

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

太陽-地球系L2点周りのリサージュ基準軌道の設計

歌島 昌由

2005年2月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

宇宙航空研究開発機構研究開発報告
JAXA Research and Development Report

太陽 - 地球系 L2 点周りのリサージュ基準軌道の設計

Design of Reference Lissajous Trajectories
around L2 Point in the Sun-Earth System

歌島 昌由
Masayoshi UTASHIMA

総合技術研究本部 情報技術開発共同センター
Information Technology Center
Institute of Space Technology and Aeronautics

2005 年 2 月
February 2005

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

THE JAXA REPORT

Report No. 2000-001

THE JAXA REPORT

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

Report No. 2000-001

目 次

1. 序論	2
2. 力学モデルと数値積分誤差	4
2.1 積分座標系と表示座標系	4
2.2 初速、地球軌道の離心率、月潮汐力の影響	4
2.3 数値積分誤差	6
3. リサージュ初期軌道の設計	7
3.1 2つの初期速度計算法	7
3.2 初期軌道作成法1 (IOG-1)	9
3.3 初期軌道作成法2 (IOG-2)	10
3.4 初期軌道作成法3 (IOG-3)	12
4. ゼロ ΔV リサージュ基準軌道の設計	13
4.1 定式化1による設計	13
4.2 定式化2による設計	18
4.3 サイズ60万 km までの基準軌道（定式化2と2aによる）	21
4.4 サイズ60万 km 超の基準軌道設計の問題点	25
5. 結論	25
6. 参考文献	26

太陽 - 地球系 L2 点周りのリサージュ基準軌道の設計*

歌 島 昌 由*¹

Design of Reference Lissajous Trajectories around L2 Point in the Sun-Earth System *

Masayoshi UTASHIMA *¹

ABSTRACT

The Solar Heliospheric Observatory (SOHO), a joint ESA-NASA mission, was launched in 1995 and has been observing the Sun from the No. 1 Lagrange point (L1) in the Sun-Earth system. The Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), a NASA mission, was launched in 2001 and has been operating from the No. 2 Lagrange point (L2) in the same system. The first Lagrange-point mission was NASA's International Sun-Earth Explorer-3 (ISEE-3), which was launched to L1 in 1978. Furthermore, several astronomical spacecrafts observing from L2 are planned.

Japan is studying two astronomical missions observing from L2 in the Sun-Earth system, the Space Infrared Telescope for Cosmology and Astrophysics (SPICA) and the Japan Astronomy Satellite Mission for Infrared Exploration (JASMINE). SPICA is a point-observation mission, and a halo orbit might be suitable for it. JASMINE is a survey-observation mission, and a Lissajous orbit may be appropriate for it.

Since both halo orbits and Lissajous orbits are unstable, orbital maintenance maneuvers at several month intervals are necessary. If an attitude subsystem does not cause large disturbances, however, the orbits can be maintained with a yearly ΔV of about 1 m/s based on orbit determination errors and maneuver errors. In order to perform orbital maintenance, a reference trajectory with zero ΔV is designed in advance under a precise model of perturbations. Orbital maintenance maneuvers are then performed at intervals of several months such that the reference orbit is maintained.

In Europe and the United States, a zero ΔV reference trajectory is designed by numerically obtaining a solution with the matching conditions of positions and velocities between half-period orbits from an initial trajectory derived by a third- or higher-order analytical solution. This method was first applied to SOHO, and its orbit was maintained by a yearly ΔV of about 1.7 m/s for two years, until 1998 when attitude anomalies occurred. Incidentally, ISEE-3 required a yearly ΔV of about 10 m/s.

The method above has a problem in that higher-order analytical solutions are required. This report presents a new method in which the Sequential Quadratic Programming (SQP) method is applied and the higher-order analytical solutions are not necessary. We used an elliptical restricted four-body problem, which means the elliptical restricted three-body problem plus lunar tidal force. Other perturbations include the solar radiation pressure and planetary tidal forces. Since the solar radiation pressure causes an almost constant acceleration and the planetary tidal forces are small, however, the new method presented in this report could be applied to a real solar system model.

* 平成 17 年 2 月 14 日 受付 (received 14 February, 2005)

*¹ 総合技術研究本部 情報技術開発共同センター (Information Technology Center, Institute of Space Technology and Aeronautics)

Keywords : Lagrange Point, L2 Point, Astronomical Satellite, Lissajous Orbit, Reference Trajectory, Sequential Quadratic Programming Method, Lunar Tidal Force

要 約

太陽-地球系のラグランジュ点の一つのL1点にはESA/NASA共同ミッションのSOHO (Solar Heliospheric Observatory) が1995年12月に打ち上げられ現在も観測を続けており、太陽-地球系のL2点にはNASAのWMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) が2001年6月に打ち上げられ現在も運用されている。これらのラグランジュ点ミッションの最初のもは、1978年8月にL1点に打ち上げられたNASAのISEE-3 (International Sun-Earth Explorer-3) である。今後も、L2点で天文観測する宇宙機がいくつか計画されている。

日本においても、太陽-地球系L2点で観測を行なう2つのミッションの検討が進められている。赤外線天文衛星SPICA (Space Infrared Telescope for Cosmology and Astrophysics) と近赤外線による高精度位置天文観測衛星JASMINE (Japan Astrometry Satellite Mission for INfrared Exploration) である。SPICAはポイント観測型ミッションなので、どちらかと言うとハロー軌道が適しているが、JASMINEはサーベイ観測型ミッションであり、サイズの小さいリサージュ軌道が適している。

リサージュ軌道やハロー軌道は不安定なため数ヶ月間隔の軌道保持制御が必須であるが、軌道決定誤差や軌道制御誤差があっても、姿勢系からの大きな外乱がなければ、年間1m/s程度の ΔV で軌道保持できる。これを実現するため、正確な摂動モデルの下で ΔV ゼロの基準軌道を前もって設計しておき、それに追従する様に数ヶ月間隔で保持制御が行なわれている。

欧米では3次以上の解析解を求め、それを初期軌道として、各半周軌道の位置・速度のmatching条件を満たす解を数値的に求める事で、 ΔV ゼロの基準軌道を設計している。この方式はSOHOに対して初めて適用され、1998年に姿勢異常が発生するまでの約2年間では年間1.7m/sの ΔV で保持されている。因みにISEE-3では、年間10m/s程度の保持制御量を必要とした。

上記の欧米の方法は高次解析解を必要とする難点があるため、本報告では、非線型計画法の解法の一つである逐次2次計画法 (SQP法; Sequential Quadratic Programming) を使い、高次解析解を求める事なく、 ΔV ゼロのリサージュ基準軌道を設計する方法を示す。摂動としては、地球公転軌道の離心率の影響と月潮汐力を考慮した。その他の摂動として、太陽輻射圧と惑星潮汐力があるが、輻射圧はほぼ一定の加速度であり惑星潮汐力は小さいので、本報告の手法は実際の太陽系モデルにも適用できると考えられる。

和文キーワード: ラグランジュ点、L2点、天文観測衛星、リサージュ軌道、基準軌道、逐次2次計画法、月潮汐力

1. 序論

太陽-地球系のラグランジュ点の一つのL1点にはESA/NASA共同ミッションのSOHO (Solar Heliospheric Observatory) が1995年12月に打ち上げられ現在も観測を続けており、太陽-地球系のL2点にはNASAのWMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) が2001年6月に打ち上げられ現在も運用されている。これらのラグランジュ点ミッションの最初のもは、1978年8月にL1点に打ち上げられたNASAのISEE-3 (International Sun-Earth Explorer-3) である。

日本においても、太陽-地球系L2点で観測を行なう2つのミッションの検討が進められている。赤外線天文衛

星SPICA¹⁾ (Space Infrared Telescope for Cosmology and Astrophysics) と近赤外線による高精度位置天文観測衛星JASMINE²⁾ (Japan Astrometry Satellite Mission for INfrared Exploration) である。

L1, L2点ミッションでは、ハロー軌道とリサージュ軌道のどちらを採用するかを考える必要がある。L1, L2点是不安定平衡点であり、ハロー軌道とリサージュ軌道は共にこれらの点を回る軌道である³⁾。図1-1に黄道面に投影したtrajectoryを、図1-2に黄道面に垂直な面に投影したtrajectoryを、模式的に示す。ハロー軌道やリサージュ軌道のL1, L2点周りの周期は約半年である。

図1-1, 1-2のy方向半径 A_y を単にサイズという事が多いが、サイズが約65万kmより小さいと、xy面内運動と

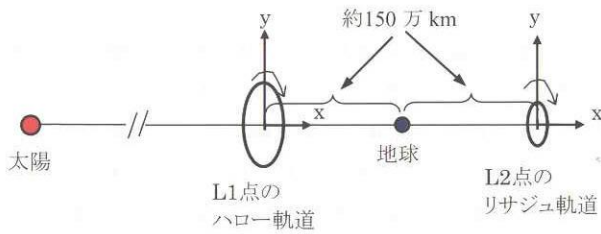


図1-1 L1, L2点周りのハロー軌道とリサージュ軌道 (黄道面内)

z方向運動の周期が異なり、リサージュ軌道となり、それより大きいとxy面内運動とz方向運動の周期を一致させる事ができ、ハロー軌道が実現できる³⁾。

ハロー軌道とリサージュ軌道の長所・短所などを比較すると、表1-1のようになる。本報告ではリサージュ軌道を対象とする。

リサージュ軌道やハロー軌道は不安定なため数ヶ月間隔の軌道保持が必須であるが、軌道決定誤差や軌道制御誤差があっても、姿勢系からの大きな外乱がなければ、年間1m/s程度の ΔV で軌道保持できる⁴⁾。これらの軌道保持は、正確な摂動モデルの下で ΔV ゼロで構築できる基

準軌道を初めに作成しておき、それを実現する様に数ヶ月間隔で保持制御を行なう事で実現される^{5, 6, 7)}。欧米では高次 (3次以上) の解析解を求め (月・惑星の影響も考慮している場合あり)、それを初期軌道として、各半周軌道の位置・速度のmatching条件を満たす解を数値的に求める事で、 ΔV ゼロの基準軌道を作成している。高次の解析解を得る際は、Lindstedt-Poincare法が用いられている⁸⁾。上記の方式はSOHOに対して初めて適用され、1998年に姿勢異常が発生するまでの約2年間では年間1.7m/sの ΔV で保持されている⁹⁾。因みにISEE-3では、上記の方式はまだ採用されてなく、年間10m/s程度の保持制御量を必要とした¹⁰⁾。

上記の欧米の方法は高次解析解を必要とする難点があるため、本報告では、非線型計画法の解法の一つであるSQP (Sequential Quadratic Programming) 法¹¹⁾を使い、高次解析解を求める事なく、 ΔV ゼロのリサージュ基準軌道を設計する事を考える。摂動としては、地球公転軌道の離心率の影響と月潮汐力を考慮する。この他の摂動として、太陽輻射圧と惑星潮汐力があるが、輻射圧はほぼ一定の加速度であり惑星潮汐力も小さいので、本報告で

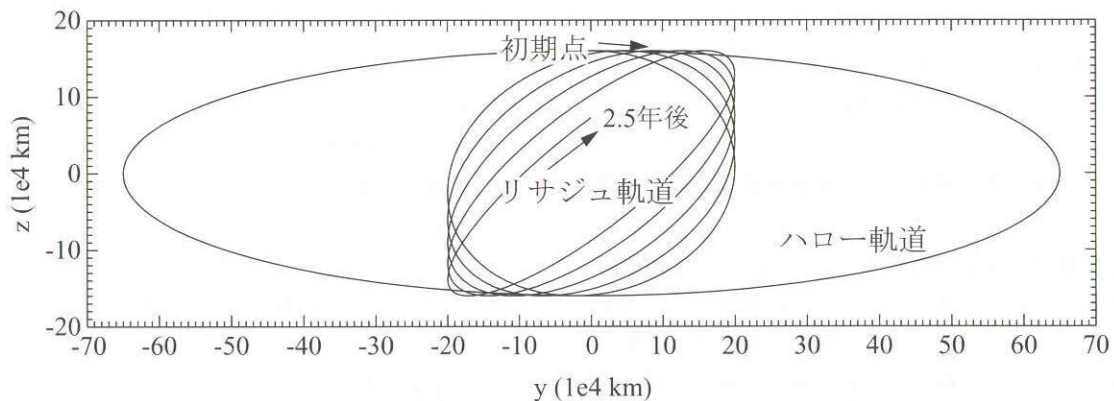


図1-2 L1, L2点周りのハロー軌道とリサージュ軌道 (黄道面に垂直な面内)

