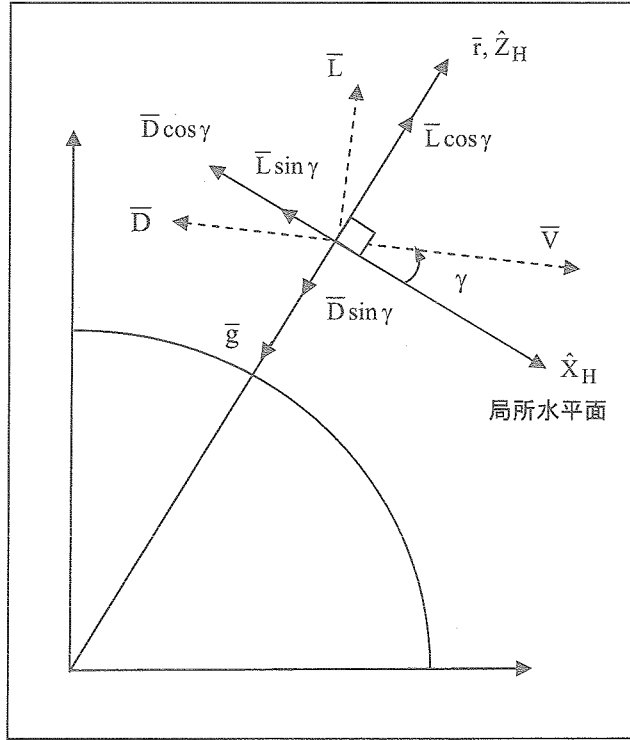
$$\dot{w} + \frac{vw}{r} - \frac{uw}{r} \tan\varphi = (L \sin\phi_B/m) \cos\psi - \left\{ (L \cos\phi_B/m) \sin\gamma + (D/m) \cos\gamma \right\} \sin\psi \quad (58)$$

$$\dot{u} + \frac{uv}{r} + \frac{w^2}{r} \tan \phi = -\left(\frac{L \sin \phi_B}{m} \right) \sin \psi - \left\{ \left(\frac{L \cos \phi_B}{m} \right) \sin \gamma + \left(\frac{D}{m} \right) \cos \gamma \right\} \cos \psi \quad (59)$$

2次元の運動方程式は $\psi = \phi_B = 0$ $w = 0$ と置いて次式で表される。

$$\dot{v} - \frac{u^2}{r} = \frac{L}{m} \cos \gamma - \frac{D}{m} \sin \gamma + g \quad (60)$$

$$\dot{u} + \frac{uv}{r} = -\frac{L}{m} \sin \gamma - \frac{D}{m} \cos \gamma \quad (61)$$



⑧ 極座標表示運動方程式

(54)-(56) 式または (57)-(59) 式において速度の代わりに位置の変化率 $[\dot{r} \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]$ で表す (極座標表示) と次ように表される。

$$V_{XH} = w = \dot{r}$$

$$V_{YH} = v = \dot{\lambda} r \cos \phi$$

$$V_{ZH} = u = r \dot{\phi}$$

と置けば

$$\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 - r \dot{\lambda}^2 \cos^2 \phi = \frac{L \cos \phi_B}{m} \cos \psi - \frac{D}{m} \sin \gamma - g \quad (62)$$

$$r \ddot{\lambda} - 2r \dot{\lambda} \dot{\phi} \sin \phi + \dot{r} \dot{\lambda} \cos \phi = \frac{L \sin \phi_B}{m} \cos \psi - \left(\frac{L \cos \phi_B}{m} \sin \gamma + \frac{D}{m} \cos \gamma \right) \sin \psi \quad (63)$$

$$r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi} + r \dot{\lambda}^2 \sin \phi \cos \phi = -\frac{L \sin \phi_B}{m} \sin \psi - \left(\frac{L \cos \phi_B}{m} \sin \gamma + \frac{D}{m} \cos \gamma \right) \cos \psi \quad (64)$$

2次元の場合 バンク角を $\phi_B = 0$ とおいて次式を得る。

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = \frac{L}{m}\cos\gamma - \frac{D}{m}\sin\gamma - g \quad (65)$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = -\frac{L}{m}\sin\gamma - \frac{D}{m}\cos\gamma \quad (66)$$

⑨ 空力加速度および重力加速度

東方向基準(右回転)の場合と北方向基準(左回転)の場合の空力加速度を示す。いずれも空力座標での加速度を以下のように座標変換して得られる。

東方向基準(右回転)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{XH}/m \\ F_{YH}/m \\ F_{ZH}/m \end{bmatrix} &= [-\psi]_X [\gamma]_Z [-\phi_B]_Y [L/m, -D/m, 0]^T \\ &= \begin{bmatrix} (L\cos\phi_B/m)\cos\gamma - (D/m)\sin\gamma \\ (L\sin\phi_B/m)\sin\psi - \{(L\cos\phi_B/m)\sin\gamma + (D/m)\cos\gamma\}\cos\psi \\ -(L\sin\phi_B/m)\cos\psi - \{(L\cos\phi_B/m)\sin\gamma + (D/m)\cos\gamma\}\sin\psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

北方向基準(左回転)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{XH}/m \\ F_{YH}/m \\ F_{ZH}/m \end{bmatrix} &= [\psi]_X [-\gamma]_Y [-\phi_B]_Z [L/m, 0, -D/m]^T \\ &= \begin{bmatrix} (L\cos\phi_B/m)\cos\gamma - (D/m)\sin\gamma \\ (L\sin\phi_B/m)\cos\psi - \{(L\cos\phi_B/m)\sin\gamma + (D/m)\cos\gamma\}\sin\psi \\ -(L\sin\phi_B/m)\sin\psi - \{(L\cos\phi_B/m)\sin\gamma + (D/m)\cos\gamma\}\cos\psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (68)$$

重力加速度

重力加速度は位置ベクトル r 方向に働くから $[\hat{H}]$ 座標の場合には \hat{X}_H (r 方向) のみに働き他の成分は 0 である。また重力加速度が一定の場合と $1/r^2$ に比例する場合(地球球形モデル)の例を示す。

$$\begin{aligned} \bar{g}_H &= -g\hat{r} \\ &= \begin{bmatrix} g_{XH} \\ g_{YH} \\ g_{ZH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_H &= -g(r)\hat{r} \\ &= \begin{bmatrix} g_{XH} \\ g_{YH} \\ g_{ZH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu/r^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (70)$$

$\mu = 398600.9 \text{ Km}^3/\text{sec}^2$: 重力定数

(3) 速度軸座標 $[\hat{V}]$ に於ける運動方程式

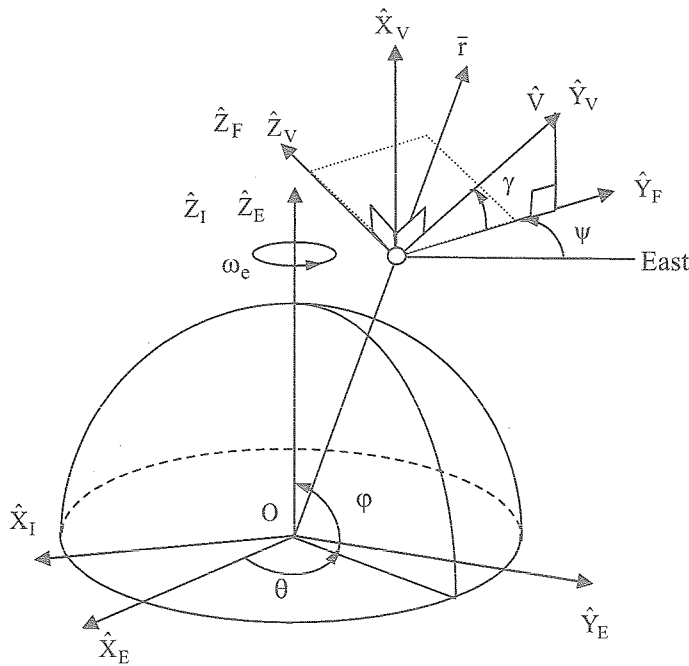
速度軸座標 $[\hat{V}]$ に於ける運動方程式は座標軸のとり方により 2 種類の表し方がある。

(A) 東方向基準 (右回転)

局所水平座標 $[\hat{H}]$ を基準とし, \hat{X}_H 軸 (r ベクトル) を右周り (CCW 周り) に $+\psi$ だけ回転して, 回転後の Z 軸周りに $-\gamma$ だけ回転させ Y 軸を速度ベクトル \hat{V} と一致させた座標。

(B) 北方向基準 (左回転)

局所水平座標 $[\hat{H}]$ を基準とし, \hat{X}_H 軸 (r ベクトル) を左周り (CW 周り) に $-\psi$ だけ回転して, 回転後の Y 軸周りに $+\gamma$ だけ回転させ Y 軸を速度ベクトル \hat{V} と一致させた座標。



(A) 東方向基準 (右回転) 速度軸座標 $[\hat{V}]$ に於ける運動方程式

① 速度軸座標 $[\hat{V}]$ の定義

$$[\hat{V}] = [\hat{X}_V \ \hat{Y}_V \ \hat{Z}_V]^T \tag{71}$$

$$\hat{X}_V := \hat{Y}_V \times \hat{Z}_V$$

$$\hat{Z}_V := \hat{r} \times \hat{V} / |\hat{r} \times \hat{V}| \text{ (角運動量ベクトル方向)} \text{ ---- 飛行面垂直方向}$$

$$\hat{Y}_V := \hat{V} \text{ ---- 速度ベクトル } \hat{V} \text{ 方向}$$

$[\hat{V}]$ 座標での位置ベクトル, 速度ベクトルは次の通り。

$$\{\hat{r}\}_V = [-\gamma]_Z [r \ 0 \ 0]^T = [r \cos \gamma \ r \sin \gamma \ 0]^T \tag{72}$$

$$\{\hat{V}\}_V = [0 \ V_{YZ} \ 0]^T \tag{73}$$

また $V_{YV} = V$ から

$$\{\bar{V}\}_V = [0 \quad V \quad 0]^T \quad (74)$$

② 慣性座標に対する $[\hat{V}]$ 座標の回転角速度: $\{\bar{\omega}^{E-I}\}_V$:

地球自転角速度ベクトルを $[\hat{H}]$ 座標であらわした回転角速度 $\{\bar{\omega}^{E-I}\}_H$ を座標変換行列

$[D_H^V]$ ($= [-\gamma]_Z [\psi]_X$) を用いて $[\hat{V}]$ 座標に変換すると

$$\{\bar{\omega}^{E-I}\}_V = [D_H^V] \{\bar{\omega}^{E-I}\}_H = [-\gamma]_Z [\psi]_X [\omega_e \sin \phi \quad 0 \quad \omega_e \cos \phi]^T$$

$$\begin{aligned} & [-\gamma]_Z [\psi]_X [\omega_e \sin \phi \quad 0 \quad \omega_e \cos \phi]^T \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \sin \psi \cos \phi \\ \sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \sin \psi \cos \phi \\ \sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} \quad (75) \end{aligned}$$

またこれを (歪対称) 行列で表すと次のよう表される。

$$\begin{aligned} & [\bar{\omega}^{E-I} \times]_V \\ & = \omega_e \begin{bmatrix} 0 & -\cos \psi \cos \phi & \sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi & 0 & -\cos \gamma \sin \phi + \sin \gamma \sin \psi \cos \phi \\ -\sin \gamma \sin \phi - \cos \gamma \sin \psi \cos \phi & \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \sin \psi \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (76) \end{aligned}$$

③ $[\hat{E}]$ 座標に対する $[\hat{V}]$ 座標の回転角速度: $\bar{\omega}^{V-E}$

$[\hat{E}]$ 座標を基準として $[\hat{V}]$ 座標の $[\hat{E}]$ 座標に対する座標変換行列を $[D_E^V]$, $[\hat{E}]$ 座標に対する回転角速度ベクトルを $\bar{\omega}^{V-E}$ とする。

$$[D_E^V] = [D_F^V] [D_H^F] [D_E^H] = [-\gamma]_Z [\psi]_X [D_E^H] \quad (81)$$

$$[\dot{D}_E^V] = [-\dot{\gamma}]_Z [\psi]_X [D_E^H] + [-\gamma]_Z [\dot{\psi}]_X [D_E^H] [-\gamma]_Z [\psi]_X [\dot{D}_E^H] \quad (82)$$

$$\begin{aligned}
[\bar{\omega}^{V-E} \times]_V &= [D_E^V][\dot{D}_E^V]^T \\
&= [-\gamma]_Z [\psi]_X [D_E^H] \left\{ [D_E^H]^T [\psi]_X^T [-\dot{\gamma}]_Z^T + [D_E^H]^T [\dot{\psi}]_X^T [-\gamma]_Z^T + [\dot{D}_E^H]^T [\psi]_X^T [-\gamma]_Z^T \right\} \\
&= [-\gamma]_Z [-\dot{\gamma}]_Z^T + [-\gamma]_Z [\psi]_X [\dot{\psi}]_X^T [-\gamma]_Z^T + [-\gamma]_Z [\psi]_X [D_E^H] [\dot{D}_E^H]^T [\psi]_X^T [-\gamma]_Z^T
\end{aligned} \tag{83}$$

$[\psi]_X, [D_E^H]$ は正則直交行列であるからその転置行列との積は単位行列 $[\psi]_X [\psi]_X^T$
 $= [D_E^H] [D_E^H]^T = [1]$ (単位行列) である。また $[D_E^H] [\dot{D}_E^H]^T$ は $[\hat{H}]$ 座標の回転角速度で
 $\bar{\omega}^{H-E}$ であり (2) 項 (40) 式に示す。

$$\begin{aligned}
[\bar{\omega}^{V-E} \times]_V &= \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ -\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\psi} \sin \gamma \\ 0 & 0 & -\dot{\psi} \cos \gamma \\ -\dot{\psi} \sin \gamma & \dot{\psi} \cos \gamma & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi & \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) \cos \gamma \\ + \dot{\theta} \sin \phi \sin \gamma \end{array} \right\} \\ \dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi & 0 & \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) \sin \gamma \\ - \dot{\theta} \sin \phi \cos \gamma \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} (-\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) \cos \gamma \\ - \dot{\theta} \sin \phi \sin \gamma \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} (-\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) \sin \gamma \\ + \dot{\theta} \sin \phi \cos \gamma \end{array} \right\} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} - (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) & \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) \cos \gamma \\ + (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi}) \sin \gamma \end{array} \right\} \\ -\dot{\gamma} + (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) & 0 & \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) \sin \gamma \\ - (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi}) \cos \gamma \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -(\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) \cos \gamma \\ -(\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi}) \sin \gamma \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} -(\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) \sin \gamma \\ +(\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi}) \cos \gamma \end{array} \right\} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{85}$$

④ 速度と位置の変化率 (キネマティクス)

$[\hat{V}]$ 座標での速度は次式で表され (72) 式を微分し (85) を用いて右辺第 2 項を求めると

$$\begin{aligned}
\{\bar{V}\}_V &= \frac{\delta_V \bar{r}}{\delta_V t} + [\bar{\omega}^{V-E} \times]_V \{\bar{r}\}_V = \frac{\delta_V \bar{r}}{\delta_V t} + [\bar{\omega}^{V-E} \times]_V [r \cos \gamma \quad r \sin \gamma \quad 0]^T \\
&= \begin{bmatrix} \dot{r} \cos \gamma - r \sin \gamma \dot{\gamma} \\ \dot{r} \sin \gamma + r \cos \gamma \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} + [\bar{\omega}^{V-E} \times]_V \begin{bmatrix} r \cos \gamma \\ r \sin \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{r} \cos \gamma - r \sin \gamma (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) \\ \dot{r} \sin \gamma + r \cos \gamma (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) \\ -r (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{YV} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{87}
\end{aligned}$$

(73)式と比較して次式を得る。

$$\dot{r} = V_{YV} \sin \gamma \quad (88)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_{YV} \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi} \quad (89)$$

$$\dot{\phi} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r} \quad (90)$$

この速度と位置の変化率の関係をキネマティクスと呼ばれている。

⑤ コリオリ加速度

(76) (85)式からコリオリ加速度を求めると

$\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi = 0$ に留意して

$$\left\{ \left(\left[\bar{\omega}^{V-E} \times \right] + 2 \left[\bar{\omega}^{V-I} \times \right] \right) \mathbf{V} \right\}_V = \left(\left[\bar{\omega}^{V-E} \times \right]_V + 2 \left[\bar{\omega}^{V-I} \times \right]_V \right) \left\{ \bar{\mathbf{V}} \right\}_V \quad (91)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} - (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) & \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) \cos \gamma \\ + (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi}) \sin \gamma \\ (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) \sin \gamma \\ - (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi}) \cos \gamma \end{array} \right\} \\ -\dot{\gamma} + (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) & 0 & \left[\begin{array}{l} 0 \\ V_{YV} \\ 0 \end{array} \right] \\ \left\{ \begin{array}{l} (-\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) \cos \gamma \\ - (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi}) \sin \gamma \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} (-\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) \sin \gamma \\ + (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi}) \cos \gamma \end{array} \right\} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= V_{YV} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} - (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) - 2\omega_e \cos \psi \cos \phi & 0 \\ (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi}) \cos \gamma + 2\omega_e (\sin \phi \cos \gamma - \cos \phi \sin \psi \sin \gamma) \end{bmatrix} \quad (92)$$

⑤ 遠心力 :

(76)式から遠心力加速度は次のように計算できる。

$$\left\{ \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right] \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right] \bar{\mathbf{r}} \right\}_V = \left\{ \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right]_F \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right]_V \right\} \left\{ \bar{\mathbf{r}} \right\}_V \quad (93)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\cos \psi \cos \phi & \sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi & 0 & -\cos \gamma \sin \phi + \sin \gamma \sin \psi \cos \phi \\ -\sin \gamma \sin \phi - \cos \gamma \sin \psi \cos \phi & \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \sin \psi \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \gamma \\ r \sin \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\cos \psi \cos \phi & \sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi & 0 & -\cos \gamma \sin \phi + \sin \gamma \sin \psi \cos \phi \\ -\sin \gamma \sin \phi - \cos \gamma \sin \psi \cos \phi & \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \sin \psi \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \gamma \cos \psi \cos \phi \\ \cos \gamma \cos \psi \cos \phi \\ -\sin \psi \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$= r\omega_e^2 \cos\phi \begin{bmatrix} -\sin\gamma \sin\psi \sin\phi - \cos\gamma \cos\phi \\ \cos\gamma \sin\psi \sin\phi - \sin\gamma \cos\phi \\ \cos\psi \sin\phi \end{bmatrix} \quad (94)$$

⑥運動方程式：

一般回転座標 $[\hat{R}]$ での運動方程式において $[\hat{R}] \rightarrow [\hat{V}]$ 座標とおくと

$$\frac{\delta_V \bar{V}}{\delta_V t} + \left\{ \left([\bar{\omega}^{V-E} \times] + 2[\bar{\omega}^{E-I} \times] \right) \bar{V} \right\}_V + \left\{ [\bar{\omega}^{E-I} \times] [\bar{\omega}^{E-I} \times] \bar{r} \right\}_V = \frac{\bar{F}_V}{m} + \bar{g}_V \quad (95)$$

(65)式に(89), (90)式を代入して $[\hat{F}]$ 座標における運動方程式として次式を得る。

$$\begin{bmatrix} V_{YV} \dot{\gamma} - V_{YV} (\dot{\theta} + 2\omega_e) \cos\phi \cos\psi - V_{YV} \dot{\phi} \sin\psi & -r\omega_e^2 \cos\phi (\sin\psi \sin\phi \sin\gamma + \cos\phi \cos\gamma) \\ \dot{V}_{YV} & r\omega_e^2 \cos\phi (\sin\psi \sin\phi \cos\gamma - \cos\phi \sin\gamma) \\ V_{YV} \cos\gamma \dot{\psi} + V_{YV} (\dot{\theta} + 2\omega_e) \sin\phi \cos\gamma - 2\omega_e \cos\phi \sin\psi \sin\gamma & r\omega_e^2 \cos\phi \cos\psi \sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{XV}/m \\ F_{YV}/m \\ F_{ZV}/m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{XV} \\ g_{YV} \\ g_{ZV} \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$V_{YV} \dot{\gamma} - V_{YV} (\dot{\theta} + 2\omega_e) \cos\phi \cos\psi - V_{YV} \dot{\phi} \sin\psi - r\omega_e^2 \cos\phi (\sin\psi \sin\phi \sin\gamma + \cos\phi \cos\gamma) = F_{XV}/m + g_{XV}$$

$$\dot{V}_{YV} + r\omega_e^2 \cos\phi (\sin\psi \sin\phi \cos\gamma - \cos\phi \sin\gamma) = F_{YV}/m + g_{YV}$$

$$V_{YV} \cos\gamma \dot{\psi} + V_{YV} (\dot{\theta} + 2\omega_e) \sin\phi \cos\gamma - 2\omega_e \cos\phi \sin\psi \sin\gamma + r\omega_e^2 \cos\phi \cos\psi \sin\phi = F_{ZV}/m + g_{ZV}$$

$$\dot{r} = V_{YV} \sin\gamma \quad (88)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_{YV} \cos\gamma \cos\psi}{r \cos\phi} \quad (89)$$

$$\dot{\phi} = \frac{V \cos\gamma \sin\psi}{r}$$

$$V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos\gamma}{r} - 2\omega_e V \cos\phi \cos\psi - r\omega_e^2 \cos\phi (\sin\psi \sin\phi \sin\gamma + \cos\phi \cos\gamma)$$

$$= L \cos\phi_B / m - g \cos\gamma$$

$$\dot{V} + r\omega_e^2 \cos\phi (\sin\psi \sin\phi \cos\gamma - \cos\phi \sin\gamma) = -D/m - g \sin\gamma$$

$$V \cos\gamma \dot{\psi} + \frac{V^2 \cos^2\gamma \cos\psi \tan\phi}{r} + 2\omega_e V (\sin\phi \cos\gamma - \cos\phi \sin\psi \sin\gamma) + r\omega_e^2 \cos\psi \sin\phi \cos\phi$$

$$= -L \sin\phi_B / m$$

地球の回転を無視して $\omega_e = 0$ と置けば次式で表される。

$$V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos\gamma}{r} = \frac{L}{m} \cos\phi_B - g \cos\gamma \quad (99)$$

$$\dot{V} = -\frac{D}{m} - g \sin\gamma \quad (101)$$

$$V \cos \gamma \dot{\psi} + \frac{V^2 \cos^2 \gamma \sin \psi \tan \phi}{r} = \frac{L}{m} \sin \phi_B \quad (100)$$

2次元の場合には $\psi = \phi_B = 0$ と置くと

$$V \dot{\gamma} = \frac{L}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \quad (102)$$

$$\dot{V} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \quad (103)$$

⑦ 空力加速度および重力加速度

東方向基準(右回転)の場合の空力加速度を示す。空力座標での加速度を以下のように座標変換して得られる。

東方向基準(右回転)

$$\begin{bmatrix} F_{XH}/m \\ F_{YH}/m \\ F_{ZH}/m \end{bmatrix} = [-\phi_B]_Y [L/m, -D/m, 0]^T$$

$$= \begin{bmatrix} L \cos \phi_B / m \\ -D/m \\ -L \sin \phi_B / m \end{bmatrix}$$

重力加速度

重力加速度は位置ベクトル r 方向に働くから $[\hat{H}]$ 座標で表された重力加速度を $[\hat{V}]$ 座標であらわすと

$$\bar{g}_V = [-\gamma]_Z [\psi]_X \bar{g}_H$$

$$\begin{bmatrix} g_{XV} \\ g_{YV} \\ g_{ZV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \cos \gamma \\ -g \sin \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

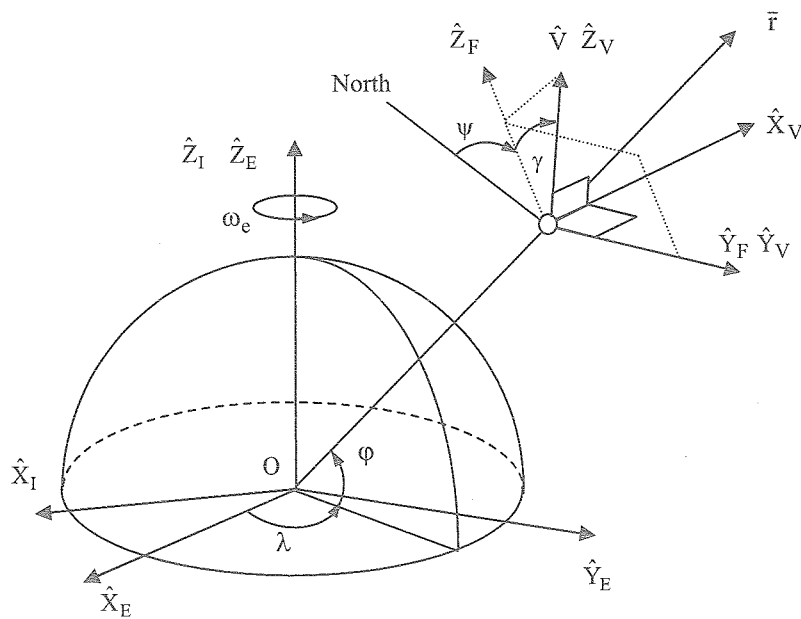
(B) 北方向基準(左回転)

局所水平座標 $[\hat{H}]$ を基準とし、 \hat{X}_H 軸(r ベクトル)を左周り(CW 周り)に $-\psi$ だけ回転して、回転後の Y 軸周りに $+\gamma$ だけ回転させ Y 軸を速度ベクトル \hat{V} と一致させた座標。

①速度軸座標 $[\hat{V}]$ の定義

$[\hat{V}]$ 座標の定義：

$$[\hat{V}] = [\hat{x}_V \ \hat{y}_V \ \hat{z}_V]^T \quad (78)$$



$[\hat{V}]$ 座標での位置ベクトル, 速度ベクトルは次の通り。

$$\{\bar{r}\}_V = [r \cos \gamma \ 0 \ r \sin \gamma]^T \quad (79)$$

$$\{\bar{V}\}_V = [0 \ 0 \ V_{ZV}]^T \quad (80)$$

また $V_{ZV} = V$ から

$$\{\bar{V}\}_V = [0 \ 0 \ V]^T \quad (80)'$$

$$\hat{X}_V := \hat{Y}_V \times \hat{Z}_V$$

$$\hat{Y}_V := \hat{V} \times \hat{r} / \|\hat{V} \times \hat{r}\| \quad (\text{一角運動量ベクトル方向}) \quad \text{-----} \quad \text{飛行面垂直方向}$$

$\hat{Z}_V : = \hat{V}$ ----- 速度ベクトル \hat{V} 方向

② 慣性座標に対する $[\hat{V}]$ 座標の回転角速度 : $\{\bar{\omega}^{E-I}\}_V$:

地球自転角速度ベクトルを $[\hat{H}]$ 座標であらわした回転角速度 $\{\bar{\omega}^{E-I}\}_H$ を座標変換行列 $[D_H^V]$ ($=[\gamma]_Y[-\psi]_X$) を用いて $[\hat{V}]$ 座標に変換すると

$$\begin{aligned} \{\bar{\omega}^{E-I}\}_V &= [D_H^V] \{\bar{\omega}^{E-I}\}_H = [\gamma]_Y[-\psi]_X [\omega_e \sin \phi \quad 0 \quad \omega_e \cos \phi]^T \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ \cos \phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \phi \\ \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \cos \psi \cos \phi \\ -\sin \psi \cos \phi \\ \sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \cos \psi \cos \phi \\ -\sin \psi \cos \phi \\ \sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

またこれを (歪対称) 行列で表すと

$$\begin{aligned} &[\bar{\omega}^{E-I} \times]_V \\ &= \omega_e \begin{bmatrix} 0 & -\sin \gamma \sin \phi - \cos \gamma \cos \psi \cos \phi & -\sin \psi \cos \phi \\ \sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \cos \psi \cos \phi & 0 & -\cos \gamma \sin \phi + \sin \gamma \cos \psi \cos \phi \\ \sin \psi \cos \phi & \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \cos \psi \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

③ $[\hat{E}]$ 座標に対する $[\hat{V}]$ 座標の回転角速度 : $\bar{\omega}^{V-E}$

$[\hat{E}]$ 座標を基準として $[\hat{V}]$ 座標の $[\hat{E}]$ 座標に対する座標変換行列を $[D_E^V]$, $[\hat{E}]$ 座標に対する回転角速度ベクトルを $\bar{\omega}^{V-E}$ とする。

$$[D_E^V] = [D_F^V][D_H^F][D_E^H] = [\gamma]_Y[-\psi]_X [D_E^H] \quad (81)$$

$$[\dot{D}_E^V] = [\dot{\gamma}]_Y[-\psi]_X [D_E^H] + [\gamma]_Y[-\dot{\psi}]_X [D_E^H] [\gamma]_Y[-\psi]_X [\dot{D}_E^H] \quad (82)$$

$$\begin{aligned} &[\bar{\omega}^{V-E} \times]_V = [D_E^V][\dot{D}_E^V]^T \\ &= [\gamma]_Y[-\psi]_X [D_E^H] \left\{ [D_E^H]^T [-\psi]_X^T [\dot{\gamma}]_Y^T + [D_E^H]^T [-\dot{\psi}]_X^T [\gamma]_Y^T + [\dot{D}_E^H]^T [-\psi]_X^T [\gamma]_Y^T \right\} \\ &= [\gamma]_Y [\dot{\gamma}]_Y^T + [\gamma]_Y [-\psi]_X [-\dot{\psi}]_X^T [\gamma]_Y^T + [\gamma]_Y [-\psi]_X [D_E^H] [\dot{D}_E^H]^T [-\psi]_X^T [\gamma]_Y^T \end{aligned}$$

$[-\psi]_X, [D_E^H]$ は正則直交行列であるからその転置行列との積は単位行列 $[-\psi]_X [-\psi]_X^T$
 $= [D_E^H] [D_E^H]^T = [1]$ (単位行列) である。また $[D_E^H] [\dot{D}_E^H]^T$ は $[\hat{H}]$ 座標の回転角速度で
 $\bar{\omega}^{H-E}$ であり (2) 項 (40) 式に示す。

$$\begin{aligned}
&= [\gamma]_Y [\dot{\gamma}]_Y^T + [\gamma]_Y [-\psi]_X [-\dot{\psi}]_X^T [\gamma]_Y^T + [\gamma]_Y [-\psi]_X [D_E^H] [\dot{D}_E^H]^T [-\psi]_X^T [\gamma]_Y^T \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\gamma} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi} \sin \gamma & 0 \\ -\dot{\psi} \sin \gamma & 0 & \dot{\psi} \cos \gamma \\ 0 & -\dot{\psi} \cos \gamma & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \\ -\dot{\theta} \sin \phi \sin \gamma \end{array} \right\} \cos \gamma & -(\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) \\ \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \cos \gamma \\ + \dot{\theta} \sin \phi \sin \gamma \end{array} \right\} & 0 & \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \sin \gamma \\ -\dot{\theta} \sin \phi \cos \gamma \end{array} \right\} \\ (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) & \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \\ + \dot{\theta} \sin \phi \cos \psi \end{array} \right\} \sin \gamma & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \left\{ \begin{array}{l} -(\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \cos \gamma \\ -(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi}) \sin \gamma \end{array} \right\} & \dot{\gamma} - (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) \\ \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \cos \gamma \\ + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi}) \sin \gamma \end{array} \right\} & 0 & \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \sin \gamma \\ -(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi}) \cos \gamma \end{array} \right\} \\ -\dot{\gamma} + (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) & \left\{ \begin{array}{l} -(\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \sin \gamma \\ + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi}) \cos \gamma \end{array} \right\} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

④速度と位置の変化率(キネマティクス)

(72) 式を微分し (85) を用いて右辺第 2 項を求めると $[\hat{V}]$ 座標での速度は次式で表される。

$$\{\bar{V}\}_V = \frac{\delta_V \bar{r}}{\delta_V t} + [\bar{\omega}^{V-E} \times]_V \{\bar{r}\}_V = \frac{\delta_V \bar{r}}{\delta_V t} + [\bar{\omega}^{V-E} \times]_V [r \cos \gamma \quad 0 \quad r \sin \gamma]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{r} \cos \gamma - r \sin \gamma \dot{\gamma} \\ 0 \\ \dot{r} \sin \gamma + r \cos \gamma \dot{\gamma} \end{bmatrix} + [\bar{\omega}^{V-E} \times]_V \begin{bmatrix} r \cos \gamma \\ 0 \\ r \sin \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{r} \cos \gamma - r \sin \gamma (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) \\ r (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \\ \dot{r} \sin \gamma + r \cos \gamma (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_{ZV} \end{bmatrix}$$

両式を等置してキネマティクスは次式で表される。

$$\dot{r} = V_{ZV} \sin \gamma$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_{ZV} \cos \gamma \sin \psi}{r \cos \phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{V_{ZV} \cos \gamma \cos \psi}{r}$$

⑤コリオリ加速度：

(84), (86)式からコリオリ加速度を求めると $\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi = 0$ に留意して

$$\left\{ \left(\left[\bar{\omega}^{V-E} \times \right] + 2 \left[\bar{\omega}^{V-I} \times \right] \right) \bar{V} \right\}_V = \left(\left[\bar{\omega}^{V-E} \times \right]_V + 2 \left[\bar{\omega}^{V-I} \times \right]_V \right) \left\{ \bar{V} \right\}_V$$

$$= \left(\left[\bar{\omega}^{V-E} \times \right]_V + 2 \left[\bar{\omega}^{V-I} \times \right]_V \right) \left[0 \quad 0 \quad V_{ZV} \right]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \begin{Bmatrix} -(\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \cos \gamma \\ -(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi}) \sin \gamma \end{Bmatrix} & \dot{\gamma} - (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) \\ \begin{Bmatrix} (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \cos \gamma \\ + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi}) \sin \gamma \end{Bmatrix} & 0 & \begin{Bmatrix} (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \sin \gamma \\ -(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi}) \cos \gamma \end{Bmatrix} \\ -\dot{\gamma} + (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) & \begin{Bmatrix} -(\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi) \sin \gamma \\ + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi}) \cos \gamma \end{Bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\gamma} - (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) - 2\omega_e \sin \psi \cos \phi \\ (\dot{\psi} - \dot{\theta} \sin \phi) \cos \gamma + 2\omega_e (-\cos \gamma \sin \phi + \sin \gamma \cos \psi \cos \phi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

⑤遠心力：

(86)式から遠心力加速度は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right] \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right] \bar{r} \right\}_V \\ &= \left\{ \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right]_F \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right]_V \right\} \left\{ \bar{r} \right\}_V = \left\{ \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right]_F \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right]_V \right\} \left[r \cos \gamma \quad 0 \quad r \sin \gamma \right]^T \\ &= r \cos \phi \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \psi \sin \gamma - \cos \phi \cos \gamma \\ -\sin \phi \sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi \cos \gamma - \cos \phi \sin \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

⑥運動方程式：

一般回転座標 $[\hat{R}]$ での運動方程式において $[\hat{R}] \rightarrow [\hat{V}]$ 座標とおくと

$$\frac{\delta_V \bar{V}}{\delta_V t} + \left\{ \left(\left[\bar{\omega}^{V-E} \times \right] + 2 \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right] \right) \bar{V} \right\}_F + \left\{ \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right] \left[\bar{\omega}^{E-I} \times \right] \bar{r} \right\}_V = \frac{\bar{F}_V}{m} + \bar{g}_V$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} V_{ZV} \dot{\gamma} - V_{ZV} (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi) - 2 \omega_e V_{ZV} \sin \psi \cos \phi & - r \omega_e^2 (\sin \phi \cos \psi \sin \gamma + \cos \phi \cos \gamma) \\ V_{ZV} \cos \gamma (\dot{\psi} - \dot{\theta} \sin \phi) - 2 \omega_e V_{ZV} (\cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \cos \psi \cos \phi) & - r \omega_e^2 \sin \phi \sin \psi \\ \dot{V}_{ZV} & r \omega_e^2 (\sin \phi \cos \psi \cos \gamma - \cos \phi \sin \gamma) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{XV}/m \\ F_{YV}/m \\ F_{ZV}/m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{XV} \\ g_{YV} \\ g_{ZV} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$V_{ZV} \dot{\gamma} - \frac{V_{ZV}^2 \cos \gamma}{r} - 2 \omega_e V_{ZV} \sin \psi \cos \phi - r \omega_e^2 (\sin \phi \cos \psi \sin \gamma + \cos \phi \cos \gamma) = F_{XV}/m + g_{XV}$$

$$V_{ZV} \cos \gamma \dot{\psi} - \frac{V_{ZV}^2 \cos^2 \gamma \sin \psi \tan \phi}{r} - 2 \omega_e V_{ZV} (\sin \phi \cos \gamma - \cos \psi \cos \phi \sin \gamma) - r \omega_e^2 \sin \phi \sin \psi = F_{YV}/m + g_{YV}$$

$$\dot{V}_{ZV} + r \omega_e^2 (\sin \phi \cos \psi \cos \gamma - \cos \phi \sin \gamma) = F_{ZV}/m + g_{ZV}$$

または(80)' 式の速度表記を用いれば

$$\begin{aligned}
V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos \gamma}{r} - 2 \omega_e V \cos \phi \sin \psi - r \omega_e^2 (\sin \gamma \cos \phi \sin \phi \cos \psi - \cos \gamma \cos^2 \phi) \\
= (L/m) \cos \phi_B - g \cos \gamma \quad (96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V \cos \gamma \dot{\psi} - \frac{V^2 \cos^2 \gamma \sin \psi \tan \phi}{r} - 2 \omega_e V (\sin \phi \cos \gamma - \cos \phi \cos \psi \sin \gamma) - r \omega_e^2 \cos \phi \sin \phi \sin \psi \\
= (L/m) \sin \phi_B \quad (97)
\end{aligned}$$

$$\dot{V} + r \omega_e^2 (\cos \gamma \cos \phi \sin \phi \cos \psi - \sin \gamma \cos^2 \phi) = -D/m - g \sin \gamma \quad (98)$$

地球の回転を無視して $\omega_e = 0$ と置けば次式で表される。

$$V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos \gamma}{r} = \frac{L}{m} \cos \phi_B - g \cos \gamma \quad (99)$$