表1-1 ハロー軌道とリサージュ軌道の比較

	長 所	短 所	備 考
ハロー軌道	投入 ΔV ^{*)} が小さい。	宇宙機位置の変動範囲が広い。 高利得アンテナを固定にできず駆動しなければならない可能性がある。	Hubble 宇宙望遠鏡のようなポインティング観測ミッションに適する。
リサージュ軌道	宇宙機位置の変動範囲が狭い。 高利得アンテナを宇宙機に固定できる可能性がある。	投入 ΔV ^{*)} が大きい、月 swingby を使えば小さくできる。	WMAPやJASMINEのようなサーベイ観測ミッションに適する。

*1) L1, L2点付近に到着した時に必要な ΔV 。

は無視する。本報告の手法によりリサージュ基準軌道の設計が可能となれば、実際の太陽系モデルに適用できると考えられる。

2. 力学モデルと数値積分誤差

本章では、2.1節で、宇宙機軌道を数値積分する時に使用する座標系、積分されたtrajectoryを表示する座標系などを述べ、2.2節で、サイズが20数万kmのリサージュ軌道に対する初速、地球軌道の離心率、月潮汐力の影響について述べる。最後の2.3節で、使用する数値積分法(Runke-Kutta-Fehlberg 法)¹²⁾の誤差について述べる。

2.1 積分座標系と表示座標系

本報告では、地球、太陽、月が存在する空間における宇宙機の運動を数値的に扱い、地球の公転軌道の離心率も考慮できる事とする。つまり、力学モデルとして楕円制限4体問題を使用する。太陽輻射圧は無視する。地球軌道と月軌道は、簡単のために、時間の2次までの多項式で近似した平均ケプラー軌道要素¹³⁾を使用する。

運動方程式の数値積分に使用する積分座標系と宇宙機のtrajectory表示等に用いる表示座標系を図2-1に示す。図2-1の $x_I-y_I-z_I$ 系(地球中心黄道面座標系)が積分座標系であり、 x_I 軸が春分点方向である。L2点中心の $x-y-z$ 系(L2点中心回転系)が表示座標系である。

L2点中心回転座標系と地球中心黄道面座標系間の座標変換

地球公転軌道の離心率も考慮すると、L2点中心回転座標系は単純な回転座標系ではなく、太陽-地球ライン方向への並進運動も伴うため、ここに簡単に説明する。第二天体(地球)の軌道が離心率を持つ場合の制限三体問題は楕円制限三体問題と呼ばれ、文献14)に詳細な記述が

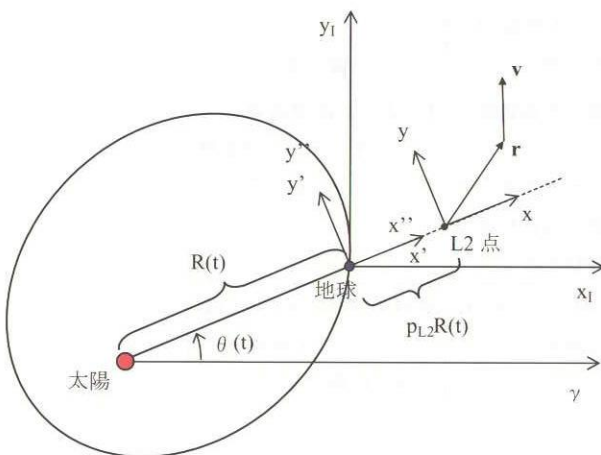


図2-1 L2点中心回転系と地球中心黄道面座標系

ある。その中心部分を文献15)に解説している。結論は、第一天体(太陽)から見た第二天体(地球)の瞬時の半径 r で無次元化した座標系で考えれば、円軌道の場合の各ラグランジュ点の位置がそのまま使えるという事である。

以下に記す3つの変換により、L2点中心回転系($x-y-z$ 系)から地球中心黄道面座標系($x_I-y_I-z_I$ 系)に変換する。

[変換1] ($x-y-z$ 系から $x'-y'-z'$ 系)

$x'-y'-z'$ 系は地球中心の回転系である。

L2点は、太陽に対して、 $(1+p_{L2})\dot{R}$ の半径方向速度を持つ(注1参照)。 p_{L2} は5次方程式を解いて得られる定数である³⁾。従って、次式で変換される。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \begin{pmatrix} p_{L2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{R} \quad (2-1)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \begin{pmatrix} p_{L2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{R} \quad (2-2)$$

(注1) 楕円制限三体問題の議論より、太陽-L2点距離は、常に太陽-地球間距離の $1+p_{L2}$ 倍である。従って、L2点の半径方向速度は地球のその $1+p_{L2}$ 倍となる。

[変換2] ($x'-y'-z'$ 系から $x''-y''-z''$ 系)

$x''-y''-z''$ 系は回転系 $x'-y'-z'$ 系の時刻 t における回転を止めた地球中心慣性系である。次式で変換される。

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' \quad (2-3)$$

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{v}' + \dot{\theta} \times \mathbf{r}' \quad (2-4)$$

θ の定義は図2-1を参照。

$$\dot{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

[変換3] ($x''-y''-z''$ 系から $x_I-y_I-z_I$ 系)

これは慣性系同士の変換であり、次式で変換される。

$$\mathbf{r}_I = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}'' \quad (2-5)$$

$$\mathbf{v}_I = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}'' \quad (2-6)$$

地球中心黄道面座標系($x_I-y_I-z_I$ 系)からL2点中心回転系($x-y-z$ 系)への変換は、逆に、変換3、変換2、変換1の順に行なえば良い。

2.2 初速、地球軌道の離心率、月潮汐力の影響

ここでは、サイズが20数万kmのリサージュ軌道を例に、

初速、地球軌道の離心率、月潮汐力の影響について述べる。この軌道は、L2 点を飛行している WMAP 宇宙機の軌道に近いものである。

初速 v_0 の影響 (円制限 3 体問題近似)

L2 点中心回転系において、初期時刻における位置・速度を、 $x_0 = -8.5$ 万 km, $y_0 = 0$ km, $z_0 = 16$ 万 km, $u_0 = 0$ m/s, $w_0 = 0$ m/s とし、 v_0 だけ変えて L2 点周りの周期軌道の作成を試みた。なお、 u_0, v_0, w_0 は、初期速度ベクトルの x, y, z 成分である。力学モデルは円制限 3 体問題とした。図 2-2 に、 v_0 をいろいろ変えた場合の軌跡を示す。Runge-Kutta-Fehlber 法の局所許容誤差 (ERRLOC) は $1E-8$ を使用した。この時の積分誤差については 2.3 節に述べる。

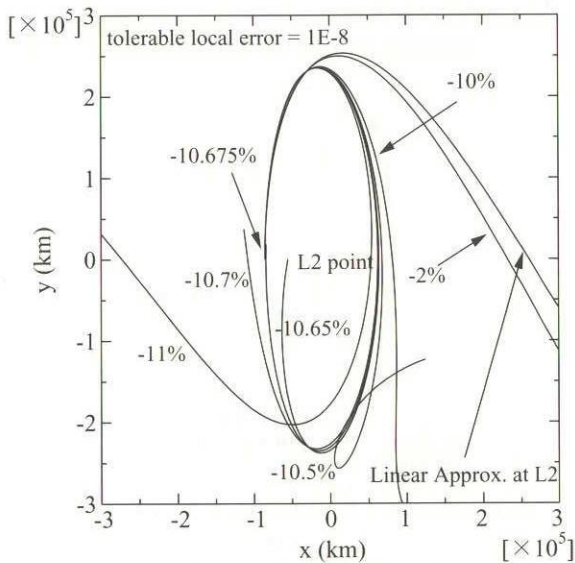


図 2-2 円制限 3 体問題の場合の v_0 の影響

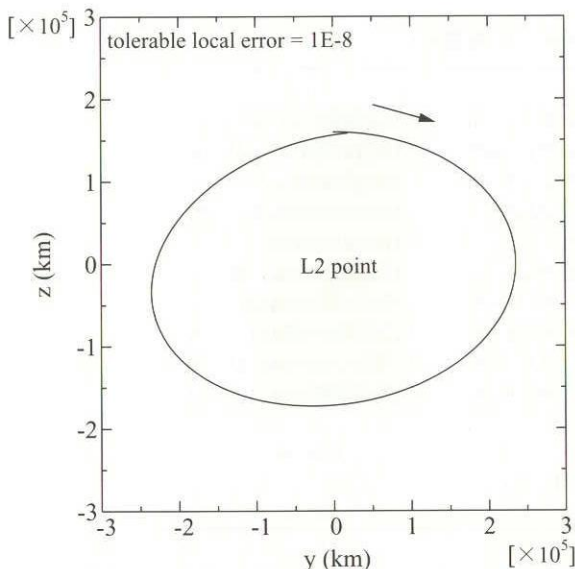


図 2-3 円制限 3 体問題の場合の y - z 平面図

L2 点周りの線型運動方程式を解いて得られる v_0 を使うと、 $+x$ 方向に大きく流れて周期軌道にならない。そこで試行錯誤で v_0 を変えて数値積分を実行した。図 2-2 内の % 値は、線型解から得た v_0 を基準としたものである。

$v_0 = 99.105$ m/s (-10.675% の表示) の時、ほぼ周期軌道となっている。この計算で使用している初期位置においてリサージュ軌道に投入されるとすると、投入後においては、図 2-2 の -10.5% 軌跡と -11% 軌跡の間に入る必要があろう。よって、投入制御後に許容される速度誤差は約 0.2 m/s である。図 2-3 に -10.675% の場合の z 方向の運動を示す。

地球軌道の離心率の影響 (楕円制限 3 体問題近似)

前節の周回軌道 ($v_0 = 99.105$ m/s) を使って、地球軌道の離心率の影響を調査した。ここでは、初期時刻を 2003 年 12 月 23 日 0 時 UT、2004 年 6 月 23 日 0 時 UT、2004 年 3 月 23 日 0 時 UT の 3 つの場合を比較した。図 2-4 に結果を示す。IMOON=0 は月質量も地球に加えた近似である事、IECC=1 は地球軌道の離心率も考慮している事を示す。

赤線は、 $v_0 = 99.105$ m/s を使った軌道である。初期時刻が 12 月 23 日の時、大きく左にずれて L2 点近くを通過している。初速が小さ過ぎる。初期時刻が 6 月 23 日の時、周回軌道の右側にずれている。初速が大き過ぎる。初期時刻が 3 月 23 日の時、これらの中間にある。

3 月 23 日出発の場合を試行錯誤でほぼ 1 周させたものが緑線である。

青線は、円制限 3 体問題近似の線型解から得た初速 (無次元) に、基準速度を乗じて得たものを使った結果であ

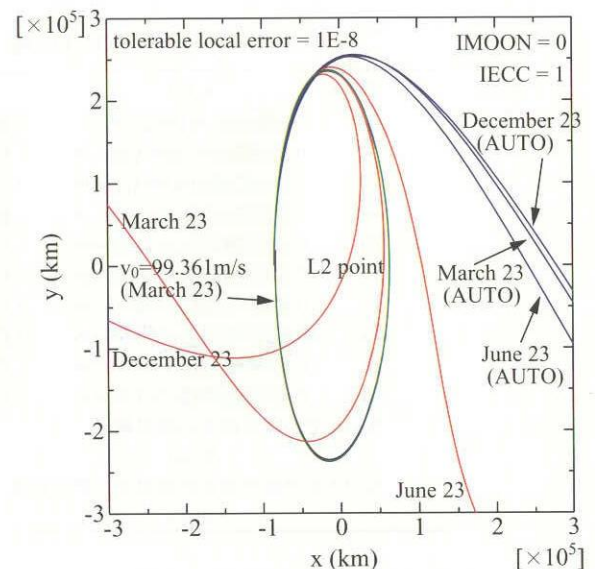


図 2-4 楕円制限 3 体問題の場合

る。基準速度は、初期時刻の地球公転速度としている。

月潮汐力の影響（楕円制限4体問題近似）

前節の2004年3月23日に出発し、ほぼ1周させた初期値 ($v_0=99.361\text{m/s}$) を使い、月の運動の影響を調査した。図2-5の赤線がその場合の結果である。99.361m/sでは大き過ぎる事が判る。

この赤線の軌道の v_0 を試行錯誤で調整して周期軌道にしたものを図2-6に示す。月の運動による1ヶ月周期の変動が判る。初速は90.95m/sと約10%も小さくなった。図2-6の黒線の軌跡は、円制限3体問題の線型解からの初速をそのまま使ったもの。

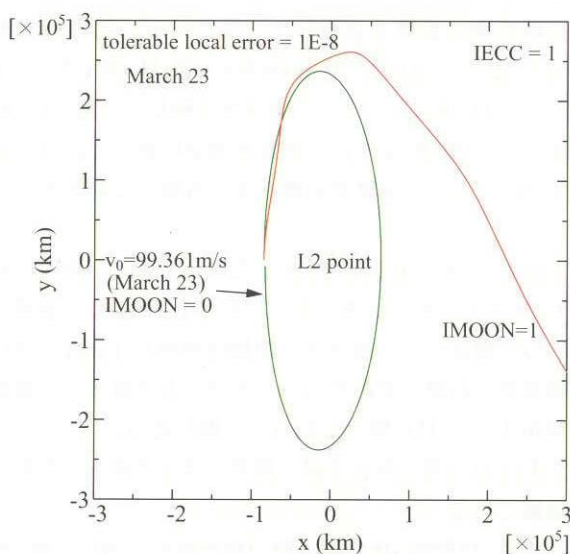


図2-5 リサージュ軌道への月の影響

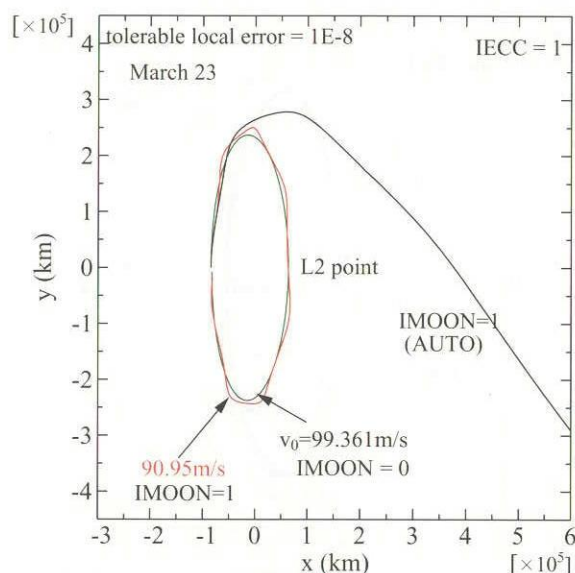


図2-6 楕円制限4体問題のリサージュ軌道

表2-1 RKF法の積分誤差の評価（位置誤差）

N	x(m)	y(m)	z(m)
6	0.626879109165475E+08	-0.179995845953043E+06	-0.174650977451860E+09
7	0.626879280258718E+08	-0.179974263432812E+06	-0.174650980187644E+09
8	0.626879344809237E+08	-0.179973961083819E+06	-0.174650980686180E+09
9	0.626879350880849E+08	-0.179973957233844E+06	-0.174650980730082E+09
10	0.626879351431110E+08	-0.179973951912447E+06	-0.174650980734630E+09
11	0.626879351416399E+08	-0.179973949820935E+06	-0.174650980734778E+09
12	0.626879351354649E+08	-0.179973948714911E+06	-0.174650980734527E+09
13	0.626879351468682E+08	-0.179973950903842E+06	-0.174650980734917E+09
14	0.626879351435490E+08	-0.179973951445119E+06	-0.174650980734874E+09
15	0.626879351345613E+08	-0.179973947073978E+06	-0.174650980734510E+09
N=10での積分誤差の絶対値			
	5mm	5mm	0.5mm
N=10での積分誤差の相対値（最大の大きさのzに対して）			
	3E-11	3E-11	3E-12

表 2-2 RKF 法の積分誤差の評価 (速度誤差)

N	u(m/s)	v(m/s)	w(m/s)
6	0.668854754410491E+01	-0.105472093866035E+03	-0.544204305565368E+01
7	0.668855881642391E+01	-0.105472098943742E+03	-0.544204348743420E+01
8	0.668856235700935E+01	-0.105472100836286E+03	-0.544204371968737E+01
9	0.668856269200997E+01	-0.105472100998639E+03	-0.544204374300464E+01
10	0.668856272368967E+01	-0.105472101015008E+03	-0.544204374486728E+01
11	0.668856272341587E+01	-0.105472101014959E+03	-0.544204374471388E+01
12	0.668856272039631E+01	-0.105472101013248E+03	-0.544204374451779E+01
13	0.668856272623877E+01	-0.105472101015740E+03	-0.544204374510785E+01
14	0.668856272414799E+01	-0.105472101015667E+03	-0.544204374480818E+01
15	0.668856272007669E+01	-0.105472101013112E+03	-0.544204374436808E+01
N=10 での積分誤差の絶対値			
	5E-6mm/s	5E-6mm/s	5E-7mm/s
N=10 での積分誤差の相対値 (最大の大きさの v に対して)			
	5E-11	5E-11	5E-12

3. リサジュ初期軌道の設計

本報告では、SQP法を用いてリサジュ基準軌道を設計するが、そのためには適当な初期軌道が必要である。欧米の手法では高次解析解を使用するが、ここでは線型解までの使用に留める。初期軌道は、半周 (約 90 日) 単位の軌道をミッション期間に亘り繋ぎ合わせて作成する。半周単位の軌道は xz 平面上の点から再び xz 平面に戻るまでとし、その作成には簡単な線型解を使用する。半周単位の軌道の接続点においては、一般に位置と速度は不連続になっており、SQP 法にて位置・速度の gap が無い基準軌道を求める。

3.1 2つの初期速度計算法

本節では、半周単位の初期軌道を作成する際の y 方向の初期速度 v_0 の 2 つの計算法を考える。1 つは、半周後に xz 平面を通過する時の速度成分 u がゼロという条件を課すものであり、もう一つは半周後に xz 平面を通過する時に指定された x 値の点を通るという条件を課すものである。それぞれ、「ゼロ u 法」、「x 指定法」と呼ぶ事にする。以下に、これらの方法の詳細を記す。

ゼロ u 法と x 指定法の仕様

- xz 平面上の点を初期位置とする。
- 初期位置・速度の内、 u_0 はゼロに固定し、その他の v_0 以外はユーザーが指定した値に固定される。
- 可変パラメータは、次に xz 平面を通過するまでの期間 T_c と v_0 である。
- 可変パラメータを求めるための終端条件は、 $y(T_c) = 0$ と、

$$u(T_c) = 0 \quad \dots \dots \dots \text{ゼロ u 法}$$

$$x(T_c) = x_{\text{SPEC}} \quad \dots \dots \dots \text{x 指定法}$$

である。 x_{SPEC} はユーザーが指定する。

- 数値微分による遷移行列を使うニュートン法で、 T_c と v_0 を求める。 v_0 の初期値は、円制限 3 体問題の L2 点における線型解¹⁶⁾を使用する。数値微分には、相対増分 $1E-6$ の前進差分を用いる。遷移行列の有効桁数は 5~6 桁である。
- 非線型性が大きいと考えられるため、解の更新時に減速係数を指定できる (減速ニュートン法¹²⁾)。

以下では、この二つの初期速度作成法を用いて、リサジュ軌道に及ぼす z 方向運動の影響、地球軌道の離心率の影響、月潮汐力の影響を検討する。

3.1.1 ゼロ u 法を使った検討

z 方向運動と地球軌道の離心率の影響

2.2 節と同じ $x_0 = -8.5$ 万 km の軌道を使用して、z 方向運動と地球軌道の離心率の影響を検討した。半周後に xz 平面を通過する時に $u=0$ となる条件で軌道を求め、更に半周だけ軌道伝播した。表 3-1 に検討した 5 ケースの計算条件を示す。図 3-1 に各ケースの軌跡を示した。

z 方向運動が存在しない (1) の場合は 1 周後に元の位置に戻っているが、 $z_0 = 16$ 万 km の (2) の時は 2 万 km 程度ずれている。前半周と後半周とで z 方向運動が僅かに非対称である (図 2-3 参照) 事が面内運動に影響しているた

表 3-1 図 3-1 の計算条件

番号	IMOON	IECC	z_0	初期時刻	色
(1)	0	0	0	3 月 21 日	緑
(2)	0	0	16 万 km	3 月 21 日	黒の破線
(3)	0	1	16 万 km	3 月 21 日	黒
(4)	0	1	16 万 km	6 月 23 日	赤
(5)	0	1	16 万 km	12 月 23 日	青

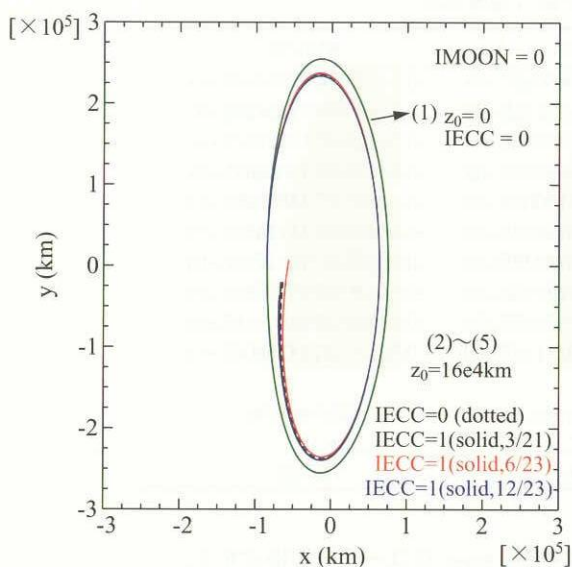


図3-1 z方向運動と離心率の影響

めと考えられる。線型近似では面内運動とz方向運動は分離されるが¹⁶⁾、厳密にはカップリングが存在する。(3)～(5)はz方向運動と離心率も考慮し、初期時刻を3ヶ月ずつずらした場合である。図3-1の(3)～(5)の終端付近を見ると、軌跡の進行方向に沿ってずれがあるが、z方向運動に比べて影響は小さい。

月の運動の影響

前節と同じ $x_0 = -8.5$ 万 km, $z_0 = 16$ 万 km の軌道を使用して、月の運動の影響を検討した。地球軌道の離心率も考慮した。初期時刻における月齢が 0, 8, 15 の場合に対して、半周後に xz 平面を垂直に通過する軌道を求めて更に半周だけ伝播した。結果を図3-2に示す。月の運動の