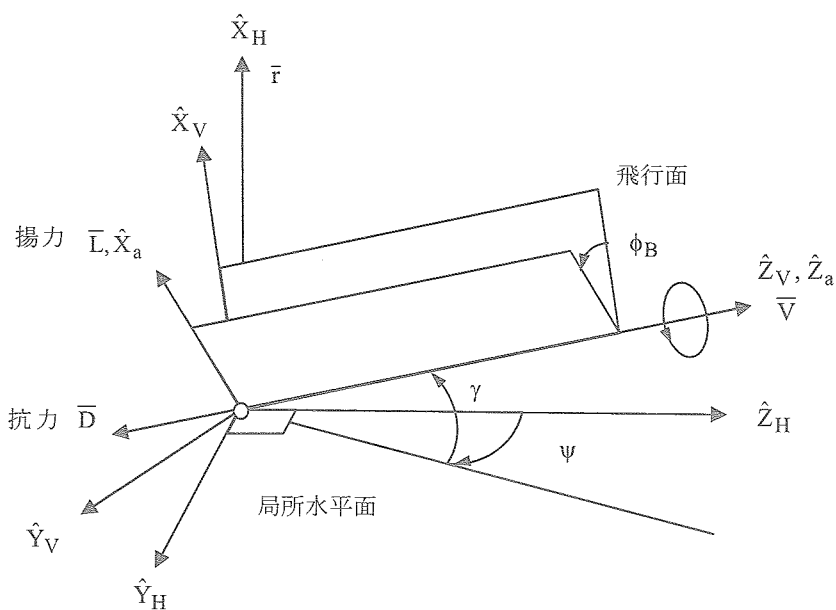
$$V \cos \gamma \dot{\psi} - \frac{V^2 \cos^2 \gamma \sin \psi \tan \phi}{r} = \frac{L}{m} \sin \phi_B \quad (100)$$

$$\dot{V} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \quad (101)$$

2次元の場合には $\psi = \phi_B = 0$ と置くと

$$V \dot{\gamma} = \frac{L}{m} + \left(\frac{V^2}{r} - g \right) \cos \gamma \quad (102)$$

$$\dot{V} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \quad (103)$$



重力加速度

重力加速度は位置ベクトル r 方向に働くから $[\hat{H}]$ 座標で表された重力加速度を $[\hat{V}]$ 座標であらわすと

$$\bar{g}_V = [{}^V_Y] [{}^H_X] \bar{g}_H$$

$$\begin{bmatrix} g_{XV} \\ g_{YV} \\ g_{ZV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g\cos\gamma \\ 0 \\ -g\sin\gamma \end{bmatrix}$$

(補足) ラグランジェ関数による運動方程式の導出

再突入宇宙機の速度は極座標では $\bar{V} = [\dot{r} \quad r\dot{\theta}\cos\varphi \quad r\dot{\phi}]^T$ で表される。このとき運動エネルギー $mV^2/2$ 、ポテンシャル(位置)エネルギー U は次式で表され、

$$mV^2/2 = (m/2) \left\{ \dot{r}^2 + (r\dot{\theta}\cos\varphi)^2 + (r\dot{\phi})^2 \right\} : \text{運動エネルギー} \quad (1)$$

$$|U| = \mu/r : \text{ポテンシャルエネルギー} \quad (2)$$

ラグランジェ関数 L はこの運動およびポテンシャルエネルギーの和として次式で表す。

$$L = (m/2) \left\{ \dot{r}^2 + (\dot{\theta} r \cos\varphi)^2 + (r\dot{\phi})^2 \right\} + \mu/r \quad (3)$$

ラグランジェ関数 L からラグランジェ方程式は次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = F_r \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = r F_\phi \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = r \cos\varphi F_\theta \quad (6)$$

局所水平座標 $[\hat{H}]$ における運動方程式

局所水平座標 $[\hat{H}]$ の極座標表示を

$$[H] = [\hat{X}_H \quad \hat{Y}_H \quad \hat{Z}_H] = [\hat{e}_r \quad \hat{e}_\theta \quad \hat{e}_\phi]^T \quad (7)$$

とすれば 極座標と速度座標の関係は次式で与えられる。

$$[H] = [-\psi]_X [\gamma]_Z [-\phi_B]_Z [\hat{V}] \quad (10)$$

速度座標における空気力ベクトル \bar{F}_V とそれを極座標に変換する \bar{F}_H は次の通り。

$$\bar{F}_V = \begin{bmatrix} F_{XV} \\ F_{YV} \\ F_{ZV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ -D \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_H &= \begin{bmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi_B & 0 & \sin\phi_B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi_B & 0 & \cos\phi_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ -D \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L \cos\phi_B \cos\gamma - D \sin\gamma \\ (-L \cos\phi_B \sin\gamma - D \cos\gamma) \cos\psi + L \sin\phi_B \sin\psi \\ (-L \cos\phi_B \sin\gamma - D \cos\gamma) \sin\psi - L \sin\phi_B \cos\psi \end{bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

ここで

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2} \quad (13)$$

$$V_H = \sqrt{V_\theta^2 + V_\phi^2} \quad (14)$$

$$\cos\psi = V_\theta/V_H \quad \sin\psi = V_\phi/V_H \quad (15)$$

$$\cos\gamma = V_H/V \quad \sin\gamma = V_\theta/V \quad (16)$$

重力加速度ベクトルは r 方向に次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{g}} = -\frac{\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (17)$$

(4)-(6)式の第1項は

$$\partial L / \partial \dot{r} = m \dot{r} = m V_r$$

$$\partial L / \partial \dot{\theta} = m \dot{\theta} (r \cos \phi)^2 = m r \cos \phi V_\theta$$

$$\partial L / \partial \dot{\phi} = m r^2 \dot{\phi} = m r V_\phi$$

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m \frac{dV_r}{dt}$$

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (r \cos \phi V_\theta) = m \left(V_r V_\theta \cos \phi - r \sin \phi \frac{V_\phi V_\theta}{r} + r \cos \phi \frac{dV_\theta}{dt} \right)$$

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = m \frac{d}{dt} (r V_\phi) = m \left(V_r V_\phi + r \frac{dV_\phi}{dt} \right)$$

(4)-(6)式の第2項は

$$\partial L / \partial r = m \left\{ (r \dot{\phi})^2 / r + (\dot{\theta} r \cos \phi)^2 / r - \mu / r^2 \right\} = m (V_H^2 / r - \mu / r^2)$$

$$\partial L / \partial \theta = 0$$

$$\partial L / \partial \phi = -m (\dot{\theta} r \cos \phi)^2 \tan \phi = -m V_\theta^2 \tan \phi$$

で表されラグランジェ方程式(4)-(5)式に代入して次の運動方程式を得る。

$$m \frac{dV_r}{dt} - m \frac{V_H^2}{r} + m \frac{\mu}{r^2} = L \cos \phi_B \frac{V_H}{V} - D \frac{V_r}{V} \quad (18)$$

$$\frac{m}{r \cos \phi} \left(V_r V_\phi \cos \phi - \sin \phi V_\phi V_\theta + r \cos \phi \frac{dV_\theta}{dt} \right) = \left[L \sin \phi_B \frac{V_\phi}{V_H} - L \cos \phi_B \frac{V_r}{V} \frac{V_\theta}{V_H} - D \left(\frac{V_\theta}{V} \right) \right] \quad (19)$$

$$\frac{m}{r} \left(V_r V_\phi + r \frac{dV_\phi}{dt} \right) + m V_\theta^2 \tan \phi = \left[-L \sin \phi_B \frac{V_\theta}{V_H} - L \cos \phi_B \frac{V_r}{V} \frac{V_\phi}{V_H} - D \frac{V_\phi}{V} \right] \quad (20)$$

ここで

$$V_{XH} = V_r = V \sin \gamma$$

$$V_{YH} = V_\theta = V \cos \gamma \cos \psi$$

$$V_{ZH} = V_\phi = V \cos \gamma \sin \psi$$

$$V_H = V \cos \gamma$$

なる関係式を用いると局地水平座標における運動方程式が次式で得られる。

$$\frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\theta^2 + V_\phi^2}{r} + \frac{\mu}{r^2} = \frac{L}{m} \cos \phi_B \cos \gamma - \frac{D}{m} \sin \gamma \quad (21)$$

$$\frac{dV_\theta}{dt} + \frac{V_r V_\theta}{r} - \frac{V_\phi V_\theta \tan \phi}{r} = \frac{L}{m} \sin \phi_B \sin \psi - \frac{L}{m} \cos \phi_B \sin \gamma \cos \psi - \frac{D}{m} \cos \gamma \cos \psi \quad (22)$$

$$\frac{dV_\phi}{dt} + \frac{V_r V_\phi}{r} + \frac{V_\theta^2 \tan \phi}{r} = -\frac{L}{m} \sin \phi_B \cos \psi - \frac{L}{m} \cos \phi_B \sin \gamma \sin \psi - \frac{D}{m} \cos \gamma \sin \psi \quad (23)$$

速度座標 $[\hat{V}]$ における運動方程式との関係

(21) 式に V_r を掛けて

$$V_r \frac{dV_r}{dt} - \frac{V_r V_H^2}{r} + \frac{\mu}{r^2} V_r = V_r \left(\frac{L}{m} \cos \phi_B \cos \gamma - \frac{D}{m} \sin \gamma \right)$$

(22) 式に V_θ (23) 式に V_ϕ を掛けて和をとると

$$V_\theta \frac{dV_\theta}{dt} + \frac{V_r V_\theta^2}{r} - \frac{V_\phi V_\theta^2 \tan \phi}{r} = V_\theta \left(\frac{L}{m} \sin \phi_B \sin \psi - \frac{L}{m} \cos \phi_B \sin \gamma \cos \psi - \frac{D}{m} \cos \gamma \cos \psi \right) \quad (22)$$

$$V_\phi \frac{dV_\phi}{dt} + \frac{V_r V_\phi^2}{r} + \frac{V_\theta V_\phi^2 \tan \phi}{r} = -V_\phi \left(\frac{L}{m} \sin \phi_B \cos \psi - \frac{L}{m} \cos \phi_B \sin \gamma \sin \psi - \frac{D}{m} \cos \gamma \sin \psi \right) \quad (23)$$

次式を得る

$$V_\phi \frac{dV_\phi}{dt} + V_\theta \frac{dV_\theta}{dt} + \frac{V_r (V_\phi^2 + V_\theta^2)}{r} = -V \left(\frac{L}{m} \cos \phi_B \sin \gamma \cos \gamma + \frac{D}{m} \cos^2 \gamma \right) \quad (24)$$

または

$$\frac{dV_H}{dt} + \frac{V_r V_H}{r} = - \left(\frac{L}{m} \cos \phi_B \sin \gamma + \frac{D}{m} \cos \gamma \right) \quad (25)$$

両式を加えて和を求めると

$$\left(V_r \frac{dV_r}{dt} + V_\theta \frac{dV_\theta}{dt} + V_\phi \frac{dV_\phi}{dt} \right) + \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma = - \frac{D}{m}$$

次の関係式を用いると

$$V \frac{dV}{dt} = V_r \frac{dV_r}{dt} + V_\theta \frac{dV_\theta}{dt} + V_\phi \frac{dV_\phi}{dt} = V_r \frac{dV_r}{dt} + \frac{dV_H}{dt}$$

運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma - \frac{D}{m} \quad (26)$$

(21) 式に V_H を, また (25) 式に V_r を掛けて

$$V_H \frac{dV_r}{dt} - \frac{V_H^3}{r} + \frac{\mu}{r^2} V_H = V_H \left(\frac{L}{m} \cos \phi_B \cos \gamma - \frac{D}{m} \sin \gamma \right)$$

$$V_r \frac{dV_H}{dt} + \frac{V_r^2 V_H}{r} = -V_r \left(\frac{L}{m} \cos \phi_B \sin \gamma + \frac{D}{m} \cos \gamma \right)$$

両式の差をとると次式を得る。ただし $V^2 = V_r^2 + V_H^2 = V_r^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2$

$$\left(V_H \frac{dV_r}{dt} - V_r \frac{dV_H}{dt} \right) - \frac{V_H V^2}{r} + \frac{\mu}{r^2} V_H = \frac{L}{m} \cos \phi_B (V_H \cos \gamma + V_r \sin \gamma) \quad (27)$$

ここで

$$V_H^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{V_r}{V_H} \right) = V_H \frac{dV_r}{dt} - V_r \frac{dV_H}{dt} = V_H^2 \frac{d \tan \gamma}{dt} = \frac{V_H^2}{\cos^2 \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = V^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

なる関係式を用いると次の運動方程式を得る。

$$V \frac{d\gamma}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^2} - \frac{V^2}{r} \right) \cos \gamma = \frac{L \cos \phi_B}{m} \quad (28)$$

(22) 式に V_ϕ (23) 式に V_θ を掛けて差をとると

$$V_\phi \frac{dV_\theta}{dt} + \frac{V_r V_\theta V_\phi}{r} - \frac{V^2 V_\theta \tan \phi}{r} = V_\phi \left(\frac{L}{m} \sin \phi_B \sin \psi - \frac{L}{m} \cos \phi_B \sin \gamma \cos \psi - \frac{D}{m} \cos \gamma \cos \psi \right) \quad (2)$$

$$V_\theta \frac{dV_\phi}{dt} + \frac{V_r V_\theta V_\phi}{r} + \frac{V_\theta^3 \tan \phi}{r} = V_\theta \left(-\frac{L}{m} \sin \phi_B \cos \psi - \frac{L}{m} \cos \phi_B \sin \gamma \sin \psi - \frac{D}{m} \cos \gamma \sin \psi \right) \quad (2)$$

次式を得る

$$\left(V_\theta \frac{dV_\phi}{dt} - V_\phi \frac{dV_\theta}{dt} \right) + \frac{V_\theta (V_\phi^2 + V_\theta^2) \tan \phi}{r} = -V \frac{L}{m} \sin \phi_B \cos \gamma \quad (29)$$

ここで次の関係式を用いると

$$V_\phi \frac{dV_\theta}{dt} - V_\theta \frac{dV_\phi}{dt} = V_\theta^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{V_\phi}{V_\theta} \right) = V_\theta^2 \frac{d \tan \psi}{dt} = \frac{V_\theta^2}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{dt} = V^2 \cos^2 \gamma \frac{d\psi}{dt}$$

次の運動方程式を得る。

$$V \cos \gamma \frac{d\psi}{dt} + \frac{V^2 \cos^2 \gamma \cos \psi \tan \phi}{r} = -\frac{L \sin \phi_B}{m} \quad (30)$$

以上を整理して速度座標における運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} \sin \gamma - \frac{D}{m} \quad (26)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^2} - \frac{V^2}{r} \right) \cos \gamma = \frac{L \cos \phi_B}{m} \quad (28)$$

$$V \cos \gamma \frac{d\psi}{dt} + \frac{V^2 \cos^2 \gamma \cos \psi \tan \phi}{r} = -\frac{L \sin \phi_B}{m} \quad (30)$$

(補足 2) 主軸の回転および角加速度

1) $[\theta]_X$: X 軸まわりに θ の回転を表す。

$$[\theta]_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad [\dot{\theta}]_X = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

$$[\dot{\theta} \times] = [\theta]_X [\dot{\theta}]_X^T = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

2) $[\theta]_Y$: Y 軸まわりに θ の回転を表す。

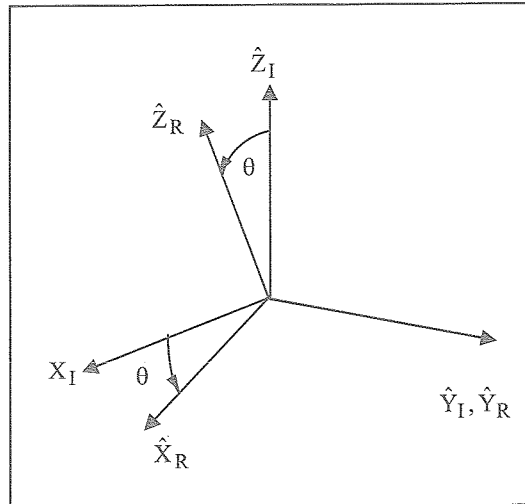
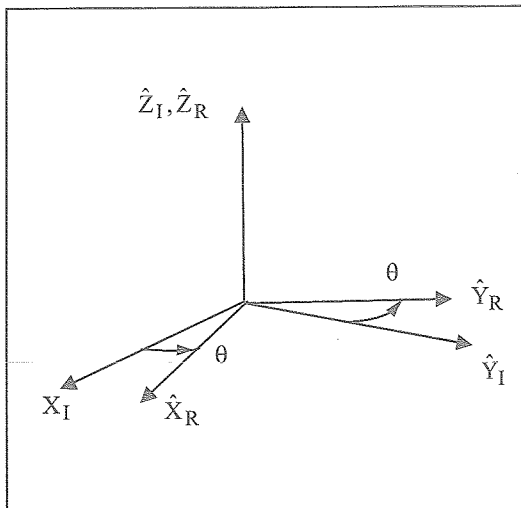
$$[\theta]_Y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad [\dot{\theta}]_Y = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

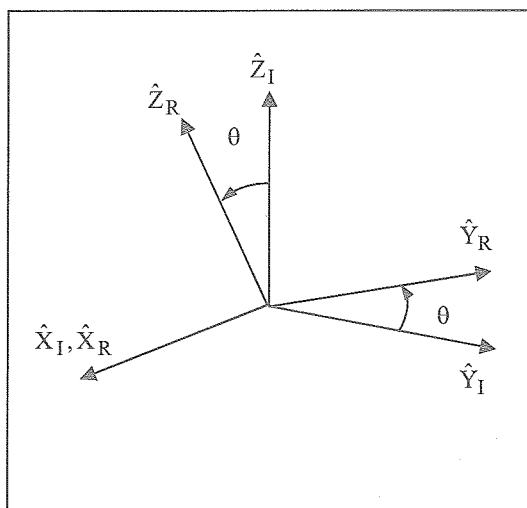
$$[\dot{\theta} \times] = [\theta]_Y [\dot{\theta}]_Y^T = \dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) $[\theta]_Z$: Z 軸まわりに θ の回転を表す。

$$[\theta]_Z = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\dot{\theta}]_Z = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\dot{\theta} \times] = [\theta]_Z [\dot{\theta}]_Z^T = \dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





(補足 3) 方向余弦行列と角速度

基準座標方向 $[\hat{a}]$ に対する回転座標 $[\hat{b}]$ の座標変換行列を $[D_a^b]$ とすれば行列 $[D_a^b]$ は正方直交行列であるから次式が成り立つ。

$$[D_a^b][D_a^b]^T = [1] : \text{単位行列}$$

上式を微分すると

$$[\dot{D}_a^b][D_a^b]^T + [D_a^b][\dot{D}_a^b]^T = [0]$$

上式の転置を取ると転置行列の定義から

$$[D_a^b][\dot{D}_a^b]^T + \left\{ [D_a^b][\dot{D}_a^b]^T \right\}^T = [0]$$

ここで

$$[D_a^b][\dot{D}_a^b]^T \equiv [\Omega]$$

と置けば

$$[\Omega] + [\Omega]^T = [0]$$

歪対称行列の定義から $[\Omega]$ は歪対称行列となる。

今ベクトル $[D_a^b][\dot{D}_a^b]^T \bar{\omega} = [\omega_X, \omega_Y, \omega_Z]^T$ の要素からなる次の行列を定義すれば

$$[\bar{\omega} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Z & \omega_X & 0 \end{bmatrix}$$

歪対称行列の定義を満たすから

$[\bar{\omega} \times] = [\Omega]$ と置くと次式が成り立つ。

$$[\bar{\omega} \times] = [D_a^b] [D_a^b]^T$$

Holt Ashley "Engineering Analysis of Flight Vehicles" Stanford University

Addison-Wesley Publishing Company

Maxwell Noton "Spacecraft Navigation and Guidance" Advances in Industrial Control

Springer-Verlag London Limited 1998

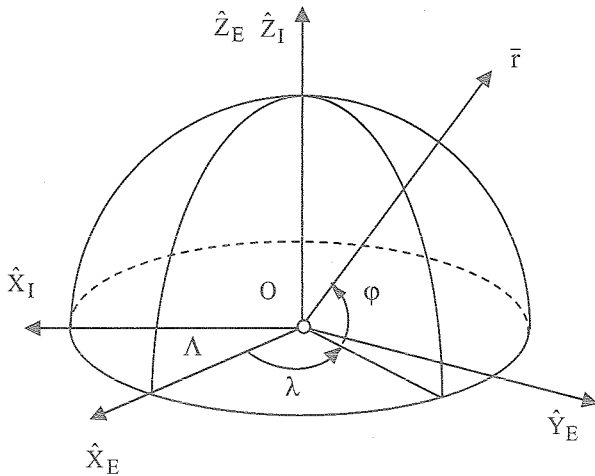
付録-2 再突入宇宙機の運動方程式(その2)

再突入宇宙機の運動方程式を各種座標系で記述する。

- (I) 慣性直交座標 $[\hat{i}]$ に於ける運動方程式
 (II) 慣性座標 $[\hat{i}]$ を基準とした回転座標に於ける運動方程式(一般)
- ① 地球中心地球固定回転座標 $[\hat{E}]$
 ② 地表面中心地球固定回転座標 $[\hat{L}]$

①地球中心地球固定回転座標 $[\hat{E}]$ (1) 座標の定義 $[\hat{E}]$

原点を地球中心とし、グリニッジ子午面と赤道面との交線方向に \hat{X}_E 軸、地球自転軸方向に \hat{Z}_E 軸、 \hat{X}_E \hat{Z}_E 軸となす右手直交方向に \hat{Y}_E 軸をとり、地球とともに回転する座標である。この座標はまた E-F-G 座標とも称されている。



ここでは回転座標 $[\hat{E}]$ を次のように表す。

$$[\hat{E}] = [\hat{X}_E \quad \hat{Y}_E \quad \hat{Z}_E]^T$$

\hat{X}_E : グリニッジ子午線方向

\hat{Y}_E : $= \hat{Z}_E \times \hat{X}_E$ 右手直交方向

\hat{Z}_E : 地球自転軸方向

$[\hat{E}]$ 座標における位置、速度ベクトルを次式で表記する。

$$\vec{r}_E = [r_{XE} \quad r_{YE} \quad r_{ZE}]^T$$

$$\vec{V}_E = [V_{XE} \quad V_{YE} \quad V_{ZE}]^T$$

2) 回転座標 $[\hat{E}]$ と慣性座標 $[\hat{I}]$ との関係

慣性座標 $[\hat{I}]$ との関係は $[\hat{I}]$ に対する回転座標 $[\hat{E}]$ の座標変換行列を $[D_I^E]$ とすれば次式で表される。

$$[\hat{E}] = [D_I^E] [\hat{I}] = [\Lambda]_Z [\hat{I}]$$

$$[D_I^E] = [\Lambda]_Z = \begin{bmatrix} \cos \Lambda & \sin \Lambda & 0 \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) 回転角速度

慣性座標 $[\hat{I}]$ に対する $[\hat{E}]$ 座標の回転角速度ベクトル $\bar{\Omega}^E$ 次式で表す。

$$\bar{\Omega}^E = [\Omega_{XE} \quad \Omega_{YE} \quad \Omega_{ZE}]^T$$

$[\hat{E}]$ 座標の回転角速度ベクトル $\bar{\Omega}^E$ は座標変換行列 $[D_I^E]$ とその変化率行列 $[\dot{D}_I^E]$ の転置行列を乗ずることにより得られる。座標変換行列 $[D_I^E]$ の変化率を求めると次のとおり。

$$[\dot{D}_I^E] = [\dot{\Lambda}]_Z = \dot{\Lambda} \begin{bmatrix} -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ -\cos \Lambda & -\sin \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

座標変換行列 $[D_I^E]$ とその変化率の転置行列の積を求めると次式で表される。

$$[\bar{\Omega}^E \times] = [D_I^E] [\dot{D}_I^E]^T = \dot{\Lambda} \begin{bmatrix} \cos \Lambda & \sin \Lambda & 0 \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \Lambda & -\cos \Lambda & 0 \\ \cos \Lambda & -\sin \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Lambda} & 0 \\ \dot{\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

() 式と () 式を比較してすると $\dot{\Lambda}$ は地球の自転角速度 Ω_E に等しいから

$$\Omega_{ZE} = \dot{\Lambda} = \Omega_e := 0.729211586 \times 10^{-4} \text{ rad/sec}$$

$$\Omega_{XE} = \Omega_{YE} = 0$$

より

$$[\bar{\Omega}^E \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_e & 0 \\ \Omega_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以下他の角速度ベクトルと区別して $\bar{\Omega}^E$ を地球自転ベクトル $\bar{\Omega}_e$ と表す。

$$\bar{\Omega}^E \equiv \bar{\Omega}_e$$

4) 地球中心地球固定回転座標 $[\hat{E}]$ での運動方程式

慣性座標 $[\hat{I}]$ からみた $[\hat{E}]$ 座標の速度, 加速度は次式で表される。

速度:

$$\bar{V}_E \Big|_I = \frac{\delta \bar{r}_E}{\delta t} + \bar{\Omega}_e \times \bar{r}_E$$

加速度:

$$\frac{d\bar{V}_E}{dt} \Big|_I = \frac{\delta \bar{V}_E}{\delta t} + \bar{\Omega}_e \times \bar{V}_E$$

から慣性座標での角速度は

$$\left. \frac{d\bar{V}_E}{dt} \right|_I = \frac{\delta\bar{V}_E}{\delta t} + 2\bar{\Omega}_e \times \bar{V}_E + \bar{\Omega}_e \times (\bar{\Omega}_e \times \bar{r}_E)$$

回転座標 $[\hat{E}]$ での運動方程式は

$$\frac{\delta\bar{V}_E}{\delta t} + 2\bar{\Omega}_e \times \bar{V}_E + \bar{\Omega}_e \times (\bar{\Omega}_e \times \bar{r}_E) = \bar{F}_E/m + \bar{g}_E$$

右辺第2項, 第3項のコリオリの項, 遠心力項 $2\bar{\Omega}_e \times \bar{V}_E$, $\bar{\Omega}_e \times (\bar{\Omega}_e \times \bar{r}_E)$ をもとめると

$$2\bar{\Omega}_e \times \bar{V}_E = 2 \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_e & 0 \\ \Omega_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{XE} \\ V_{YE} \\ V_{ZE} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -\Omega_e V_{YE} \\ \Omega_e V_{XE} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_e \times (\bar{\Omega}_e \times \bar{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_e & 0 \\ \Omega_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_e & 0 \\ \Omega_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{XE} \\ r_{YE} \\ r_{ZE} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -\Omega_e^2 r_{XE} \\ -\Omega_e^2 r_{YE} \\ 0 \end{bmatrix}$$

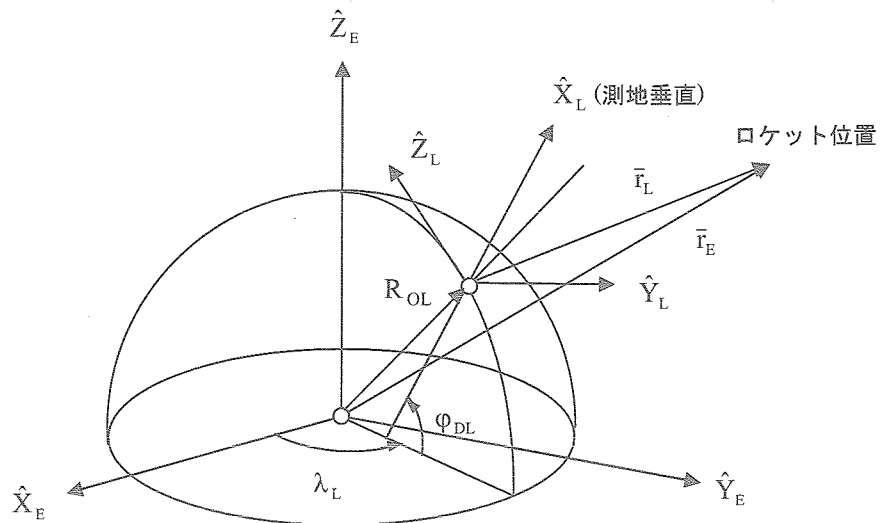
これらを()式に代入して $[\hat{E}]$ における運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{XE} \\ \dot{r}_{YE} \\ \dot{r}_{ZE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{XE} \\ V_{YE} \\ V_{ZE} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{XE} \\ \dot{V}_{YE} \\ \dot{V}_{ZE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\Omega_e V_{YE} & -\Omega_e^2 r_{XE} \\ +2\Omega_e V_{XE} & -\Omega_e^2 r_{YE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{XE}/m \\ F_{YE}/m \\ F_{ZE}/m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{XE} \\ g_{YE} \\ g_{ZE} \end{bmatrix}$$

②地表面中心地球固定回転座標 $[\hat{L}]$ (1) 地表面中心地球固定回転座標 $[\hat{L}]$ の定義

原点を回転楕円体地表面任意の点とし、原点における測地垂直方向に \hat{X}_L 軸、測地垂直面内にあつて北から方位角 A_{ZL} (時計周り)方向に \hat{Z}_L 軸、 \hat{X}_L \hat{Z}_L 軸と右手直交方向に \hat{Y}_L 軸を取った座標。方位角 $A_{ZL}=0$ のときには \hat{Y} 軸東方向、 \hat{Z} 軸北方向、 \hat{X} 軸測地垂直方向
 ロケットの場合には原点として射点(Launch Site)、あるいはレーダ・サイト(Radar Site)を選んだ座標として用いられる場合があるが、再突入宇宙機の解析では着地点の滑走路を定義する座標として使用される。



$[\hat{L}]$ 座標を次式で定義する。

$$[\hat{L}] = [\hat{X}_L \ \hat{Y}_L \ \hat{Z}_L]^T$$

原点：回転楕円体地表面任意の点

\hat{X}_L ：局地垂直方向

\hat{Y}_L ： $= \hat{Z}_L \times \hat{X}_L$ 方向

\hat{Z}_L ：局地水平面内で北から \hat{X}_L 軸周りに A_{ZL} 回転した方向

位置、速度ベクトルを次式で表記する。

$$\bar{r}_L = [r_{XL} \ r_{YL} \ r_{ZL}]^T$$

$$\bar{v}_L = [v_{XL} \ v_{YL} \ v_{ZL}]^T$$

(2) 地球中心地球固定座標 $[\hat{E}]$ と $[\hat{L}]$ 座標との関係

$$[\hat{L}] = [D_E^L][\hat{E}]$$

$$[D_E^L] = [-A_{ZL}]_X [-\phi_{DL}]_Y [\lambda_L]_Z \quad \text{：定数行列}$$

λ_L : $[\hat{L}]$ 座標原点の経度(グリニッジ方向ベクトル \hat{X}_E からの角度(赤道面内))

φ_{DL} : $[\hat{L}]$ 座標原点の測地緯度

A_{ZL} : $[\hat{L}]$ 座標原点において測地垂直軸周りの任意の角度,

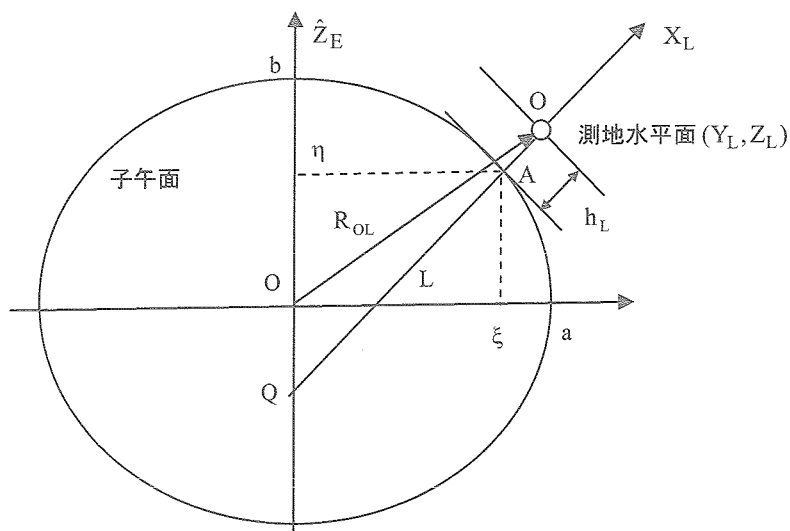
h_L : $[\hat{L}]$ 座標原点の測地高度

$[\hat{L}]$ 座標原点の $[\hat{E}]$ 座標での位置ベクトルを \bar{R}_{OL} とすれば \bar{R}_{OL} を $[\hat{E}]$ 座標で表すと次式で表される。

$$\begin{aligned} X_{OLE} &= (L + h_L) \cos \varphi_{DL} \cos \lambda_{DL} \\ Y_{OLE} &= (L + h_L) \cos \varphi_{DL} \sin \lambda_{DL} \\ Z_{OLE} &= \left\{ (1 - e^2) L + h_L \right\} \sin \varphi_{DL} \end{aligned}$$

ただし

$$L = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_{DL}}}$$



これよりロケット, 宇宙機の $[\hat{L}]$ 座標での位置ベクトルを \bar{r}_L $[\hat{E}]$ 座標での位置ベクトルを \bar{r}_E の関係は $[\hat{L}]$ 座標原点の位置ベクトルを考慮して次式で表される。

$$\bar{r}_E = \bar{R}_{OLE} + D_L^E \bar{r}_L$$

$$\bar{r}_L = D_E^L (\bar{r}_E - \bar{R}_{OLE})$$

上式を, 少し具体的に表すと次の通り

$$\begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L + h_L) \cos \varphi_{DL} \cos \lambda_{DL} \\ (L + h_L) \cos \varphi_{DL} \sin \lambda_{DL} \\ \left\{ (1 - e^2) L + h_L \right\} \sin \varphi_{DL} \end{bmatrix} + D_L^E \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} = D_E^L \begin{bmatrix} X_E - (L + h_L) \cos \varphi_{DL} \cos \lambda_{DL} \\ Y_E - (L + h_L) \cos \varphi_{DL} \sin \lambda_{DL} \\ Z_E - \left\{ (1 - e^2) L + h_L \right\} \sin \varphi_{DL} \end{bmatrix}$$

高度, 測地緯度

ロケット, 宇宙機の位置はそれぞれ原点を O , または O_L として位置ベクトル \vec{r}_E, \vec{r}_L で与えられるが, 地球を回転楕円体と仮定していることから, 地表面からの高度 h , あるいは測地緯度 φ_{DL} を求めることが必要となる。これらの算出手順について記す。この場合原点 O_L のときにはあらかじめ測地緯度 φ_{DL} が与えられていたが, この場合は測地緯度 φ_D が未知であることから, 次のような逐次近似法によらなければならない。
これは P 点から地表面に垂線を下したとき交点を S とすれば S 点が回転楕円体上にあること, P - S 線が楕円に直交する条件からもとまる。

S 点が楕円上にある条件

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad : \text{楕円上の条件}$$

P-S 線が楕円に直交する条件

$$\frac{\xi(Z_0 - \eta)}{a^2} = \frac{\eta(X_0 - \xi)}{b^2} \quad : \text{直交条件}$$

ξ/a (< 1) の値を仮定して $(\xi/a)^*$ とおく。

このとき η/b は

$$\frac{\eta}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2}$$

この η/b から ξ/a は次式でもとまる

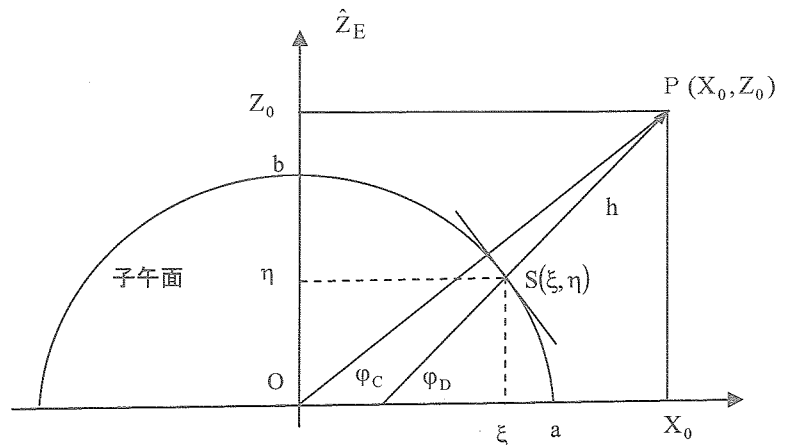
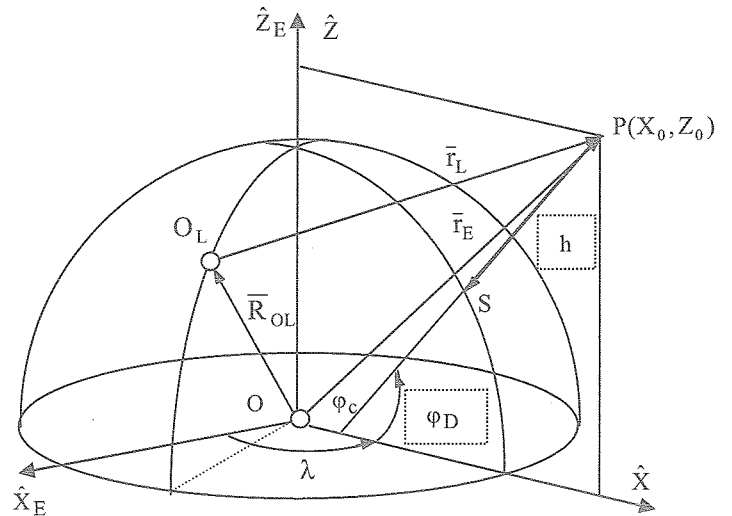
$$\frac{\xi}{a} = \frac{\left(\frac{\eta}{b}\right)\left(\frac{X_0}{a}\right)}{\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{Z_0 - \eta}{b} + \frac{\eta}{b}\right)\right\}}$$

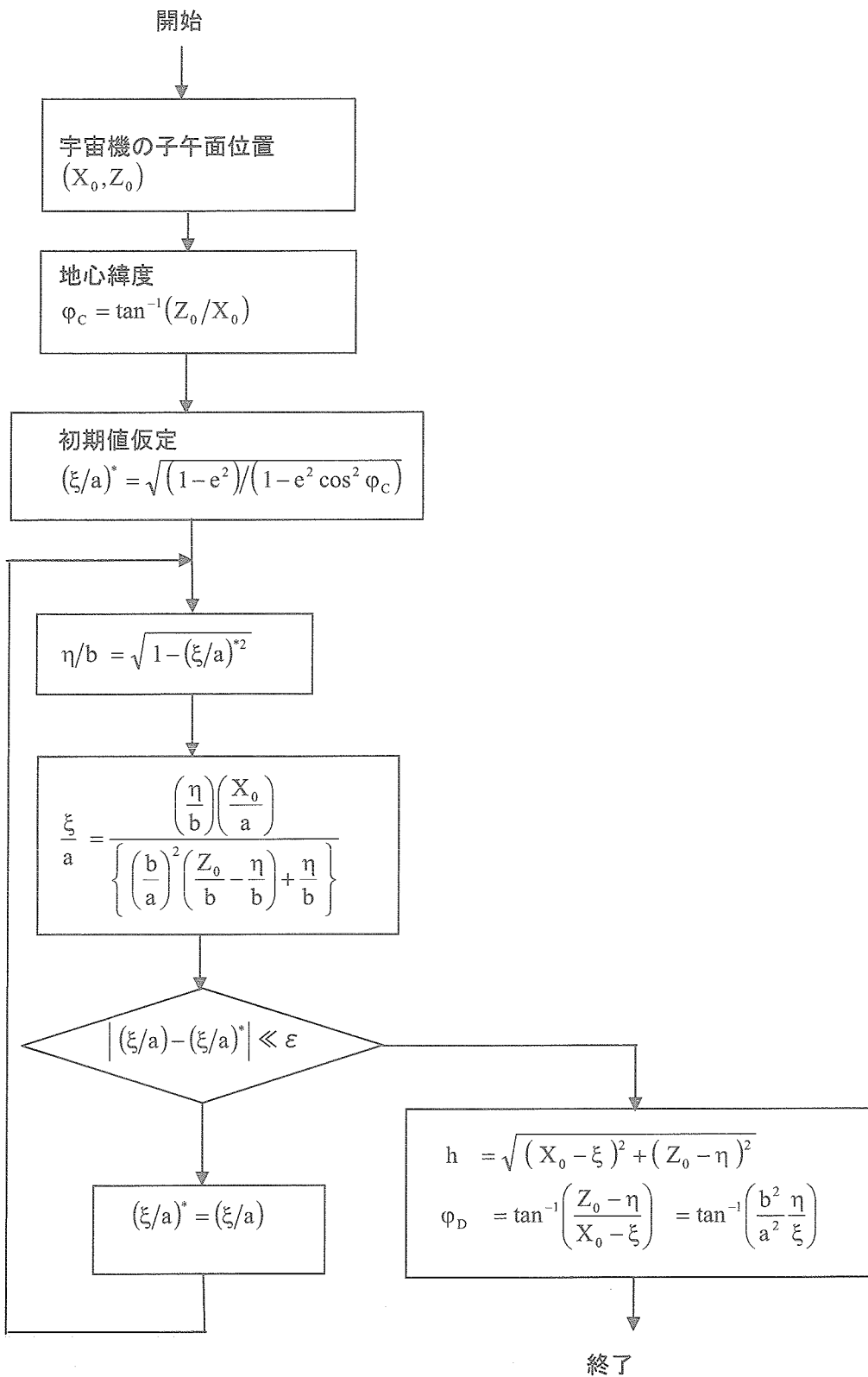
この ξ/a と $(\xi/a)^*$ を比較して両者が一致しなければ間 $\xi/a = (\xi/a)^*$ とおいて一致するまで繰返す。

以上から $\xi/a, \eta/b$ が求まると測地高度 h , 及び測地緯度 φ_D は次式で得られる。

$$h = \sqrt{(X_0 - \xi)^2 + (Z_0 - \eta)^2}$$

$$\varphi_D = \tan^{-1}\left(\frac{Z_0 - \eta}{X_0 - \xi}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b^2 \eta}{a^2 \xi}\right)$$





(補足)

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$

$$dZ/dX = Z'$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{ZZ'}{b^2} = 0 \quad Z' = -\frac{b^2 X}{a^2 Z}$$

楕円上の点 P (ξ, η) においてこれに垂直な直線は

$$Z - \eta = \frac{a^2}{b^2} \frac{\eta}{\xi} (X - \xi)$$

直線 PQ の傾斜を $\tan \varphi_D$ とすれば

$$\frac{a^2}{b^2} \frac{\eta}{\xi} = \tan \varphi_D \quad L$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

両式から

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \tan^2 \varphi_D}}$$

Q 点は $X=0$ と置いて $\left[0, -\eta e^2 / (1 - e^2) \right]$

直線 PQ

$$L = \sqrt{\xi^2 + \xi^2 \tan^2 \varphi_D} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_D}}$$

付録-3 再突入宇宙機の運動方程式(ベクトル表示)

概要:

ベクトル形式運動方程式

$$\delta_R \bar{V} / \delta_{Rt} + \left\{ \left(\bar{\omega}^{R-E} + 2\bar{\omega}^{E-I} \right) \times \bar{V} \right\}_R + \left\{ \bar{\omega}^{E-I} \times \left(\bar{\omega}^{E-I} \times \bar{r} \right) \right\}_R = \bar{F}_R / m + \bar{g}_R$$

を用いて速度軸座標 $[\hat{V}]$ に於ける運動方程式を導出する。ただし外積の演算規則

$$\hat{X}_V \times \hat{Y}_V = \hat{Z}_V \quad \hat{Y}_V \times \hat{Z}_V = \hat{X}_V \quad \hat{Z}_V \times \hat{X}_V = \hat{Y}_V \quad \hat{X}_V \times \hat{X}_V = \hat{Y}_V \times \hat{Y}_V = \hat{Z}_V \times \hat{Z}_V = 0$$

を用いる。

(A) 東方向基準(右回転)

局所水平座標 $[\hat{H}]$ を基準とし、 \hat{X}_H 軸(r ベクトル)を右周り(CCW周り)に $+\psi$ だけ回転して、回転後の Z 軸周りに $-\gamma$ だけ回転させ Y 軸を速度ベクトル \hat{V} と一致させた座標。

(A) 東方向基準(右回転)速度軸座標 $[\hat{V}]$ に於ける運動方程式① 速度軸座標 $[\hat{V}]$ の定義

$$[\hat{V}] = [\hat{X}_V \quad \hat{Y}_V \quad \hat{Z}_V]^T \quad (1)$$

$$\hat{X}_V := \hat{Y}_V \times \hat{Z}_V$$

$$\hat{Z}_V := \hat{r} \times \hat{V} / |\hat{r} \times \hat{V}| \quad (\text{角運動量ベクトル方向}) \quad \text{-----} \quad \text{飛行面垂直方向}$$

$$\hat{Y}_V := \hat{V} \quad \text{-----} \quad \text{速度ベクトル} \hat{V} \text{方向}$$

$[\hat{V}]$ 座標での位置ベクトル, 速度ベクトルは次の通り。

$$\{\bar{r}\}_V = [-\gamma]_Z [r \quad 0 \quad 0]^T = [r \cos \gamma \quad r \sin \gamma \quad 0]^T \quad (2)$$

$$\{\bar{V}\}_V = [0 \quad V_{YZ} \quad 0]^T \quad (3)$$

また $V_{YV} = V$ から

$$\{\bar{V}\}_V = [0 \quad V \quad 0]^T \quad (4)$$

② 座標変換:

$[\hat{V}]$ 座標を基準に以下に示す回転を行ったとき回転後の座標をそれぞれ $[\hat{X}_3, \hat{Y}_3, \hat{Z}_3]$

$[\hat{X}_2, \hat{Y}_2, \hat{Z}_2]$ $[\hat{X}_1, \hat{Y}_1, \hat{Z}_1]$ とする。

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_3 \\ \hat{Y}_3 \\ \hat{Z}_3 \end{bmatrix} = [\gamma]_Z \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix} : Z \text{軸周りの回転(5)}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Z}_2 \end{bmatrix} = [-\psi]_X [\gamma]_Z \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix} : \text{回転後の} X \text{軸回転(6)}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{Y}_1 \\ \hat{Z}_1 \end{bmatrix} = [\varphi]_Y [-\psi]_X [\gamma]_Z \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix} : \text{回転後の Y 軸回転 (7)}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_E \\ \hat{Y}_E \\ \hat{Z}_E \end{bmatrix} = [-\theta]_Z [\varphi]_Y [-\psi]_X [\gamma]_Z \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix} : \text{回転後の Z 軸回転 (8)}$$

上記座標変換を展開すると

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_3 \\ \hat{Y}_3 \\ \hat{Z}_3 \end{bmatrix} = [\gamma]_Z \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \hat{X}_V + \sin \gamma \hat{Y}_V \\ -\sin \gamma \hat{X}_V + \cos \gamma \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Z}_2 \end{bmatrix} = [-\psi]_X [\gamma]_Z \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\cos \psi \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma & \sin \psi \\ \sin \psi \sin \gamma & -\sin \psi \cos \gamma & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma \hat{X}_V + \sin \gamma \hat{Y}_V \\ -\cos \psi \sin \gamma \hat{X}_V + \cos \psi \cos \gamma \hat{Y}_V + \sin \psi \hat{Z}_V \\ \sin \psi \sin \gamma \hat{X}_V - \sin \psi \cos \gamma \hat{Y}_V + \cos \psi \hat{Z}_V \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{Y}_1 \\ \hat{Z}_1 \end{bmatrix} = [\varphi]_Y [-\psi]_X [\gamma]_Z \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \gamma - \sin \varphi \sin \psi \sin \gamma & \cos \varphi \sin \gamma + \sin \varphi \sin \psi \cos \gamma & -\sin \varphi \cos \psi \\ -\cos \psi \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma & \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \gamma + \cos \varphi \sin \psi \sin \gamma & \sin \varphi \sin \gamma - \cos \varphi \sin \psi \cos \gamma & \cos \varphi \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos \varphi \cos \gamma - \sin \varphi \sin \psi \sin \gamma) \hat{X}_V + (\cos \varphi \sin \gamma + \sin \varphi \sin \psi \cos \gamma) \hat{Y}_V - \sin \varphi \cos \psi \hat{Z}_V \\ -\cos \psi \sin \gamma \hat{X}_V + \cos \psi \cos \gamma \hat{Y}_V + \sin \psi \hat{Z}_V \\ (\sin \varphi \cos \gamma + \cos \varphi \sin \psi \sin \gamma) \hat{X}_V + (\sin \varphi \sin \gamma - \cos \varphi \sin \psi \cos \gamma) \hat{Y}_V + \cos \varphi \cos \psi \hat{Z}_V \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_E \\ \hat{Y}_E \\ \hat{Z}_E \end{bmatrix} = [-\theta]_Z [\varphi]_Y [-\psi]_X [\gamma]_Z \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta(\cos\varphi\cos\gamma - \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma) \\ + \sin\theta\cos\psi\sin\gamma \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta(\cos\varphi\sin\gamma + \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma) \\ - \sin\theta\cos\psi\cos\gamma \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} -\cos\theta\sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\theta\sin\psi \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin\theta(\cos\varphi\cos\gamma - \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma) \\ -\cos\theta\cos\psi\sin\gamma \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \sin\theta(\cos\varphi\sin\gamma + \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma) \\ + \cos\theta\cos\psi\cos\gamma \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} -\sin\theta\sin\varphi\cos\psi \\ + \cos\theta\sin\psi \end{array} \right\} \\ \sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma & \sin\varphi\sin\gamma - \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma & \cos\varphi\cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_V \\ \hat{Y}_V \\ \hat{Z}_V \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta(\cos\varphi\cos\gamma - \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma) \\ + \sin\theta\cos\psi\sin\gamma \end{array} \right\} \hat{X}_V + \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta(\cos\varphi\sin\gamma + \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma) \\ - \sin\theta\cos\psi\cos\gamma \end{array} \right\} \hat{Y}_V - \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta\sin\varphi\cos\psi \\ + \sin\theta\sin\psi \end{array} \right\} \hat{Z}_V \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin\theta(\cos\varphi\cos\gamma - \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma) \\ - \cos\theta\cos\psi\sin\gamma \end{array} \right\} \hat{X}_V + \left\{ \begin{array}{l} \sin\theta(\cos\varphi\sin\gamma + \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma) \\ + \cos\theta\cos\psi\cos\gamma \end{array} \right\} \hat{Y}_V - \left\{ \begin{array}{l} \sin\theta\sin\varphi\cos\psi \\ - \cos\theta\sin\psi \end{array} \right\} \hat{Z}_V \\ (\sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma) \hat{X}_V + (\sin\varphi\sin\gamma - \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma) \hat{Y}_V + \cos\varphi\cos\psi \hat{Z}_V \end{bmatrix} \\
\end{aligned} \tag{12}$$

から回転軸 $\hat{Z}_1, \hat{Y}_2, \hat{X}_3$ を速度座標 $[\hat{V}]$ で求めると

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_E = (\sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma) \hat{X}_V + (\sin\varphi\sin\gamma - \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma) \hat{Y}_V + \cos\varphi\cos\psi \hat{Z}_V \tag{13}$$

$$\hat{Y}_2 = -\cos\psi\sin\gamma \hat{X}_V + \cos\psi\cos\gamma \hat{Y}_V + \sin\psi \hat{Z}_V \tag{14}$$

$$\hat{X}_3 = \cos\gamma \hat{X}_V + \sin\gamma \hat{Y}_V \tag{15}$$

③ 慣性座標に対する $[\hat{V}]$ 座標の回転角速度: $\overline{\omega}^{E-I}$

地球自転角速度の $[\hat{E}]$ で表すと

$$\left\{ \overline{\omega}^{E-I} \right\}_E = \omega_e \hat{Z}_E \tag{16}$$

\hat{Z}_E を代入して速度座標 $[\hat{V}]$ で表すと

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\omega}^{E-I} \right\}_V &= \omega_e (\sin\varphi\cos\gamma - \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma) \hat{X}_V \\ &+ \omega_e (\sin\varphi\sin\gamma + \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma) \hat{Y}_V + \omega_e \cos\varphi\cos\psi \hat{Z}_V \end{aligned} \tag{17}$$

④ 遠心加速度

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{\omega}^{E-I} \right\}_V \times \left\{ \overline{\omega}^{E-I} \right\}_V \times \left\{ \vec{r} \right\}_V &= \left\{ \overline{\omega}^{E-I} \right\}_V \times \left\{ \overline{\omega}^{E-I} \right\}_V \times (r\cos\gamma \hat{X}_V + r\sin\gamma \hat{Y}_V) \\ &= -\cos\varphi (\sin\varphi\sin\gamma\sin\psi + \cos\gamma\cos\varphi) \hat{X}_V + \cos\varphi (\sin\varphi\cos\gamma\sin\psi - \sin\gamma\cos\varphi) \hat{Y}_V + \sin\varphi\cos\varphi\cos\psi \hat{Z}_V \end{aligned} \tag{18}$$

⑤ E 座標に対する $[\hat{V}]$ 座標の角加速度 $\left\{ \overline{\omega}^{V-E} \right\}_V$

$$\{\bar{\omega}^{V-E}\}_V = \dot{\theta} \hat{Z}_1 - \dot{\phi} \hat{Y}_2 + \dot{\psi} \hat{X}_3 - \dot{\gamma} \hat{Z}_V \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\omega}^{V-E}\}_V &= \left\{ \dot{\theta} (\sin \phi \cos \gamma + \cos \phi \sin \psi \sin \gamma) - \dot{\phi} \cos \psi \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \gamma \right\} \hat{X}_V \\ &+ \left\{ \dot{\theta} (\sin \phi \sin \gamma - \cos \phi \sin \psi \cos \gamma) + \dot{\phi} \cos \psi \cos \gamma + \dot{\psi} \sin \gamma \right\} \hat{Y}_V + \left\{ \dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi - \dot{\gamma} \right\} \hat{Z}_V \end{aligned} \quad (20)$$

⑥コリオリ加速度

(17) (20) 式から $\{\bar{\omega}^{V-E}\}_V + 2\{\bar{\omega}^{E-I}\}_V$ を求める。

$$\begin{aligned} &\{\bar{\omega}^{V-E}\}_V + 2\{\bar{\omega}^{E-I}\}_V \\ &= \left\{ \dot{\theta} (\sin \phi \cos \gamma + \cos \phi \sin \psi \sin \gamma) - \dot{\phi} \cos \psi \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \gamma + 2\omega_e (\sin \phi \cos \gamma - \cos \phi \sin \psi \sin \gamma) \right\} \hat{X}_V \\ &+ \left\{ \dot{\theta} (\sin \phi \sin \gamma - \cos \phi \sin \psi \cos \gamma) + \dot{\phi} \cos \psi \cos \gamma + \dot{\psi} \sin \gamma + 2\omega_e (\sin \phi \sin \gamma + \cos \phi \sin \psi \cos \gamma) \right\} \hat{Y}_V \\ &+ \left\{ \dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi - \dot{\gamma} + 2\omega_e \cos \phi \cos \psi \right\} \hat{Z}_V \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式と速度ベクトル \hat{V} との外積からコリオリ加速度を求めると次の通り。

$$\begin{aligned} &\left[\{\bar{\omega}^{V-E}\}_V + 2\{\bar{\omega}^{E-I}\}_V \right] \times V_{YV} \hat{Y}_V \\ &= V_{YV} \left\{ -\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi + \dot{\gamma} - 2\omega_e \cos \phi \cos \psi \right\} \hat{X}_V \\ &+ V_{YV} \left\{ \dot{\theta} (\sin \phi \cos \gamma + \cos \phi \sin \psi \sin \gamma) - \dot{\phi} \cos \psi \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \gamma + 2\omega_e (\sin \phi \cos \gamma - \cos \phi \sin \psi \sin \gamma) \right\} \hat{Z}_V \end{aligned} \quad (22)$$

⑦速度と位置の変化率(キネマティクス)

$[\hat{V}]$ 座標での速度 $\{\bar{V}\}_V$ は次式で表される。

$$\{\bar{V}\}_V = \dot{\bar{r}} + \{\bar{\omega}^{V-E}\}_V \times \{\bar{r}\}_V \quad (23)$$

第1項は \bar{r} を $[\hat{V}]$ 座標で微分して

$$\dot{\bar{r}} = (\dot{r} \cos \gamma - r \sin \gamma \dot{\gamma}) \hat{X}_V + (r \sin \gamma + r \cos \gamma \dot{\gamma}) \hat{Y}_V \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{V}\}_V &= \left\{ \dot{r} \cos \gamma - r \sin \gamma (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) \right\} \hat{X}_V \\ &+ \left\{ r \sin \gamma + r \cos \gamma (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) \right\} \hat{Y}_V + r \left\{ \dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \right\} \hat{Z}_V \end{aligned} \quad (25)$$

(4) 式から

$$\begin{bmatrix} \bar{V} \cdot \hat{X}_V \\ \bar{V} \cdot \hat{Y}_V \\ \bar{V} \cdot \hat{Z}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix}$$

で表され(25)式を比較して次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \gamma - r \sin \gamma (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) &= 0 \\ r \sin \gamma + r \cos \gamma (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi) &= V_{YV} \\ r (\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

以上よりキネマティクスは次式で表される。

$$\dot{r} = V_{YV} \sin \gamma \quad (27)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_{YV} \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi} \quad (28)$$

$$\dot{\phi} = \frac{V_{YV} \cos \gamma \sin \psi}{r} \quad (29)$$

⑧運動方程式：

運動方程式をベクトル形式で表示すると次式で表されるからコリオリ、重力の加速度を代入して

$$\frac{\delta_V \bar{V}}{\delta_V t} + \left\{ (\bar{\omega}^{V-E} + 2\bar{\omega}^{E-I}) \times \bar{V} \right\}_V + \left\{ \bar{\omega}^{E-I} \times (\bar{\omega}^{E-I} \times \bar{r}) \right\}_V = \frac{\bar{F}_V}{m} + \bar{g}_V \quad (30)$$

ただし \bar{F}_V/m , \bar{g}_V は回転座標での空力加速度, 重力加速度

$r(\dot{\theta} \cos \phi \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi) = 0$ キネマティクス $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ を代入すると次の運動方程式を得る。

$$V_{YV} \dot{\gamma} - \frac{V_{YV}^2 \cos \gamma}{r} - 2\omega_e V_{YV} \cos \phi \cos \psi - r \omega_e^2 \cos \phi (\sin \phi \sin \gamma \sin \psi + \cos \gamma \cos \phi) = F_{XV}/m + g_{XV} \quad (31)$$

$$\dot{V}_{YV} + r \omega_e^2 \cos \phi (\sin \phi \cos \gamma \sin \psi - \sin \gamma \cos \phi) = F_{YV}/m + g_{YV} \quad (32)$$

$$V_{YV} \cos \gamma \dot{\psi} + \frac{V_{YV}^2 \cos^2 \gamma \cos \psi \tan \phi}{r} + 2\omega_e V_{YV} (\sin \phi \cos \gamma - \cos \phi \sin \psi \sin \gamma) + r \omega_e^2 \sin \phi \cos \phi \cos \psi = F_{ZV}/m + g_{ZV} \quad (33)$$

$V_{YV} = V$ および⑨項の空力加速度および重力加速度を用いると次のように表される。

$$V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos \gamma}{r} - 2\omega_e V \cos \phi \cos \psi - r \omega_e^2 \cos \phi (\sin \phi \sin \gamma \sin \psi + \cos \gamma \cos \phi) = L \cos \phi_B / m - g \cos \gamma \quad (34)$$

$$V + r \omega_e^2 \cos \phi (\sin \phi \cos \gamma \sin \psi - \sin \gamma \cos \phi) = -D/m - g \sin \gamma \quad (35)$$

$$V \cos \gamma \dot{\psi} + \frac{V^2 \cos^2 \gamma \cos \psi \tan \phi}{r} + 2\omega_e V (\sin \phi \cos \gamma - \cos \phi \sin \psi \sin \gamma) + r \omega_e^2 \sin \phi \cos \phi \cos \psi = -L \sin \phi_B / m \quad (36)$$

地球の回転を無視した場合には $\omega_e = 0$ と置いて

$$\dot{V} = -D/m - g \sin \gamma \quad (37)$$

$$V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos \gamma}{r} = L \cos \phi_B / m - g \cos \gamma \quad (38)$$

$$V \cos \gamma \dot{\psi} + \frac{V^2 \cos^2 \gamma \cos \psi \tan \phi}{r} = -L \sin \phi_B / m \quad (39)$$

2次元の場合には $\phi_B, \psi = 0$ と置いて

$$\dot{V} = -D/m - g \sin \gamma \quad (40)$$

$$V \dot{\gamma} - \frac{V^2 \cos \gamma}{r} = L/m - g \cos \gamma \quad (41)$$

⑨ 空力加速度および重力加速度

東方向基準(右回転)

$$\begin{bmatrix} F_{XH}/m \\ F_{YH}/m \\ F_{ZH}/m \end{bmatrix} = [-\phi_B]_Y \begin{bmatrix} L/m \\ -D/m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \cos \phi_B / m \\ -D/m \\ -L \sin \phi_B / m \end{bmatrix} \quad (42)$$

重力加速度

重力加速度は位置ベクトル r 方向に働くから $[\hat{H}]$ 座標で表された重力加速度を $[\hat{V}]$ 座標であらわすと

$$\bar{g}_V = [-\gamma]_Z [\psi]_X \bar{g}_H \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} g_{XV} \\ g_{YV} \\ g_{ZV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \cos \gamma \\ -g \sin \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

付録-4 再突入宇宙機の空力特性

概要：

極超音速飛行における再突入宇宙機に関する空力係数についてニュートン流近似による簡易計算法について示す。

1) 極超音速近似(ニュートン流近似)

迎角 α で極超音速飛行をする平板を考えると、平板に垂直方向の空力加速度 F_N/m はニュートン流近似から次式で表される。

$$\frac{F_N}{m} = \frac{C_N A}{m} \frac{\rho V_N^2}{2} \quad (1)$$

ここで

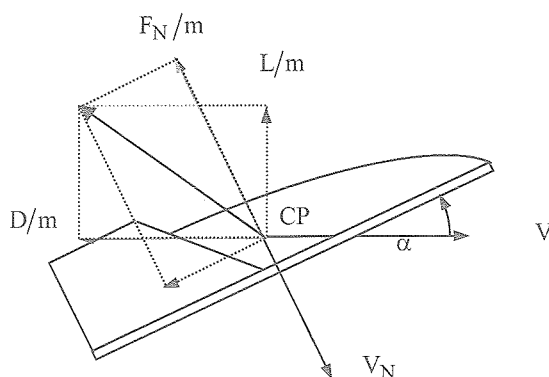
 C_N : 垂直力空力係数 V_N : 平板に垂直方向速度 m : 機体質量 A : 基準断面積 ρ : 大気密度 α : 迎角

図-1

$V_N = V \sin \alpha$ より (1) 式は

$$\frac{F_N}{m} = \frac{C_N A}{m} \frac{\rho V^2}{2} \sin^2 \alpha \quad (2)$$

このとき揚力加速度 L/m , 抗力加速度 D/m は図-1 から次式で表される。

$$\frac{L}{m} = \frac{F_N}{m} \cos \alpha \quad (3)$$

$$\frac{D}{m} = \left(\frac{F_N}{m} \right)_0 + \frac{F_N}{m} \sin \alpha = \left(\frac{D}{m} \right)_0 + \frac{F_N}{m} \sin \alpha \quad (4)$$

ここで $(F_N/m)_0$, $(D/m)_0$ は迎角が 0 の時の抗力加速度

(2) 式を代入して

$$\frac{L}{m} = \frac{C_N A}{m} \frac{\rho V^2}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (5)$$

$$\frac{D}{m} = \left(\frac{D}{m} \right)_0 + \frac{C_N A}{m} \frac{\rho V^2}{2} \sin^3 \alpha = \frac{\rho V^2}{2} \frac{A}{m} \left\{ \left(\frac{D}{m} \right)_0 \frac{m}{A} \frac{2}{\rho V^2} + C_N \sin^3 \alpha \right\} \quad (6)$$

(4) (5) 式で

$$C_{L0} = C_N \quad (7)$$

$$C_{D0} = \left(\frac{D}{m}\right)_0 \frac{m/A}{\rho V^2/2} \quad (8)$$

と置けばニュートン流近似では揚力加速度, 抗力加速度は次式で表される。

$$\frac{L}{m} = \frac{\rho V^2}{2} \frac{C_{L0} A}{m} \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (9)$$

$$\frac{D}{m} = \frac{\rho V^2}{2} \frac{A}{m} (C_{D0} + C_{L0} \sin^3 \alpha) \quad (10)$$

ニュートン流近似に対してより一般的には抗力加速度の右辺第2項の C_{L0} を $C_{L0} \rightarrow C_{DL}$ ($C_{DL} \approx C_{L0}$) と置いて次式で表す。

$$\frac{L}{m} = \frac{C_{L0} A}{2m} \rho V^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \equiv \frac{C_L A}{2m} \rho V^2 \quad (11)$$

$$\frac{D}{m} = \frac{A}{2m} \rho V^2 (C_{D0} + C_{DL} \sin^3 \alpha) \equiv \frac{C_D A}{2m} \rho V^2 \quad (12)$$

(11), (12) 式の両辺を比較して揚力係数 C_L , 抗力係数 C_D , 揚抗比 L/D がそれぞれ次のように表される。

$$C_L = C_{L0} \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad : \text{揚力係数} \quad (13)$$

$$C_D = C_{D0} + C_{DL} \sin^3 \alpha \quad : \text{抗力係数} \quad (14)$$

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_{L0} \sin^2 \alpha \cos \alpha}{C_{D0} + C_{DL} \sin^3 \alpha} \quad : \text{揚抗比} \quad (15)$$

ここで

C_{L0} : 激点圧力係数 $\approx C_{P_{\max}} = 1.83 \sim 2.0$ (垂直衝撃波直後の圧力係数)

C_{D0} : 零揚力抗力係数

C_{DL} : 誘導抵抗係数 $\approx C_{L0}$

2) 揚力係数の最大値 $C_{L \max}$:

(5) 式を迎角について微分して0とおくと

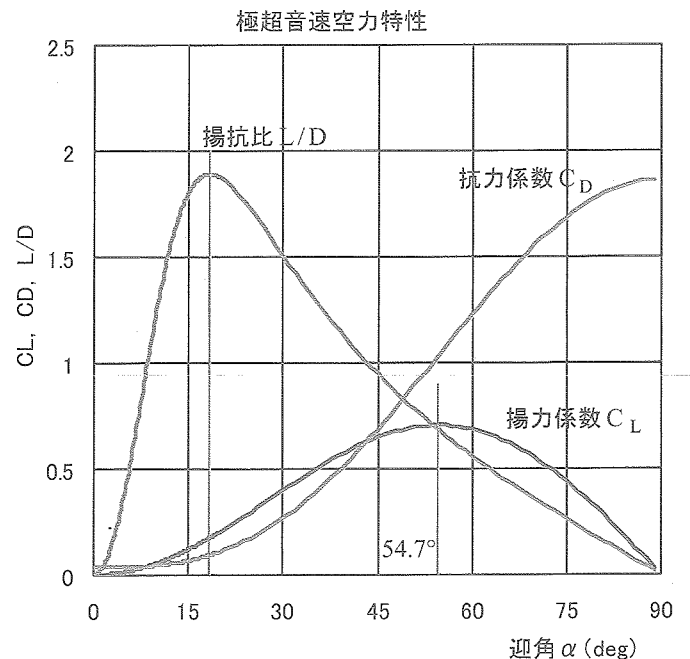
$$dC_L/d\alpha = C_{L0} \sin \alpha (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$$

$$\tan \alpha_{CL \max} = \sqrt{2}$$

これより揚力係数の最大となる迎角 $\alpha_{CL \max}$ は次の値をとる。

$$\alpha_{CL \max} = \tan^{-1} \sqrt{2} = 54.7 \text{ deg}$$

$$C_{L \max} = 2 C_{L0} / 3\sqrt{3} \quad : \text{最大揚力係数}$$



ここで注目すべき点は揚力係数が最大となる迎角 α_{CLmax} は空力係数によらず一意的に定まる。

揚力係数の最大値となるときの抗力係数 C_{DCLmax} , 揚抗比 $(L/D)_{CLmax}$ の概略値は次の通り。

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{CLmax} = \frac{C_{L0} \sin^2 \alpha_{CLmac} \cos \alpha_{CLmac}}{C_{D0} + C_{L0} \sin^3 \alpha_{CLmac}} \approx \frac{1}{\tan \alpha_{CLmac}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C_{DCLmax} = C_{D0} + C_{L0} \sin^3 \alpha_{CLmax} \approx 1.0$$

3) 最大揚抗比 $(L/D)_{max}$:

(7) 式から

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_{L0} F_1(\alpha)}{C_{D0} + C_{DL} F_2(\alpha)} \quad (16)$$

ここで

$$F_1(\alpha) = \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (17)$$

$$F_2(\alpha) = \sin^3 \alpha$$

と置く。 α に関する微係数は

$$F_{1\alpha}(\alpha) = \sin \alpha (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (18)$$

$$F_{2\alpha}(\alpha) = 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

L/D が最大となる条件は $d(L/D)/d\alpha = 0$ から

$$C_{D0} F_{1\alpha}(\alpha) - C_{DL} \{F_1(\alpha) F_{2\alpha}(\alpha) - F_2(\alpha) F_{1\alpha}(\alpha)\} = 0$$

(8) (9) 式を代入して

$$\frac{C_{D0}}{C_{DL}} = \frac{\sin^3 \alpha_{L/Dmax}}{2 - 3 \sin^2 \alpha_{L/Dmax}} \quad (19)$$

または

$$\sin^3 \alpha_{L/Dmax} + 3(C_{D0}/C_{DL}) \sin^2 \alpha_{L/Dmax} - 2(C_{D0}/C_{DL}) = 0 \quad (20)$$

C_{D0} , C_{DL} が与えられたとき上式を繰返し計算により解くことにより揚抗比 L/D が最大となる迎角 $\alpha_{L/Dmax}$ が得られる。また最大値はこの迎角を代入して次式で得られる。

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{max} = \frac{C_{L0} \sin^2 \alpha_{L/Dmax} \cos \alpha_{L/Dmax}}{C_{D0} + C_{DL} \sin^3 \alpha_{L/Dmax}} \quad (21)$$

(20), (21) 式は数値的に解かねばならないが近似的に次のように陽にもとめることができる。揚抗比 L/D が最大となる迎角 $\alpha_{L/Dmax}$ は揚力係数の最大値となる迎角 α_{CLmax} に比べて十分小さいことから近似的に次式が成り立つ。また $C_{DL} \approx C_{L0} \approx 2$ であるから迎角は次式で近似できる。

$$\frac{C_{D0}}{C_{DL}} = \frac{\sin^3 \alpha_{L/D\max} / 2}{1 - (3/2) \sin^2 \alpha_{L/D\max}} \approx \frac{\alpha_{L/D\max}^3}{2} \rightarrow \alpha_{L/D\max} \approx \left(\frac{2C_{D0}}{C_{DL}} \right)^{1/3} \approx C_{D0}^{1/3} \quad (22)$$

L/D が最大となるときの揚力係数, 抗力係数は (5), (6) 式に (12) 式 $\alpha_{L/D\max} \approx C_{D0}^{1/3}$ を代入して

$$C_{LL/D\max} \approx C_{L0} C_{D0}^{2/3} \quad (22)$$

$$C_{DL/D\max} \approx (1 + C_{DL}) C_{D0} \quad (23)$$

(13), (14) 式から近似最大揚力係数は次式で表される。

$$\left(\frac{L}{D} \right)_{\max} = \frac{C_{LL/D\max}}{C_{DL/D\max}} \approx \frac{C_{L0}}{(1 + C_{DL})} \frac{1}{C_{D0}^{1/3}} \approx \frac{C_{L0}}{(1 + C_{L0})} \frac{1}{C_{D0}^{1/3}} \quad (24)$$

4) 零揚力抗力係数 : C_{D0}

L/D, C_{L0} が与えられたとき抗力係数バイアス値 C_{D0} の最大値を求める。(8), (9) 式から

$$C_{D0} = \frac{C_{L0}}{L/D} F_1(\alpha) - C_{DL} F_2(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{D0}}{d\alpha} &= \frac{C_{L0}}{(L/D)} \left\{ F_{1\alpha}(\alpha) - \left(\frac{C_{DL}}{C_{L0}} \right) F_{2\alpha}(\alpha) \right\} \\ &= - \frac{C_{L0} \sin \alpha \cos^2 \alpha}{(L/D)} \left\{ \tan^2 \alpha + 3 \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{C_{DL}}{C_{L0}} \right) \tan \alpha - 2 \right\} = 0 \quad (25) \end{aligned}$$

これより $\tan \alpha$ の 2 次式であらわされるから

$$\tan^2 \alpha + 3 \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{C_{DL}}{C_{L0}} \right) \tan \alpha - 2 = 0 \quad (26)$$

上式を解いて零揚力抗力係数 C_{D0} が最大値となる迎角, および最大値は次式で表される。

$$\tan \alpha_{CD0\max} = - \frac{3}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{C_{DL}}{C_{L0}} \right) + \sqrt{\left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{C_{DL}}{C_{L0}} \right) \right\}^2 + 2} \quad (27)$$

$$C_{D0} = \frac{C_{L0} \sin^2 \alpha_{CD0\max} \cos \alpha_{CD0\max}}{L/D} - C_{DL} \sin^3 \alpha_{CD0\max} \quad (28)$$

例 1) Bryson, Denham, Carroll, Mikami (1962)

$$C_L = 1.82 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$C_D = 0.042 + 1.46 \sin^3 \alpha$$

$$C_{L0} = 1.82 \quad C_{DL} = 1.46 \quad C_{D0} = 0.042$$

から

$$\alpha_{CL\max} = \tan^{-1} \sqrt{2} = 54.7 \text{ deg}$$

$$C_{L\max} = 2C_{L0} / 3\sqrt{3} = 2 \times 1.82 / 3\sqrt{3} = 0.7$$

$$\alpha_{L/D\max} \approx C_{D0}^{1/3} = 0.042^{1/3} = 0.348$$

$$C_{LL/D\max} \approx C_{L0} C_{D0}^{2/3} = 1.82 \times 0.042^{2/3} = 0.220$$

$$C_{DL/D\max} \approx (1 + C_{DL}) C_{D0} = (1 + 1.46) \times 0.042 = 0.103$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} \approx \frac{C_{L0}}{(1 + C_{L0})} \frac{1}{C_{D0}^{1/3}} = \frac{1.82}{(1 + 1.82) \times 0.042^{1/3}} = 1.86$$

$$C_{D\max} = 1.502 \quad \alpha = 20.5 \text{ deg}$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = 2.0 \quad \alpha = 20.5 \text{ deg}$$

$$C_{L\max} = 0.702 \quad \alpha = 54.7 \text{ deg}$$

例2) ダイナソーの例 Yoler "Dyna-Soar" (1973)

$$C_L = 1.83 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$C_D = 0.034 + 1.83 \sin^3 \alpha$$

$$C_{L0} = C_{DL} = 1.83 \quad C_{D0} = 0.034$$

から

$$\alpha_{CL\max} = \tan^{-1} \sqrt{2} = 54.7 \text{ deg}$$

$$C_{L\max} = 2 C_{L0} / 3\sqrt{3} = 2 \times 1.83 / 3\sqrt{3} = 0.704$$

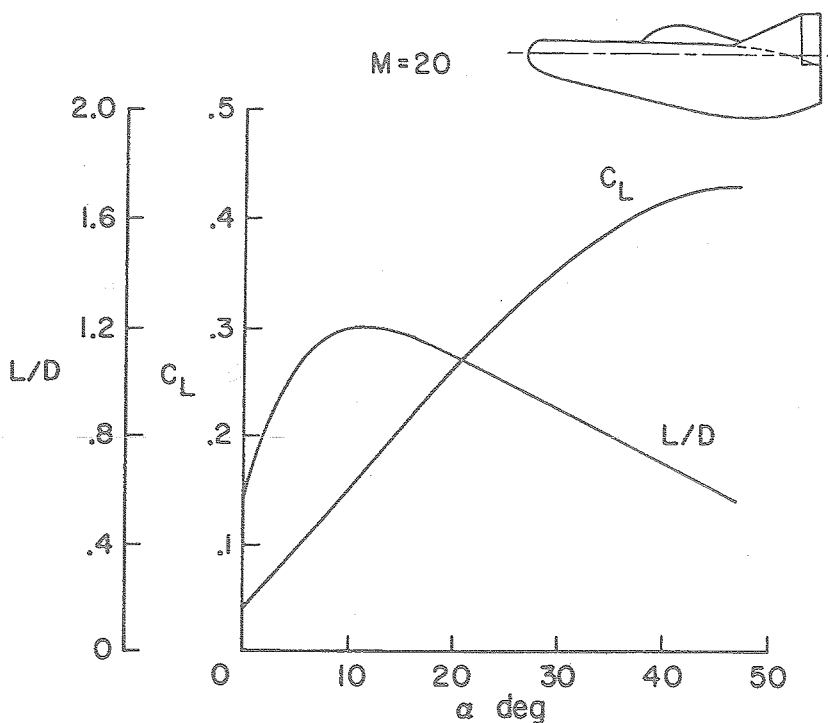
$$\alpha_{L/D\max} \approx C_{D0}^{1/3} = 0.034^{1/3} = 18.56 \text{ deg}$$

$$C_{LL/D\max} \approx C_{L0} C_{D0}^{2/3} = 1.83 \times 0.034^{2/3} = 0.192$$

$$C_{DL/D\max} \approx (1 + C_{DL}) C_{D0} = (1 + 1.83) \times 0.034 = 0.096$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} \approx \frac{C_{L0}}{(1 + C_{L0})} \frac{1}{C_{D0}^{1/3}} = \frac{1.83}{(1 + 1.83) \times 0.034^{1/3}} \approx 2.0$$

揚力体(リフティングボデー) M=20 の例



5) カプセルタイプ

カプセルタイプのように迎角 α が非常に大きい場合には(2)式から

$$\frac{F_N}{m} = \frac{C_N A \rho V^2}{m} \sin^2 \alpha \approx \frac{C_N A \rho V^2}{m} \frac{1}{2}$$