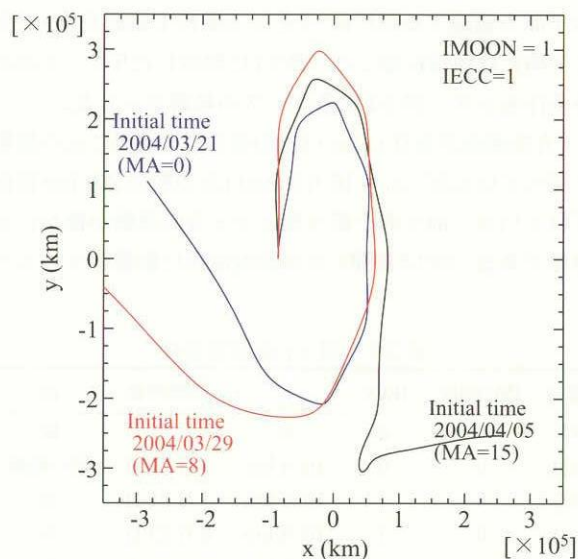


図3-2 月の運動の影響 (その1)

影響はかなり大きい事が判る。

3.1.2 x指定法を使った検討

ここでは、x指定法を使って、月の運動の影響を検討する。

リサージュ軌道の平面形はy軸に対して対称ではないため、 x_{SPEC} は $-x_0$ とは一致しない。そこで、 x_{SPEC} のラフな値を知るため、 $x_0 = -8.5$ 万 km, $z_0 = 16$ 万 km, $\dot{z}_0 = 0$, $IECC = 0$, $IMOON = 0$ の条件で、1周後に元の位置に戻る軌道を試行錯誤で求めた。この軌道は、1ヶ月周期の月の影響と、1年周期の地球軌道の離心率の影響をほぼ平均した周期軌道になっている。この軌道で得た x_{SPEC} は 63200 km である。この x_{SPEC} を使ってx指定法で、初期時刻における月齢が 0, 8, 15 の場合の軌道を求めた。それらを図3-3に示す。地球の離心率も考慮している。

図3-2と比べると、後半周の黒線と青線の関係が入れ替わっているが、やはり月の影響は大きい。

3.1.3 採用した初期速度計算法

ミッション期間中の初期軌道を作る際に、ゼロu法とx指定法のどちらを使用するかを考える。半周単位の軌道の接点では一般に位置・速度のgapが存在するが、本報告では、位置gapはゼロとし速度gapのみ許容する初期軌道を採用する事とする。なお、この判断には余り根拠は無く、位置と速度の両方にgapがあるよりも、片方だけでもgapがゼロの方が良からうというだけである。よって、両方のgapを許容する初期軌道を使用する事も考えられよう。

位置のgapがゼロになる初期軌道の作成には、ゼロu法

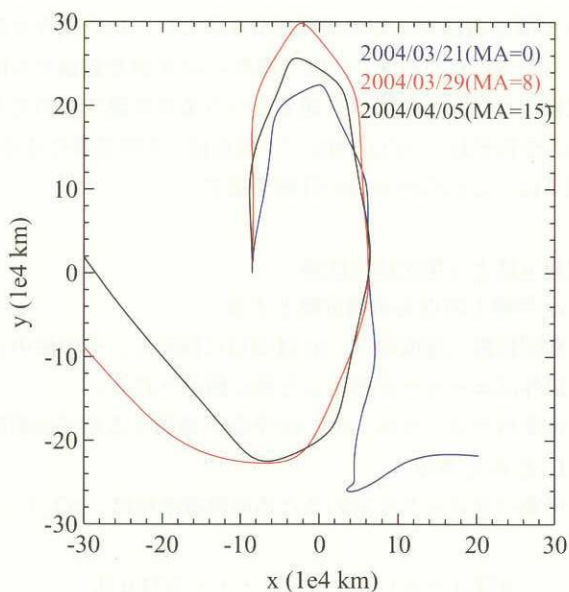


図3-3 月の運動の影響 (その2)

よりも x 指定法が向いているので、本報告では、初期速度計算法として x 指定法を使って長期間の初期軌道を作成する事とする。これは、 xz 平面を通過する時の x 座標が、+側-側でそれぞれ同じ値に固定される軌道である。

3.2 初期軌道作成法 1 (IOG-1)

x 指定法を使って長期間の初期軌道を作成する方法の一つ IOG-1 法を考えた。以下に IOG-1 法の概要を記す。なお、本報告では、 xz 平面上の x が負の側の点を初期位置とする。

IOG-1 法の概要

- x 指定法から得られる v_0 を、各半周軌道の初期速度の y 成分の初期値とする。
- 最初の半周の初期速度の x 成分 u_0 はゼロに固定する。
- 上記以外の xz 平面通過時では y 方向にのみ ΔV を付加して、軌道を構築する。

初めに、 $x_0 = -8.5$ 万 km, $z_0 = 16$ 万 km, $\dot{z}_0 = 0$ の場合を検討する。以降では、 xz 平面通過時の x 値を、 x_{\min} , x_{\max} と呼ぶ事にする。今の場合、 $x_{\min} = -8.5$ 万 km である。 x_{\max} をパラメトリックに変えて、初期軌道作成に必要な ΔV 等を検討する。摂動としては、地球軌道の離心率と月潮汐力を考慮する。

2 周回 (約 1 年) 及び 5 周回 (約 2.5 年) の初期軌道を作成した時の、各半周軌道の接続点に必要な ΔV_y の平均値のグラフを図 3-4 に示す。 x_{\max} の値により平均 ΔV_y が大きく変化する事が判る。

5 周回の軌道の場合、 $x_{\max} = 57500$ km 付近で平均 ΔV_y

表3-2 制限 4 体問題での半周毎の ΔV_y

番号	$\Delta V_y(\text{m/s})$
1	-5.501
2	-7.350
3	-7.411
4	-8.257
5	-7.811
6	-4.369
7	3.507
8	10.087
9	19.529
Average	8.203

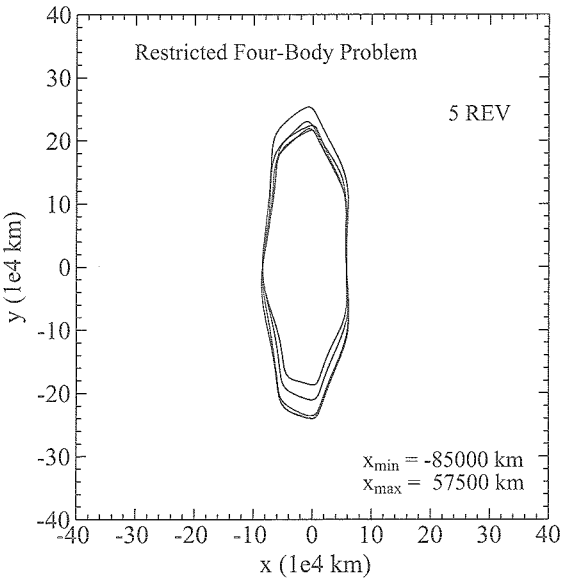


図 3-5 $x_{\max} = 57500$ km の場合の xy 平面図

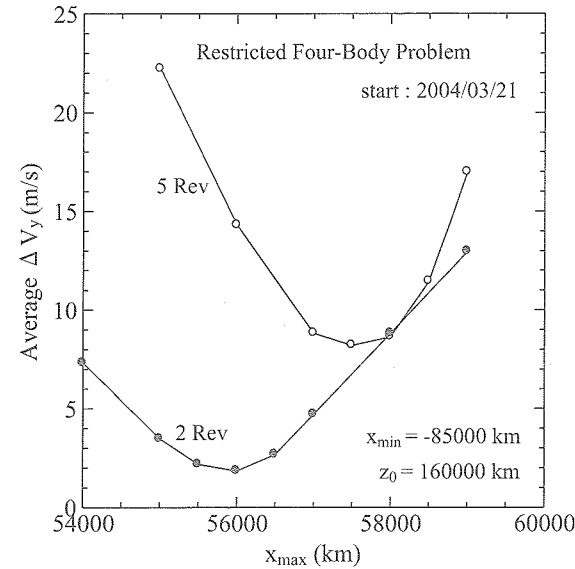


図 3-4 x_{\max} による平均 ΔV_y の変化 (制限 4 体問題)

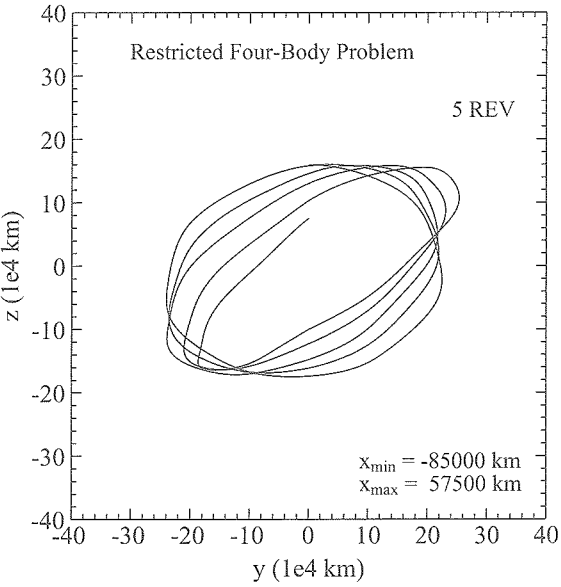


図 3-6 $x_{\max} = 57500$ km の場合の yz 平面図

が最小となり、その値は8.203m/sである。その場合の半周毎の ΔV_y を表3-2に掲げる。各半周のニュートン法による繰り返し計算は、減速係数1.0(純粋なニュートン法)で収束しており、繰り返し回数は7～8回である。

$x_{\max} = 57500\text{km}$ の場合のtrajectoryを図3-5と図3-6に示す。

2周回の軌道の場合、図3-4に示すように、 $x_{\max} = 56000\text{km}$ の時、平均 ΔV_y がほぼ最小となり、約1.850m/sである。通過x値の固定期間を2周回に短縮する事で、平均 ΔV_y は5周回固定の場合の23%となった。半周毎のxz平面通過時のx値の制約をミッションに問題ない程度まで緩くすれば、 ΔV_y をゼロにできる事が期待される。

$x_{\min} = -8.5\text{万 km}$ の場合は、図3-5から判るように、サイズ A_y は20数万kmである。更に大きいサイズの軌道への適用を考えて、 $x_{\min} = -13\text{万 km}$ 、 $z_0 = 24\text{万 km}$ 、 $\dot{z}_0 = 0$ の場合の2周回の初期軌道を計算した。 x_{\max} を変えた時の平均 ΔV_y を図3-7に示す。 $x_{\min} = -8.5\text{万 km}$ の場合の平均 ΔV_y も描いている。適切な x_{\max} からすこし外れると、平均 ΔV_y は急速に大きくなる。

$x_{\min} = -17\text{万 km}$ 、 $z_0 = 32\text{万 km}$ 、 $\dot{z}_0 = 0$ の場合は、 $x_{\max} = 10\text{万 km}$ の場合を除いて収束しなかった。IOG-1法は小さいサイズの軌道にしか適用できない事が判った。

3.3 初期軌道作成法2 (IOG-2)

IOG-1法では、 $x_{\min} = -17\text{万 km}$ 、 $z_0 = 32\text{万 km}$ 、 $\dot{z}_0 = 0$ の場合は、 $x_{\max} = 10\text{万 km}$ の他は収束しなかった。改善法を探るため、収束しなかった $x_{\max} = 10.5\text{万 km}$ の場

合を調査した。最初の半周は、線型解から得られる v_0 (223.6m/s)を初期値として160.9m/s (初期値の72%)で収束している。第2半周では、線型解から得られる v_0 (-132.7m/s)の絶対値が小さ過ぎるため、減速ニュートン法を適用しても収束しない事が判った。第2半周の初速 v_0 を-150m/s、-200m/s、-250m/sとした場合のtrajectoryを線型解のものと一緒に図3-8に示す。破線の楕円は、求めたいリサージュ軌道の概形である。この場合は、線型解の初速を1.5倍～1.8倍にすれば収束しそうである。この倍数は、 $y > 0$ の半周と $y < 0$ の半周で大きく異なり、求めたいリサージュ軌道のサイズにも依存する。従って、 $y > 0$ の半周と $y < 0$ の半周で別々の倍数 (各々 c_1, c_2 と呼ぶ)を指定できる機能を追加したIOG-2法を考えた。こ

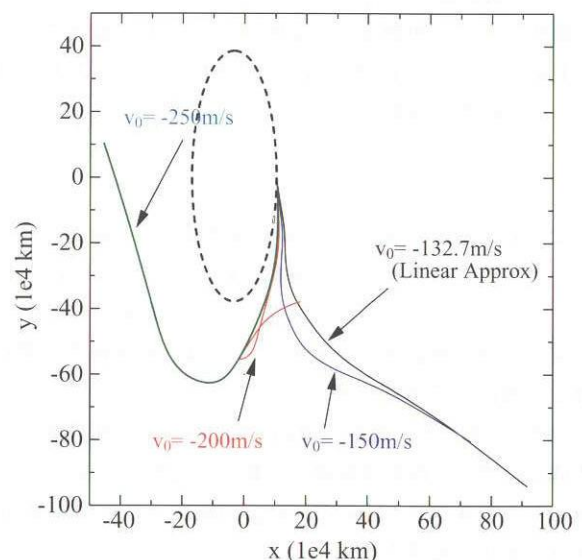


図3-8 第2半周の初速度の影響

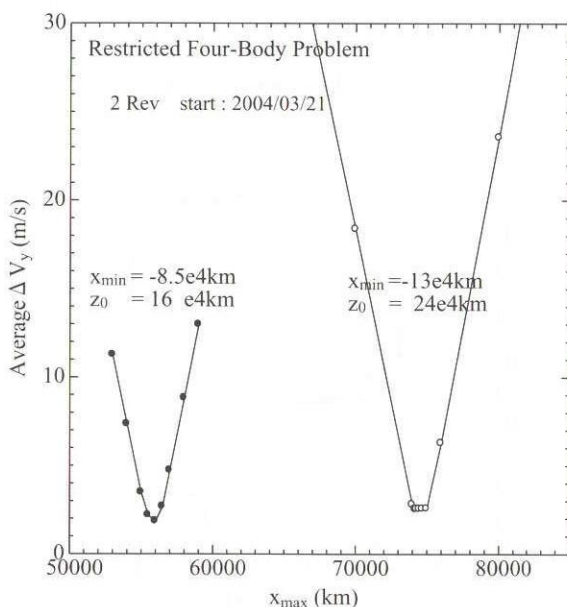


図3-7 x_{\max} による平均 ΔV_y の変化

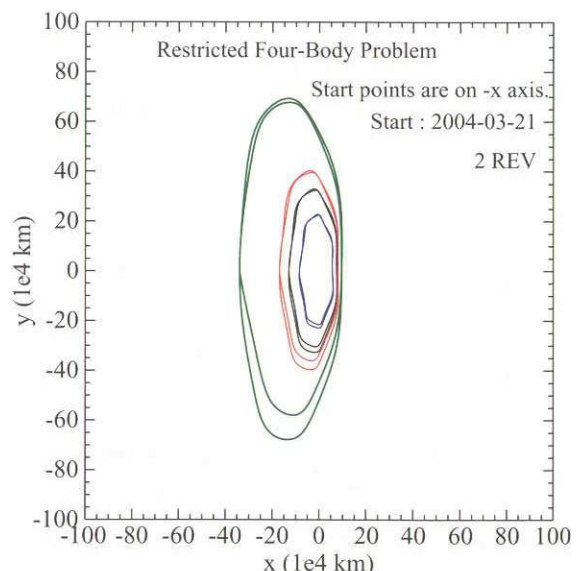


図3-9 4つのサイズのリサージュ初期軌道

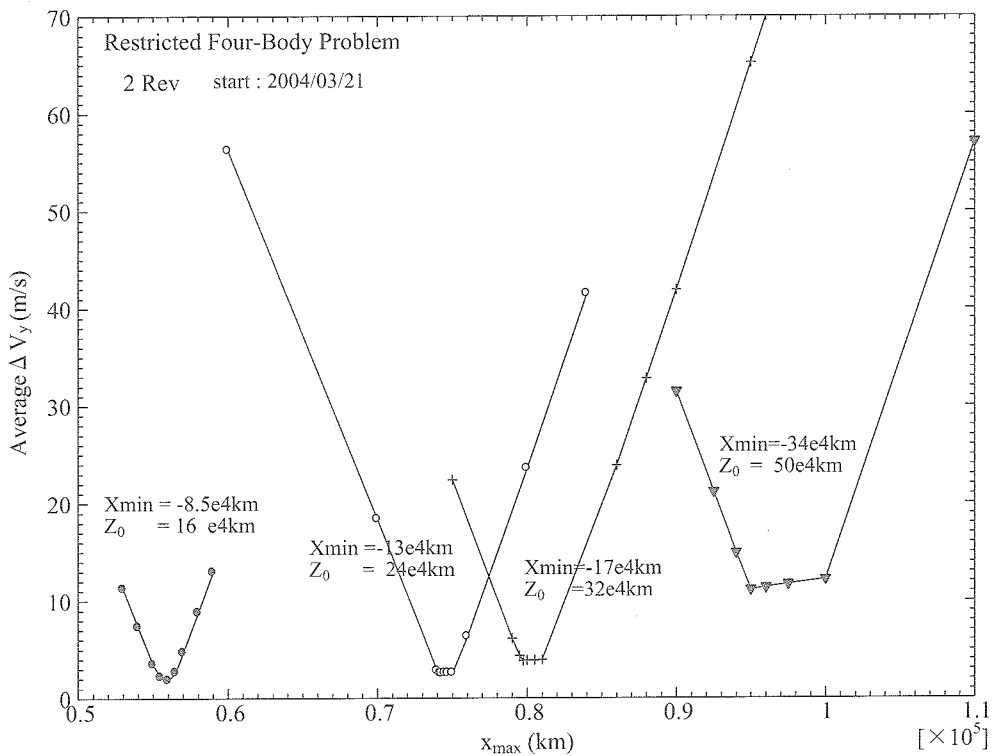


図 3-10 x_{\max} による平均 ΔV_y の変化 (4 つのサイズのリサジュ軌道)

れを使って、 $x_{\min} = -17$ 万 km、 $z_0 = 32$ 万 km、 $\dot{z}_0 = 0$ の場合と、 $x_{\min} = -34$ 万 km、 $z_0 = 50$ 万 km、 $\dot{z}_0 = 0$ の場合の、xz 面通過 x 値を 2 周回固定したりサジュ初期軌道を作成した。倍数 c_1 は常に 0.8 で収束したが、 c_2 は、 $x_{\min} = -17$ 万 km の場合は x_{\max} によって 1.6 ~ 2.0 の範囲で変えて、 $x_{\min} = -34$ 万 km の場合は 1.6 を使った。

I0G-1 法と I0G-2 法で作成した 4 つの 2 周回分のリサジュ初期軌道 ($x_{\min} = -8.5$ 万 km、 $x_{\min} = -13$ 万 km、 $x_{\min} = -17$ 万 km、 $x_{\min} = -34$ 万 km) を図 3-9 に示す。サイズの小さい軌道ほど、月の運動による 1 ヶ月周期の変動が目立つ。L2 点周りの軌道の回転系に対する相対速度は、サイズに比例しているが、月重力による速度への影響はほぼ一定のため、サイズの小さい軌道ほど 1 ヶ月周期の変動が目立つからである。図 3-10 に、これら 4 つのリサジュ軌道に対する平均 ΔV_y のグラフを掲げる。

サイズの大きいリサジュ初期軌道も作成できるようになったので、xz 面通過 x 値を 10 周回 (約 5 年間) 固定したりサジュ初期軌道を幾つか作成してみた。

初めに、サイズ A_y が約 23 万 km の場合 ($x_{\min} = -8.5$ 万 km、 $z_0 = 16$ 万 km、 $\dot{z}_0 = 0$) を検討した。 $x_{\max} = 5.95$ 万 km ~ 6.15 万 km に対して、 $c_2 = 1.2$ 又は 1.4 を用いて I0G-2 法で解を得る事ができた。 x_{\max} に対する平均 ΔV_y の変化を図 3-11 に示す。 $x_{\max} = 6.025$ 万 km の時に平均 ΔV_y

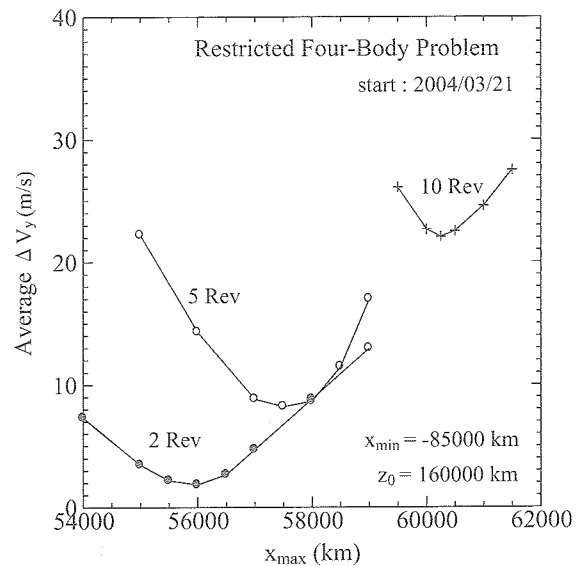


図 3-11 x_{\max} による平均 ΔV_y の変化 (xz 面通過 x 値固定期間が 2rev, 5rev, 10rev の場合)

がほぼ最小となっている。その trajectory を図 3-12 に示す。

次に、サイズ A_y が約 40 万 km の場合 ($x_{\min} = -17$ 万 km、 $z_0 = 32$ 万 km、 $\dot{z}_0 = 0$) を検討した。I0G-2 法を用いて試みたが、5 周回までしか収束させる事はできなかった。 c_1 を 0.8 に固定し、 c_2 を 1.0 ~ 1.6 の範囲で変えた時

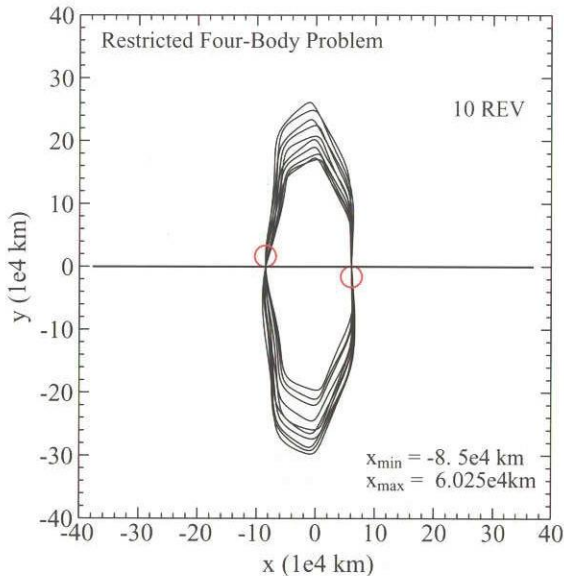


図3-12 xz面通過x値を10周回固定した軌道 (サイズ $A_y \approx 23$ 万 km の場合)