これより揚力加速度, 抗力加速度は次のように近似でき

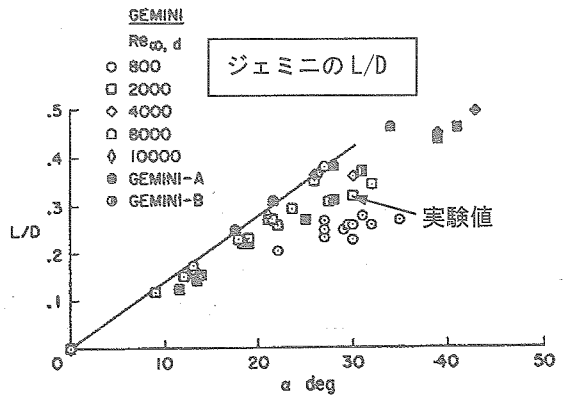
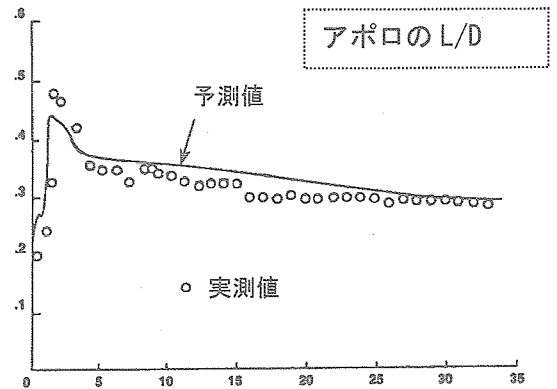
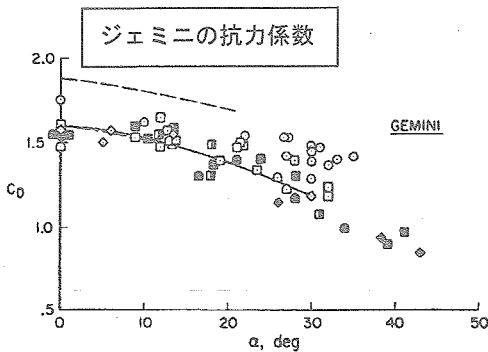
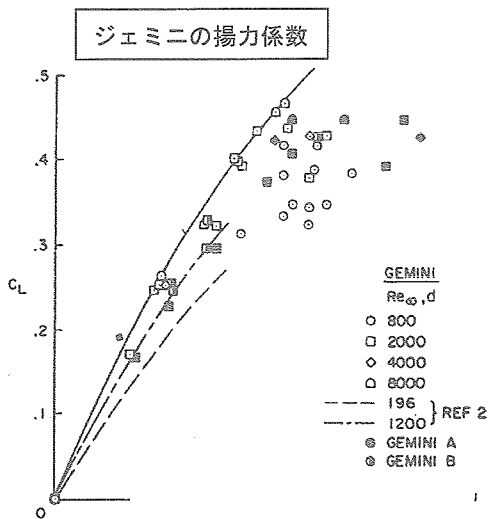
$$\frac{L}{m} = \frac{C_N A \rho V^2}{m} \cos \alpha \equiv \frac{C_L A \rho V^2}{m} \frac{1}{2}$$

$$\frac{D}{m} \approx \frac{C_N A \rho V^2}{m} \sin \alpha \equiv \frac{C_D A \rho V^2}{m} \frac{1}{2}$$

揚力係数, 抗力係数は次のようにシンプルな形で表される。

$$C_L = C_N \cos \alpha$$

$$C_D = C_N \sin \alpha$$



抗力係数 C_D の速度 (マッハ数) 依存性

弾道飛行において抗力係数 C_D は一定, 従って弾道係数 $\Delta = m/C_D A$ は一定として解析が行われる。しかし一般には抗力係数 C_D は迎角 α , レイノルズ数 R_e , マッハ数 M の関数として $C_D = C_D(\alpha, R_e, M)$ で表される。球形状, あるいは軸対称形状では $C_D \approx C_D(R_e, M)$ となる。ここでは $C_D \approx C_D(M)$ と仮定して速度 (マッハ数) 依存性について記す。

Frank J. Barbera (1981) は鈍頭コーン形状, 半頂角

$\theta_c = 6.7^\circ$, 鈍頭比 $R_n/R_B = 0.226$ の実験結果

(Moretti, G. and Bleich, G., 1968) から鈍頭コ

ーン形状 $\theta_c = 7^\circ$, $R_n/R_B = 0.2$ の抗力係数をマッハ数の関数として表している。

(図-1 参照)

$$C_D/C_{Dhyp} = 8.1246 M^{-0.8683} \quad (M \leq 10)$$

$$C_D/C_{Dhyp} = 1.3977 M^{-0.1040} \quad (M \geq 10)$$

$$C_{Dhyp} = 0.0581$$

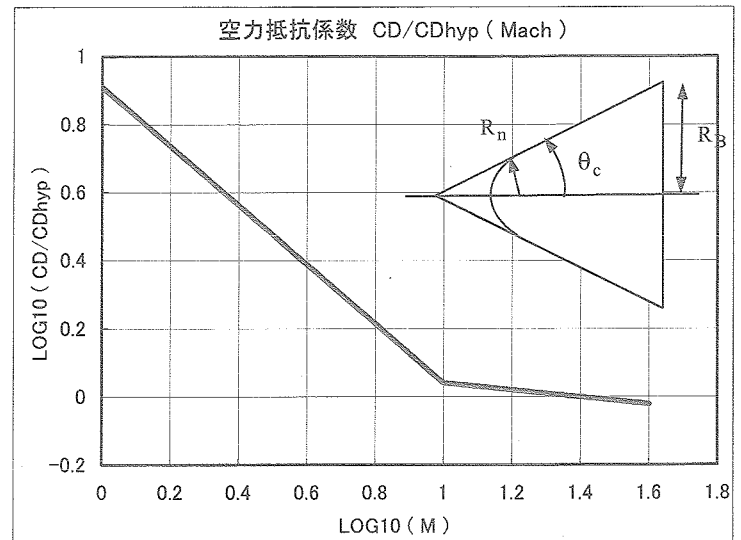


図-1 鈍頭空力抵抗係数 (マッハ数の関数)

6) 抗力ポーラ曲線

再突入宇宙機の空力係数は (13), (14) 式に示すように迎角 α を媒体変数として表される。

(13) (14) 式から迎角 α を消去して $C_D - C_L$ 曲線を描くと右図の通り。抗力ポーラ曲線と言う。揚力係数と抗力係数との関係を直接的に表す方法として抗力ポーラ曲線がある。

今揚力係数は迎え角の関数であるから, 迎え角で級数展開して

$$C_L \approx \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial^2 C_L}{\partial \alpha^2} \alpha^2 + \dots$$

ここで

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \equiv C_{L\alpha} : \text{揚力係数傾斜}$$

$$\frac{\partial^2 C_L}{\partial \alpha^2} \equiv C_{L\alpha\alpha}$$

上式で高次項を無視して 1 次項のみを取ると

$$\alpha \approx \frac{C_L}{C_{L\alpha}}$$

抗力係数に代入して

$$C_D \approx C_{D0} + \left(\frac{C_{DL}}{C_{L\alpha}} \right) C_L^3 \quad (29)$$

抗力係数 C_D は揚力係数 C_L の 3 乗に比例する。これは 1 次項で打切った場合であるがより一般的には揚力係数 C_L の n 乗で近似する

一般化抗力ポーラ曲線

$$C_D = C_{D0} + K C_L^n \quad (32)$$

これより揚抗比は次式で表される。

$$L/D = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + K C_L^n}$$

揚抗比は C_L の関数で表されたから最大値は C_L で微分して次式で表される

$$\frac{d(L/D)}{dC_L} = \frac{C_{D0} - K C_L^n (n-1)}{(C_{D0} + K C_L^n)^2} = 0$$

$$C_L^* = \left\{ \frac{C_{D0}}{K(n-1)} \right\}^{1/n}$$

$$C_D^* = \frac{n C_{D0}}{(n-1)}$$

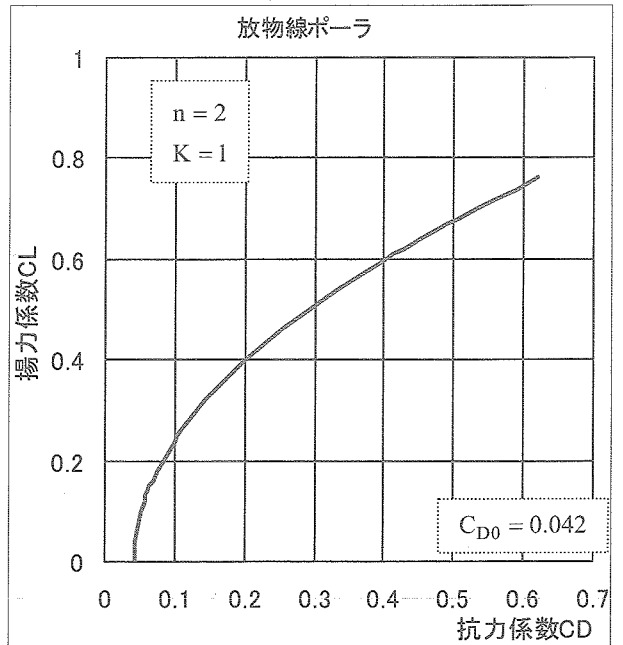
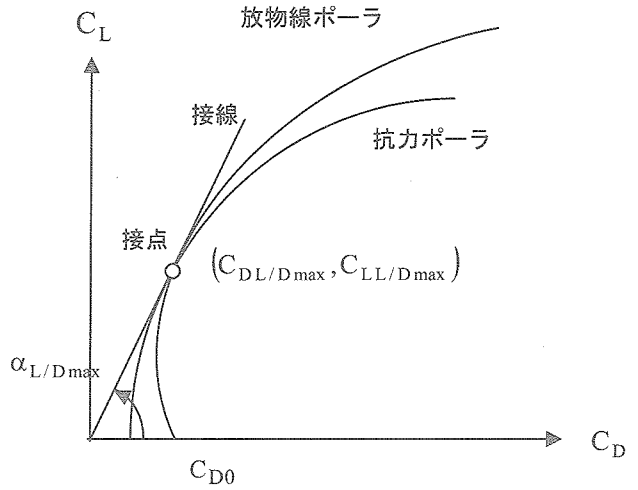
$$\left(\frac{L}{D} \right)_{\max} = \frac{1}{n K^{1/n}} \left(\frac{n-1}{C_{D0}} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

極超音速有翼体ではほぼ $n \approx 3/2$ の値をとるが再突入宇宙機の軌道解析では簡単のため $n=2$ の値がとられ、放物線ポーラと呼ばれる。

いま $n=2$ と置くと揚抗比 L/D は揚力係数 C_L の関数として次式で表される。

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + K C_L^2} \quad (n=2) \quad (33)$$

揚抗比 (L/D) が最大となる揚力係数, 抗力係数は次式で表される。



$$C_L^* = \sqrt{C_{D0}/K} \quad (26)$$

$$C_D^* = C_{D0} + K C_L^{*2} = 2C_{D0} \quad (34)$$

最大揚抗力比は次の値をとる。

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \frac{C_L^*}{C_D^*} = \frac{1}{2\sqrt{K C_{D0}}} \quad (35)$$

次に揚力係数 C_L の代わりパラメータ η を次式で定義すれば

$$\eta^n \equiv \frac{K(n-1)}{C_{D0}} C_L^n$$

揚力係数 C_L , 抗力係数 C_D はパラメータ η の関数として極めてシンプルに次式で表される

$$C_L \equiv \left\{ \frac{C_{D0}}{K(n-1)} \right\}^{1/n} \eta = C_L^* \eta$$

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_{D0} \eta^n}{n-1} = C_D^* \left(\frac{n-1+\eta^n}{n} \right)$$

$\eta=1$ のとき $C_L = C_L^*$, $C_D = C_D^*$ となる。

抗力ポーラ上の点 (C_D^*, C_L^*) を通る傾斜 A の直線は

$$C_L - C_L^* = A(C_D - C_D^*)$$

であらわされる。傾斜 A は

$A = (C_L - C_{L/D\max}) / (C_D - C_{D/D\max})$ であらわされ、原点を通るとき直線の傾斜 A は

$A = (L/D)_{\max}$ となる。

$$A = \frac{C_L^*}{C_D^*} = \left(\frac{L}{D}\right)_{\max} \quad (36)$$

以上から原点から抗力ポーラ曲線に接線を引くと、その傾きが最大揚抗比を表し、傾斜角が最大揚抗比を与える迎角となる。

$$\alpha_{L/D\max} = \tan^{-1}(L/D)_{\max} \quad (37)$$

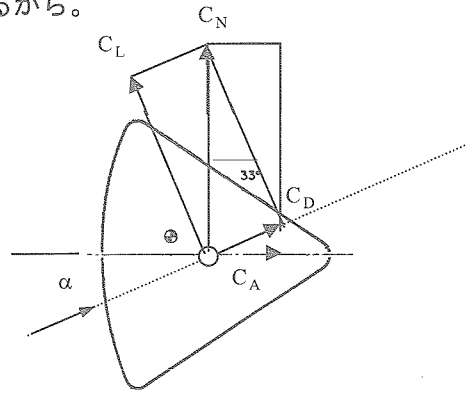
7) 軸力係数/法線力係数と抗力係数/揚力係数の関係

機体の機軸方向に働く空気力を軸力, 機軸に垂直方向に働く空気力を法線力, それぞれの空力係数を軸力係数 C_N , 法線力係数 C_A とする。また 速度軸方向に空気力を抗力, 速度軸に垂直方向に空気力を揚力とし, 空力係数を抗力係数 C_D , 揚力係数 C_L とすれば C_N, C_A と C_D, C_L との関係は迎角 α だけ回転したものであるから。

$$\begin{bmatrix} C_D \\ C_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A \\ C_N \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$C_L = -C_A \sin \alpha + C_N \cos \alpha \quad (39)$$

$$C_D = C_A \cos \alpha + C_N \sin \alpha \quad (40)$$



Yusuf A. Yoler "Dyna-Soar" Aerospace Engineering August 1961 8, 55-67

John J. Kessler, et al "Detemination of Reentry Corridor with Based on Heating"
Air Force Institute of Technology Wright-Patterson Air Force Base AD-768 377
(GCC / EE / 73-8) June 1973

David J. South M. S. Major "Real-Time Optimal Guidance with Application to Lifting
Re-Entry Vehicles "AirForce Institute of Technology
Wright-Patterson AFB Ohio, December 1972, AD-744444, DS/EE/73-2

Frank J. Barbera "Closed-Form Solution for Ballistic Vehicle Motion" J. Spacecraft
VOL. 18, NO. 1, Jan-Feb., 1981, 52-57 AIAA79-1672R

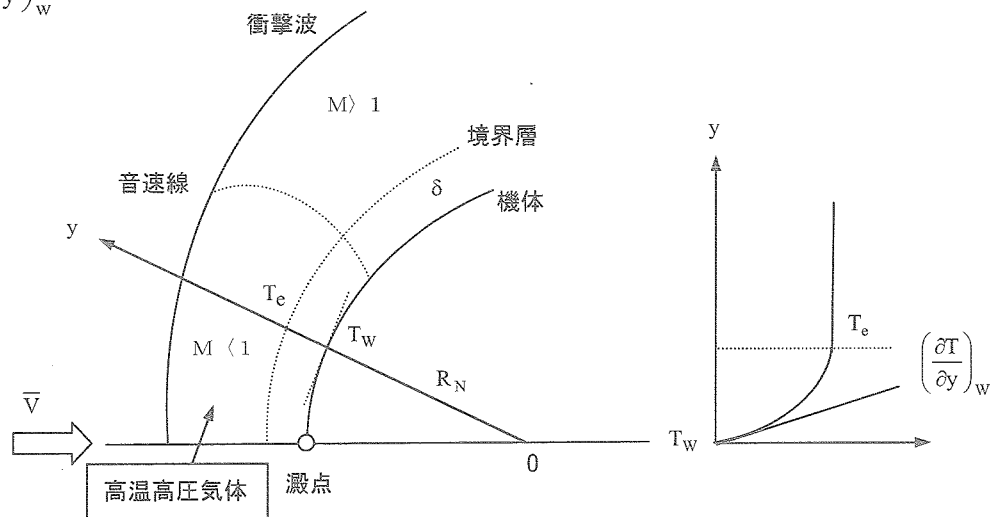
付録-5 再突入宇宙機の空力加熱率

再突入宇宙機が極超音速で飛行する時機体への平均熱伝導率(単位時間に機体に流入する熱量)は ρV^3 に比例し $\dot{Q}_w \propto \rho V^3$, 澱点熱伝導は $\rho^{1/2} V^a$ に比例し $\dot{Q}_w \propto \rho^{1/2} V^a$ となることを示す。指数 a はほぼ3に近い値であるが $a \approx 3$, 極超音速飛行では澱点近傍では高温, 高圧となり, 空気が解離, 電離現象を起こす。解離, 電離気体では指数は $a \approx 3.15 - 3.2$ の値をとる。

(I) 平均空力加熱率

再突入宇宙機が極超音速で飛行する時機体前方には衝撃波が発生し機体表面には薄い境界層が出来る。衝撃波と機体表面間の距離を Δ , 境界層の厚さを δ とすれば, Δ は δ に比べて十分大きく($\Delta \gg \delta$), 衝撃波-境界層外縁では一様流とみなしてよい。また澱点近傍では流れは亜音速($M_e < 1$)である。いま速度を V , 密度を ρ , 温度を T とし, 境界層外縁の状態量を添字 e , 壁面(機体表面)上の状態量を添字 w とすると超音速飛行に於ける(伝導)空力加熱率 \dot{Q}_w は次式で推算できる。境界層内の温度勾配 $(\partial T / \partial y)_w$ に比例し比例定数 λ_w を熱伝導係数という。

$$\dot{Q}_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \quad (1)$$



境界層内の温度を T , 気体速度を u とする。境界層内の流れを層流とし, 澱点近傍では圧力勾配は $\partial p / \partial x = 0$ と仮定すると, 流体の全エンタルピー H は気体速度に比例して次式でされる

$$H = h_w + (H_e - h_w)(u/u_e) \quad (2)$$

また全エンタルピー H は内部エネルギーと速度エネルギーの和として次式で定義される。またエンタルピー h は気体の定圧比熱を C_p とすれば $h = C_p T$ で表されるから

$$H = h + u^2/2 = C_p T + u^2/2 \quad (3)$$

(2) (3) 式から境界層内の温度 T と気体速度 u の関係は次式で表される。

$$T = T_w + \left(T_c + \frac{u_c^2}{2C_p} - T_w \right) \left(\frac{u}{u_c} \right) - \frac{u^2}{2C_p} \quad (4)$$

ここで断熱壁温 (温度勾配 $(\partial T/\partial y)_w = 0$ 時の壁温) を T_{aw} とすれば

$$T_{aw} = T_c + \frac{u_c^2}{2C_p} \quad (5)$$

すなわち境界層内の温度 T は層内の速度 u の 2 次式で表される。これより (1) 式の壁面での温度勾配は、 $u_w = 0$ を考慮すると次式のように表される。

$$(\partial T/\partial y)_w = (1/u_c)(T_{aw} - T_w)(\partial u/\partial y)_w \quad (6)$$

(1) 式に代入して熱伝導率はつぎのようになる。

$$\dot{Q}_w = \frac{\lambda_w(T_{aw} - T_w)}{u_c} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (7)$$

摩擦力和レイノルズ相似則：

機体表面の局所摩擦力は速度勾配を用いて次式で定義される。

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = C_f \frac{\rho_e u_c^2}{2} \quad (8)$$

ここで μ_w : 粘性係数 (補足 1 参照)

C_f : 局所摩擦係数

(8) 式から速度勾配は次式で表される。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{C_f \rho_e u_c^2}{2 \mu_w} \quad (9)$$

(7) 式に代入して次式を得る。

$$\dot{Q}_w = \frac{C_f \lambda_w}{2 \mu_w} (T_{aw} - T_w) \rho_e u_c = \frac{C_f}{2 P_r} C_p (T_{aw} - T_w) \rho_e u_c \quad (10)$$

$P_r = C_p \mu_w / \lambda_w$: プラントル数 (補足 1 参照)

$P_r \approx 1$ の場合 : (10) 式は

$$\dot{Q}_w = \frac{C_f}{2} C_p (T_{aw} - T_w) \rho_e u_c \quad (P_r = 1) \quad (11)$$

一方 Stanton 数 S_t を用いると熱伝導率は次式で表される。

$$\dot{Q}_w = S_t C_p (T_{aw} - T_w) \rho_e u_c \quad (12)$$

スタントン数はヌッセルト数, プラントル数, レイノルズ数を用いて次式で定義される。

$$S_t = N_u / P_r R_e \quad : \text{スタントン数 (補足 1 参照)} \quad (13)$$

N_u : ヌセルト数 (補足 1 参照)

R_e : レイノルズ数 (補足 1 参照)

(11), (12) 式を比較するとスタントン数はプラントル数 $P_r = 1$ の時

$$S_t = C_f / 2 \quad (14)$$

となる。これはプラントル数 $P_r = 1$ の圧縮性流れに対する摩擦と熱伝導との間の関係を表すレイノルズ相似則である。

プラントル数 $P_r = 1$ が厳密に成り立たない層流, あるいは乱流の場合でも上記関係式を拡張してスタントン数を次式で表す。

$$S_t = \frac{C_f}{2S} \quad (15)$$

ここで S はレイノルズ相似因数とよばれ, 実験によれば平板ではプラントル数の関数として次式で表される。

$$S = P_r^{-2/3} \quad (16)$$

$$S_t = \frac{C_f}{2 P_r^{2/3}} \text{ (平板)} \quad (17)$$

ここで層流境界層を仮定し局所摩擦係数 C_f をレイノルズ数 R_e で表すと 2 次元円柱, 3 次元軸対称機体ではスタントン数は次式で表される。

表-1 スタントン数 S_t

$S_t = 0.322 P_r^{-2/3} / \sqrt{R_e}$	層流平板 (ブラシウス)
$S_t = 0.570 P_r^{-0.6} / \sqrt{R_e}$	層流円柱
$S_t = 0.763 P_r^{-0.6} / \sqrt{R_e}$	層流軸対称

衝撃波前方の大気温度を T , 速度を V とすれば極超音速では次式で近似できる。

$$V^2 / 2C_p \gg T$$

いま $T = 200^\circ \text{K}$, $V = 6000 \text{m/sec}$, とすれば $C_p = 1005 \text{J/Kg}^\circ \text{K}$ から $V^2 / 2C_p T \approx 90$ 。

また壁温が断熱壁温に比べて小さいとすれば $T_{aw} \gg T_w$

気体の全エンタルピーを次式で定義すると

$$H = C_p T + V^2 / 2 \quad : \text{衝撃波前方の全エンタルピー} \quad (18)$$

衝撃波前後のエネルギー保存則, 質量保存則から次式が成り立つ。

$$H = H_{aw} = C_p T_{aw} \quad : \text{エネルギー保存則} \quad (19)$$

$$\rho_e u_e = \rho V \quad : \text{質量保存則} \quad (20)$$

極超音速流では(19)式の右辺 $C_P T_{aw}$ は次のように近似できる。

$$C_P T_{aw} = C_P T_e + r u_e^2 / 2 = C_P T + V^2 / 2 \approx V^2 / 2 : \text{極超音速近似} \quad (21)$$

$$\dot{Q}_w = \frac{C_f}{2P_r R_e} C_P (T_{aw} - T_w) \rho_e u_e = \frac{C_f}{4P_r R_e} \rho V^3 \quad (22)$$

上式は局所的なものであるから全面積 A_w に積分すると、単位面積あたり

$$\dot{Q} = \frac{C_F}{4} \rho V^3 \quad (23)$$

ここで

C_F : 平均摩擦係数

A_w : 機体表面積

以上から機体への平均熱伝導率は密度と速度の3乗の積に比例する。

(II) 澱点空力加熱率

以下軸対称澱点加熱率について記述する。

$$q = S_{te} \rho_e u_e (H_e - h_w) \quad (24)$$

ここでスタントン数を定義する。

$$S_{te} = 0.763 / P_r^{0.6} \sqrt{R_e} : \text{スタントン数} \quad (\text{表-1 参照})$$

スタントン数を展開していくと

$$q = \frac{0.763}{P_r^{0.6}} \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho_e u_e x}} \rho_e u_e (H_e - h_w) = \frac{0.763}{P_r^{0.6}} \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho_e u_e^2} \left(\frac{u_e}{x}\right)} \rho_e u_e (H_e - h_w)$$

$R_e = \rho_e u_e x / \mu_e$: レイノルズ数

h_w : 壁面上のエンタルピー

μ_e : 粘性係数 (Kg sec/m²)

$P_r = 0.71$: プラントル数

$R = 287.6 \text{ m}^2/\text{sec}^2 \text{ K}^\circ$: 気体定数

$C_P = \gamma R / (\gamma - 1) = 1006.6 \text{ m}^2/\text{sec}^2 \text{ K}^\circ$: 定圧比熱

$C_v = R / (\gamma - 1) = 719.0 \text{ m}^2/\text{sec}^2 \text{ K}^\circ$: 定圧比熱

$\gamma = 7/5$: 比熱比

$r \cong P_r^{1/2} (= 0.843)$: 層流 $\cong P_r^{1/3} (= 0.892)$: 乱流 : 回復係数

$\beta = (du/dx)_e \cong u_e/x : (\text{m/sec})/\text{m}$: 速度勾配 (ただし x は澱点から壁面に沿った距離 (m))

(補足 1 参照)

上記より, q は次のようになる。

$$q = \frac{0.763}{g P_r^{0.6}} \sqrt{\beta \rho_e \mu_c} (H_e - h_w) \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2 \text{sec}} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^2 \text{sec}} \quad (25)$$

粘性係数を温度の冪乗で近似し, 気体の状態方程式を用いると

$$\begin{aligned} \mu_e &= \mu_c T_e^{1/2} \quad : \text{Kg/m sec} \quad \text{粘性係数} & \mu_c &= 1.458 \times 10^{-6} \text{ Kg/m sec K}^{0.5} \\ P_e &= \rho_e R T_e \quad : \text{Kg/msec}^2 \quad \text{状態方程式} \end{aligned}$$

衝撃波前方の一様流の速度を V とすれば, 極超音速近似から温度, エンタルピー差は次のように近似できる。

$$\begin{aligned} P_e &\approx \rho_e V^2 \\ T_e &\approx r V^2 / 2 C_p = \sqrt{P_r} u_e^2 (\gamma - 1) / 2 \gamma R \quad (26) \end{aligned}$$

$$H_e - h_w \approx r V^2 / 2 \quad (27)$$

軸対称機体の曲率半径を $R_N = 1/x$ とすれば速度勾配 β は $\beta = \bar{\beta} V_e / R_N \quad : (\text{m/sec}) / \text{m}$
ここで $\bar{\beta} = 0.553 (M \rightarrow \infty)$ で近似できるから (補足 1 参照)

$$\sqrt{\beta \rho_e \mu_c} = \sqrt{\frac{\bar{\beta} V_e}{R_N} \rho_e \mu_c T_e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\bar{\beta} \mu_c \sqrt{\frac{P_r (\gamma - 1)}{2 \gamma R}} \sqrt{\rho_e u_e^2}} \quad : \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2 \text{sec}} \quad (28)$$

$$C = \sqrt{\bar{\beta} \mu_c \sqrt{\frac{P_r (\gamma - 1)}{2 \gamma R}}}$$

$$\rho_e u_e = \rho V$$

$$P_e \approx \rho_e V^2 \quad \text{から}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{0.763}{g P_r^{0.1}} \frac{1}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho_e u_e^2} \frac{r V^2}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R_N}} \frac{0.763}{0.71^{0.1}} \sqrt{0.553 \times 1.458 \times 10^{-6} \sqrt{\left(\frac{0.71^{0.5} (1.4 - 1)}{2 \times 1.4 \times 287.6}\right)} \frac{\sqrt{\rho} V^3}{2}} \frac{2.389 \times 10^{-4} \text{ Kcal}}{9.80665 \text{ m}^2 \text{sec}} \\ &= \frac{C}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}} \end{aligned}$$

以上の解析では流れは熱的に完全と仮定してしているが, 極超音速で飛行する場合, 激点近傍では強い圧縮を受け, 高温高圧となる。このため空気は解離, あるいは電離が始まる。こ

のような現象を実在気体効果と称する。実在気体効果を考慮すると速度の指数 3 は若干異なった値となる。次に解離、電離を含む激点近傍の加熱率について記述する。

(Ⅲ) 解離/電離を含む激点空力加熱率

1) 解離を含む空力加熱率

J. A. Fay, F. R. Riddell 文献 13) は解離を含む境界層の解析の結果、次の加熱率を得ている。

$$Q = \frac{0.76}{\sqrt{P_r}} \left[(\rho\mu)_w^{0.1} (\rho\mu)_s^{0.4} \left\{ 1 + \left(L^{0.5} - 1 \right) \frac{h_D}{H_s} \right\} \right] (H_s - h_w) \sqrt{\left(\frac{du}{dx} \right)_s} \quad \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{sec}} \quad (29)$$

但し $L = \rho C_p D / \lambda$: ルイス数

h_D : 解離エネルギー(気体特性値)

解離した分子-原子混合系では気体粒子の拡散の影響が現れ、これをルイス数 L で表す。 $L=1$ の時解離の影響が無視される。

R. W. Detra, H. Hidalgo (1961) は速度勾配 (du/dx) をニュートン流速勾配、粘性係数 μ についてサザランドの公式、またルイス数を $L=1.4$ 、プラントル数を $P_r=1$ と置いて次の簡易加熱率推算式を得ている。 $H_s \gg h_w, h_{w300}$ ここで h_{w300} は温度 $T_w = 300^\circ\text{K}$ での値を表す。

$$Q = \frac{865}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{10^4} \right)^{3.15} \left(\frac{H_s - h_w}{H_s - h_{w300}} \right) \approx \frac{865}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{10^4} \right)^{3.15} \quad \text{Btu} / \text{ft}^2 \text{sec}$$

加熱率の単位を $\text{Btu} / \text{ft}^2 \text{sec}$ から $\text{Kcal} / \text{m}^2 \text{sec}$ に変換し密度、速度を海面上密度、周回速度で無次元化すると

$$Q = \frac{865 \times 2.7125}{\sqrt{R_N / 0.3048}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.15} \left(\frac{V_C}{0.3048 \times 10^4} \right)^{3.15} = \frac{26250}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.15} \quad \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}} \quad (30)$$

R_N : ノーズ半径 m

2) 電離を含む空力加熱率

J. A. Fay, N. H. Kemp 文献 16) は電離を含む空力加熱率の簡易式として次式を導出している。

$$\dot{Q}_w = \left(\frac{N_u}{\sqrt{R_c}} \right)' \frac{\sqrt{\beta \rho_w \mu_w'}}{P_r'} (H_e - h_w) \quad (31)$$

ここで ()' は温度 $T_w = 300^\circ\text{K}$ での値を表す。

$T_w = 300^\circ\text{K}$ においてプラントル数、粘性係数はほぼ次の値をとる。

$$P_r' \approx 0.713$$

$$\mu'_w \approx 0.179 \times 10^{-3} \text{ g/cm sec} \quad \approx 1.825 \times 10^{-6} \text{ Kg sec/m}^2$$

次に速度勾配, エンタルピ²-について次のように近似する。

$$\beta \approx \sqrt{2P_s / \rho_s} / R_N \quad : \text{ニュートン流近似速度勾配}$$

$$H_e - h_w \approx V^2 / 2 \quad : \text{極超音速近似エンタルピ}$$

次に状態方程式 $P_w = \rho_w R T_w$ を用いると

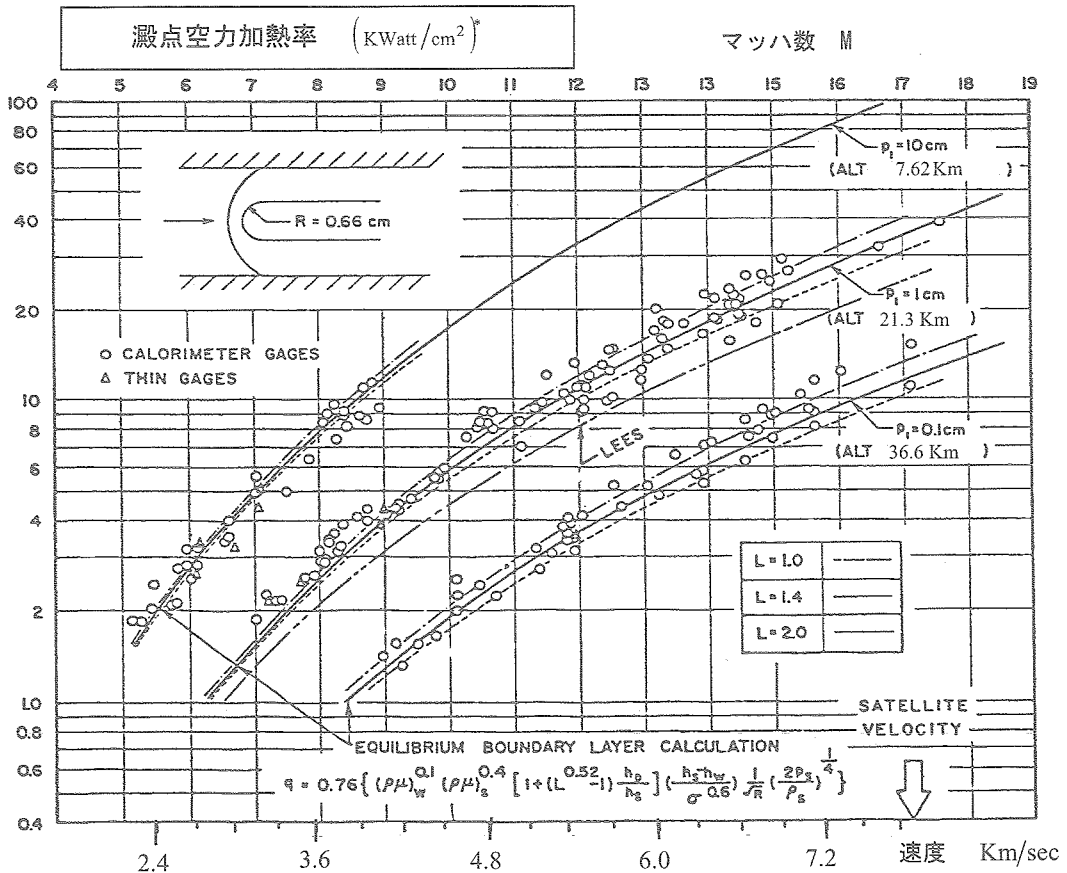
$$\sqrt{\beta \rho_w \mu'_w} = \frac{1}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{2P_s}{\rho_s} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{\mu'_w}{RT_w} P_w} \quad (32)$$

$$\left(N_u / \sqrt{R_c} \right)' = 0.47 \quad 3.05 \text{ Km/sec} < V < 7.32 \text{ Km/sec} \quad (33)$$

$$= 0.47 (V/24)^{-N} \quad 7.32 \text{ Km/sec} < V \quad (34)$$

$$\text{但し } N = 0.83 - 0.11(\log_{10} P_s) - 0.02(\log_{10} P_s)^2$$

文献 13) から実在気体効果を含む澱点加熱率の解析結果 ((29) 式 J. A. Fay, F. R. Riddell) と衝撃波管等による実験結果を比較したものを下図に示す。



注) * 1 KWatt/cm² = 2.389 × 10³ Kcal/m² sec

(IV) 輻射平衡温度

空力輻射加熱率 \dot{Q}_R は輻射温度を T_w (°K) とすれば

$$\dot{Q}_R = \varepsilon \sigma T_w^4 \quad (35)$$

$$\varepsilon \sigma = 4.6088 \times 10^{-8} \quad \text{Watt/m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^{1/4}$$

で与えられる。 ε は輻射率, σ はステファンボルツマン定数である。気体のトータルエンタルピを H , 気体表面でのエンタルピを h_w とすれば各エンタルピは次式で表される。

$$H = C_p T + r V^2 / 2 \quad r \cong P_r^{1/2} \text{ (層流) : 回復係数}$$

$$h_w = C_p T_w$$

伝導加熱率 \dot{Q}_w のうち機体表面から外部に輻射放出される加熱率の割合は $\dot{Q}_w (1 - h_w / I_0)$ であるから

$$\varepsilon \sigma T_w^4 = \dot{Q}_w (1 - h_w / H) \quad (36)$$

前述のように空力伝導加熱率 \dot{Q}_w は解離, 電離の影響を含めていろいろな形で表される。いま R. W. Detra, H. Hidalgo の解離を含む推算式をもちると

$$\varepsilon \sigma T_w^4 = \left(1.63 \times 10^{-4} / \sqrt{R_N} \right) \sqrt{\rho} V^{3.15} \left\{ 1 - \frac{T_w}{T + \sqrt{P_r} V^2 / 2 C_p} \right\} \quad (37)$$

宇宙機の形状パラメータ R_N (ノーズ半径) 速度 V , 大気密度 ρ , 温度 T が与えられると, 上式は T_w に関する 4 次式となる。これから繰返演算により輻射平衡温度 T_w (°K) を求めることが出来る。また気体表面でのエンタルピ h_w がトータルエンタルピ H に比べて無視できる場合には輻射平衡温度は直接次式で得られる。

$$T_w \approx \left(\frac{\dot{Q}_w}{\varepsilon \sigma} \right)^{1/4} = \left\{ \frac{\left(1.63 \times 10^{-4} / \sqrt{R_N} \right) \sqrt{\rho} V^{3.15}}{\varepsilon \sigma} \right\}^{1/4} \quad (H \gg h_w \text{ のとき}) \quad (38)$$

本章の参考文献

関連文献の結果を単位をそろえて次の形で整理した。

$$Q = \frac{C}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

ただし

$$\rho_{SL} = 1.225 \text{ Kg/m}^3 : \text{海面上密度}$$

$$V_C = \sqrt{gr} = \sqrt{9.81 \times 6378000} = 7910 \text{ m/sec} : \text{周回円速度}$$