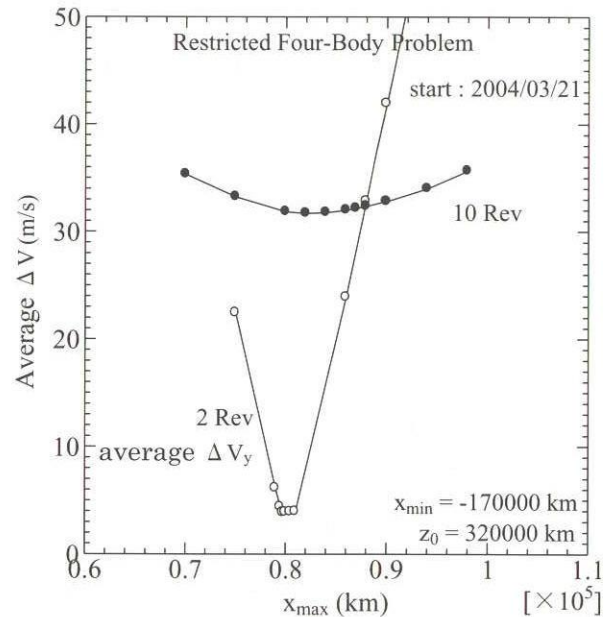


図3-14 x_{\max} による平均 ΔV の変化

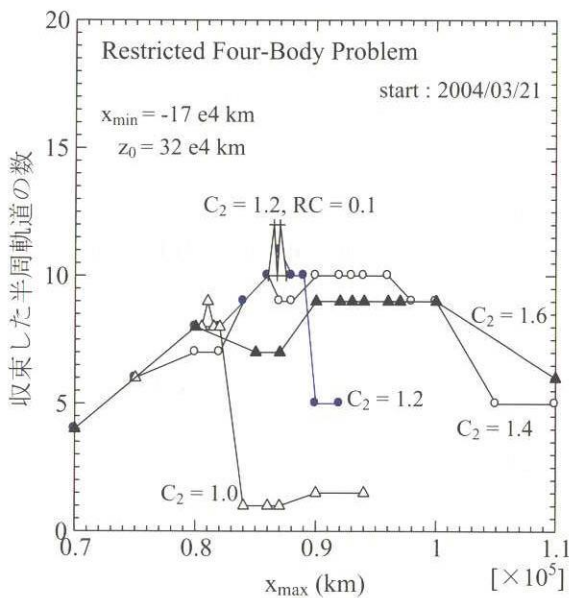


図3-13 IOG-2法による収束した半周軌道の数

の収束した半周軌道の数を図3-13に示す。10周回分の初期軌道を作るには半周軌道は20個収束する必要がある事に注意。 $c_2 = 1.2$ の場合は、減速係数 (RC) 0.1の減速ニュートン法も試みた。6周 (図3-13の収束した半周軌道の数12に相当) の初期軌道作成が限界であった。

3.4 初期軌道作成法3 (IOG-3)

IOG-2法では6周回しか収束させる事ができなかった理由として、最初の半周だけは初速度のx成分 u_0 をゼロに固定しているが、以降のxz面通過時ではx方向の速度成分はそのままにし、y方向にのみ ΔV を付加して軌道を

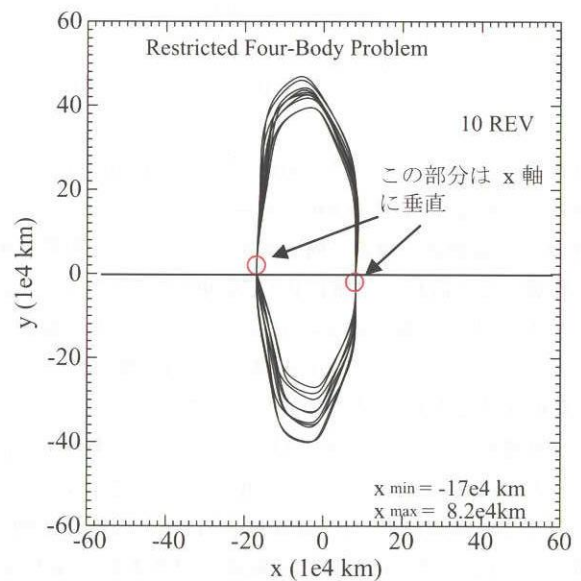


図3-15 xz面通過x値10周固定の軌道 ($A_y \approx 40$ 万 km)

構築している事が考えられる。図3-8を見ると、x方向の速度成分をそのままにしている事が悪影響を及ぼしている事がうかがえる。そこで、全ての半周軌道計画における初速度のx成分を0に固定し、前半周の終端のx方向速度成分との差も ΔV に付加するIOG-3法を考えた。これを使うと、 $x_{\max} = 8.7$ 万 km、 $c_2 = 1.2$ で簡単に10周 (約5年間) の初期軌道を作成できた。図3-14に、 x_{\max} を変えて平均 ΔV (x方向の ΔV もRSSの形で含む) の変化を描いた。なお、2Revのグラフは、IOG-2法で作成した平均 ΔV_y をプロットしている。IOG-3法では ΔV の変化がなだらかになり、解を得易くなっている。平均 ΔV の

最小値は $x_{\max} \approx 82000\text{km}$ の時の $\Delta V = 31.7\text{m/s}$ である。その時の trajectory を図 3-15 に示す。丸で囲んだ所は、初速度の x 成分 = 0 のために x 軸に垂直になっている。

$A_y \approx 23\text{万 km}$ の場合は IOG-2 法で 10 周回の初期軌道ができていたが、IOG-3 法でも作成してみた。図 3-16 に x_{\max} に対する平均 ΔV の変化を示す。変化の小さい 3 本のグラフが IOG-3 法によるものである。IOG-2 法の結果では固定周回数が大きくなると平均 ΔV_y が増加していた。IOG-3 法ではその傾向が見られないことから、xz 面通過時に x 方向の速度成分を継続していた事が原因と考え

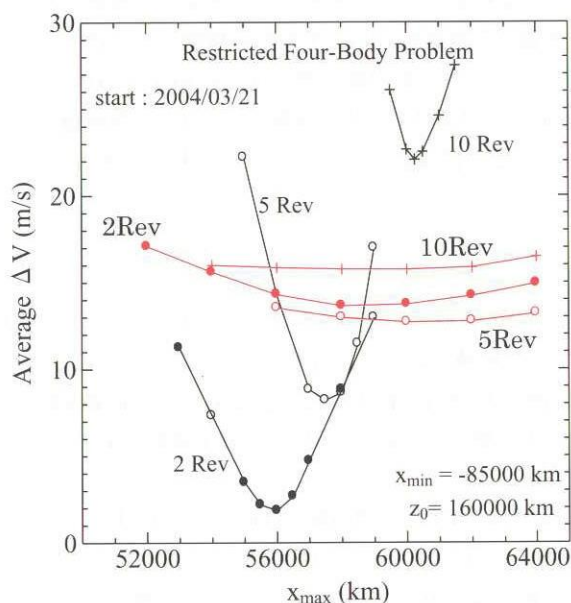


図 3-16 x_{\max} による平均 ΔV の変化 ($A_y \approx 23\text{万 km}$)

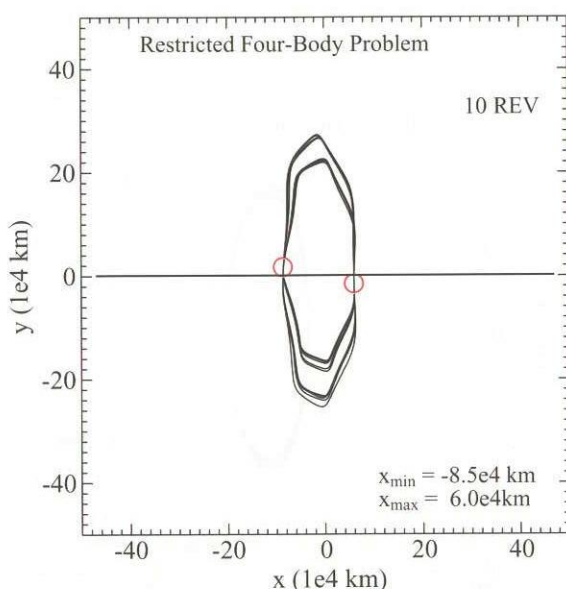


図 3-17 xz 面通過 x 値 10 周固定の軌道 ($A_y \approx 23\text{万 km}$, IOG-3 法を使用)

られる。10 周固定計画では、 $x_{\max} = 6\text{万 km}$ の時に ΔV はほぼ最小の 15.7m/s となる。この時の trajectory を図 3-17 に示す。丸で囲んだ部分を図 3-12 と比較すると、特に $x < 0$ の側の初速度の方向の違いが良く判る。

以上の検討から、IOG-3 法を使えば、色々なサイズの長期間のリサージュ初期軌道を容易に作成できると考えられる。次のステップは、これらの軌道を初期値として、ゼロ ΔV のリサージュ基準軌道を設計する事である。

4. ゼロ ΔV リサージュ基準軌道の設計

本章では、前章の IOG-3 法で得られる初期軌道を使って、非線型計画法の解法の一つである逐次 2 次計画法 (SQP 法) により、ゼロ ΔV リサージュ基準軌道を設計する。

4.1 定式化 1 による設計

図 4-1 に示すように、半周単位の軌道を多数接続して、ゼロ ΔV リサージュ基準軌道を作る。全ミッション期間における半周単位の周回数を NHREV とする。ここでは NHREV は偶数とし、 $x < 0$ の xz 平面上からの出発に限定する。本問題に対する非線型計画法の定式化には幾つか考えられるが、初期値として使用する軌道は各接続点における速度 gap が比較的大きいラフなものであるため、以下に示すように、各接続点における速度 gap の 2 乗和を最小にする定式化を採用した (定式化 1)。速度 gap の和でなく、2 乗和とした理由は 2 つあり、一つは 2 次計画問題 (目的関数が 2 次形式) に近似して解く SQP 法との相性が良いかも知れない事、もう一つは速度 gap の和で

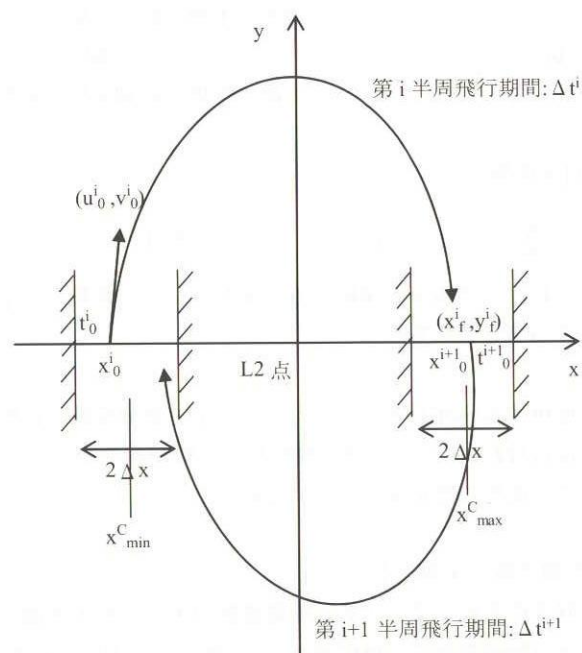


図 4-1 定式化 1 における基本的な量 (L2 点中心回転系)

は $\text{gap} \approx 0$ の近傍で目的関数の勾配の精度が悪化する恐れがあるからである。速度 gap の和とした場合の結果は、4.1.1 節の最後を参照。

以下に、定式化1における制御変数、等号制約、不等号制約、目的関数を記す。なお、 z 方向の運動は、適当に与えられた z_0 と \dot{z}_0 を最初の半周の初期値として使用し、半周毎の接続点において値をそのまま引き継ぐ事とした。以下に出て来る記号は、図 4-1 を参照。

[制御変数] $4 \times \text{NHREV}$ 個 (5 年ミッションの場合、 $\text{NHREV}=20$ であり、制御変数は計 80 個)

- (1) x_i^0 ($i = 1, \text{NHREV}$)
- (2) u_i^0, v_i^0 ($i = 1, \text{NHREV}$)
- (3) Δt_i ($i = 1, \text{NHREV}$)