単位変換定数は

$$1 \text{ Btu/ft}^2 \text{ sec} = 0.2520 / 0.3048^2 = 2.7125 \text{ Kcal/m}^2 \text{ sec}$$

$$1 \text{ ft-lb/ft}^2 \text{ sec} = 1.285 \times 10^{-3} \text{ Btu/ft}^2 = 1.285 \times 10^{-3} \times 2.7125 = 3.4856 \times 10^{-3} \text{ Kcal/m}^2 \text{ sec}$$

$$1 \text{ slug/ft}^3 = 521.219 \text{ Kg/m}^3$$

$$1 \text{ Watt/m}^2 = 2.389 \times 10^{-4} \text{ Kcal/m}^2 \text{ sec}$$

を用いる。

1) R. C. Wingrove "An Analysis Minimum Heat Trajectory for Entry at Hypersonic Speeds" J. Spacecraft VOL. 4, NO. 8, August, 1967

$$Q = \frac{1.825 \times 10^{-4}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^3 = \frac{1.825 \times 10^{-4} \sqrt{\rho_{SL}} V_C^3}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \text{ Watt/m}^2$$

$$Q = \frac{1.825 \times 10^{-4} \times 2.389 \times 10^{-4} \sqrt{1.225} \times (9.81 \times 6378000)^{3/2}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3$$

$$= \frac{23882}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

2) Marvin, J. G. and Deiwert, G. S. "Convective Heat Transfer in Planetary Gases" NASA TR R-224, July, 1965 *)

$$Q = \frac{1.35 \times 10^{-4}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^{3.04} (1 - g_w) \approx \frac{1.35 \times 10^{-4}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^{3.04} \text{ Watt/m}^2$$

$$Q = \frac{1.35 \times 10^{-4} \times 2.389 \times 10^{-4} \sqrt{1.225} \times (\sqrt{9.81 \times 6378000})^{3.04}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.04} \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}$$

$$= \frac{25300}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.04} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

3) D. R. Chapman "An Approximate Analytical Method for Studying Entry into Planetary Atmospheres" NASA TR R-11, 1959

$$\cos \gamma \approx 1$$

$$Q = \frac{C'}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C \cos \gamma} \right)^m \approx \frac{C'}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^m \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{sec}}$$

$$Q = \frac{C}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^m \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

$$C = C' \times 2.7125$$

$$m = 3.0 \quad C = 25458 \text{ Kcal/m}^{1.5} \text{sec} \quad \text{Chapman (1959)}$$

$$m = 3.1 \quad C = 25159 \text{ Kcal/m}^{1.5} \text{sec} \quad \text{Rominng (1956) Enthalpy Theory}$$

$$m = 3.15 \quad C = 26357 \text{ Kcal/m}^{1.5} \text{sec} \quad \text{Detra, Kemp, Riddell (1957) AVCO Shock Tube Results}$$

$$m = 3.22 \quad C = 29651 \text{ Kcal/m}^{1.5} \text{sec} \quad \text{Lees (1956) Lees Theory}$$

4) N. H. Kemp, F. R. Riddell "Heat Transfer to Satellite Vehicles Re-entering the Atmosphere" Jet Propulsion February, 1957 132-137

$$h_{sw}/h_{SL} < 1$$

$$Q = \frac{20800}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{26000} \right)^{3.25} \left(1 - \frac{h_{sw}}{h_{SL}} \right) = \frac{20800}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{26000} \right)^{3.25} \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{sec}}$$

$$Q = \frac{20800 \times 2.7125}{\sqrt{R_N/0.3048}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.25} \left(\frac{V_C}{26000 \times 0.3048} \right)^{3.25}$$

$$= \frac{30960}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.25} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

5) N. F. Krasnov, Deane N. Morris "Aerodynamics of Bodies of Revolution" American Elsevier Publishing Company, Inc. New York 1970

$$Q = \frac{31500}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{7930} \right)^{3.25} \left(1 - \frac{h_w}{h_r} \right) = \frac{31500}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.25} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

$$Q = \frac{31500}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{V_C}{7930} \right)^{3.25} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.25}$$

$$= \frac{31243}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.25} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

6) Detra, R. W., Kemp, N. R., and Riddell, F. R., "Addendum to Heat Transfer to Satellite Vehicles Re-Entering the Atmosphere" Jet Propulsion Vol. 27, No. 12, December 1957 1256-1257

上式をショックチューブの実験結果と照らして修正したものとして

$$H_s \gg h_w, h_{w300}$$

$$Q = \frac{17600}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{26000} \right)^{3.15} \left(\frac{H_s - h_w}{H_s - h_{w300}} \right) \approx \frac{17600}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{26000} \right)^{3.15} \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{sec}}$$

$$Q = \frac{17600 \times 2.7125}{\sqrt{R_N/0.3048}} \left(\frac{V_C}{26000 \times 0.3048} \right)^{3.15} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.15}$$

$$= \frac{26202}{\sqrt{R_N}} \left(\frac{\rho}{\rho_{SL}} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.15} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

7) H. Julian Allen and Alfred J. Eggers, Jr., "A Study of the Motion and Aerodynamic Heating of Missiles Entering the Earth's Atmosphere at High Supersonic Speeds" NACA TN 4047 October 1957

$$Q = \frac{6.8 \times 10^{-6}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^3 = \frac{6.8 \times 10^{-6} \sqrt{\rho_{SL}} V_C^3}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \text{ ft-lb/ft}^2 \text{ sec}$$

$$Q = \frac{6.8 \times 10^{-6} \times 3.4856 \times 10^{-3} \times \sqrt{1.225/521.219} \left(\sqrt{9.81 \times 6378000} / 0.3048 \right)^3}{\sqrt{R_N/0.3048}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

$$= \frac{11088}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}} \quad (\mu \propto \sqrt{T} \text{ を仮定})$$

$$Q = \frac{1.1 \times 10^{-7}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^{3.5} = \frac{1.1 \times 10^{-7} \sqrt{\rho_{SL}} V_C^3}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.5} \text{ ft-lb/ft}^2 \text{ sec}$$

$$Q = \frac{1.1 \times 10^{-7} \times 3.4856 \times 10^{-3} \times \sqrt{1.225/521.219} \times \left(\sqrt{9.81 \times 6378000} / 0.3048 \right)^{3.5}}{\sqrt{R_N/0.3048}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.5} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

$$= \frac{28894}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.5} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}} \quad (\mu \propto T \text{ を仮定})$$

8) P. J. Bobbit "Performance and Dynamics of Aerospace of Vehicles 4. Problems of Atmospheric Entry" NASA SP-258, 1971

$$Q = \frac{15.25 \times 10^{-6}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^3 = \frac{15.25 \times 10^{-6} \sqrt{\rho_{SL}} V_C^3}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \text{ ft} \cdot \text{lb} / \text{ft}^2 \text{ sec}$$

$$Q = \frac{15.25 \times 10^{-6} \times 3.4856 \times 10^{-3} \sqrt{1.225/521.219} \times (\sqrt{9.81 \times 6378000 / 0.3048})^3}{\sqrt{R_N / 0.3048}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{ sec}}$$

$$= \frac{24866}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{ sec}}$$

9) Crawford, D. H. and McCauley, W. D. "Investigation of a Hemisphere-Cylinder in the Langley 11 Hypersonic Tunnel at Mach Number 6.8" NACA Rep. 1323, TN-3706, 1957 *)

$$Q = \frac{1.03 \times 10^{-5}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^3 = \frac{1.03 \times 10^{-5} \sqrt{\rho_{SL}} V_C^3}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \text{ ft} \cdot \text{lb} / \text{ft}^2 \text{ sec}$$

$$Q = \frac{1.03 \times 10^{-5} \times 3.4856 \times 10^{-3} \sqrt{1.225/521.219} \times (\sqrt{9.81 \times 6378000 / 0.3048})^3}{\sqrt{R_N / 0.3048}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{ sec}}$$

$$= \frac{16794}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{ sec}}$$

10) Roger W. Luidens "Flight-Path Characteristics for Decelerating from Supercircular Speed" NASA TN D-1091 December 1961

$$Q = \frac{15.5 \times 10^{-9}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^3 \left(1 - \frac{h_w}{h_{SL}} \right) \approx \frac{15.5 \times 10^{-9} \sqrt{\rho_{SL}} V_C^3}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{ sec}}$$

$$Q = \frac{15.5 \times 10^{-9} \times 2.7125 \sqrt{1.225/521.219} \times (\sqrt{9.81 \times 6378000 / 0.3048})^3}{\sqrt{R_N / 0.3048}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3$$

$$= \frac{19668}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{ sec}}$$

11) D. R. Chapman "An Analysis of the Corridor and Guidance Requirements for Supercircular Entry into Planetary Atmosphere" NASA TR R-55

$$Q = \frac{2.2 \times 10^{-8}}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho} V^3 = \frac{2.2 \times 10^{-8} \sqrt{\rho_{SL}} V_C^3}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{ sec}}$$

$$Q = \frac{2.2 \times 10^{-8} \times 2.7125 \sqrt{1.225/521.219} \times \left(\sqrt{9.81 \times 6378000 / 0.3048} \right)^3 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3}{\sqrt{R_N / 0.3048}}$$

$$= \frac{27915}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

12) M. Sibilkin "Heat Transfer Near the Forward Stagnation Point of a Body of Revolution" Journal of the Aerospace Sciences, August 1952 *)

$$Q = \frac{800}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{10000} \right)^3 \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{sec}} \quad \text{--- cold wall heating rate}$$

$$Q = \frac{800 \times 2.7125}{\sqrt{R_N / 0.3048}} \times \left(\frac{\sqrt{9.81 \times 6378000 / 0.3048}}{10000} \right)^3 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3$$

$$= \frac{37927}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^3 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

13) J.A. Fay, F.R. Riddell "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air" J. Aeronautical Science VOL. 25, NO. 2, 1958, 73

$$Q = \frac{0.76}{\sqrt{P_r}} \left[(\rho\mu)_w^{0.1} (\rho\mu)_s^{0.4} \left\{ 1 + (L^{0.5} - 1) \frac{h_D}{H_s} \right\} \right] (H_s - h_w) \sqrt{\left(\frac{du}{ds} \right)_s} \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{sec}}$$

14) N.H. Kemp, R.H. Rose, R.W. Detra "Laminar Heat Transfer Around Bodies in Dissociated Air" Journal of the Aerospace Science July, 1959 421-430

15) R.W. Detra, H. Hidalgo "Generalized Heat Transfer Formula and Graphs for Nose Cone Re-Entry Atmosphere" ARS Journal March 1961 318-321

$$Q = \frac{865}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{10000} \right)^{3.15} \frac{h_s - h_w}{h_s - h_{w300K}} \approx \frac{865}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{10000} \right)^{3.15} \text{Btu/ft}^2 \text{sec}$$

$$Q = \frac{865 \times 2.7125}{\sqrt{R_N / 0.3048}} \left(\frac{V_C}{0.3048 \times 10000} \right)^{3.15} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.15}$$

$$= \frac{26250}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.15} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

16) J.A. Fay, N.H. Kemp "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in a Partially Ionized Diatomic Gas" AIAA Journal VOL. 1, NO. 12, December 1963 2741-2751

17) H. Hoshizaki "Heat Transfer in Planetary Atmospheres at Super-Satellite Speeds"

ARS Journal October 1962 1544-1552

$$\beta R/V = (dV/dx)_e \approx 0.553 (M_\infty \rightarrow \infty)$$

$$h_w/h_e \leq 1$$

$$Q = \frac{2.59 \times 10^4}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho \beta R}{V}} \left(\frac{V}{10000} \right)^{3.19} \left(1 - \frac{h_w}{h_e} \right) \approx \frac{2.59 \times 10^4}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\rho_{SL} \left(\frac{dV}{dx} \right)_e} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}} \left(\frac{V}{10000} \right)^{3.19}}$$

$$Q = \frac{2.59 \times 10^4 \times 2.7125 \times \sqrt{(1.225/521.219) \times 0.553}}{\sqrt{R_N / 0.3048}} \left(\frac{V_C}{10000 \times 0.3048} \right)^{3.19} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.19}}$$

$$= \frac{29294}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.19}} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

18) S. J. Fenster "Stagnation-Point Heat Transfer for New Binary Air Model Including Dissociation and Ionization" AIAA Journal VOL. 3, NO. 12, December 1965 2189-2196

19) L. L. Perini "Compilation and Correlation of Stagnation Convective Heat Rates on Spherical Bodies" J. Spacecraft March 1975, 189-190

実験結果の統計処理

$$Q = 637.4 \sqrt{\frac{P_s}{R_N}} \left(\frac{V}{26000} \right)^{2.124} \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{sec}}$$

$$P_s = \rho V^2 \frac{N}{\text{m}^2} = 9.869 \times 10^{-6} \rho_{SL} V_C^2 \left(\frac{\rho}{\rho_C} \right) \left(\frac{V}{V_C} \right)^2 \text{ atm}$$

$$Q = 637.4 \times 2.7125 \sqrt{\frac{9.869 \times 10^{-6} \rho_{SL} V_C^2}{R_N / 0.3048}} \left(\frac{V_C}{26000 \times 0.3048} \right)^{2.124} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.124}}$$

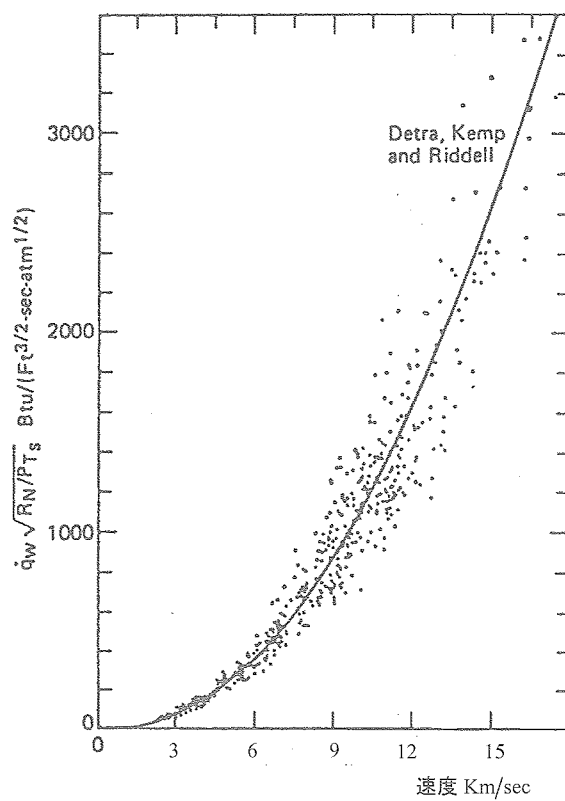
$$= \frac{26149}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.124}} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$

20) Detra, Kemp, and Riddell

$$Q = 638.8 \sqrt{\frac{P_s}{R_N}} \left(\frac{V}{26000} \right)^{2.15} \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \text{sec}}$$

$$Q = 638.8 \times 2.7125 \sqrt{\frac{9.869 \times 10^{-6} \rho_{SL} V_C^2}{R_N / 0.3048}} \left(\frac{V_C}{26000 \times 0.3048} \right)^{2.15} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.15}}$$

$$= \frac{26205}{\sqrt{R_N}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}} \left(\frac{V}{V_C} \right)^{3.15}} \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{sec}}$$



21) Roming Mary F. "Stagnation Point Heat Transfer for Hypersonic Flow"
Jet Propulsion Vol. 26, No. 12, December 1956

22) Lees, Lester "Laminar Heat Transfer Over Blunt-Nosed Bodies at Hypersonic Flight"
Jet Propulsion, Vol. 26, No. 4, April 1956

(補足 1)

1) プラントル数 P_r

プラントル数 P_r は気体の粘性によるせん断仕事と熱伝導との比と定義され、次式で表される。

$$P_r = \frac{\text{せん断仕事}}{\text{熱伝導}} = \frac{\mu V^2 / L^2}{\lambda T / L^2} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

ここで

L : 代表長 m

V : 気体の流速 m/sec $V^2 \approx C_p T$ μ : 粘性係数 Kgsec/m² λ : 熱伝導係数 Kg/sec °K C_p : 定積比熱 m²/sec² °K

気体の熱伝導率と粘性係数の比は一般に次式で表される。

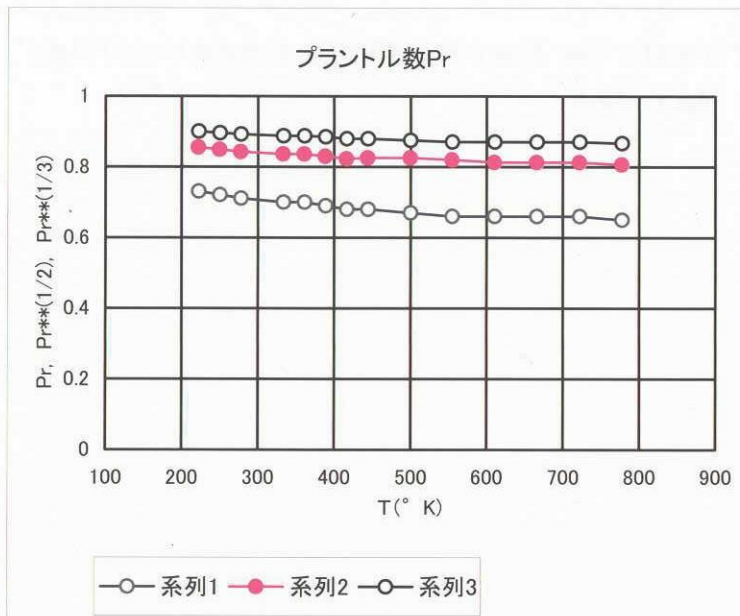
$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{9\gamma - 5}{4\gamma} C_p$$

 γ 気体の比熱比 = C_p / C_v

酸素、窒素等の 2 原子分子からなる空気の場合には $\gamma = 7/5 = 1.4$ で表されるから

$$P_r = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5} \approx 0.7368$$

温度の上昇に伴って徐々に減少し高温ではほぼ $\rightarrow 0.65$ に漸近する。プラントル数の温度依存性を図-1 に示す。



2) 熱伝導係数 λ

気体分子運動論によると気体の熱伝導係数 λ は次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{25\pi}{32} \left(\frac{m\kappa T}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{3\kappa}{2m} \right) \frac{1}{\pi d^2} \quad \text{Kg/sec}^\circ\text{K}$$

m : 気体質量

d : 気体粒子の直径

κ : ボルツマン定数 = $1.38066 \text{ Kg m}^2 / \text{sec}^2 \text{ }^\circ\text{K}$

これより気体の熱伝導係数 λ は温度の $1/2$ 乗に比例する。

$$\lambda \propto T^{0.5}$$

実験結果と最もよく一致する式として温度のべき乗で表す。

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\text{ref}}} = \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^m$$

$T_{\text{ref}} = 261 \text{ }^\circ\text{K}$ のとき $\lambda_{\text{ref}} = 426.8 \times 5.53 \times 10^{-6} \text{ Kg/sec}^\circ\text{K}$

また指数は $m=0.85$ とすると

$$\lambda = 2.360 \times 10^{-3} \left(\frac{T}{261} \right)^{0.85} \quad \text{Kg/sec}^\circ\text{K}$$

3) 粘性係数 μ

気体分子運動論によると気体の粘性係数 μ は次式で与えられる。

$$\mu = \frac{5\pi}{16} \left(\frac{m\kappa T}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2} \quad \text{Kgsec/m}^2$$

これより熱伝導係数と同様に温度の $1/2$ 乗に比例する。

$$\mu \propto T^{0.5}$$

実験的には指数 0.5 の代わりに n とおいて次式で表す。

$$\mu \propto T^n$$

ここで $n=0.76$

気体粒子が球でその直径 d が $(1+S/T)^{1/2}$ に比例するとしてもとめた結果は

$$\mu \propto \frac{T^{3/2}}{T+S}$$

$S = 110.4 \text{ } ^\circ\text{K}$: 定数

となりサザランド (Shutherland) の式となる。

サザランドの式は $T = T_{\text{ref}}$ で $\mu = \mu_{\text{ref}}$ とおけば

$$\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}} = \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \left(\frac{T_{\text{ref}} + S}{T + S} \right) = \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \left(\frac{1 + S/T_{\text{ref}}}{T/T_{\text{ref}} + S/T_{\text{ref}}} \right)$$

高温 $T \gg T_{\text{ref}}$ では前述のように温度の $1/2$ 乗に比例する。

$$\mu \approx \left(1 + \frac{S}{T_{\text{ref}}} \right) \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{0.5}$$

実験結果も含めて粘性係数の幾かの近似式を示す。

$$\mu/\mu_{\text{ref}} = T/T_{\text{ref}} \quad \text{: 直線近似}$$

$$\mu/\mu_{\text{ref}} = (T/T_{\text{ref}})^{0.5}$$

$$\mu/\mu_{\text{ref}} = (T/T_{\text{ref}})^n \quad n = 0.76 \quad \text{: 指数近似}$$

$$\mu/\mu_{\text{ref}} = \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{1.5} \left(\frac{T_{\text{ref}} + S}{T + S} \right) \quad T_{\text{ref}} = 288.15^\circ\text{K} \quad S = 110.4^\circ\text{K} \quad \text{: サザランドの式}$$

$$\mu/\mu_{\text{ref}} = \sum_{j=1}^5 a_j \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{j-1} \quad \text{: 実験式}$$

$$T_{\text{ref}} = 288.15^\circ\text{K}$$

$$a_1 = 0.0225 \quad a_2 = 1.201 \quad a_3 = -0.2653 \quad a_4 = 0.004 \quad a_5 = -0.0024$$

4) レイノルズ数 R_e

レイノルズ数 R_e は機体を取り巻く気体の粘性効果を表す重要なパラメータである。レイノルズ数は気体に加わる慣性力 $\rho(V^2/L)$ と粘性力 $\mu(V/L^2)$ の比と定義され、次式で表される。

$$R_e = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho V^2/L}{\mu V/L^2} = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}$$

ここで

$$\nu : \text{動粘性係数} = \mu/\rho$$

レイノルズ数 R_e が大きい場合に気体の粘性効果が支配的であることを意味する。再突入宇宙機の空力係数はレイノルズ数をパラメータとしている。

$$C_L = C_L(\alpha, M, R_e)$$

$$C_D = C_D(\alpha, M, R_e)$$

5) クヌーセン数 K_n

クヌーセン数 K_n は気体粒子間の平均自由行路 (Mean Free Path) ℓ と機体の代表長 L との比と定義され次式で表される。

$$K_n = \ell / L$$

ここで気体分子運動論によれば平均自由行路 ℓ は気体定数 R , 温度を用いて

$$\ell = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2RT_\infty}}$$

で表されるが気体比熱比 γ , 音速 a_∞ , および動粘性係数 ν を用いると

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{1.225\sqrt{\gamma} v_\infty}{a_\infty} = 1.225\sqrt{\gamma} \left(\frac{v_\infty}{L \cdot V_\infty} \right) \left(\frac{V_\infty}{a_\infty} \right) = 1.225\sqrt{\gamma} \left(\frac{M_\infty}{Re_\infty} \right) \\ &= 1.449 \left(\frac{M_\infty}{Re_\infty} \right) \quad (\gamma = 1.4) \end{aligned}$$

すなわちクヌーセン数 K_n はマッハ数とレイノルズ数の比に比例する。

6) ルイス数 L / シュミット数 S

拡散係数 :

気体 A, B よりなる混合気体の相互拡散係数を D_{AB} とすれば D_{AB} は気体分子運動論から次式で表される。

$$D_{AB} = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi k T}{2m_{AB}} \right)^{1/2} \frac{1}{n \pi d_{AB}^2} : \text{相互拡散係数}$$

ここで m_{AB} は気体粒子の質量を m_A, m_B としたとき

$m_{AB} = m_A m_B / (m_A + m_B)$ で表される平均質量である。

気体 A, B が同一の場合には $D_{AA} = D_{AB}$ で表し, D_{AA} を自己相関係数と称する。この場合には $m_{AB} = m_A / 2 = m_B / 2$ より

$$D_{AA} = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi k T}{m_A} \right)^{1/2} \frac{1}{n \pi d_A^2}$$

シュミット数 S :

シュミット数 S は次式で定義される。

$$S = \frac{\mu}{\rho D_{AB}}$$

同一気体の場合には次の値をとる。

$$S = \frac{\mu}{\rho D_{AA}} = \frac{5}{6}$$

ただし

$$\rho = n \cdot m$$

$$\mu = \frac{5\pi}{16} \left(\frac{m \kappa T}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d^2}$$

2原子分子が解離して分子-原子の混合気体の場合には、気体粒子Aを分子、Bを原子とする。

$$\text{したがって } m_B = m_A/2$$

混合気体の粘性係数は原子Bを無視してもそれほど実験結果と相違しないから

$$\mu = \frac{5\pi}{16} \left(\frac{m_A \kappa T}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi d_A^2}$$

この場合シュミット数は

$$S = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{2}{(m_A/m_B + 1)}} \left(\frac{n \cdot m_A}{\rho} \right) \left(\frac{d_{AB}}{d_A} \right)^2$$

$m_A/m_B = 2$ $\rho = n \cdot m_A$ とおけばシュミット数はほぼ次の値をとる。

$$S = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{d_{AB}}{d_A} \right)^2 \approx 0.544$$

$$\text{ただし } d_{AB} = 3.3 \text{ \AA} \quad d_A = 3.69 \text{ \AA} \quad d_B = 0.8 \text{ \AA}$$

ルイス数L:

ルイス数Lは次式で定義される。

$$L = \frac{\rho C_P}{\lambda} D_{AB} = \frac{P_r}{S}$$

アルゴン、ヘリウム等1原子分子の場合には $P_r = 2/3$ $S = 5/6$ より

$$L = \frac{P_r}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0.8$$

また分子-原子混合気体では $P_r = 0.737$ $S = 0.544$ より

$$L = \frac{P_r}{S} = \frac{0.737}{0.544} = 1.35$$

またプラントル数として $P_r = 0.71$ またシュミット数Sの平均値として $S = 0.49$ を用いると次の値をとる。

$$L = \frac{P_r}{S} = \frac{0.71}{0.49} = 1.45$$

以上から分子-原子混合気体のルイス数 L は $L = 1.35 - 1.45$ の値をとる。

7) 速度勾配 β

①等密度近似

いま気体の粘性を無視して、気体表面の流線に沿った1次元運動方程式は

$\rho_w V_w (dV_w/dx) = -dP_w/dx$ で与えられ衝撃波層内の密度が一定と仮定すると容易に積分できて次式を得る。

$$\frac{\rho_w V_w^2}{2} = \frac{\rho_2 V_w^2}{2} = P_S - P_w$$

ここで添字 W は気体表面での値、添字 S は澱点での値、また添字 2 は衝撃波直後の値を示す。

$$V_w^2 = \frac{2(P_S - P_w)}{\rho_2}$$

圧力係数 $C_{Pw} = 2(P_w - P)/\rho V^2$ であらわすと

$$\left(\frac{V_w}{V_\infty}\right)^2 = \frac{\rho}{\rho_2} (C_{Ps} - C_{Pw})$$

となる。ニュートン流近似、あるいは修正ニュートン流近似では

$$C_{Ps} = K$$

$$C_{Pw} = K(1 - \theta^2)$$

で表され $\varepsilon \equiv \rho/\rho_2$ とおけば

$$\frac{V_w}{V_\infty} = \sqrt{K \cdot \varepsilon} \theta = \sqrt{K \cdot \varepsilon} \frac{x}{R_N}$$

ニュートン流近似では $M \rightarrow \infty$ の時 $\varepsilon = 1/6$, $K = 2$

修正ニュートン流近似 (Li & Geiger) では $M \rightarrow \infty$ の時 $\varepsilon = 1/6$, $K = 11/6$

以上から等密度近似では速度/速度勾配は次式で表される。

$$\frac{V_w}{V_\infty} = 0.55 \sim 0.58 \frac{x}{R_N}$$

②等エントロピー近似

①項では衝撃波層内の密度を一定と仮定すると速度勾配が容易に得られることを示したが、この仮定は澱点極近傍に限られることから、別の手法で求める。衝撃波層内での流れは流線

に沿って等エントロピー的と考えられるから、機体表面に沿う流線に関する一次元運動方程式は

$$\rho_w V_w (dV_w/dx) = -dP_w/dx$$

で表され、等エントロピー仮定

$$P_w/P_s = (\rho_w/\rho_s)^{1/\gamma}$$

を用いると運動方程式は

$$\frac{1}{2} \frac{dV_w^2}{dx} = -\frac{P_s}{\rho_s} \frac{d(P_w/\rho_s)^{(\gamma-1)/\gamma}}{dx}$$

上式を積分して

$$V_w^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_s}{\rho_s} \left\{ 1 - \left(\frac{P_w}{P_s} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right\}$$

激点での圧力と密度との比 P_s/ρ_s はエネルギー保存則から次のように得られる。

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_s}{\rho_s} = \frac{V_\infty^2}{2} + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_\infty}{\rho_\infty}$$

または

$$\frac{P_s}{\rho_s} = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \right) V_\infty^2$$

したがって機体表面に沿う速度 V_w/V_∞ は次のように表される。

$$\left(\frac{V_w}{V_\infty} \right)^2 = \left\{ 1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2} \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{P_w}{P_s} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right\}$$

上式の右辺はニュートン流近似

$$\frac{P_w}{P_s} = \cos^2 \theta + \left(\frac{P_\infty}{P_s} \right) \sin^2 \theta \approx 1 - \left(1 - \frac{P_\infty}{P_s} \right) \theta^2$$

を用いて次のように近似を行う。

$$\left(\frac{P_w}{P_s} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \approx \left\{ 1 - \left(1 - \frac{P_\infty}{P_s} \right) \theta^2 \right\}^{(\gamma-1)/\gamma} \approx 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(1 - \frac{P_\infty}{P_s} \right) \theta^2$$

$$\left(\frac{V_w}{V_\infty} \right)^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2} \right\} \left(1 - \frac{P_\infty}{P_s} \right) \theta^2$$

激点圧力 P_w/P_∞ は垂直衝撃波の関係式、および質量保存則、エネルギー保存則から次式で与えられ、マッハ数が大きい場合には次式で近似できる。

$$\frac{P_s}{P_\infty} = \left\{ \frac{2\gamma M_\infty^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right\} \left\{ \frac{(\gamma + 1)^2 M_\infty^2 / 2}{2\gamma M_\infty^2 - (\gamma - 1)} \right\}^{\gamma/(\gamma - 1)} \approx \gamma M_\infty^2 \frac{2}{\gamma + 1} \left\{ \frac{(\gamma + 1)^2 / 2}{2\gamma} \right\}^{\gamma/(\gamma - 1)} \approx \gamma M_\infty^2$$

これより速度 V_w/V_∞ は最終的に次のように表される。

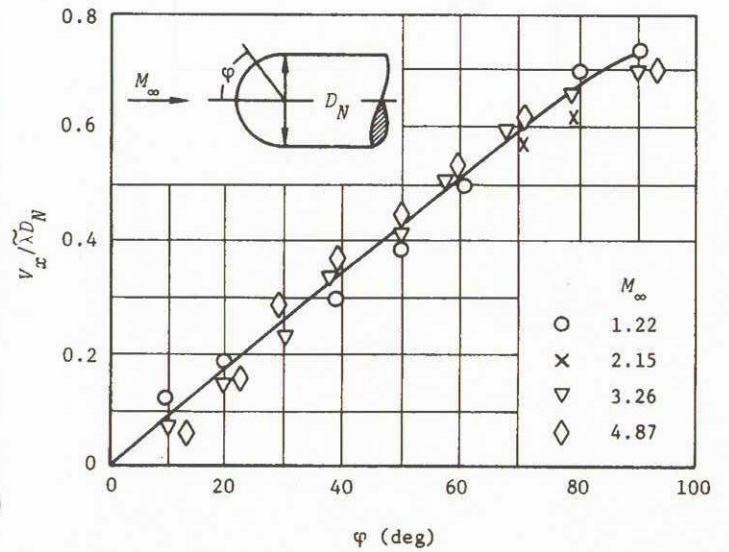
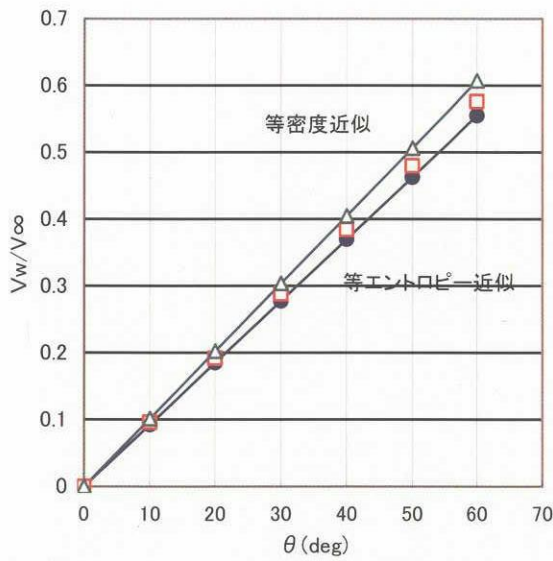
$$\frac{V_w}{V_\infty} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{2}{(\gamma - 1)M_\infty^2} \right\} \left(1 - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \right)} \quad \theta$$

$\gamma = 1.4 \quad M_\infty \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{V_w}{V_\infty} = 0.53 \frac{x}{R_N}$$

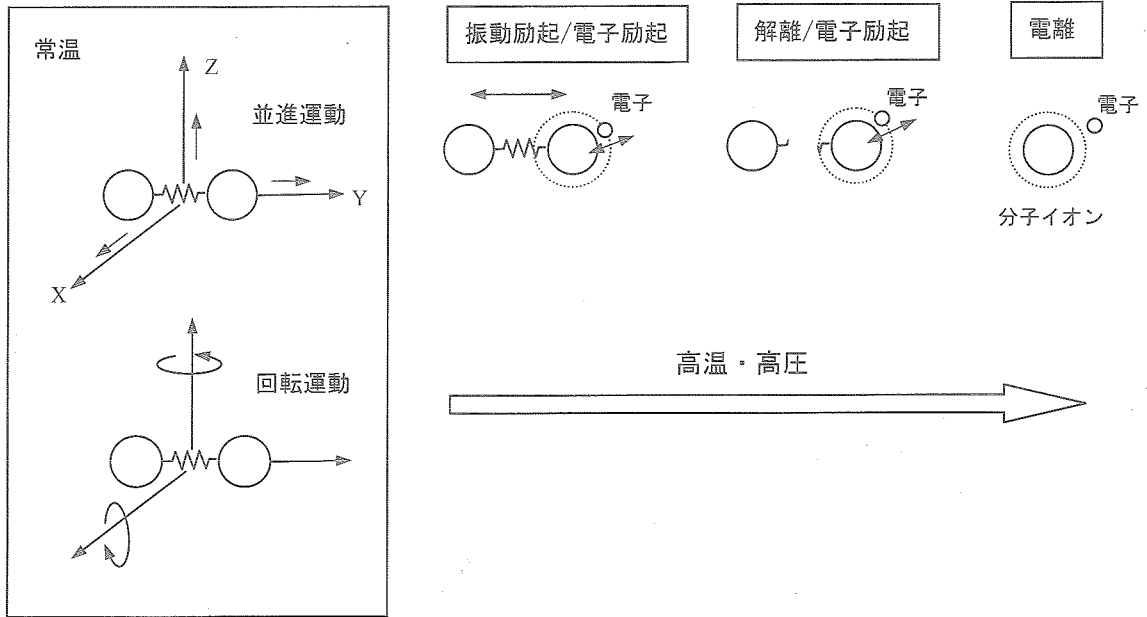
等密度近似の場合に比べて若干小さめにあらわされる。

速度勾配



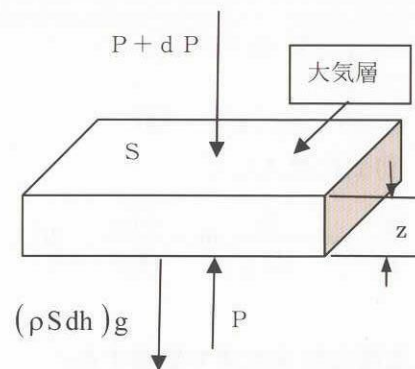
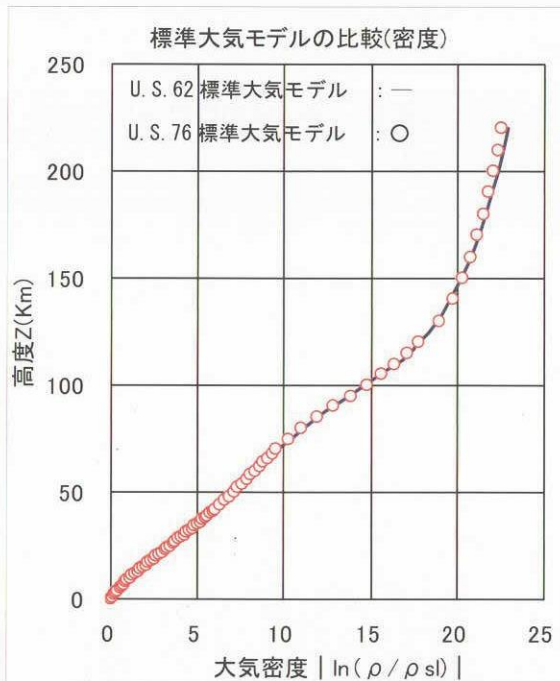
(補足 2)

実在気体効果(2原子分子)のモデル



付録-6 再突入宇宙機の大気モデル

大気圏に再突入する宇宙機に加わる空気力は密度と速度の 2 乗に比例する。従って空気力を推定するには密度の情報が必要である。大気の密度は各種大気モデルにより高度の関数としてテーブル化されているが、運動方程式を解析的に解くには密度を高度の関数として定式化しておくことが望ましい。ここでは大気密度の簡易計算法について示す。



面積 S 、高さ dz の大気層を考え大気密度を ρ として大気層に加わる力の釣り合いを考える。

1) 力の釣り合い

面積 S に働く圧力と大気層の密度 m に加わる重力の釣り合いから次式が成り立つ。

$$(P + dP)S + (\rho S dz)g = PS \quad (1)$$

$$dP = -\rho g dz \quad (2)$$

一方気体の状態方程式は

$$P = \rho \left(R^* / M \right) T \quad (3)$$

$R^* = 8.31432 \text{ joules}/^\circ\text{K mol}$: 一般化気体定数

$M_0 = 28.9644 \times 10^{-3} \text{ Kg/mol}$

$g_0 = 9.80665 \text{ m/sec}^2$

$R = R^* / M_0 = 8.31432 / 28.9644 \times 10^{-3} = 287.05 \text{ (m/sec)}^2 / ^\circ\text{K}$: 空気の気体定数

$T_M = (M_0 / M) T$: 分子温度

を用いると気体の状態方程式は

$$P = \rho \left(R^* / M_0 \right) T_M = \rho R T_M \quad (4)$$

(4) 式の数値をとって微分すれば R = 一定から

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT_M}{T_M} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT_M}{T_M} \quad (5)$$

(2) (4) 式を代入して

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P} - \frac{dT_M}{T_M} = -\frac{gdz}{RT_M} - \frac{dT_M}{T_M} \quad (6)$$

幾何学的高度 (Geometric Altitude) とジオポテンシャル高度 (Geopotential Altitude) の関係次の通り。

$$h = \int_{Z_0}^Z \frac{g}{g_0} dz \quad (7)$$

$$g_0 dh = g dz \quad (8)$$

(6) 式に代入して

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g_0}{RT_M} dh - \frac{dT_M}{T_M} \quad (9)$$

温度勾配を次式で定義する。

$$\Gamma_h(h) \equiv \frac{dT_M}{dh} \quad (10)$$

この温度勾配を代入して (9) 式は次のようになる。

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\left\{ \frac{g_0}{RT_M} + \frac{\Gamma_h(h)}{T_M} \right\} dh \quad (11)$$

2) 密度 ρ , スケール高度 $1/\beta$

(11) 式を積分して密度は次式で表される。

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\int_{h_0}^h \left\{ \frac{g_0}{RT_M} + \frac{\Gamma_h(h)}{T_M} \right\} dh$$

ここで

$$\beta(h) \equiv \frac{g_0}{RT_M} + \frac{\Gamma_h(h)}{T_M} \quad : \text{スケール高度の逆数} \quad (14)$$

と置くとこの $1/\beta$ は高度の次元をもちスケール高度と称する。これより密度は次式で表される。

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \int_{h_0}^h \beta(h) dh \quad (15)$$

CASE-1 : 等温大気モデル 温度勾配が無い場合 ($\Gamma_h = dT_M / dh = 0$ の時)

いま温度 T_w の高度に対する変化率 dT_M / dh が 0, すなわち T_M (一定) とすれば(14)式の β は一定となりこれを等温大気モデルと称する。

$$\beta = \frac{g_0}{RT_M} \quad : \text{一定} \quad (16)$$

T_M として下記の温度をとるとスケール高度 : $1/\beta$ はほぼ次のような値 (6000~8000m) をとる。

$$1/\beta = RT_M/g_0 = 8434.4 \text{ m} \quad \text{at } T_M = 288.15 \quad ^\circ\text{K}$$

$$1/\beta = RT_M/g_0 = 6341.6 \text{ m} \quad \text{at } T_M = 216.65 \quad ^\circ\text{K}$$

再突入宇宙機の解析では飛行範囲の大気密度全般によく一致するような T_M , 従ってスケール高度 $1/\beta$ を設定している。主なものを表-1 に示す。

β を用いると大気密度は次式で表される。

$$\rho = \rho_0 \exp\{-\beta(h-h_0)\} \quad (17)$$

特に海面上で $h_0 = 0$ $\rho_0 = \rho_{SL}$ と置けば簡単な指数関数で表される。

$$\rho = \rho_{SL} \exp(-\beta h) \quad (18)$$

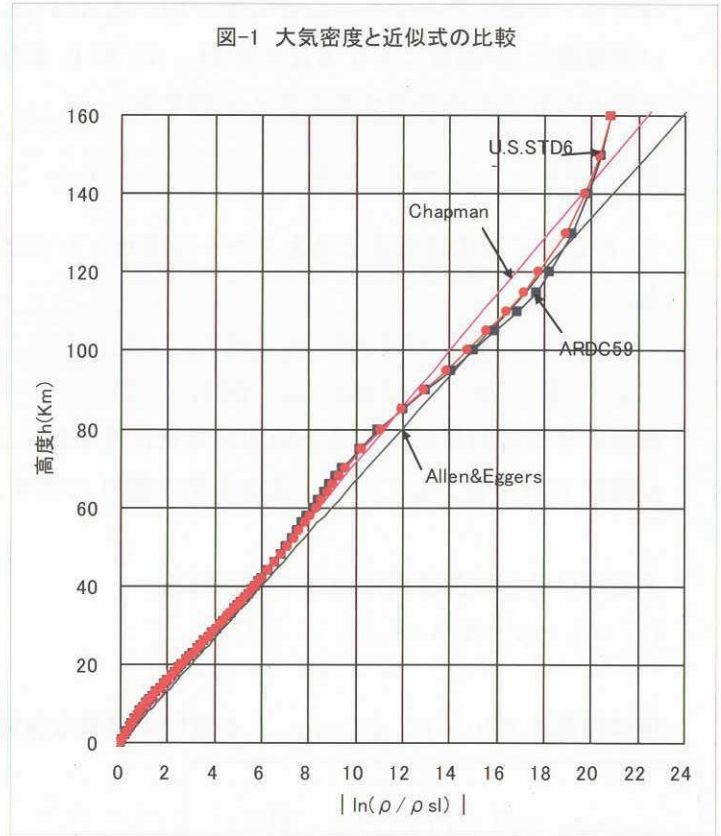
表-1 スケール高度

海面上密度 ρ_{SL}	スケール高度 : $1/\beta$	文献
0.0034 slugs/ft ³ (=1.7525 Kg/m ³)	22000ft (= 6705.6m)	Allen&Eggers (1957)
0.0027 slugs/ft ³ (=1.3917 Kg/m ³)	23500ft (= 7162.8m)	Chapman (1959)
0.00238 slugs/ft ³ (=1.2267 Kg/m ³)	24000ft (= 7315.2m)	Blasigame (1964)
0.00238 slugs/ft ³ (=1.2267 Kg/m ³)	23500 ft (= 7162.8m)	Bobbitt (1971)
1.752 Kg/m ³	67000 m	Regan (1984)

注)

$$1 \text{ slugs} = 32.174 \text{ 049 lb} \quad 1 \text{ lb/ft}^3 = 16.02 \text{ Kg/m}^3$$

標準大気モデル（U.S. 62 大気モデル, ARDC59 大気モデル、補足参照）における大気密度と等温大気モデルを仮定した近似大気密度（表-1 参照）の比較を図-1 に示す。



ただし X 軸は海面上密度で正規化した無次元化密度 (ρ/ρ_{SL}) の対数を取り $\ln(\rho/\rho_{SL})$ 、符号を無視してその絶対値を取った値。

Allen&Eggers のスケール高度では比較的低高度（～40km）で標準大気モデルと一致し、Chapman のスケール高度ではさらに高高度（～90km）まで標準大気密度と良く一致している。

大気密度のその他の近似法

1) 分割近似 FrankJ.Barbera(1981)

全高度域の大気モデル密度とより一致させるためには幾つかの高度域を分割して

$h \leq h_B$ において

$$\rho = \rho_{02} \exp(-\beta_2 h)$$

$h \geq h_B$ ($h_B = 400 \times 10^3 \text{ Kft} = 12.192 \text{ Km}$) において

$$\rho = \rho_{01} \exp(-\beta_1 h)$$

で表す。

$$\rho_{01} = 0.0034 \text{slugs/ft}^3 \times 32.174 \times 16.2 = 1.7721 \text{Kg/m}^3$$

$$\rho_{02} = 0.0023 \text{slugs/ft}^3 \times 32.174 \times 16.2 = 1.1988 \text{Kg/m}^3$$

$$1/\beta_1 = 22000 \text{ft} \times 0.3048 = 6705.6 \text{m}$$

$$1/\beta_2 = 28000 \text{ft} \times 0.3048 = 8534.4 \text{m}$$

2) 多項式近似

高度 n の多項式で表す

$$\rho = \rho_{SL} \exp\{-\beta_0 (1 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \dots) h\}$$

ただし $\beta_1, \beta_2 \dots$ はカーブフィット係数

3) 関数近似 Roger L. Barron (1969)

三角関数により次式で近似する。

$h \geq h_B$ ($h_B = 272 \times 10^3 \text{Kft} = 82.9 \text{Km}$) において

$$\rho = \rho_{SL} \exp\{-\beta_0 h + \alpha_1 \sin \beta_1 (h - h_B)\}$$

$h \leq h_B$ において

$$\rho = \rho_{SL} \exp\{-\beta_0 h + \alpha_2 \sin \beta_2 h + \alpha_3 \sin \beta_3 h\}$$

ただし海面上密度

$$\rho_{SL} = 0.00237692 \text{slugs/ft}^3 \times 32.174 \times 16.2$$

$$= 1.2389 \text{Kg/m}^3$$

係数は

$$1/\beta_0 = 23111 \text{ft} \times 0.3048 = 7044.2 \text{m}$$

$$1/\beta_1 = 67800 \text{ft} \times 0.3048 = 20665.4 \text{m}$$

$$1/\beta_2 = 28860.2 \text{ft} \times 0.3048 = 8796.6 \text{m}$$

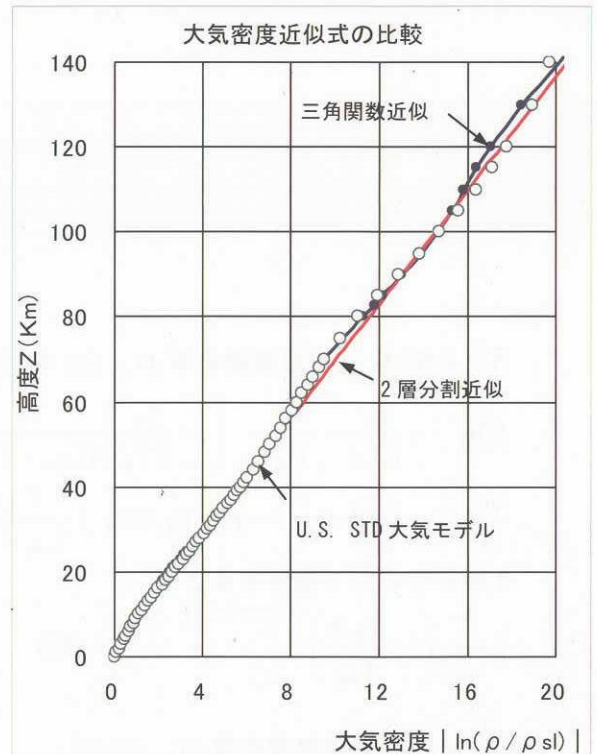
$$1/\beta_3 = 86580.3 \text{ft} \times 0.3048 = 26389.7 \text{m}$$

$$\alpha_1 = -1.48$$

$$\alpha_2 = 0.294$$

$$\alpha_3 = 0.213$$

三角関数近似は 60-90Km の範囲で標準大気モデルと良く一致する。



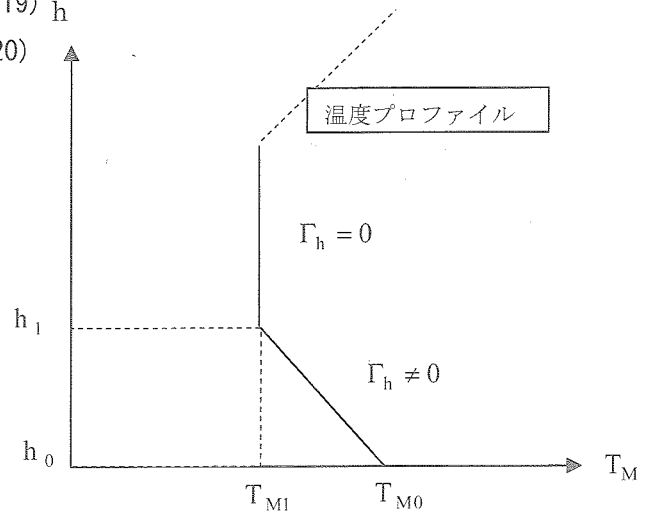
CASE-II) 温度勾配がある場合 $\Gamma_h = dT_M / dh \neq 0$ の時

CASE-I) では高度に対して T_M は一定としたが、一般の大気モデルではある高度範囲で温度勾配を持つことから、このような場合の大気密度の近似式、スケール高度について記す。

いま次のような温度プロファイルを仮定する。(図-1 参照)

$$T(h) = T_0 + \Gamma h \quad 0 \leq h \leq h_1 \quad (19) \quad h$$

$$T(h) = T_T \quad h \geq h_1 \quad (20)$$



① $0 \leq h \leq h_1$ で温度変化率 $dT_M/dh \neq 0$ (一定)

$$\beta(h) = \frac{g_0}{RT_M} + \frac{\Gamma_h}{T_M} = \left(1 + \frac{g_0}{R\Gamma_h}\right) \frac{\Gamma_h}{(T_{M0} + \Gamma_h h)} \quad (21)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta(h) dh = -\left(1 + g_0/R\Gamma_h\right) \frac{\Gamma_h dh}{T_{M0} + \Gamma_h h} \quad (22)$$

0 から h の間で積分すると

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\Gamma_h h}{T_{M0}}\right)^{-(1+g_0/R\Gamma_h)} \quad (23)$$

② $h \geq h_1$ で温度変化率 $dT_M/dh = 0$

$$\beta = \frac{g_0}{RT_{M1}} \quad : \text{一定} \quad (24)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta dh \quad (25)$$

積分して

$$\rho = \rho_1 e^{-\beta(h-h_1)} \quad (26)$$

温度勾配変更点の高度 $h=h_1$ の密度は (23) 式から

$$\rho_1 = \rho_0 \left(1 + \frac{\Gamma_h h_1}{T_{M0}}\right)^{-(1+g_0/R\Gamma_h)} \quad (27)$$

で表される。

(27) 式の概略値は次の通り。

$$\Gamma_h = -0.0065 \text{ } ^\circ\text{K/m} \quad h_1 = 11000 \text{ m} \quad \rho_0 = 1.225 \text{ Kg/m}^3 \quad T_M = 288.15 \text{ } ^\circ\text{K}$$

のとき

$$\Gamma_h h_1 / T_{M0} = -0.0065 \times 11000 / 288.15 \approx -0.248$$

$$g_0 / R\Gamma_h = 9.80665 / 287.05 \times (-0.0065) \approx -5.26$$

$$\rho_1 = 1.225 (1 - 0.248)^{-(1-5.26)} \approx 3.6377 \times 10^{-1} \quad \text{Kg/m}^3$$

<補足> 大気モデル

(a) ARDC 標準大気モデル (Air Research and Development Command) 1559 版

ポテンシャル高度 H の関数として 91.44Km (300Kft) 以下で 6 つの高度域に分け 91.44~701.04Km (300Kft~2300Kft) で 6 つの高度域にわけて、大気状態量を各高度範囲内で理想気体状態方程式と漸近関数から計算したもの。

(b) U. S. 標準大気モデル 1962 版

大気を 21 の高度域に分け、大気の状態量を理想気体状態方程式と漸近関数から計算したもの。ジオメトリック高度 (幾何学的高度) 0~707.14Km (0~2320Kft) を範囲をカバーする。緯度 45deg での高度対大気特性値を示す

(b) U. S. 標準大気モデル 1966 版

1962U. S. 標準大気解析モデルが緯度 45deg での大気モデルであるのに対して 1966U. S. 標準大気解析モデルは緯度 0deg, 15Ndeg, 30Ndeg, 45Ndeg, 60Ndeg, 75Ndeg, 90Ndeg での大気モデルを示したものである。

(c) U. S. 標準大気モデル 1976 版

1976U. S. 標準大気解析モデルは大気層を高度 (Z) 0.0~86Km の間で 7 つの高度域に、また高度 (Z) 86~1000Km の間で 4 つの高度域に分ける。各高度域で高度 Z をジオポテンシャル高度 H に変換し、大気温度, 大気湿度, 大気圧, 大気密度を H の関数として表したものである。(補足参照)

(d) ICAO (国際民間航空機関) 標準大気モデル 1962 版

(e) Patrick-AFB 標準大気モデル 1963 版

1963PatrickAFB 標準大気解析モデルは大気をジオポテンシャル高度 (H) 0.0~83.0Km 間で 5 つの高度域に、またジオポテンシャル高度 (H) 90.0~700.0Km 間で 13 つの高度域に分け、各高度域で、大気温度, 圧力, 密度を H の 5 次式で近似したもの。

(a) ARDC 標準大気モデル (AirResearchandDevelopmentCommand) 1959 版

高度 Z (m)	高度 H _g (m)	大気温度 T (°K)	大気圧 P (hPa, mb)	大気圧比 (P/P ₀)	大気密度 ρ (Kg/m ³)	大気密度比 (ρ/ρ ₀)
0	0	288.16	1.0133×10 ³	1.0	1.2250	1.0
1000	1000	281.66	8.9876×10 ²	8.8696×10 ⁻¹	1.1117	9.0751×10 ⁻¹
2000	1999	275.16	7.9501×10 ²	7.8458×10 ⁻¹	1.0066	8.2171×10 ⁻¹
3000	2999	268.67	7.0121×10 ²	6.9301×10 ⁻¹	9.0926×10 ⁻¹	7.4225×10 ⁻¹
4000	3997	262.187	6.1660×10 ²	6.0851×10 ⁻¹	8.1935×10 ⁻¹	6.6886×10 ⁻¹
5000	4996	255.69	5.4048×10 ²	5.3339×10 ⁻¹	7.3643×10 ⁻¹	6.0117×10 ⁻¹
6000	5994	249.20	4.7217×10 ²	4.6597×10 ⁻¹	6.6011×10 ⁻¹	5.3887×10 ⁻¹
7000	6992	242.71	4.1105×10 ²	4.0565×10 ⁻¹	5.9002×10 ⁻¹	4.8165×10 ⁻¹
8000	7990	236.23	3.5651×10 ²	3.5183×10 ⁻¹	5.2578×10 ⁻¹	4.2921×10 ⁻¹
9000	8987	229.74	3.0800×10 ²	3.0396×10 ⁻¹	4.6706×10 ⁻¹	3.8127×10 ⁻¹
10000	9984	223.26	2.6500×10 ²	2.6152×10 ⁻¹	4.1351×10 ⁻¹	3.3756×10 ⁻¹
11000	10981	216.78	2.2700×10 ²	2.2402×10 ⁻¹	3.6480×10 ⁻¹	2.9780×10 ⁻¹
12000	11977	216.66	1.9399×10 ²	1.9144×10 ⁻¹	3.1194×10 ⁻¹	2.5464×10 ⁻¹
13000	12973	216.66	1.6579×10 ²	1.6361×10 ⁻¹	2.6659×10 ⁻¹	2.1762×10 ⁻¹
14000	13969	216.66	1.4170×10 ²	1.3984×10 ⁻¹	2.2785×10 ⁻¹	1.8600×10 ⁻¹
15000	14965	216.66	1.2112×10 ²	1.1953×10 ⁻¹	1.9475×10 ⁻¹	1.5898×10 ⁻¹
16000	15960	216.66	1.03532×10 ²	1.0217×10 ⁻¹	1.6647×10 ⁻¹	1.3589×10 ⁻¹
17000	16955	216.66	8.8496×10 ¹	8.7334×10 ⁻²	1.4230×10 ⁻¹	1.1616×10 ⁻¹
18000	17949	216.66	7.5652×10 ¹	8.4659×10 ⁻²	1.2165×10 ⁻¹	9.9306×10 ⁻²
19000	18943	216.66	6.4674×10 ¹	6.3825×10 ⁻²	1.0399×10 ⁻¹	8.4890×10 ⁻²
20000	19937	216.66	5.5293×10 ¹	5.4567×10 ⁻²	8.8909×10 ⁻²	7.2579×10 ⁻²
21000	20931	216.66	4.7274×10 ¹	4.6654×10 ⁻²	7.6015×10 ⁻²	6.2053×10 ⁻²
22000	21924	216.66	4.04204×10 ¹	3.9889×10 ⁻²	6.4995×10 ⁻²	5.3057×10 ⁻²
23000	22917	216.66	3.4562×10 ¹	3.4108×10 ⁻²	5.5575×10 ⁻²	4.5367×10 ⁻²
24000	23910	216.66	2.9554×10 ¹	2.9166×10 ⁻²	4.7522×10 ⁻²	3.8793×10 ⁻²
25000	24902	216.66	2.5273×10 ¹	2.4941×10 ⁻²	4.0639×10 ⁻²	3.3175×10 ⁻²
26000	25894	219.34	2.1632×10 ¹	2.1348×10 ⁻²	3.4359×10 ⁻²	2.8048×10 ⁻²
27000	26886	222.32	1.8555×10 ¹	1.8311×10 ⁻²	2.9077×10 ⁻²	2.3736×10 ⁻²
28000	27877	225.29	1.5949×10 ¹	1.5740×10 ⁻²	2.4663×10 ⁻²	2.0133×10 ⁻²
29000	28868	228.26	1.3737×10 ¹	1.3557×10 ⁻²	2.0966×10 ⁻²	1.7115×10 ⁻²

(a) ARDC 標準大気モデル (AirResearchandDevelopmentCommand) 1959 版 (続き)

高度 Z (m)	高度 H _g (m)	大気温度 T (°K)	大気圧 P (hPa, mb)	大気圧比 (P/P ₀)	大気密度 ρ (Kg/m ³)	大気密度比 (ρ/ρ ₀)
30000	29859	231.24	1.1855×10 ¹	1.1699×10 ⁻²	1.7861×10 ⁻²	1.4580×10 ⁻²
31000	30850	234.21	1.0251×10 ¹	1.0116×10 ⁻²	1.5248×10 ⁻²	1.2447×10 ⁻²
32000	31840	237.18	8.8802	8.7636×10 ⁻³	1.3044×10 ⁻²	1.0648×10 ⁻²
33000	32830	240.15	7.7069	7.6057×10 ⁻³	1.1180×10 ⁻²	9.1265×10 ⁻³
34000	33819	243.12	6.7007	6.6128×10 ⁻³	9.6020×10 ⁻³	7.8384×10 ⁻³
35000	34808	246.09	5.8359	5.7593×10 ⁻³	8.2620×10 ⁻³	6.7445×10 ⁻³
36000	35797	249.05	5.0914	5.0246×10 ⁻³	7.1221×10 ⁻³	5.8140×10 ⁻³
37000	36786	252.02	4.4493	4.3909×10 ⁻³	6.1506×10 ⁻³	5.0209×10 ⁻³
38000	37774	254.98	3.8944	3.8433×10 ⁻³	5.3210×10 ⁻³	4.3437×10 ⁻³
39000	38762	257.95	3.4141	3.3693×10 ⁻³	4.6112×10 ⁻³	3.7642×10 ⁻³
40000	39750	260.91	2.9977	2.9584×10 ⁻³	4.0028×10 ⁻³	3.2676×10 ⁻³
41000	40737	263.87	2.6361	2.6015×10 ⁻³	3.4804×10 ⁻³	2.8411×10 ⁻³
42000	41724	266.83	2.3215	2.2910×10 ⁻³	3.0310×10 ⁻³	2.4743×10 ⁻³
44000	43698	272.75	1.8082	1.7845×10 ⁻³	2.3096×10 ⁻³	1.8854×10 ⁻³
46000	45670	278.67	1.4162	1.3976×10 ⁻³	1.7704×10 ⁻³	1.4452×10 ⁻³
48000	47640	282.66	1.1147	1.1001×10 ⁻³	1.3739×10 ⁻³	1.1216×10 ⁻³
50000	49510	282.66	8.7858×10 ⁻¹	8.6705×10 ⁻⁴	1.0829×10 ⁻³	8.8400×10 ⁻⁴
52000	51578	282.66	6.9256×10 ⁻¹	6.8347×10 ⁻⁴	8.5360×10 ⁻⁴	6.9683×10 ⁻⁴
54000	53545	280.21	5.4586×10 ⁻¹	5.3870×10 ⁻⁴	6.7867×10 ⁻⁴	5.5409×10 ⁻⁴
56000	55511	271.36	4.2786×10 ⁻¹	4.2224×10 ⁻⁴	5.4931×10 ⁻⁴	4.4842×10 ⁻⁴
58000	57676	262.52	3.3273×10 ⁻¹	3.2836×10 ⁻⁴	4.4156×10 ⁻⁴	3.6046×10 ⁻⁴
60000	59439	253.68	2.5657×10 ⁻¹	2.5320×10 ⁻⁴	3.5235×10 ⁻⁴	2.8763×10 ⁻⁴
62000	61401	244.86	1.9607×10 ⁻¹	1.9350×10 ⁻⁴	2.7897×10 ⁻⁴	2.2773×10 ⁻⁴
64000	63362	236.03	1.4838×10 ⁻¹	1.4643×10 ⁻⁴	2.1901×10 ⁻⁴	1.7878×10 ⁻⁴
66000	65322	227.21	1.1113×10 ⁻¹	1.0967×10 ⁻⁴	1.7039×10 ⁻⁴	1.3909×10 ⁻⁴
68000	67280	218.40	8.2298×10 ⁻²	8.1218×10 ⁻⁵	1.3128×10 ⁻⁴	1.0717×10 ⁻⁴
70000	69238	209.590	6.0209×10 ⁻²	5.9419×10 ⁻⁵	1.0008×10 ⁻⁴	8.1698×10 ⁻⁵
75000	74125	187.60	2.5947×10 ⁻²	2.5606×10 ⁻⁵	4.8187×10 ⁻⁵	3.9336×10 ⁻⁵
80000	79006	165.70	1.0080×10 ⁻²	9.9477×10 ⁻⁶	2.1200×10 ⁻⁵	1.8041×10 ⁻⁵
85000	83878	165.70	3.6910×10 ⁻³	3.6426×10 ⁻⁶	7.7620×10 ⁻⁶	6.3363×10 ⁻⁶

(a) ARDC 標準大気モデル (AirResearchandDevelopmentCommand) 1959 版 (続き)

高度 Z (m)	高度 H _g (m)	大気温度 T (°K)	大気圧 P (hPa, mb)	大気圧比 (P/P ₀)	大気密度 ρ (Kg/m ³)	大気密度比 (ρ/ρ ₀)
90000	88743	165.70	1.3530×10 ⁻²	1.3352×10 ⁻⁶	2.8460×10 ⁻⁶	2.3233×10 ⁻⁶
95000	93601	179.90	5.1240×10 ⁻⁴	5.0567×10 ⁻⁷	9.9130×10 ⁻⁷	8.0922×10 ⁻⁷
100000	98451	199.00	2.1380×10 ⁻⁴	2.1099×10 ⁻⁷	3.7340×10 ⁻⁷	3.0482×10 ⁻⁷
105000	103294	218.00	9.6880×10 ⁻⁵	9.5608×10 ⁻⁸	1.5420×10 ⁻⁷	1.2588×10 ⁻⁷
110000	108129	286.70	4.9060×10 ⁻⁵	4.8416×10 ⁻⁸	5.9300×10 ⁻⁸	4.8408×10 ⁻⁸
115000	112956	382.10	2.9950×10 ⁻⁵	2.9557×10 ⁻⁸	2.7120×10 ⁻⁸	2.2139×10 ⁻⁸
120000	117777	477.00	2.0440×10 ⁻⁵	2.0172×10 ⁻⁸	1.4800×10 ⁻⁸	1.2082×10 ⁻⁸
130000	127395	673.00	1.1510×10 ⁻⁵	1.1359×10 ⁻⁸	5.9530×10 ⁻⁹	4.8596×10 ⁻⁹
140000	136983	849.90	7.5020×10 ⁻⁶	7.4035×10 ⁻⁹	3.0200×10 ⁻⁹	2.4653×10 ⁻⁹
150000	146542	1031.00	5.3340×10 ⁻⁶	5.2640×10 ⁻⁹	1.7590×10 ⁻⁹	1.4359×10 ⁻⁹
160000	156071	1207.00	4.0180×10 ⁻⁶	3.9653×10 ⁻⁹	1.1230×10 ⁻⁹	9.1673×10 ⁻¹⁰
170000	165572	1323.00	3.1450×10 ⁻⁶	3.1037×10 ⁻⁹	7.9320×10 ⁻¹⁰	6.4751×10 ⁻¹⁰
180000	175043	1371.00	2.5050×10 ⁻⁶	2.4721×10 ⁻⁹	6.0150×10 ⁻¹⁰	4.9102×10 ⁻¹⁰
190000	184485	1498.00	2.0130×10 ⁻⁶	1.9866×10 ⁻⁹	4.6800×10 ⁻¹⁰	3.8204×10 ⁻¹⁰
200000	193899	1404.00	1.6290×10 ⁻⁶	1.6076×10 ⁻⁹	3.6730×10 ⁻¹⁰	2.9984×10 ⁻¹⁰
210000	203284	1414.00	1.32800×10 ⁻⁶	1.3106×10 ⁻⁹	2.9140×10 ⁻¹⁰	2.3788×10 ⁻¹⁰
220000	212640	1414.00	1.08800×10 ⁻⁶	1.0737×10 ⁻⁹	2.3390×10 ⁻¹⁰	1.9094×10 ⁻¹⁰

U. S. 標準大気モデル 62

緯度 45deg での大気特性値

海面上の値：

温度： $T_{SL} = 288.15 \text{ } ^\circ\text{K} (= 15.0 \text{ } ^\circ\text{C})$ 密度： $\rho_{SL} = 1.2250 \text{ Kg/m}^3$ 圧力： $P_{SL} = 1.01325 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

表-2 1962 U. S. 標準大気モデル温度勾配

NO.	高度 H(Km)	高度 Z(Km)	大気温度 T (°K)	温度勾配 Γ (°K/Km)	分子量
0	0	0	288.15	-6.5	28.9644
1	11	11.019	216.65	0.0	28.9644
2	20	20.063	216.65	+1.0	28.9644
3	32	32.162	228.65	+2.8	28.9644
4	47	47.350	270.65	0.0	28.9644
5	52	51.413	270.65	-2.0	28.9644
6	61	61.591	252.65	-4.0	28.9644
7	79	79.9941	180.65	0.0	28.9644
8	88.743	90	180.65	+3.0	28.9644
9	98.4516	100	210.65	+5.0	28.88
10	108.129	110	260.65	+10.0	28.56
11	117.776	120	360.65	+20.0	28.07
12	146.541	150	960.65	+15.0	26.92
13	156.071	160	1110.65	+10.0	26.66
14	165.571	170	1210.65	+7.0	26.40
15	184.485	190	1350.65	+5.0	25.85
16	221.967	230	1550.65	+4.0	24.70
17	286.4767	300	1830.65	+3.3	22.66
18	376.312	400	2160.65	+2.6	19.94
19	463.526	500	2420.65	+1.7	17.94
21	548.230	600	25920.65	+1.1	16.84
22	630.530	700	2700.65		16.17

H：ジオポテンシャル高度

Z：ジオメトリック高度

(b) U. S. 62 標準大気モデル 1962 版

高度 Z (m)	高度 H _g (m)	大気温度 T (°K)	大気圧 P (hPa, mb)	大気圧比 (P/P ₀)	大気密度 ρ (Kg/m ³)	大気密度比 (ρ/ρ ₀)
0	0	288.150	1.01325×10 ³	1.0	1.2250	1.0
1000	1000	281.651	8.98762×10 ²	8.87009×10 ⁻¹	1.1117	9.0748×10 ⁻¹
2000	1999	275.154	7.95014×10 ²	7.84618×10 ⁻¹	1.0066	8.2168×10 ⁻¹
3000	2999	268.659	7.01211×10 ²	6.92042×10 ⁻¹	9.0925×10 ⁻¹	7.4225×10 ⁻¹
4000	3997	262.166	6.16604×10 ²	6.08541×10 ⁻¹	8.1935×10 ⁻¹	6.6885×10 ⁻¹
5000	4996	255.676	5.40482×10 ²	5.33415×10 ⁻¹	7.3643×10 ⁻¹	6.0117×10 ⁻¹
6000	5994	249.187	4.72176×10 ²	4.66001×10 ⁻¹	6.6011×10 ⁻¹	5.3887×10 ⁻¹
7000	6992	242.700	4.11052×10 ²	4.05677×10 ⁻¹	5.9002×10 ⁻¹	4.8165×10 ⁻¹
8000	7990	236.215	3.56516×10 ²	3.51854×10 ⁻¹	5.2579×10 ⁻¹	4.2921×10 ⁻¹
9000	8987	229.733	3.08007×10 ²	3.03979×10 ⁻¹	4.6706×10 ⁻¹	3.8128×10 ⁻¹
10000	9984	223.252	2.64999×10 ²	2.61533×10 ⁻¹	4.1351×10 ⁻¹	3.3756×10 ⁻¹
11000	10981	216.774	2.26999×10 ²	2.24031×10 ⁻¹	3.6480×10 ⁻¹	2.9780×10 ⁻¹
12000	11977	216.650	1.93994×10 ²	1.91457×10 ⁻¹	3.1194×10 ⁻¹	2.5464×10 ⁻¹
13000	12973	216.650	1.65796×10 ²	1.63628×10 ⁻¹	2.6660×10 ⁻¹	2.1763×10 ⁻¹
14000	13969	216.650	1.41704×10 ²	1.39851×10 ⁻¹	2.2786×10 ⁻¹	1.8600×10 ⁻¹
15000	14965	216.650	1.21118×10 ²	1.19534×10 ⁻¹	1.9475×10 ⁻¹	1.5898×10 ⁻¹
16000	15960	216.650	1.03528×10 ²	1.02174×10 ⁻¹	1.6647×10 ⁻¹	1.3589×10 ⁻¹
17000	16955	216.650	8.84971×10 ¹	8.73399×10 ⁻²	1.4230×10 ⁻¹	1.1616×10 ⁻¹
18000	17949	216.650	7.56522×10 ¹	7.46629×10 ⁻²	1.2165×10 ⁻¹	9.9304×10 ⁻²
19000	18943	216.650	6.46748×10 ¹	6.38291×10 ⁻²	1.0400×10 ⁻¹	8.4894×10 ⁻²
20000	19937	216.650	5.52930×10 ¹	5.45700×10 ⁻²	8.8910×10 ⁻²	7.2579×10 ⁻²
21000	20931	217.581	4.72893×10 ¹	4.66709×10 ⁻²	7.5715×10 ⁻²	6.1808×10 ⁻²
22000	21924	218.574	4.04749×10 ¹	3.99456×10 ⁻²	6.4510×10 ⁻²	5.2661×10 ⁻²
23000	22917	219.567	3.46686×10 ¹	3.42153×10 ⁻²	5.5006×10 ⁻²	4.4903×10 ⁻²
24000	23910	220.560	2.97174×10 ¹	2.93288×10 ⁻²	4.6938×10 ⁻²	3.8317×10 ⁻²
25000	24902	221.552	2.54922×10 ¹	2.51588×10 ⁻²	4.0084×10 ⁻²	3.2722×10 ⁻²
26000	25894	222.544	2.18837×10 ¹	2.15976×10 ⁻²	3.4257×10 ⁻²	2.7965×10 ⁻²
27000	26886	223.536	1.87997×10 ¹	1.85539×10 ⁻²	2.9298×10 ⁻²	2.3917×10 ⁻²
28000	27877	224.527	1.61619×10 ¹	1.59506×10 ⁻²	2.5076×10 ⁻²	2.0470×10 ⁻²
29000	28868	225.518	1.39042×10 ¹	1.37224×10 ⁻²	2.1478×10 ⁻²	1.7533×10 ⁻²

(a) U. S. 62 標準大気モデル 1962 版 (続き)

高度 Z (m)	高度 H _g (m)	大気温度 T (°K)	大気圧 P (hPa, mb)	大気圧比 (P/P ₀)	大気密度 ρ (Kg/m ³)	大気密度比 (ρ/ρ ₀)
30000	29859	226.509	1.19703×10 ¹	1.18138×10 ⁻²	1.8410×10 ⁻²	1.5029×10 ⁻²
31000	30850	227.500	1.03126×10 ¹	1.0177×10 ⁻²	1.5792×10 ⁻²	1.2891×10 ⁻²
32000	31840	228.490	8.89063	8.77437×10 ⁻³	1.3555×10 ⁻²	1.1065×10 ⁻²
33000	32830	230.973	7.67308	7.57274×10 ⁻³	1.573×10 ⁻²	9.4474×10 ⁻³
34000	33819	233.743	6.63412	6.54736×10 ⁻³	9.8874×10 ⁻³	8.0713×10 ⁻³
35000	34808	236.513	5.74593	5.670797×10 ⁻³	8.4634×10 ⁻³	6.9089×10 ⁻³
36000	35797	239.282	4.98522	3.73922×10 ⁻³	7.2579×10 ⁻³	5.9248×10 ⁻³
37000	36786	242.050	4.33248	4.27582×10 ⁻³	6.2355×10 ⁻³	5.0902×10 ⁻³
38000	37774	244.818	3.77138	3.72206×10 ⁻³	5.3666×10 ⁻³	4.3809×10 ⁻³
39000	38762	247.584	3.28821	3.24521×10 ⁻³	4.6267×10 ⁻³	3.7769×10 ⁻³
40000	39750	250.350	2.87145	2.83389×10 ⁻³	3.9957×10 ⁻³	3.2618×10 ⁻³
41000	40737	253.114	2.51133	2.47849×10 ⁻³	3.4564×10 ⁻³	2.8216×10 ⁻³
42000	41724	255.878	2.19967	2.17090×10 ⁻³	2.9948×10 ⁻³	2.4447×10 ⁻³
44000	43697	261.403	1.69496	1.67280×10 ⁻³	2.2589×10 ⁻³	1.8440×10 ⁻³
46000	45669	266.925	1.31340	1.29623×10 ⁻³	1.7141×10 ⁻³	1.3993×10 ⁻³
48000	47640	270.650	1.02296	1.00950×10 ⁻³	1.3167×10 ⁻³	1.0749×10 ⁻³
50000	49610	270.650	7.9770×10 ⁻¹	7.87358×10 ⁻⁴	1.0269×10 ⁻³	8.3827×10 ⁻⁴
52000	51578	270.650	6.22283×10 ⁻¹	6.14146×10 ⁻⁴	8.0097×10 ⁻⁴	6.5386×10 ⁻⁴
54000	53545	267.560	4.84917×10 ⁻¹	4.78576×10 ⁻⁴	6.3137×10 ⁻⁴	5.1541×10 ⁻⁴
56000	55511	263.628	3.76572×10 ⁻¹	3.71640×10 ⁻⁴	4.9762×10 ⁻⁴	4.0622×10 ⁻⁴
58000	57476	259.699	2.91373×10 ⁻¹	2.87553×10 ⁻⁴	3.9086×10 ⁻⁴	3.1907×10 ⁻⁴
60000	59439	255.772	2.24606×10 ⁻¹	2.21669×10 ⁻⁴	3.0592×10 ⁻⁴	2.4973×10 ⁻⁴
62000	61401	251.046	1.72457×10 ⁻¹	1.70202×10 ⁻⁴	2.3931×10 ⁻⁴	1.9536×10 ⁻⁴
64000	63362	243.202	1.31504×10 ⁻¹	1.29785×10 ⁻⁴	1.8837×10 ⁻⁴	1.5377×10 ⁻⁴
66000	65322	235.363	9.94067×10 ⁻²	9.810685×10 ⁻⁵	1.4713×10 ⁻⁴	1.2011×10 ⁻⁴
68000	67280	227.529	7.44483×10 ⁻²	7.34747×10 ⁻⁵	1.1399×10 ⁻⁴	9.3051×10 ⁻⁵
70000	69237	219.700	5.52047×10 ⁻²	5.44828×10 ⁻⁵	8.7535×10 ⁻⁴	7.14571×10 ⁻⁵
75000	74125	200.15	2.4904×10 ⁻²	2.45788×10 ⁻⁵	4.335×10 ⁻⁵	3.538×10 ⁻⁵
80000	79006	180.65	1.0366×10 ⁻²	1.0231×10 ⁻⁵	1.999×10 ⁻⁵	1.632×10 ⁻⁵
85000	83878	180.65	4.1250×10 ⁻³	4.0710×10 ⁻⁶	7.955×10 ⁻⁶	6.494×10 ⁻⁶

(b) U. S. 62 標準大気モデル 1962 版 (続き)