[等号制約] $2 \times \text{NHREV}-1$ 個 (5 年ミッションの場合、39 個)

- (1) $x_i^f = x_{i+1}^0$ ($i = 1, \text{NHREV}-1$)
- (2) $y_i^f = 0$ ($i = 1, \text{NHREV}$)

[不等号制約] $2 \times \text{NHREV}+2$ 個 (5 年ミッションの場合、42 個。 $\Delta x = 0$ でない限り、active な制約は $\text{NHREV} + 1$ 個以下。)

- (1) $x_i^0 - x_{\min}^C + \Delta x \geq 0$ (i は奇数) $\text{NHREV}/2$ 個
- (2) $x_{\min}^C + \Delta x - x_i^0 \geq 0$ (i は奇数) $\text{NHREV}/2$ 個
- (3) $x_i^0 - x_{\max}^C + \Delta x \geq 0$ (i は偶数) $\text{NHREV}/2$ 個
- (4) $x_{\max}^C + \Delta x - x_i^0 \geq 0$ (i は偶数) $\text{NHREV}/2$ 個
- (5) $x_{N_f}^f - x_{\min}^C + \Delta x \geq 0$ 1 個
最後の半周の終端 x 値の条件
- (6) $x_{\min}^C + \Delta x - x_{N_f}^f \geq 0$ 1 個
最後の半周の終端 x 値の条件

[目的関数]

$$\sum_{i=1}^{\text{NHREV}-1} ((u^{i+1}_0 - u^i_f)^2 + (v^{i+1}_0 - v^i_f)^2) \Rightarrow \text{最小}$$

これは、半周毎の接続点に必要な ΔV の 2 乗和を最小にする事を要求する。

使用する SQP 法のプログラム¹¹⁾では、制御変数の正規化は行なわれず、ユーザーが行なう必要がある。以下に、ここで使用した正規化について記す。

[制御変数の正規化]

収束性を良くするため、制御変数の大きさを大体揃える事が制御変数の正規化である。実際の x_i^0 は 10 万 km 位、 u_i^0 はほぼゼロ、 v_i^0 は 100m/s 程度で、 Δt_i は約 90 日であ

る。従って、 x_i^0 は 1 万 km 単位、 u_i^0, v_i^0 は 1m/s 単位、 Δt_i は 1 日単位とする。こうすると、制御変数は全て 10 ~ 100 のオーダーとなる。

4.1.1 楕円制限 3 体問題の場合

初期軌道の作成

初期時刻 2005 年 1 月 1 日 0 時 UT、ミッション期間 5 年間、地球軌道の離心率を考慮、 $z_0=16$ 万 km、 $\dot{z}_0=0$ 、 $x_{\min}=-8.5$ 万 km、 $x_{\max}=6.0$ 万 km の条件で、IOG-3 法により初期軌道を作成した。作成した 5 年間の trajectory を図 4-2 に示す。この計算は、数秒で終了する。

x_{\min} を指定した時、本来は x_{\max} を変えた複数の初期軌道候補の作成を行ない、半周毎の接続点における ΔV の和が小さいものを初期軌道として採用するのが良いが、今回は図 4-2 を見て妥当と判断し、これを初期軌道として採用した。各接続点における ΔV の平均値は 8.071m/s である。

定式化 1 による解

図 4-2 の軌道を初期値として、定式化 1 のソフトを実行した。数値積分の局所許容誤差は高精度の 1D-10 とした。初期軌道作成時に使用した x_{\min} と x_{\max} を、通過 x 値許容帯の中心値 x_{\min}^C, x_{\max}^C とし、許容半値幅 Δx を 1 万 km とした。

43.33 分の CPU 時間の後、1 回当たりの平均 ΔV は、初期軌道の 8.071m/s から 0.0096m/s に改善された。この解を再び定式化 1 のソフトに入力して解を改善した。21.30 分の CPU 時間の後に、1 回当たりの平均 ΔV は 0.00041m/s になった。2 回の実行を合わせると、 ΔV は約 1/20000 に改善された。図 4-3 に、2 回の実行で改善さ

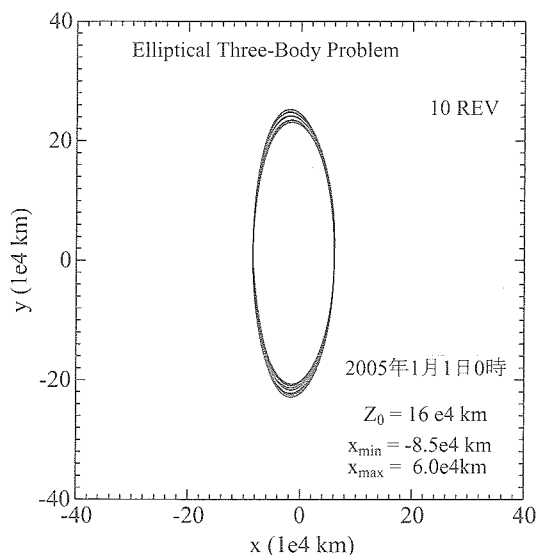


図 4-2 楕円制限 3 体問題の場合の初期軌道

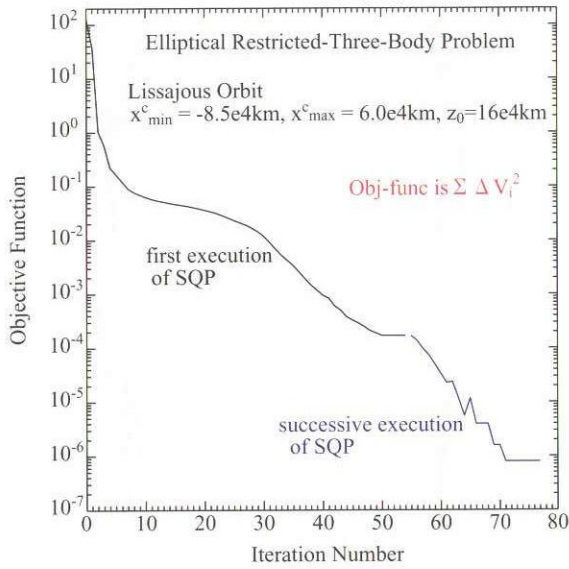


図 4-3 目的関数の変化

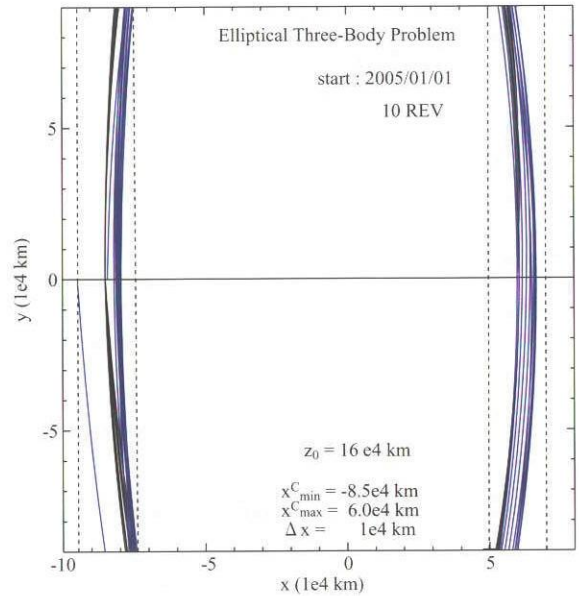


図 4-5 x 軸付近の拡大図

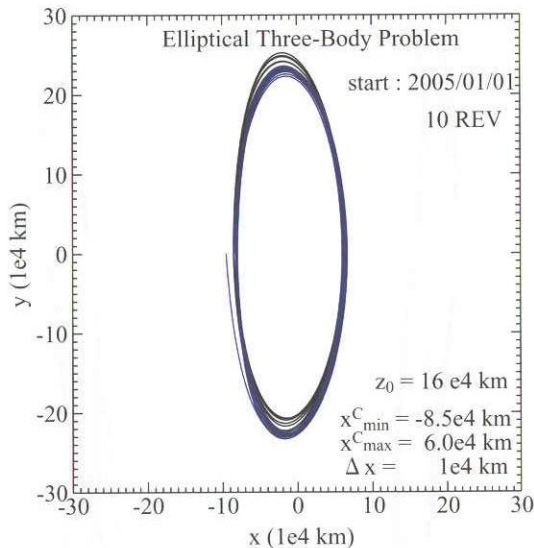


図 4-4 SQP 法による解

れた目的関数の繰り返し回数に対する変化を示す。

図 4-4 に 2 回の実行で得られたリサージュ軌道の全体像を青線で示す。初期軌道も黒線で示した。

図 4-5 に、x 軸付近の拡大図を示す。2 箇所に固定されていた通過 x 値が、許容幅の範囲で広がり、速度 gap をゼロに近づけている。

この解は、1 回当たりの ΔV も十分に小さく、ゼロ ΔV リサージュ基準軌道として使えるであろう。

ΔV 和の目的関数の場合

4.1 節に述べた目的関数 (ΔV の 2 乗和) の使用が本当に有効であるかを確認するために、目的関数を各 ΔV の和に変えたプログラムを作成し実行した。数値積分の局

表 4-1 目的関数の定式化の影響

	ΔV の和を最小化	ΔV の 2 乗和を最小化
CPU 時間(分)	12.25	25.62
総 ΔV (m/s)	2.51	0.00906
最大位置 gap(m)	8406.1	7.3

所許容誤差を共に $1D-8$ とした引き続く 2 回の実行結果の比較を表 4-1 に示す。総 ΔV は 277 倍も大きく、最大位置 gap は 1151 倍も大きい。以上のことから、4.1 節の目的関数の妥当性が確認できた。

4.1.2 月潮汐力も考慮の場合

前節と同様に、初期時刻 2005 年 1 月 1 日 0 時 UT、ミッション期間 5 年、 $z_0=16$ 万 km、 $\dot{z}_0=0$ 、 $x_{\min}=-8.5$ 万 km として、月潮汐力も考慮したリサージュ基準軌道を設計する。

初期軌道の作成

妥当な初期軌道を求めるために、IOG-3 法により x_{\max} を変えた複数の初期軌道候補を計算し、半周毎の接続点における ΔV の和が小さいものを見つける。図 4-6 に、 x_{\max} を変えた時の 1 回平均の ΔV のグラフを示す。この図より、 $x_{\max}=42000$ km の軌道を初期軌道として採用する。この軌道の平均 ΔV は 20.41 m/s である。この初期軌道を、4.1.1 節の月なしの初期軌道と比較して、図 4-7 に赤色で示す。

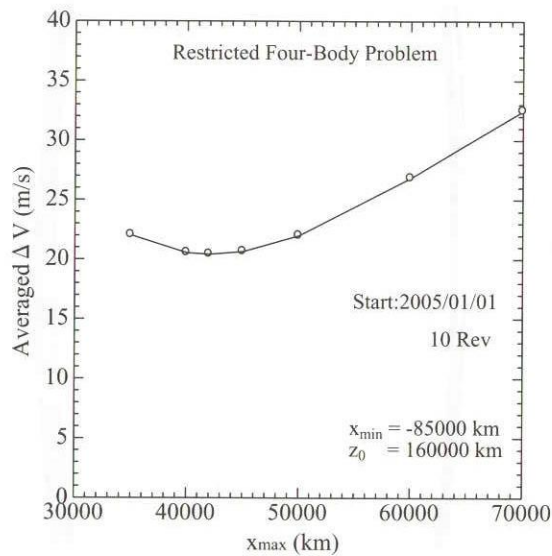
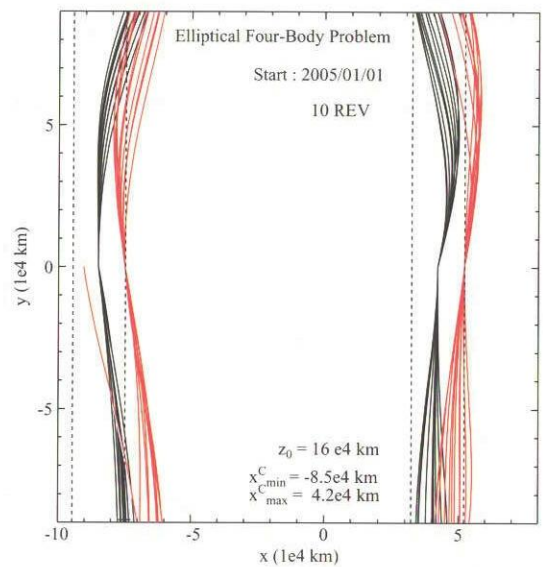
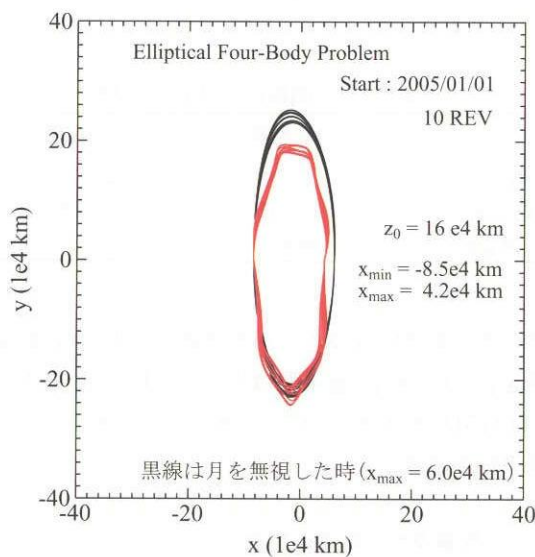
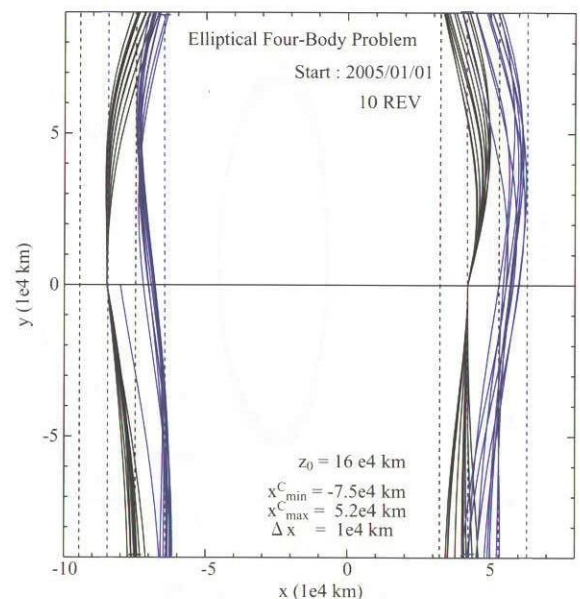
図 4-6 x_{\max} と平均 ΔV の関係図 4-8 x_{\min} 、 x_{\max} を x_{\min}^c 、 x_{\max}^c とした場合

図 4-7 月潮汐力も考慮した初期軌道

図 4-9 x_{\min}^c と x_{\max}^c を共に 1 万 km 大きくした場合

定式化 1 による解

(A) $x_{\min}^c = -8.5$ 万 km、 $x_{\max}^c = 4.2$ 万 km、 $\Delta x = 1$ 万 km の場合 (局所許容誤差 1D-8 を使用)

初期軌道の x_{\min} 、 x_{\max} を、それぞれ x_{\min}^c 、 x_{\max}^c とし、 Δx を 1 万 km とした場合の定式化 1 の結果を図 4-8 に赤色で示す。黒色は初期軌道である。通過 x 値が許容帯の右端に集まっており、許容帯をプラス側にシフトすべき事を示している。

(B) x_{\min}^c と x_{\max}^c を共に 1 万 km 大きくした場合 (局所許容誤差 1D-8 を使用)

x_{\min}^c と x_{\max}^c を共に 1 万 km 大きくし、 Δx は 1 万 km のままの場合の結果を図 4-9 に青色で示す。黒色は初期軌

道である。出発時を除いて、全て許容帯の内部に納まっている。なお、出発点は収束の途中で一旦許容帯の内部に移動したが、収束過程の後半に左境界にくっ付いた。

110.27 分の CPU 時間で収束し、平均 ΔV は初期軌道の 20.41 m/s から 0.2232 m/s まで減少した。4.1.1 節の月なしの場合より、平均 ΔV の減少は 1 桁悪い。

(C) Δx を 1.5 万 km に拡大した 2 回目の実行 (局所許容誤差 1D-8 を使用)

前節の解を再び定式化 1 のソフトに入力した。その際、通過 x 値の許容帯の半値幅 Δx を 1 万 km から 1.5 万 km に広げた。図 4-9 を見ると、許容帯の右側の余裕が少ない

ためである。38.96 分の CPU 時間で収束し、平均 ΔV は 0.2232m/s から 0.001043m/s まで減少した。初期軌道の 20.41m/s に対して、約 1/20000 になった。この低減比率は 4.1.1 節の月なしの場合と殆ど同じである。位置 gap の最大値は 26.5m であった。月無しの場合に比べて数倍大きくなっている。しかし、軌道決定誤差は、位置で 1km 程度、速度で 0.001m/s 程度¹⁷⁾であり、平均 ΔV は決定誤差と同程度、位置 gap は決定誤差の 1/40 と小さい。この解は、平均 ΔV (速度 gap) が軌道決定誤差に比べて小さいとは言えないが、ゼロ ΔV リサジュ基準軌道として使用できるかも知れない。 図 4-10 に、この軌道の xy 平面図を、図 4-11 に yz 平面図を、図 4-12 に x 軸付近の拡大

図を示す。

図 4-10 等を見ると、最初と最後の通過 x 値が、他のグループから少し離れているのが判る。L2 点付近の安定多様体に繋がる傾向を示していると思われる。特に最初の通過 x 値に興味がある。この値の変化は、目的関数に大きな影響を与えない可能性がある。そうであれば、遷移軌道からの投入点の自由度が大きくなるかも知れない。

図 4-11 から判るように、ここで使用した z 方向運動の初期条件では、蝕を 5 年間避けることはできない。しかし、図 4-13 に示すように、初期条件を変更すれば、5 年以上蝕を避ける事ができる。なお、図 4-13 は、線型解を用いて作図した。

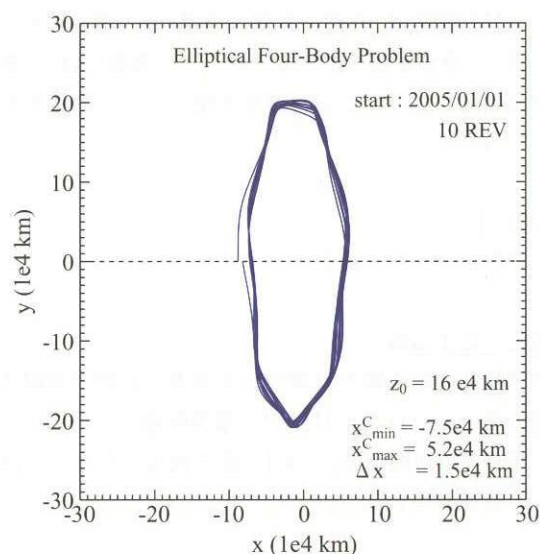


図 4-10 月潮汐力も考慮したゼロ ΔV 基準軌道 (xy 平面図)

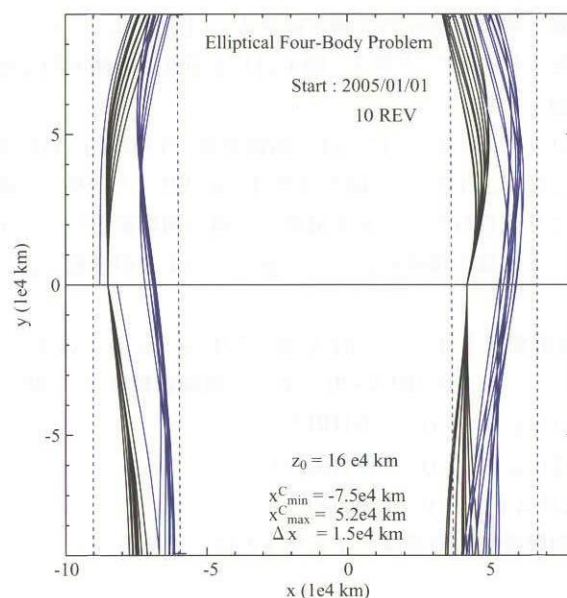


図 4-12 月潮汐力も考慮したゼロ ΔV 基準軌道 (x 軸付近の拡大図)

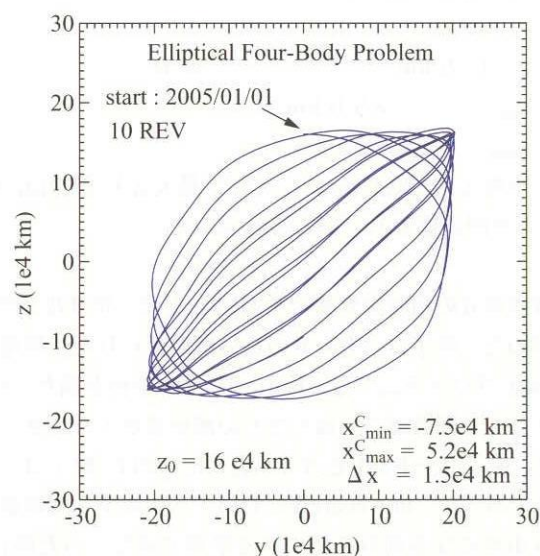


図 4-11 月潮汐力も考慮したゼロ ΔV 基準軌道 (yz 平面図)

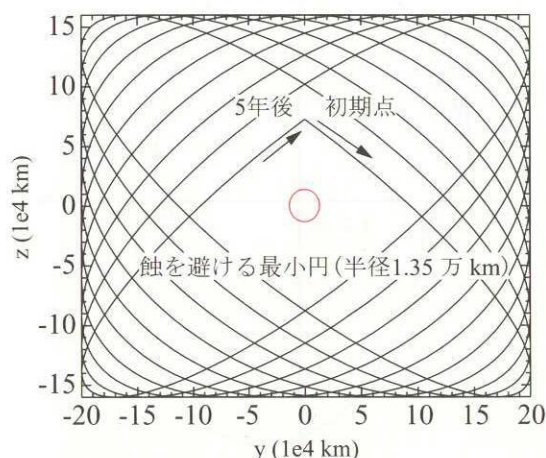


図 4-13 5 年以上蝕を避ける軌道

4.2 定式化2による設計

4.1節では、サイズ A_y が約20万kmのリサージュ軌道を対象に、ほぼゼロ ΔV と言える基準軌道を作成した。半周毎の接続点における位置gapがゼロという等号制約を課し、速度gapの2乗和を最小にする定式化1を使用した。摂動として、地球軌道の離心率と月潮汐力を考慮した。得られた基準軌道の位置と速度のgapは、それぞれ30m、0.001m/s程度であった。このような軌道の軌道決定誤差は位置で数km、速度で数mm/sなので¹⁷⁾、基準軌道として使える可能性があるが、更に2桁程度の改善が望ましい。

本節では、半周毎の接続点において、位置だけでなく速度もgapがゼロという等号制約を課す定式化2を使用し、位置・速度のgapの改善を試みる。以下では、この定式化を「定式化2」と呼ぶ。図4-14に定式化2の基本的な量を図示する。

以下に、定式化2における制御変数、等号制約、目的関数を記す。なお、 z 方向の運動は、定式化1と同様に、適当に与えられた z_0 と \dot{z}_0 を最初の半周の初期値として使用し、半周