高度 Z (m)	高度 H _g (m)	大気温度 T (°K)	大気圧 P (hPa, mb)	大気圧比 (P/P ₀)	大気密度 ρ (Kg/m ³)	大気密度比 (ρ/ρ ₀)
90000	88743	180.65	1.6438×10 ⁻³	1.6223×10 ⁻⁶	3.170×10 ⁻⁶	2.588×10 ⁻⁶
95000	93601	195.51	6.8012×10 ⁻⁴	6.7122×10 ⁻⁷	1.211×10 ⁻⁶	9.886×10 ⁻⁷
100000	98451	210.02	3.0073×10 ⁻⁴	2.9681×10 ⁻⁷	4.974×10 ⁻⁷	4.060×10 ⁻⁷
105000	103294	233.90	1.4318×10 ⁻⁴	1.4131×10 ⁻⁷	2.117×10 ⁻⁷	1.728×10 ⁻⁷
110000	108129	257.00	7.3544×10 ⁻⁵	7.2582×10 ⁻⁸	9.829×10 ⁻⁸	8.024×10 ⁻⁸
115000	112956	303.78	4.1224×10 ⁻⁵	4.0685×10 ⁻⁸	4.623×10 ⁻⁸	3.774×10 ⁻⁸
120000	117776	349.49	2.5217×10 ⁻⁵	2.4887×10 ⁻⁸	2.436×10 ⁻⁸	1.988×10 ⁻⁸
130000	127394	533.80	1.22140×10 ⁻⁵	1.2054×10 ⁻⁸	7.589×10 ⁻⁹	6.195×10 ⁻⁹
140000	136983	714.22	7.4104×10 ⁻⁶	7.3135×10 ⁻⁹	3.394×10 ⁻⁹	2.770×10 ⁻⁹
150000	146541	892.79	5.0617×10 ⁻⁶	4.9955×10 ⁻⁹	1.836×10 ⁻⁹	1.498×10 ⁻⁹
160000	156071	1022.23	3.6943×10 ⁻⁶	3.6460×10 ⁻⁹	1.159×10 ⁻⁹	9.459×10 ⁻¹⁰
170000	165571	1105.51	2.7926×10 ⁻⁶	2.7561×10 ⁻⁹	8.036×10 ⁻¹⁰	6.560×10 ⁻¹⁰
180000	175042	1156.12	2.1536×10 ⁻⁶	2.1254×10 ⁻⁹	5.858×10 ⁻¹⁰	4.782×10 ⁻¹⁰
190000	184485	1205.50	1.6852×10 ⁻⁶	1.6632×10 ⁻⁹	4.347×10 ⁻¹⁰	3.548×10 ⁻¹⁰
200000	193898	1235.95	1.3339×10 ⁻⁶	1.3164×10 ⁻⁹	3.318×10 ⁻¹⁰	2.708×10 ⁻¹⁰
210000	203283	1265.49	1.0652×10 ⁻⁶	1.0513×10 ⁻⁹	2.558×10 ⁻¹⁰	2.088×10 ⁻¹⁰
220000	212639	1294.09	8.5774×10 ⁻⁷	8.4653×10 ⁻¹⁰	1.991×10 ⁻¹⁰	1.625×10 ⁻¹⁰

U. S. 標準大気モデル 76

表-2 1976 U. S. 標準大気モデル温度勾配

NO.	高度 H (Km)	高度 Z (Km)	大気温度 T (°K)	温度勾配 Γ (°K/Km)	温度関数
0	0	0	288.15	-6.5	線形
1	11	11.019	216.65	0.0	線形
2	20	20.063	216.65	+1.0	線形
3	32	32.162	228.65	+2.8	線形
4	47	47.350	270.65	0.0	線形
5	51	51.413	270.65	-2.8	線形
6	71	71.802	214.655	-2.0	線形
7	84.852	86	186.95	0.0	線形
8	89.716	91	187.36		楕円
9	108.129	110	254.93		
10	117.777	120	397.91	12.0	線形
11	463.540	500	2019.69		指数
12	864.071	1000	7351.15		

H: ジオポテンシャル高度

Z: ジオメトリック高度

(a) U. S. 76 標準大気モデル 1976 版

高度 Z (m)	高度 H _g (m)	大気温度 T (°K)	大気圧 P (hPa, mb)	大気圧比 (P/P ₀)	大気密度 ρ (Kg/m ³)	大気密度比 (ρ/ρ ₀)
0	0	288.150	1.01325×10 ³	1.0	1.2250	1.0
1000	1000	281.651	8.9876×10 ²	8.8700×10 ⁻¹	1.1117	9.0748×10 ⁻¹
2000	1999	275.154	7.9501×10 ²	7.848461×10 ⁻¹	1.0066	8.2168×10 ⁻¹
3000	2999	268.659	7.01218×10 ²	6.9204×10 ⁻¹	9.0925×10 ⁻¹	7.4225×10 ⁻¹
4000	3997	262.166	6.1660×10 ²	6.0854×10 ⁻¹	8.1935×10 ⁻¹	6.6885×10 ⁻¹
5000	4996	255.676	5.4048×10 ²	5.3341×10 ⁻¹	7.3643×10 ⁻¹	6.0117×10 ⁻¹
6000	5994	249.187	4.7217×10 ²	4.6600×10 ⁻¹	6.6011×10 ⁻¹	5.3887×10 ⁻¹
7000	6992	242.700	4.1105×10 ²	4.0567×10 ⁻¹	5.9002×10 ⁻¹	4.8165×10 ⁻¹
8000	7990	236.215	3.5651×10 ²	3.5185×10 ⁻¹	5.2579×10 ⁻¹	4.2921×10 ⁻¹
9000	8987	229.733	3.0800×10 ²	3.0397×10 ⁻¹	4.6706×10 ⁻¹	3.8128×10 ⁻¹
10000	9984	223.252	2.6499×10 ²	2.6153×10 ⁻¹	4.1351×10 ⁻¹	3.3756×10 ⁻¹
11000	10981	216.774	2.2699×10 ²	2.2403×10 ⁻¹	3.6480×10 ⁻¹	2.9780×10 ⁻¹
12000	11977	216.650	1.9399×10 ²	1.9145×10 ⁻¹	3.1194×10 ⁻¹	2.5464×10 ⁻¹
13000	12973	216.650	1.6579×10 ²	1.6362×10 ⁻¹	2.6660×10 ⁻¹	2.1763×10 ⁻¹
14000	13969	216.650	1.4170×10 ²	1.3985×10 ⁻¹	2.2786×10 ⁻¹	1.8601×10 ⁻¹
15000	14965	216.650	1.2111×10 ²	1.1953×10 ⁻¹	1.9476×10 ⁻¹	1.5898×10 ⁻¹
16000	15960	216.650	1.0352×10 ²	1.0217×10 ⁻¹	1.6647×10 ⁻¹	1.3589×10 ⁻¹
17000	16955	216.650	8.8497×10 ¹	8.7340×10 ⁻²	1.4230×10 ⁻¹	1.1616×10 ⁻¹
18000	17949	216.650	7.5652×10 ¹	7.4663×10 ⁻²	1.2165×10 ⁻¹	9.9304×10 ⁻²
19000	18943	216.650	6.4674×10 ¹	6.3829×10 ⁻²	1.0400×10 ⁻¹	8.4894×10 ⁻²
20000	19937	216.650	5.5293×10 ¹	5.4570×10 ⁻²	8.8910×10 ⁻²	7.2580×10 ⁻²
21000	20931	217.581	4.7289×10 ¹	4.6671×10 ⁻²	7.5715×10 ⁻²	6.1808×10 ⁻²
22000	21924	218.574	4.0475×10 ¹	3.9945×10 ⁻²	6.4510×10 ⁻²	5.2661×10 ⁻²
23000	22917	219.567	3.4668×10 ¹	3.4215×10 ⁻²	5.5006×10 ⁻²	4.4903×10 ⁻²
24000	23910	220.560	2.9717×10 ¹	2.9328×10 ⁻²	4.6938×10 ⁻²	3.8317×10 ⁻²
25000	24902	221.552	2.5492×10 ¹	2.5158×10 ⁻²	4.0084×10 ⁻²	3.2722×10 ⁻²
26000	25894	222.544	2.1883×10 ¹	2.1597×10 ⁻²	3.4257×10 ⁻²	2.7965×10 ⁻²
27000	26886	223.536	1.8799×10 ¹	1.8553×10 ⁻²	2.9298×10 ⁻²	2.3917×10 ⁻²
28000	27877	224.527	1.6161×10 ¹	1.5950×10 ⁻²	2.5076×10 ⁻²	2.0470×10 ⁻²
29000	28868	225.518	1.3904×10 ¹	1.3722×10 ⁻²	2.1478×10 ⁻²	1.7533×10 ⁻²

(a) U. S. 76 標準大気モデル 1976 版 (続き)

高度 Z (m)	高度 H _g (m)	大気温度 T (°K)	大気圧 P (hPa, mb)	大気圧比 (P/P ₀)	大気密度 ρ (Kg/m ³)	大気密度比 (ρ/ρ ₀)
30000	29859	226.509	1.1970×10 ¹	1.1813×10 ⁻²	1.8410×10 ⁻²	1.5029×10 ⁻²
31000	30850	227.500	1.0312×10 ¹	1.0177×10 ⁻²	1.5792×10 ⁻²	1.2891×10 ⁻²
32000	31840	228.490	8.8906	8.7743×10 ⁻³	1.3555×10 ⁻²	1.1065×10 ⁻²
33000	32830	230.973	7.6730	7.5727×10 ⁻³	1.573×10 ⁻²	9.4474×10 ⁻³
34000	33819	233.743	6.6341	6.5473×10 ⁻³	9.8874×10 ⁻³	8.0714×10 ⁻³
35000	34808	236.513	5.7459	5.6708×10 ⁻³	8.4634×10 ⁻³	6.9089×10 ⁻³
36000	35797	239.282	4.9852	3.7392×10 ⁻³	7.2579×10 ⁻³	5.9248×10 ⁻³
37000	36786	242.050	4.3324	4.2758×10 ⁻³	6.2355×10 ⁻³	5.0902×10 ⁻³
38000	37774	244.818	3.7713	3.7220×10 ⁻³	5.3666×10 ⁻³	4.3809×10 ⁻³
39000	38762	247.584	3.2882	3.2452×10 ⁻³	4.6268×10 ⁻³	3.7769×10 ⁻³
40000	39750	250.350	2.8714	2.8338×10 ⁻³	3.9957×10 ⁻³	3.2618×10 ⁻³
41000	40737	253.114	2.5113	2.4784×10 ⁻³	3.4564×10 ⁻³	2.8216×10 ⁻³
42000	41724	255.878	2.1996	2.1709×10 ⁻³	2.9948×10 ⁻³	2.4447×10 ⁻³
44000	43697	261.403	1.6949	1.6728×10 ⁻³	2.2589×10 ⁻³	1.8440×10 ⁻³
46000	45669	266.925	1.3134	1.2962×10 ⁻³	1.7142×10 ⁻³	1.3993×10 ⁻³
48000	47640	270.650	1.0229	1.0095×10 ⁻³	1.3167×10 ⁻³	1.0749×10 ⁻³
50000	49610	270.650	7.9779×10 ⁻¹	7.8735×10 ⁻⁴	1.0269×10 ⁻³	8.3827×10 ⁻⁴
52000	51578	269.031	6.2214×10 ⁻¹	6.1401×10 ⁻⁴	8.0562×10 ⁻⁴	6.5765×10 ⁻⁴
54000	53545	263.524	4.8337×10 ⁻¹	4.7705×10 ⁻⁴	6.3901×10 ⁻⁴	5.2164×10 ⁻⁴
56000	55511	258.019	3.7362×10 ⁻¹	3.6873×10 ⁻⁴	5.0445×10 ⁻⁴	4.1180×10 ⁻⁴
58000	57476	252.518	2.8723×10 ⁻¹	2.1544×10 ⁻⁴	3.9627×10 ⁻⁴	3.2348×10 ⁻⁴
60000	59439	247.021	2.1958×10 ⁻¹	2.1671×10 ⁻⁴	3.0968×10 ⁻⁴	2.5280×10 ⁻⁴
62000	61401	241.527	1.6688×10 ⁻¹	1.6470×10 ⁻⁴	2.4071×10 ⁻⁴	1.9650×10 ⁻⁴
64000	63362	236.036	1.2605×10 ⁻¹	1.2441×10 ⁻⁴	1.8605×10 ⁻⁴	1.5188×10 ⁻⁴
66000	65322	230.549	9.4609×10 ⁻²	9.3372×10 ⁻⁵	1.4296×10 ⁻⁴	1.1670×10 ⁻⁴
68000	67280	225.065	7.0529×10 ⁻²	6.9607×10 ⁻⁵	1.0917×10 ⁻⁴	8.9118×10 ⁻⁵
70000	69237	219.585	5.2209×10 ⁻²	5.1562×10 ⁻⁵	8.2829×10 ⁻⁴	6.7616×10 ⁻⁵
75000	74125	208.399	2.3881×10 ⁻²	2.3569×10 ⁻⁵	3.9921×10 ⁻⁵	3.2589×10 ⁻⁵
80000	79006	198.639	1.0524×10 ⁻²	1.0387×10 ⁻⁵	1.999×10 ⁻⁵	1.5068×10 ⁻⁵
85000	83878	188.893	4.4568×10 ⁻³	4.3985×10 ⁻⁶	8.2196×10 ⁻⁶	6.7099×10 ⁻⁶

(b) U. S. 76 標準大気モデル 1976 版 (続き)

高度 Z (m)	高度 H _g (m)	大気温度 T (°K)	大気圧 P (hPa, mb)	大気圧比 (P/P ₀)	大気密度 ρ (Kg/m ³)	大気密度比 (ρ/ρ ₀)
90000	88744	186.87	1.8359×10 ⁻³	1.8119×10 ⁻⁶	3.416×10 ⁻⁶	2.879×10 ⁻⁶
95000	93601	188.42	7.5966×10 ⁻⁴	7.4973×10 ⁻⁷	1.393×10 ⁻⁶	1.137×10 ⁻⁶
100000	98451	195.08	3.2011×10 ⁻⁴	3.1593×10 ⁻⁷	5.604×10 ⁻⁷	4.575×10 ⁻⁷
105000	103294	208.84	1.4477×10 ⁻⁴	1.4288×10 ⁻⁷	2.325×10 ⁻⁷	1.898×10 ⁻⁷
110000	108129	240.00	7.1042×10 ⁻⁵	7.0113×10 ⁻⁸	9.708×10 ⁻⁸	7.925×10 ⁻⁸
115000	112957	300.00	4.0096×10 ⁻⁵	3.9572×10 ⁻⁸	4.289×10 ⁻⁸	3.501×10 ⁻⁸
120000	117776	360.00	2.5382×10 ⁻⁵	2.5050×10 ⁻⁸	2.222×10 ⁻⁸	1.814×10 ⁻⁸
130000	127395	469.27	1.2505×10 ⁻⁵	1.2341×10 ⁻⁸	8.152×10 ⁻⁹	6.655×10 ⁻⁹
140000	136983	559.63	7.2028×10 ⁻⁶	7.1087×10 ⁻⁹	3.831×10 ⁻⁹	3.128×10 ⁻⁹
150000	146542	634.39	4.5422×10 ⁻⁶	4.4828×10 ⁻⁹	2.076×10 ⁻⁹	1.694×10 ⁻⁹
160000	156072	696.29	3.0395×10 ⁻⁶	2.9997×10 ⁻⁹	1.233×10 ⁻⁹	1.007×10 ⁻⁹
170000	165572	747.57	2.1218×10 ⁻⁶	2.0933×10 ⁻⁹	7.815×10 ⁻¹⁰	6.380×10 ⁻¹⁰
180000	175043	790.07	1.5271×10 ⁻⁶	1.5072×10 ⁻⁹	5.149×10 ⁻¹⁰	4.240×10 ⁻¹⁰
190000	184486	825.31	1.1266×10 ⁻⁶	1.1118×10 ⁻⁹	3.581×10 ⁻¹⁰	2.923×10 ⁻¹⁰
200000	193899	854.56	8.4736×10 ⁻⁷	8.3628×10 ⁻¹⁰	2.541×10 ⁻¹⁰	2.074×10 ⁻¹⁰
210000	203284	878.84	6.4756×10 ⁻⁷	6.3910×10 ⁻⁹	1.846×10 ⁻¹⁰	1.567×10 ⁻¹⁰
220000	212641	899.01	5.0149×10 ⁻⁷	4.9494×10 ⁻¹⁰	1.367×10 ⁻¹⁰	1.116×10 ⁻¹⁰

- By the Staff of Langley Research Center "Performance And Dynamics of Aerospace Vehicles"
4. Problems of Atmospheric Entry J. Bobbitt NASA SP-258 1971
- Benjamin P. Blasingame "Astronautics" McGraw-Hill Series in Missile and Space
Technology Howards. Seifert McGraw-Hill Book Company 1964
- Holt Ashley "Engineering Analysis of Flight Vehicles" Chap. 11 Dynamics Performance
Atmospheric Entry Addison-Wesley Publishing Company
- Michael D. Griffin James R. French "Space Vehicle Design" Chap. 6 Atmospheric Entry
AIAA Education Series
- Frank J. Regan "Re-Entry Vehicles Dynamics" Chap. 6 Re-Entry Body Particle Mechanics
AIAA Education Series 1984
- John J. Martin "Atmospheric Reentry" An Introduction to its Science and Engineering
Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N. J.
- Minzer Champion and Pond "The ARDC Model Atmosphere, 1959" Air Force Surveys in
Geophysics NO. 115, AFRC TR-59-267 August, 1959
- U. S. Standard Atmosphere 1962, U. S. Committee on Extension to the Standard
Atmosphere U. S. Government Printing Washington D. C., 1962
- Roger L. Barron "Inference of Vehicle and Atmosphere Parameters from Free-Flight
Motions" Journal of Spacecraft and Rockets VOL. 6, NO. 6, June 1969 641-648

付録-7 再突入宇宙機の重力加速度

重力ポテンシャル U は一般に地球の形状により、地心距離のみならず、緯度、経度の関数であらわされる。いま地球を回転楕円体(補足3参照)と仮定すると重力ポテンシャル U は次式で表される。

$$U = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right\}$$

ここで

$$\mu : \text{重力定数} = 398600.9 \text{ Km}^3/\text{sec}^2$$

$$a_e : \text{赤道半径} = 6378.142 \text{ Km}$$

$$a_p : \text{極半径} = 6356.757 \text{ Km}$$

$$f : \text{扁平率} = (a_e - a_p)/a_e = 1/298.255$$

$$P_n(\sin \phi) : \text{ルジャンドル関数} \quad (\text{補足1参照})$$

$$P_{nm}(\sin \phi) : \text{ルジャンドル陪関数}$$

$$J_n : \text{帯球係数 (Zonal Coefficient)} \quad (\text{補足2参照})$$

$$C_{nm}, S_{nm} : \text{縞球係数 (Tesseral Coefficient)}$$

地球の自転軸周りに対称の場合には

$$U = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \phi) \right\}$$

1) 直交慣性座標の場合

この重力ポテンシャル U を用いると重力加速度の成分は次式で表される。

$$g_x = -\frac{\partial U}{\partial X} = g_{eq} \frac{X}{r}$$

$$g_y = -\frac{\partial U}{\partial Y} = g_{eq} \frac{Y}{r}$$

$$g_z = -\frac{\partial U}{\partial Z} = g_{np} \frac{Z}{r}$$

ここで

$$g_{eq} = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ 1 - \frac{3J_2}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \phi - 1) \right\}$$

$$g_{np} = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ 1 - \frac{3J_2}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (5 \sin^2 \phi - 3) \right\}$$

地球が球形と仮定し緯度の影響を無視すれば重力ポテンシャル U は次のように簡単な形で表される。

$$U = \frac{\mu}{r}$$

$$g_x = -\frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{X}{r}$$

$$g_Y = -\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{Y}{r}$$

$$g_Z = -\frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{Z}{r}$$

$$g = \sqrt{g_X^2 + g_Y^2 + g_Z^2} = \frac{\mu}{r^2}$$

2) 球座標における重力加速度

重力加速度は重力ポテンシャル U の勾配として与えられる。重力ポテンシャルを地球を回転楕円体と仮定したとき、距離 r 、地心緯度 φ の関数として $U(r, \varphi)$ で表す。

$$\bar{g} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r - \frac{\partial U}{r \partial \varphi} \hat{e}$$

となる。または成分で表すと

$$g_r = -\frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial r}$$

$$g_\varphi = -\frac{\partial U(r, \varphi)}{r \partial \varphi}$$

重力ポテンシャル $U(r, \varphi)$ で J_4 項までとると

$$U = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \frac{J_2}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) - \frac{J_3}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin \varphi (5 \sin^2 \varphi - 3) - \frac{J_4}{8} \left(\frac{a}{r} \right)^4 (35 \sin^4 \varphi - 30 \sin^2 \varphi + 3) \right\}$$

これより重力加速度は

$$g_r = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) - 2 J_3 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin \varphi (5 \sin^2 \varphi - 3) - \frac{5}{8} J_4 \left(\frac{a}{r} \right)^4 (35 \sin^4 \varphi - 30 \sin^2 \varphi + 3) \right\}$$

$$g_\varphi = \frac{3\mu}{r^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \varphi \left\{ J_2 \sin \varphi + \frac{J_3}{2} \left(\frac{a}{r} \right) \sin \varphi (5 \sin^2 \varphi - 1) + \frac{5}{6} J_4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin \varphi (7 \sin^2 \varphi - 3) \right\}$$

(補足 1)

ルジャンドル関数: $P_n(X)$

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{dX^n} (X^2 - 1)^n$$

$$P_2(X) = \frac{1}{2} (3X^2 - 1)$$

$$P_3(X) = \frac{1}{2} X (5X^2 - 1)$$

$$P_4(X) = \frac{1}{8} (35X^4 - 30X^3 + 3)$$

⋮

(補足 2) 係数 J_n

J_n	値
J_2	1082.628×10^{-6}
J_3	-2.538
J_4	-1.593
J_5	-0.230

(補足 3) 地球楕円体モデル

	C-7	ベッセル(1841)	
赤道半径 a (Km)	6378.142	6377.397	
極半径 b (Km)	6356.757	6356.079	
平均半径 (Km)	6371.221	6371.221	
扁平率 f	1/298.253	1/299.153	$= (a - b)/a$
離心率 e	0.08181976	0.08169685	$= \sqrt{(a^2 - b^2)/a^2}$

重力定数

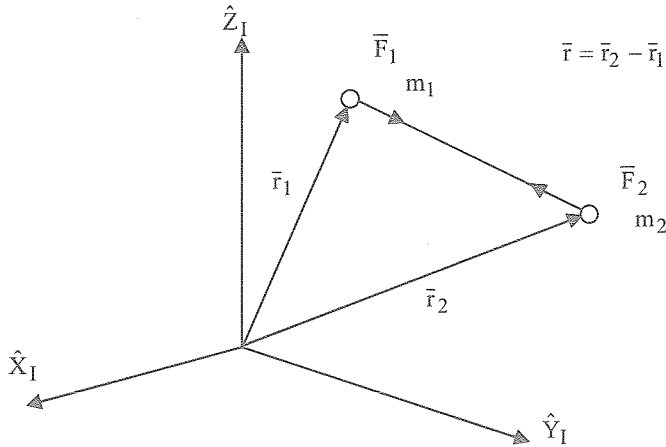
$$\mu = 3.986009 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

$$g_0 = 9.80665 \text{ m}/\text{sec}^2$$

$$\omega_e = 360.985647346 \text{ deg/day} = 7.29211585 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$$

付録-8 ケプラー軌道(2体問題)

慣性座標において質量 m_1, m_2 の物体を考えたとき、両物体に働く力(万有引力)は次のよう
にあらわされる。



$$\frac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} = G m_2 \frac{\bar{r}}{r^3} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \bar{r}_2}{dt^2} = -G m_1 \frac{\bar{r}}{r^3} \quad (2)$$

(1), (2) 式の差をとると

$$\frac{d^2 (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{dt^2} = -G(m_1 + m_2) \frac{\bar{r}}{r^3} \quad (3)$$

ここで

$\mu = G(m_1 + m_2)$ と置くと

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} + \frac{\mu \bar{r}}{r^3} = 0 \quad (4)$$

m_2 として地球を考え $m_2 = M$ (地球質量) とすると

$$\mu = GM(1 + m_1/M) \cong GM = 3.986005 \times 10^5 \text{ Km}^3/\text{sec}^2$$

(1) 角運動量積分とエネルギー積分

(a) 角運動量積分

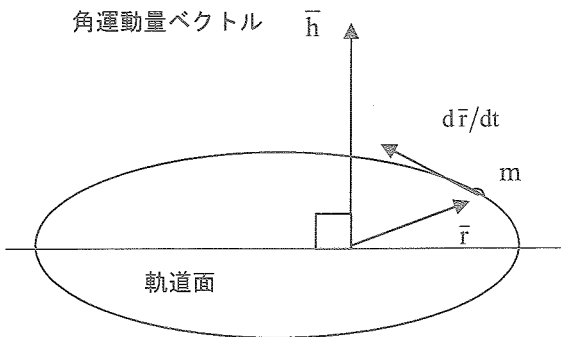
位置ベクトル \bar{r} と加速度ベクトル $d^2 \bar{r} / dt^2$ の外積を求めると

$$\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = 0 \quad (5)$$

これを積分して積分定数ベクトルを \vec{h} (角運動量ベクトル) と置く

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{h} \quad (\text{一定}) \quad (6)$$

\vec{h} ベクトル(角運動量ベクトル)は位置ベクトル \vec{r} と速度ベクトル $d\vec{r}/dt$ より成る軌道面に垂
 となる。



(b) エネルギー積分

(4) 式の両辺に $d\vec{r}/dt$ を掛けると(内積をとると)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\mu \vec{r}}{r^3} = 0$$

$(\vec{r} \cdot \vec{r}) = r^2$ に留意して上式を変形すると

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{2r^3} \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - \frac{\mu}{r} \right\} \quad (7)$$

(7) 式を積分して

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - \frac{\mu}{r} = C \quad (\text{一定}) \quad (8)$$

ここで $V \equiv d\vec{r}/dt$, $C \equiv -\mu/2a$

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a} \quad (9)$$

近地点速度, 遠地点速度はそれぞれ $r=r_a$, $r=r_p$ と置けば

$$V_p^2 = \frac{2\mu}{r_p} - \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e}$$

$$V_a^2 = \frac{2\mu}{r_a} - \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{a} \frac{1-e}{1+e}$$

(11) 運動方程式

(a) 運動方程式

(4)式から $d^2\bar{r}/dt^2 = -\mu\bar{r}/r^3$ また加速度 $d^2\bar{r}/dt^2$ と角運動量ベクトル $\bar{h} = \bar{r} \times (d\bar{r}/dt)$ の外積をとると

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \times \bar{h} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{r} \times \bar{h} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{r} \times \left(\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right) \quad (10)$$

右辺のベクトル3重積を分解すると、ただし $(\bar{r} \cdot \bar{r}) = r^2$

$$\bar{r} \times \left(\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \left(r \frac{dr}{dt} \right) \bar{r} - r^2 \frac{d\bar{r}}{dt}$$

これを(10)式に代入して

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \times \bar{h} = -\mu \left\{ \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \right) \bar{r} - \frac{1}{r} \frac{d\bar{r}}{dt} \right\} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{r}}{r} \right)$$

\bar{h} 一定であるから上式は次のように変形できる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} - \frac{\mu\bar{r}}{r} \right) = 0$$

上式を積分して積分定数ベクトルを $\mu\hat{e}$ と置く。

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} - \frac{\mu\bar{r}}{r} = \mu\hat{e} \quad (11)$$

ここで定数ベクトル \hat{e} は軌動面内で近地点方向にとる。

(11)式の両辺で \bar{r} ベクトルとの内積をとると

$$\bar{r} \cdot \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} \right) - \frac{\mu\bar{r} \cdot \bar{r}}{r} = \mu\bar{r} \cdot \hat{e} \quad (12)$$

ここで次の関係式を用いると

$$\bar{r} \cdot \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} \right) = \bar{h} \cdot \left(\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = h^2 \quad \bar{r} \cdot \bar{r} = r^2 \quad \bar{r} \cdot \hat{e} = r e \cos\theta$$

また $h^2 - \mu r = \mu r e \cos\theta$ より

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos\theta} \quad (13)$$

近地点、遠地点地心距離はそれぞれ $\theta=0, \theta=\pi$ と置いて

$$r_p = \frac{h^2/\mu}{1+e} \quad r_a = \frac{h^2/\mu}{1-e}$$

軌道長半径は

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{h^2/\mu}{1-e^2}$$

$$h^2/\mu = a(1-e^2)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad (13)'$$

ただし

θ : 真近点離角 (\bar{r} , \hat{e} ベクトルのなす角)

a : 軌道長半径

e : 離心率

(b) 離心ベクトル(レンツ Lenz ベクトル) \bar{e} :

離心ベクトル(レンツ Lenz ベクトル) \bar{e} は (11) 式から

$$\bar{e} = \frac{1}{\mu} \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} - \frac{\bar{r}}{r} \quad (11)'$$

いま軌道面に垂直なベクトル(角運動量ベクトル) \bar{h} との内積をとると

$$\bar{h} \cdot \bar{e} = \frac{1}{\mu} \bar{h} \cdot \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} \right) - \frac{\bar{h} \cdot \bar{r}}{r} = \frac{1}{\mu} \frac{d\bar{r}}{dt} (\bar{h} \times \bar{h}) - \frac{\bar{h} \cdot \bar{r}}{r} = 0 \quad (14)$$

0 となり離心ベクトル(レンツ Lenz ベクトル) \bar{e} は角運動量ベクトル \bar{h} に直交するベクトル, すなわち軌道面内にあることがわかる。

次に離心ベクトル \bar{e} の内積を計算する。

$$\bar{e} \cdot \bar{e} = \left(\frac{1}{\mu} \bar{v} \times \bar{h} - \frac{\bar{r}}{r} \right) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \bar{v} \times \bar{h} - \frac{\bar{r}}{r} \right) \quad (15)$$

ここで次の関係式を用いると

$$(\bar{v} \times \bar{h}) \cdot (\bar{v} \times \bar{h}) = (\bar{v} \cdot \bar{v})(\bar{h} \cdot \bar{h}) - (\bar{v} \cdot \bar{h})^2 = v^2 h^2 \quad (\bar{v} \cdot \bar{h} = 0)$$

$$\bar{r} \cdot (\bar{v} \times \bar{h}) = \bar{h} \cdot (\bar{r} \times \bar{v}) = h^2$$

(15) 式は次式で表される。

$$e^2 = 1 - \frac{h^2}{\mu^2} \left(\frac{2\mu}{r} - v^2 \right) \quad (16)$$

または

$$\mu^2 (1 - e^2) = h^2 \left(\frac{2\mu}{r} - v^2 \right) \quad (16)'$$

(c) 飛行時間と 平均近点離角

(11) 式の両辺に位置ベクトル \bar{r} の外積をとると

$$\frac{1}{\mu} \bar{r} \times \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} \right) - \frac{\bar{r} \times \bar{r}}{r} = \bar{r} \times \bar{e}$$

$$(\bar{r} \cdot \bar{h}) = 0 \quad \bar{r} \times \bar{r} = 0$$

$$\bar{r} \times \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{h} \right) = - \left(\bar{r} \frac{d\bar{r}}{dt} \right) \bar{h}$$

$$\frac{h}{\mu} \left(r \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = r e \sin \theta$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mu e}{h} \sin \theta$$

$$\frac{dr}{\sin \theta} = \frac{\mu e}{h} dt$$

ここで

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

を用いると

$$\frac{h}{\mu} \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} (1 - e \cos E) dE = dt$$

積分して

$$n = \frac{\mu \sqrt{1 - e^2}}{h a} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

と置くと

$$E - e \sin E = \frac{\mu \sqrt{1 - e^2}}{h a} t = n t$$

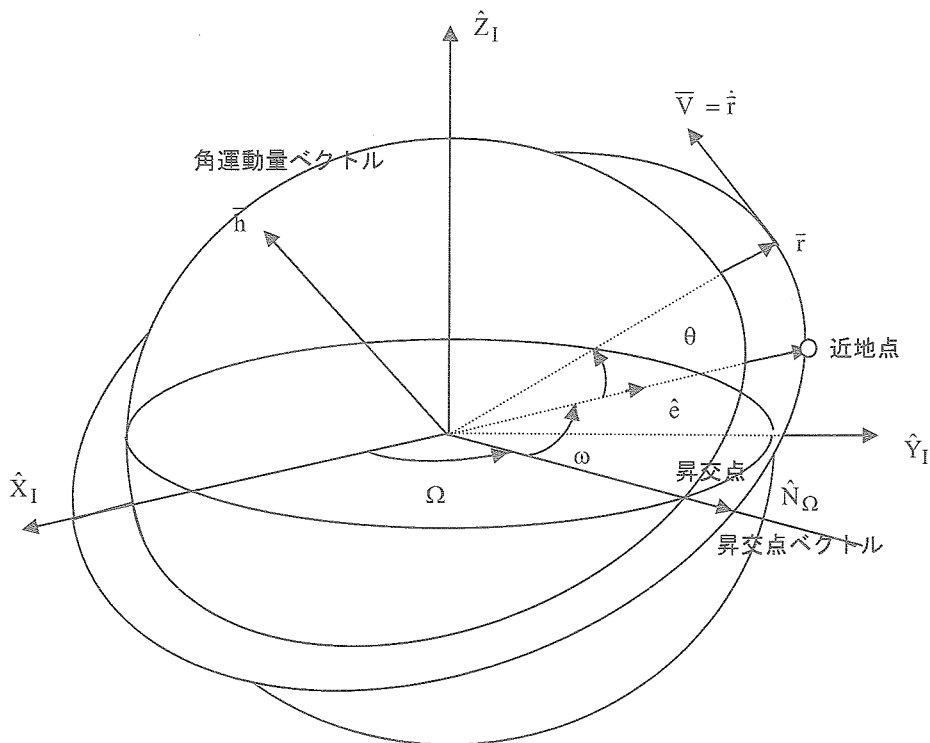
$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E - e \sin E)$$

ここで平均近点離角 (mean anomaly)

$$M = E - e \sin E$$

を用いると飛行時間 t は次式で表される。

$$t = M \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$



軌道パラメータ

慣性座標における \bar{r}_0, \bar{V}_0 の6要素が与えられていることから、軌道6要素は次式で表される。

(1) 角運動量ベクトル

$$\bar{h} = \bar{r} \times (d\bar{r}/dt) = \bar{r} \times \bar{V} \quad (\text{A-1})$$

単位角運動量ベクトル \hat{h} , および角運動量の値は次の通り。

$$\hat{h} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -r_Z & r_Y \\ r_Z & 0 & -r_X \\ -r_Y & r_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} r_Y V_Z - r_Z V_Y \\ r_Z V_X - r_X V_Z \\ r_X V_Y - r_Y V_X \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

$$h = \sqrt{(r_Y V_Z - r_Z V_Y)^2 + (r_Z V_X - r_X V_Z)^2 + (r_X V_Y - r_Y V_X)^2} \quad (\text{A-3})$$

(2) 昇交点ベクトル \hat{N}_Ω

赤道面内において地心から(単位)昇交点方向ベクトルは角運動量ベクトル \hat{h} と地球自転ベクトル \hat{Z} の外積から次式で表される。

$$\hat{N}_\Omega = \hat{h} \times \hat{Z} \quad (\text{A-4})$$

$$\hat{N}_\Omega = \begin{bmatrix} N_{N\Omega X} \\ N_{N\Omega Y} \\ N_{N\Omega Z} \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -h_Z & h_Y \\ h_Z & 0 & -h_X \\ -h_Y & h_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_Y/h \\ -h_X/h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

(3) 離心ベクトル(Lentz ベクトル) \bar{e} :

離心ベクトル(Lentz ベクトル)は近地点方向を規定するベクトルであって次式で定義できる。

$$\bar{e} = \frac{1}{\mu} \left(\bar{V} \times \bar{h} - \frac{\mu \bar{r}}{r} \right) = \frac{h}{\mu} (\bar{V} \times \bar{h}) - \frac{\bar{r}}{r}$$

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} e_X \\ e_Y \\ e_Z \end{bmatrix} = \frac{h}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & -V_Z & V_Y \\ V_Z & 0 & -V_X \\ -V_Y & V_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_X/r \\ r_Y/r \\ r_Z/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (h/\mu)(V_Y h_Z - V_Z h_Y) - r_X/r \\ (h/\mu)(V_Z h_X - V_X h_Z) - r_Y/r \\ (h/\mu)(V_X h_Y - V_Y h_X) - r_Z/r \end{bmatrix}$$

$$e^2 = \bar{e} \cdot \bar{e} = 1 - \frac{h^2}{\mu^2} \left(\frac{2\mu}{r} - V^2 \right) = 1 - \frac{h^2}{\mu a}$$

(4) 軌道長半径 a :

エネルギー保存則 $V^2 - 2\mu/r = -\mu/a$ から

$$a = \frac{\mu}{2\mu/r - V^2} : \text{軌道長半径}$$

(5) 軌道傾斜角 i :

$\cos i = h_X/h$ から

$$i = \cos^{-1} \left(\frac{r_X V_Y - r_Y V_X}{h} \right)$$

(6) 昇交点赤経 Ω :

$\tan \Omega = -h_X/h_Y$ から

$$\Omega = \tan^{-1} \left(\frac{r_Z V_Y - r_Y V_Z}{r_Z V_X - r_X V_Z} \right)$$

(7) 離心率 e :

$$e^2 = \bar{e} \cdot \bar{e} = 1 - \frac{h^2}{\mu^2} \left(\frac{2\mu}{r} - V^2 \right) = 1 - \frac{h^2}{\mu a} \text{ から}$$

$$e = \sqrt{1 - h^2/\mu a}$$

(8) 近地点引数 ω :

軌道面内で昇交点ベクトルから近地点ベクトルまでの角度であるから離心ベクトルと昇交点ベクトルの内積 $\cos \omega = \hat{e} \cdot \hat{N}_\Omega$ で与えられる。これより近地点引数 ω は次式で表される。

$$\omega = \cos^{-1} \left(\frac{e_X h_Y - e_Y h_X}{e h} \right)$$

(9) 平均近点離角 M :

$$e \sin E = \frac{r \dot{r}}{\sqrt{\mu a}} \quad \tan E = \frac{r \dot{r}}{\sqrt{\mu a}} \frac{ae}{a-r} \text{ から}$$

$$M = E - e \sin E$$

付録-9 再突入宇宙機の軌道 (f, g 級数法)

空気力を無視した場合, 宇宙機の位置, 速度の初期値を $\bar{r}_0, \dot{\bar{r}}_0$ としたとき機体の位置ベクトルは真近点離角 E の関数として

$$\bar{r} = \bar{r}_0 f(E) + \dot{\bar{r}}_0 g(E)$$

で表され Lagrange (1782) この $f(E), g(E)$ 関数により, 宇宙機の軌道が記述できる。

宇宙機の位置ベクトル \bar{r} を時間 t に関して級数展開すると

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \dot{\bar{r}}_0 \tau + \frac{1}{2!} \ddot{\bar{r}}_0 \tau^2 + \frac{1}{3!} \dddot{\bar{r}}_0 \tau^3 + \dots \quad (A1)$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_0 + \ddot{\bar{r}}_0 \tau + \frac{1}{2!} \dddot{\bar{r}}_0 \tau^2 + \dots \quad (A2)$$

ただし $\tau = t - t_0$

2体問題において次式が成り立つ。

$$\ddot{\bar{r}} + \mu \frac{\bar{r}}{r^3} = 0 \quad (A3)$$

上式を微分して $r = r_0$ における微係数を求めると

$$\ddot{\bar{r}}_0 = -\mu \frac{1}{r_0^3} \bar{r}_0 \quad (A4)$$

$$\dddot{\bar{r}}_0 = -\mu \frac{1}{r_0^3} \dot{\bar{r}}_0 + 3\mu \frac{\dot{r}_0}{r_0^4} \bar{r}_0 \quad (A5)$$

(A4), (A5) 式の微係数 (A1), (A2) 式に代入して

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \left\{ 1 - \left(\frac{\mu}{2r_0^3} \right) \tau^2 + \left(\frac{\mu \dot{r}_0}{2r_0^4} \right) \tau^3 + \dots \right\} \bar{r}_0 + \left\{ \tau - \left(\frac{\mu}{6r_0^3} \right) \tau^3 + \left(\frac{\mu \dot{r}_0}{6r_0^4} \right) \tau^4 + \dots \right\} \dot{\bar{r}}_0 \\ &= f \bar{r}_0 + g \dot{\bar{r}}_0 \end{aligned}$$

ここで

$$f = \left\{ 1 - \left(\frac{\mu}{2r_0^3} \right) \tau^2 + \left(\frac{\mu \dot{r}_0}{2r_0^4} \right) \tau^3 + \dots \right\} = 1 + f_2 \tau^2 + f_3 \tau^3 + f_4 \tau^4 + \dots$$

$$g = \left\{ \tau - \left(\frac{\mu}{6r_0^3} \right) \tau^3 + \left(\frac{\mu \dot{r}_0}{6r_0^4} \right) \tau^4 + \dots \right\} = \tau + g_3 \tau^3 + g_4 \tau^4 + \dots$$

また重力定数 μ は J_2 項までとると $\mu = 1 - (J_2/2r_0^2)(1 - 3\sin^2 \varphi_c)$

$$f_2 = -\frac{\mu}{2r_0^3} \quad g_2 = \frac{1}{3} f_2$$

$$f_3 = -\frac{\mu}{2r_0^4} \dot{r}_0 \quad g_4 = \frac{1}{2} f_3$$

$$f_4 = -\frac{\mu^2}{24r_0^4} \left(4 - 15 \frac{r_0}{\mu} \dot{r}_0 - 3 \frac{r_0}{a} \right) \quad g_5 = \frac{3}{5} f_4 - \frac{1}{15} f_2^2$$

$$f_5 = -\frac{\mu^2}{8r_0^7} \dot{r}_0 \left(4 - 7 \frac{r_0}{\mu} \dot{r}_0 - 3 \frac{r_0}{a} \right) \quad g_6 = \frac{2}{3} f_5 - \frac{1}{6} f_2 f_3$$

次に f, g 級数は近地点基準楕円座標 $[\hat{\omega}]$ で表すと級数の形ではなく閉じた形で表示できる。以下 f, g 級数を閉じた形で示す。

$$\bar{r} = X_{\omega} \hat{X}_{\omega} + Y_{\omega} \hat{Y}_{\omega}$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{X}_{\omega} \hat{X}_{\omega} + \dot{Y}_{\omega} \hat{Y}_{\omega}$$

初期値は $t = t_0$ で

$$\bar{r}_0 = X_{\omega 0} \hat{X}_{\omega} + Y_{\omega 0} \hat{Y}_{\omega} \quad \dot{\bar{r}}_0 = \dot{X}_{\omega 0} \hat{X}_{\omega} + \dot{Y}_{\omega 0} \hat{Y}_{\omega}$$

$\bar{r} = f \bar{r}_0 + g \dot{\bar{r}}_0$ であるから

$$f = \frac{\bar{r} \times \dot{\bar{r}}_0}{\bar{r}_0 \times \dot{\bar{r}}_0} = \frac{(X_{\omega} \hat{X}_{\omega} + Y_{\omega} \hat{Y}_{\omega}) \times (\dot{X}_{\omega 0} \hat{X}_{\omega} + \dot{Y}_{\omega 0} \hat{Y}_{\omega})}{(X_{\omega 0} \hat{X}_{\omega} + Y_{\omega 0} \hat{Y}_{\omega}) \times (\dot{X}_{\omega 0} \hat{X}_{\omega} + \dot{Y}_{\omega 0} \hat{Y}_{\omega})}$$

$$g = \frac{\bar{r} \times \bar{r}_0}{\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{r}_0} = \frac{\bar{r}_0 \times \bar{r}}{\bar{r}_0 \times \dot{\bar{r}}_0} = \frac{(X_{\omega 0} \hat{X}_{\omega} + Y_{\omega 0} \hat{Y}_{\omega}) \times (X_{\omega} \hat{X}_{\omega} + Y_{\omega} \hat{Y}_{\omega})}{(X_{\omega 0} \hat{X}_{\omega} + Y_{\omega 0} \hat{Y}_{\omega}) \times (\dot{X}_{\omega 0} \hat{X}_{\omega} + \dot{Y}_{\omega 0} \hat{Y}_{\omega})}$$

ここで X_{ω}, Y_{ω} を真近点離角 E で表すと

$$X_{\omega} = a(\cos E - e)$$

$$Y_{\omega} = \sqrt{ap} \sin E$$

$$\dot{X}_{\omega} = -a \sin E \dot{E}$$

$$\dot{Y}_{\omega} = \sqrt{ap} \cos E \dot{E}$$

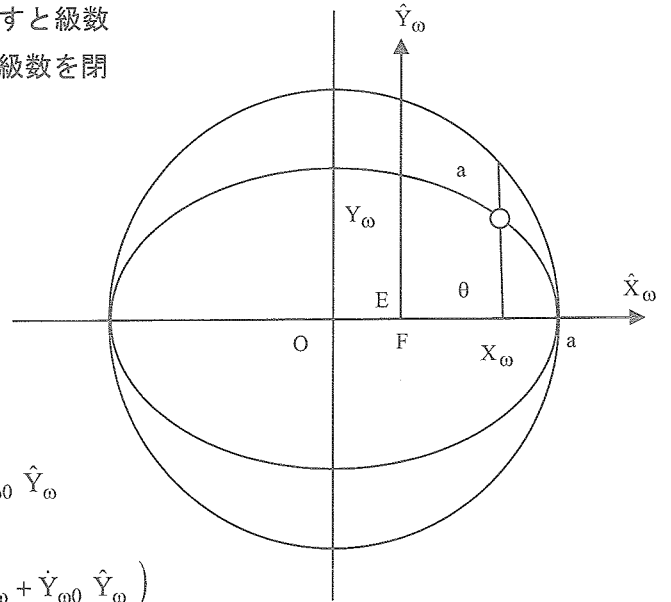
$$\text{ただし } p = a(1 - e^2)$$

$$\dot{E} = \sqrt{\mu/a} / r$$

前記 f, g に代入して

$$f = \frac{-Y_{\omega} \dot{X}_{\omega 0} + X_{\omega} \dot{Y}_{\omega 0}}{-Y_{\omega 0} \dot{X}_{\omega 0} + X_{\omega 0} \dot{Y}_{\omega 0}} = \frac{\sin E \sin E_0 + \cos E \cos E_0 - e \cos E_0}{1 - e \cos E_0}$$

$$g = \frac{-Y_{\omega 0} X_{\omega} + X_{\omega 0} Y_{\omega}}{-Y_{\omega 0} \dot{X}_{\omega 0} + X_{\omega 0} \dot{Y}_{\omega 0}} = \frac{\sin E \cos E_0 - \cos E \sin E_0 - e(\sin E - \sin E_0)}{(1 - e \cos E_0) \dot{E}_0}$$



$$\text{ここで } r_0 = a(1 - e \cos E_0), \quad (1 - e \cos E_0) \dot{E}_0 = \sqrt{\mu/a^3}$$

以上より f, g は真近点離角の関数として閉形式(Closed Form)で表される。

$$f = \frac{\cos(E - E_0) - e \cos E_0}{1 - e \cos E_0}$$

$$g = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \{ \sin(E - E_0) - e(\sin E - \sin E_0) \}$$

落下点の位置の解法

落下点の位置 \bar{r}_P は次の繰り返し演算により得られる。

1) ステップ1: 落下点の地心緯度を仮定する仮定値を φ'_c とする

$$\varphi_c = \varphi'_c \quad (8)$$

2) ステップ2: 以下の計算を行う

(1), (4)式から角運動量 h , 軌道長半径 a , 離心率 e が算出できる。

$$h = \sqrt{(r_{Y0} V_{Z0} - r_{Z0} V_{Y0})^2 + (r_{Z0} V_{X0} - r_{X0} V_{Z0})^2 + (r_{X0} V_{Y0} - r_{Y0} V_{X0})^2} : \text{角運動量 (9)}$$

$$a = \frac{\mu}{2\mu/r_0 - V_0^2} : \text{軌道長半径 (10)}$$

$$e = \sqrt{1 - h^2/\mu a} : \text{離心率 (11)}$$

(10), (11) 式の a, e から落下点地表面の地心距離 R_{SL} は次式で表される。

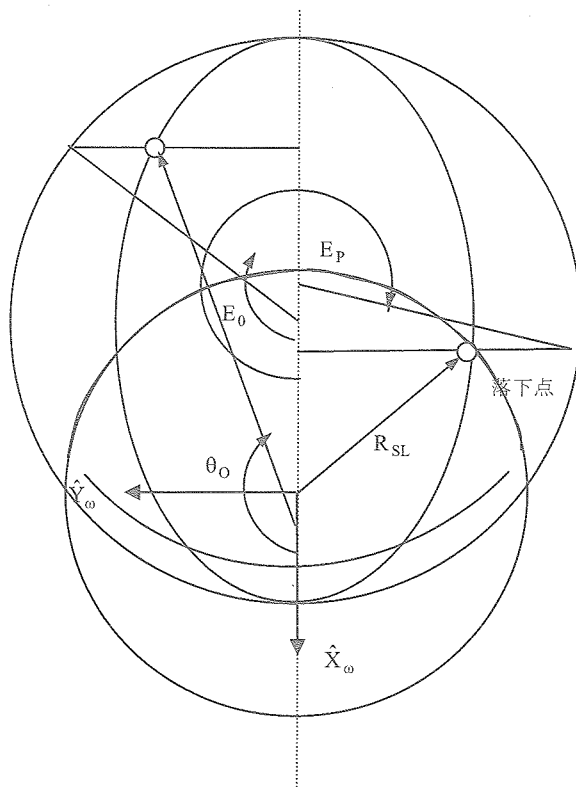
$$R_{SL} = a \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 + e^2 \cos^2 \varphi_c}} \quad (12)$$

この R_{SL} を用いて落下点の離心近点離角 E_P は

$$E_P = \cos^{-1} \left(\frac{a - R_{SL}}{e a} \right) \quad (13)$$

この E_P を用いて $f(E), g(E)$ を計算する。

$$\bar{r}_P = \begin{bmatrix} r_{XP} \\ r_{YP} \\ r_{ZP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{X0} f(E_P) + V_{X0} g(E_P) \\ r_{Y0} f(E_P) + V_{Y0} g(E_P) \\ r_{Z0} f(E_P) + V_{Z0} g(E_P) \end{bmatrix} \quad (14)$$



落下点の位置ベクトル \vec{r}_p が得られるとこの地心緯度 φ_c は次式で表される。

$$\varphi_c = \tan^{-1} \frac{r_{ZP}}{\sqrt{r_{XP}^2 + r_{YP}^2}} \quad (15)$$

この地心緯度 φ_c が最初に近似した φ'_c と一致すれば計算を終了する。一致しなければ

$\varphi'_c = \varphi_c$ とおいて 1) ステップ 1 に戻る。

3) ステップ 3 : 収束後の処理

測地緯度 φ_D の計算

$$\begin{aligned} \tan \varphi_D &= \tan \varphi_c / (1 - e^2) \text{ から} \\ \varphi_D &= \tan^{-1} \left\{ \tan \varphi_c / (1 - e^2) \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

落下点までの経過時間 T_p :

$M = E - e \sin E$: 平均近点離角 から次式を得る。

$$M - M_0 = n(t - t_0) = \sqrt{a^3/\mu} (t - t_0) \quad (17)$$

$t = t_0$ からの経過時間を T_p とすれば

$$T_p = (t_p - t_0) = \sqrt{a^3/\mu} \left\{ (E_p - E_0) - e (\sin E_p - \sin E_0) \right\} \quad (18)$$

落下点経度 λ_p の計算

慣性座標 $[\hat{I}]$ を基準として地球中心回転座標 $[\hat{E}]$ への座標変換を次式で表す。

$$[\hat{E}] = [D_r^E] [\hat{I}] \quad (19)$$

$$[D_r^E] = [\omega_E(t - t_0)]_z : \text{座標変換行列} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} r_{XPE} \\ r_{YPE} \\ r_{ZPE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_E T_p) & \sin(\omega_E T_p) & 0 \\ -\sin(\omega_E T_p) & \cos(\omega_E T_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{XP} \\ r_{YP} \\ r_{ZP} \end{bmatrix}$$

上式から

$$\begin{aligned} r_{XPE} &= r_{XP} \cos(\omega_E T_p) + r_{YP} \sin(\omega_E T_p) \\ r_{YPE} &= -r_{XP} \sin(\omega_E T_p) + r_{YP} \cos(\omega_E T_p) \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式から経度 λ_p の正接は次式で表される。

$$\tan \lambda_p = \frac{r_{YPE}}{r_{XPE}} = \frac{-r_{XP} \sin(\omega_E T_p) + r_{YP} \cos(\omega_E T_p)}{r_{XP} \cos(\omega_E T_p) + r_{YP} \sin(\omega_E T_p)} = \frac{(r_{YP}/r_{XP}) - \tan(\omega_E T_p)}{1 + (r_{YP}/r_{XP}) \sin(\omega_E T_p)} \quad (22)$$

上式において慣性座標における経度引数を λ_{PI} とすれば $r_{YP}/r_{XP} = \tan \lambda_{PI}$

$$\tan \lambda_p = \tan(\lambda_{PI} - \omega_E T_p) \quad (23)$$

落下点経度 λ_p は次式で表される。

$$\lambda_p = \lambda_{PI} - \omega_E T_p \quad (24)$$

付録-10 積分指数関数について

積分指数関数公式

積分指数関数(指数積分) \overline{E}_i は、実数 $x \neq 0$ に対し、(1)式で定義される。

$$\overline{E}_i(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du \quad (\text{ただし、} x > 0 \text{ のとき積分は } u=0 \text{ において主値とする}) \quad (1)$$

e^u の Taylor 展開 $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ を用いて

$$\begin{aligned} \int \frac{e^u}{u} du &= \int \frac{1}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} du = \int \frac{1}{u} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \right) du = \int \left(\frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{n!} \right) du \\ &= \ln|u| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n \cdot n!} \quad (2) \end{aligned}$$

であるが、(2)の積分は $u=0$ において不連続であるため、 $x > 0$ のとき

$$\overline{E}_i(x) = \left[\ln|u| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n \cdot n!} \right]_{u=a \rightarrow -\infty}^{u=b \rightarrow 0} + \left[\ln|u| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n \cdot n!} \right]_{u=c \rightarrow 0}^{u=x} \quad (b < 0, c > 0)$$

$$= \lim_{b \rightarrow 0} \left(\ln|b| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n \cdot n!} \right) - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\ln|a| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n \cdot n!} \right) + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} - \lim_{c \rightarrow 0} \left(\ln|c| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n \cdot n!} \right)$$

$$= \lim_{b \rightarrow 0} \ln|b| - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\ln|a| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n \cdot n!} \right) + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} - \lim_{c \rightarrow 0} \ln|c| \quad (3)$$

となる。ここで、第1項 $\rightarrow -\infty$ 、第4項 $\rightarrow +\infty$ であるため、(3)式は通常は $-\infty + \infty$ で不定となる。

(1)式の“ $u=0$ において主値とする”とは、(3)式において b と c が 0 に近づく速さを同じにすることを意味する。従って、 $b = -c$ が成り立ち

$$\overline{E}_i(x) = \lim_{c \rightarrow 0} \ln|-c| - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\ln|a| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n \cdot n!} \right) + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} - \lim_{c \rightarrow 0} \ln|c|$$

$$= - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\ln|a| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n \cdot n!} \right) + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} \quad (4)$$

となる。

$x < 0$ の場合は積分は連続であり

$$\overline{E}_i(x) = \left[\ln|u| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n \cdot n!} \right]_{u=a \rightarrow -\infty}^{u=x} = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\ln|a| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n \cdot n!} \right) \quad (5)$$

となり、 $x > 0$ の場合 ((4)式) と一致する。

極限 $\lim_{a \rightarrow -\infty} - \left(\ln|a| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n \cdot n!} \right)$ は Euler 定数と呼ばれる値 γ に収束する (証明は後述)。

$$\left(\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.5772 \dots \right)$$

したがって、積分指数関数の公式

$$\boxed{\overline{E}_i(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du = \gamma + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}} \quad (6)$$

が成立する。

これより、有用な式

$$\boxed{\int_{x_E}^x \frac{e^u}{u} du = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du - \int_{-\infty}^{x_E} \frac{e^u}{u} du = \overline{E}_i(x) - \overline{E}_i(x_E) = \ln \left| \frac{x}{x_E} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n - x_E^n}{n \cdot n!}} \quad (7)$$

が導かれる。

また、 e^u の Taylor 展開 $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ を用いることにより

$$\begin{aligned} E_i(x) &\equiv \int_0^x \frac{e^u - 1}{u} du = \int_0^x \frac{1}{u} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} - 1 \right) du = \int_0^x \frac{1}{u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} du = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{n!} du = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n \cdot n!} \right]_0^x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} = \overline{E}_i(x) - \gamma - \ln|x| \quad (8) \end{aligned}$$

$$\approx x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots$$

積分指数関数テーブル

次の積分指数関数値を表-1、図-1 に示す。

$$K_{table} \equiv \int_{0.0001}^x \frac{e^x}{x} dx \quad (9)$$

$0 < x_\infty < 0.0001$ の場合、 $[x_\infty, x]$ 間の積分は次式で表される。

$$K = \int_{x_\infty}^x \frac{e^x}{x} dx = \int_{x_\infty}^{0.0001} \frac{e^x}{x} dx + \int_{0.0001}^x \frac{e^x}{x} dx \quad (10)$$

第2項は、数値表から求める。第1項は、(7)式より

$$\int_{x_\infty}^{0.0001} \frac{e^x}{x} dx = \ln \left| \frac{0.0001}{x_\infty} \right| + N - \left(x_\infty + \frac{x_\infty^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x_\infty^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right)$$

$$N = 0.0001 + \frac{(0.0001)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(0.0001)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \approx 0.0001$$

で表される。

$x_\infty < 0.0001$ であるから、 x_∞ の2次以上の項を省略して

$$K = \int_{x_\infty}^x \frac{e^x}{x} dx \approx K_{table} + \ln \left| \frac{0.0001}{x_\infty} \right| + (0.0001 - x_\infty) \quad (11)$$

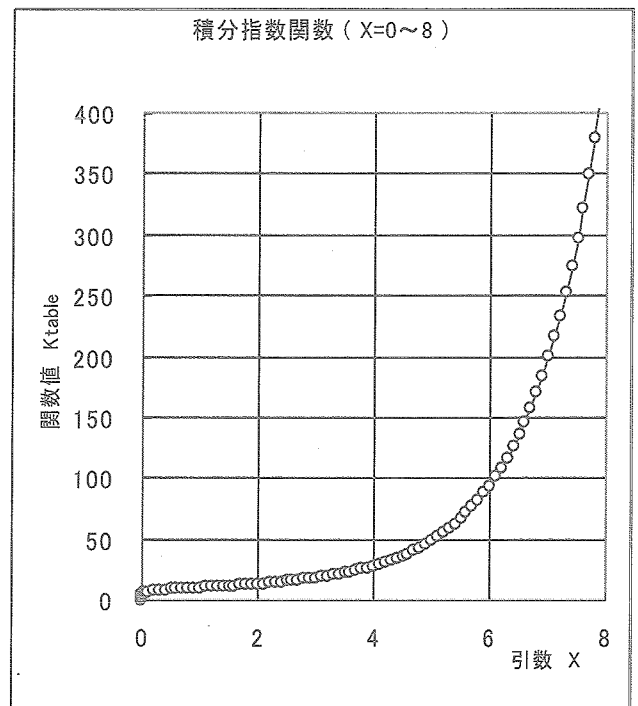
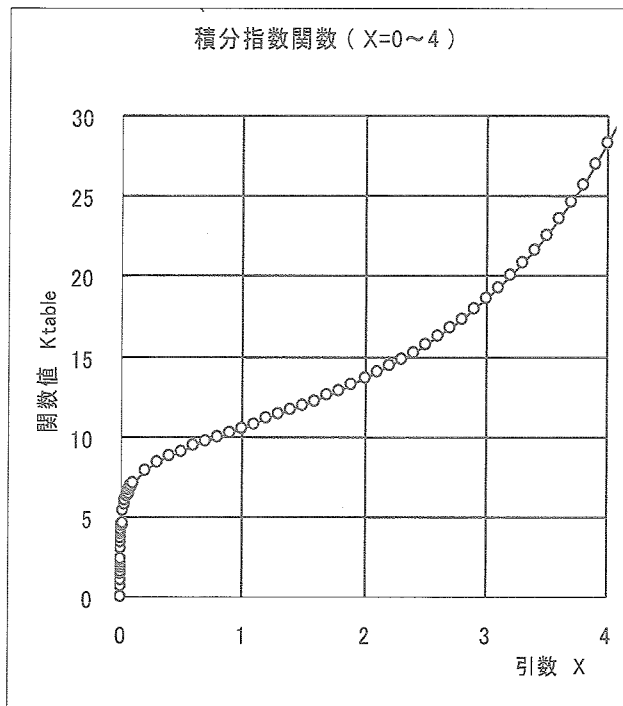


図-1 積分指数関数 K_{table}

表-1(1/2) 積分指数関数テーブル $K_{table} = \int_{0.0001}^x \frac{e^x}{x} dx$

x	K_{table}	x	K_{table}	x	K_{table}
0.0001	0.0000	0.6	9.4029	3.8	25.728
0.0002	0.6932	0.7	9.6979	3.9	26.949
0.0003	1.0988	0.8	9.9804	4.0	28.264
0.0004	1.3866	0.9	10.256	4.1	29.681
0.0005	1.6098	1.0	10.528	4.2	31.210
0.0006	1.7923	1.1	10.800	4.3	32.860
0.0007	1.9465	1.2	11.075	4.4	34.642
0.0008	2.0801	1.3	11.354	4.5	36.567
0.0009	2.1980	1.4	11.640	4.6	38.647
0.001	2.3035	1.5	11.934	4.7	40.897
0.002	2.9976	1.6	12.238	4.8	43.331
0.003	3.4041	1.7	12.554	4.9	45.965
0.004	3.6928	1.8	12.883	5.0	48.818
0.005	3.9169	1.9	13.227	5.1	51.909
0.006	4.1003	2.0	13.587	5.2	55.258
0.007	4.2554	2.1	13.966	5.3	58.889
0.008	4.3899	2.2	14.366	5.4	62.826
0.009	4.5087	2.3	14.787	5.5	67.099
0.01	4.6151	2.4	15.234	5.6	71.735
0.02	5.3183	2.5	15.707	5.7	76.768
0.03	5.7339	2.6	16.209	5.8	82.234
0.04	6.0318	2.7	16.743	5.9	88.171
0.05	6.2651	2.8	17.312	6.0	94.623
0.06	6.4577	2.9	17.919	6.1	101.64
0.07	6.6222	3.0	18.567	6.2	109.26
0.08	6.7661	3.1	19.259	6.3	117.55
0.09	6.8944	3.2	20.000	6.4	126.57
0.1	7.0102	3.3	20.794	6.5	136.38
0.2	7.8113	3.4	21.645	6.6	147.06
0.3	8.3304	3.5	22.558	6.7	158.68
0.4	8.7378	3.6	23.539	6.8	171.34
0.5	9.0872	3.7	24.594	6.9	185.12

表-1(2/2) 積分指数関数テーブル $K_{table} = \int_{0.0001}^x \frac{e^x}{x} dx$

x	K_{table}	x	K_{table}
7.0	200.14	10.0	2500.9
7.1	216.50	10.5	3892.4
7.2	234.32	11.0	6080.0
7.3	253.75	11.5	9526.8
7.4	274.93	12.0	14968
7.5	298.02	12.5	23574
7.6	323.20	13.0	37206
7.7	350.67	13.5	58836
7.8	380.64	14.0	93201
7.9	413.33	14.5	1.4787×10^5
8.0	449.01	15.0	2.3496×10^5
8.1	487.95	15.5	3.7385×10^5
8.2	530.46	16.0	5.9557×10^5
8.3	576.87	16.5	9.4989×10^5
8.4	627.55	17.0	1.5166×10^6
8.5	682.90	17.5	2.4240×10^6
8.6	743.35	18.0	3.8779×10^6
8.7	809.38	18.5	6.2094×10^6
8.8	881.53	19.0	9.9509×10^6
8.9	960.36	19.5	1.5960×10^7
9.0	1046.5	20.0	2.5616×10^7
9.1	1140.7	20.5	4.1143×10^7
9.2	1243.6	21.0	6.6127×10^7
9.3	1356.1	21.5	1.0635×10^8
9.4	1479.1	22.0	1.7114×10^8
9.5	1613.7	22.5	2.7557×10^8
9.6	1760.8	23.0	4.4397×10^8
9.7	1921.7	23.5	7.1563×10^8
9.8	2097.7	24.0	1.1541×10^9
9.9	2290.2	24.5	1.8622×10^9

ガンマ関数

(6)式の完全な証明((4)式、(5)式が(6)式となること)のために、ガンマ関数 Γ を導入する。

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x \neq 0, -1, -2, -3, \dots) \quad (12)$$

ガンマ関数は、以下のようにも表すことができる。

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (13)$$

(13)式の証明

$$F(x, n) \equiv \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \quad (14)$$

とすると、自然対数の底 e の定義 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ より得られる $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$

を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x, n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x) \quad (15)$$

一方、 $u = \frac{t}{n}$ とおくと $du = \frac{dt}{n}$ であり

$$F(x, n) = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$$

部分積分を行い

$$\begin{aligned} \frac{F(x, n)}{n^x} &= \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = \left[\frac{1}{x} (1-u)^n u^x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{x} (1-u)^{n-1} (-1) u^x du \\ &= \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du \quad (n > 0) \quad (16) \end{aligned}$$

これを繰り返して

$$\begin{aligned} \frac{F(x, n)}{n^x} &= \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x+1} \cdot \frac{n-2}{x+2} \cdots \frac{1}{x+n-1} \int_0^1 u^{x+n-1} du \\ &= \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} \left[\frac{1}{x+n} u^{x+n} \right]_0^1 \\ &= \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)(x+n)} \quad (17) \end{aligned}$$

従って、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)(x+n)} \quad (18)$$

(15)式、(18)式より、(13)式が成り立つ。

階乗関数

$x(\neq -1, -2, -3, \dots)$ を実数とすると、 $x\Gamma(x)$ を $x!$ で表し、階乗関数と呼ぶ。

(13)式より

$$x! = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \frac{n!}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \quad (19)$$

であるから

$$\begin{aligned} x! &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \frac{n!}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \cdot \frac{n}{x+n+1} \cdot \frac{x+n+1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{x+1} \frac{n!}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n+1)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{x+1} \frac{n!}{(x+1)((x+1)+1) \cdots ((x+1)+n)} \\ &= \Gamma(x+1) \quad (20) \end{aligned}$$

これより

$$x! = \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x \cdot (x-1)! \quad (21)$$

また、(19)式より

$$0! = \lim_{n \rightarrow \infty} n^0 \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdots n} = 1 \quad (22)$$

(21)式、(22)式より、 x が整数 $n \geq 0$ のとき、階乗関数は通常の意味の階乗 $n!$ と一致する。

ディガンマ関数

(13)式の両辺の対数をとる

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ n^x \frac{n!}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ x \ln n + \ln n! - \ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x+2| - \cdots - \ln|x+n| \} \quad (23) \end{aligned}$$

この微分 $\Psi(x)$ をディガンマ関数と呼ぶ。

$$\Psi(x) \equiv \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \cdots - \frac{1}{x+n} \right\} \quad (24)$$

このとき

$$\begin{aligned} \Psi(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{1+n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} \right\} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} \\ &= -\gamma \quad (25) \end{aligned}$$

$$\left(\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.5772 \cdots \right)$$

積分指数関数公式の証明

(6)式の証明であるが、(4)式と(5)式の一致により、 $x < 0$ について示せば十分である。

$x < 0$ に対し

$$\overline{E}_i(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du$$

を考える。 $u = -t$ とおくと $du = -dt$ であり

$$\overline{E}_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{-t} (-dt) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (26)$$

となる。ここで、 $a > 0$ に対し

$$\overline{E}_i(x) = - \lim_{a \rightarrow 0} \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \int_x^0 e^{-t} t^{a-1} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \right\} \quad (27)$$

とする。 e^x の Taylor 展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 及び(12)式より

$$\begin{aligned} \overline{E}_i(x) &= - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \int_x^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} t^{a-1} dt + \Gamma(a) \right\} \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \int_x^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{a+n-1} dt + \Gamma(a) \right\} = - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{a+n} t^{a+n} \right]_{-x}^0 + \Gamma(a) \right\} \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{a+n} (-x)^{a+n} + \Gamma(a) \right\} = - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ - \frac{1}{a} (-x)^a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{a+n} (-x)^{a+n} + \Gamma(a) \right\} \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{a\Gamma(a) - (-x)^a}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{a+n}}{(a+n) \cdot n!} \right\} = - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{a\Gamma(a) - (-x)^a}{a} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} \quad (28) \end{aligned}$$

l'Hospital (ロピタル) の定理、及び $x < 0$ より

$$\begin{aligned} \overline{E}_i(x) &= - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{d}{da} [a\Gamma(a) - (-x)^a]}{\frac{d}{da} a} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} = - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{da} a\Gamma(a) - (-x)^a \ln(-x) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{da} a\Gamma(a) \right\} + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} \quad (29) \end{aligned}$$

(21)式、(24)式、及び(22)式、(25)式により

$$\begin{aligned} - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{da} a\Gamma(a) \right\} &= - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{da} \Gamma(a+1) \right\} = - \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{da} e^{\ln \Gamma(a+1)} \right\} = - \lim_{a \rightarrow 0} e^{\ln \Gamma(a+1)} \left\{ \frac{d}{da} \ln \Gamma(a+1) \right\} \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0} \Gamma(a+1) \cdot \Psi(a+1) = -\Gamma(1) \cdot \Psi(1) = -0! \cdot (-\gamma) = \gamma \quad (30) \end{aligned}$$

(29)式、(30)式により

積分指数関数公式

$$\overline{E}_i(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^u}{u} du = \gamma + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$$

が証明された。

付録-11 楕円積分関数について

積分 I : 次の不定積分 J_1 を求める。

$$J_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1+a \sin \gamma}} d\gamma$$

$$\frac{dJ_1}{d\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1+a \sin \gamma}} \text{ であるから、}$$

変数変換

$$\gamma = \pi/2 - \gamma'$$

$$k^2 = (1+a)/2a$$

$$ku = \sin(\gamma'/2)$$

により

$$k \frac{du}{d\gamma'} = \frac{1}{2} \cos \frac{\gamma'}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma'}{2}} = \frac{\sqrt{1 - k^2 u^2}}{2}$$

$$d\gamma/d\gamma' = -1$$

$$\frac{dJ_1}{du} = \frac{dJ_1}{d\gamma} \frac{d\gamma}{d\gamma'} \frac{d\gamma'}{du} = - \frac{1}{\sqrt{1+a(1-2k^2u^2)}} \frac{2k}{\sqrt{1-k^2u^2}} = - \frac{2}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

$$J_1 = - \frac{2}{\sqrt{2a}} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} du + Const.$$

となり、

$$F(u, k) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} du \quad : \text{第1種楕円積分}$$

を用いて

$$J_1 = - \frac{2}{\sqrt{2a}} F(u, k) + Const.$$

となる。

積分 II : 次の不定積分 J_2 を求める。

$$J_2 = \int \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1+a \sin \gamma}} d\gamma$$

$$\frac{dJ_2}{d\gamma} = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1+a \sin \gamma}} \text{ であるから、同じく変数変換により}$$

$$\frac{dJ_2}{du} = \frac{dJ_2}{d\gamma} \frac{d\gamma}{d\gamma'} \frac{d\gamma'}{du} = - \frac{\cos \gamma'}{\sqrt{1+a \cos \gamma'}} \frac{2k}{\sqrt{1-k^2u^2}}$$

$$\cos \gamma' = 1 - 2\sin^2(\gamma'/2) = 1 - 2k^2u^2$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ_2}{du} &= \frac{1-2k^2u^2}{\sqrt{1+d(1-2k^2u^2)}} \frac{2k}{\sqrt{1-k^2u^2}} = \frac{2}{\sqrt{2a}} \frac{1-2k^2u^2}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2a}} \frac{1-2(1-k^2u^2)}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}} = \frac{2}{\sqrt{2a}} \left(\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} - 2 \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}} \right) \end{aligned}$$

∴

$$J_2 = \frac{2}{\sqrt{2a}} \{ F(u, k) - 2E(u, k) \} + Const.$$

ただし

$$E(u, k) = \int_0^u \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}} du \quad : \text{第2種楕円積分}$$

である。

$u = \sin \theta$ と置くと楕円積分は次のようにも表される。

$$du = \cos \theta d\theta$$

$$du = \cos \theta d\theta = \sqrt{1-u^2} d\theta$$

$$F(\sin \theta, k) = F(u, k) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

$$E(\sin \theta, k) = E(u, k) = \int_0^u \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}} du = \int_0^\theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

級数展開(A) : $\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}$ を $\sin^n \theta$ で展開すれば、

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)! k^{2m} \sin^{2m} \theta}{2^{2m} (m!)^2}$$

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)! k^{2m} \sin^{2m} \theta}{2^{2m} (m!)^2 (2m-1)}$$

であるから、

$$S_n = \int_0^\varphi \sin^n \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} S_{2m} &= \frac{(2m)! \varphi}{2^{2m} (m!)^2} + \frac{(2m)!}{2^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \sin 2j\varphi}{j(m-j)!(m+j)!} \\ &= \frac{(2m)! \varphi}{2^{2m} (m!)^2} - \frac{(2m)! \sin 2\varphi}{(m!)^2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(j!)^2 \sin^{2j} \varphi}{2^{2(m-j)+1} (2j+1)!} \end{aligned}$$

$$S_2 = \int_0^\varphi \sin^2 \theta \, d\theta = -\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2}$$

$$S_4 = \int_0^\varphi \sin^4 \theta \, d\theta = \frac{1}{32} \sin 4\varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{3\varphi}{8} = -\frac{1}{8} \left(\sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \right) \sin 2\varphi + \frac{3\varphi}{8}$$

$$S_6 = \int_0^\varphi \sin^6 \theta \, d\theta = -\frac{1}{192} \sin 6\varphi + \frac{3}{64} \sin 4\varphi - \frac{15}{64} \sin 2\varphi + \frac{5\varphi}{16}$$

$$= -\frac{1}{32} \left(\frac{8}{3} \sin^4 \varphi + \frac{10}{3} \sin^2 \varphi + 5 \right) \sin 2\varphi + \frac{5\varphi}{16}$$

と置いたとき、F, E は次の級数で表される。

$$F(\sin \varphi, k) = \varphi + \frac{1}{2} k^2 S_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 S_4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 S_6 + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)! k^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} S_{2m}$$

$$E(\sin \varphi, k) = \varphi - \frac{1}{2} k^2 S_2 - \frac{1}{2 \cdot 4} k^4 S_4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 S_6 - \dots$$

$$= \varphi - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)! k^{2m}}{2^{2m} (m!)^2 (2m-1)} S_{2m}$$

級数展開(B) : $\varphi, \sin 2\varphi$ の因子を持つ項を分離して

$$A_{2m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(j!)^2}{2^{2(m-j)} (2j+1)!} \sin^{2j} \varphi$$

$$A_2 = \frac{1}{2}$$

$$A_4 = \frac{1}{4} \sin^2 \varphi + \frac{3}{2 \cdot 4}$$

$$A_6 = \frac{1}{6} \sin^4 \varphi + \frac{5}{6 \cdot 4} \sin^2 \varphi + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$A_8 = \frac{1}{8} \sin^6 \varphi + \frac{7}{8 \cdot 6} \sin^4 \varphi + \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 6 \cdot 4} \sin^2 \varphi + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}$$

と置いたとき、F, E は次の級数で表される。

$$F(\sin \varphi, k) = \frac{2\varphi}{\pi} F(1, k) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left[\frac{1}{2} k^2 A_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 A_4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 A_6 + \dots \right]$$

$$= \frac{2\varphi}{\pi} F(1, k) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} k^{2m} A_{2m}$$

$$E(\sin \varphi, k) = \frac{2\varphi}{\pi} E(1, k) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left[\frac{1}{2} k^2 A_2 + \frac{1}{2 \cdot 4} k^4 A_4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 A_6 + \dots \right]$$

$$= \frac{2\varphi}{\pi} E(1, k) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2 (2m-1)} k^{2m} A_{2m}$$

ただし完全楕円積分 ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ の定積分) は

$$\begin{aligned}
 F(1, k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \right)^2 k^{2m} \\
 E(1, k) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \right)^2 \frac{k^{2m}}{2m-1} \right]
 \end{aligned}$$

である。

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-04-056

発行日 2005年3月25日
編集・発行 独立行政法人 宇宙航空研究開発機構
〒182-8522
東京都調布市深大寺東町七丁目44番地1
TEL 0422-40-3000 (代表)
印刷所 株式会社 ビー・シー・シー・
東京都港区浜松町2-4-1

©2005 JAXA

※本書(誌)の一部または全部を著作権法の定める範囲を超え、無断で複写、複製、転載、テープ化およびファイル化することを禁じます。

※本書(誌)からの複写、転載等を希望される場合は、下記にご連絡ください。

※本書(誌)中、本文については再生紙を使用しております。

<本資料に関するお問い合わせ先>

独立行政法人 宇宙航空研究開発機構 情報化推進部 宇宙航空文献資料センター



宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency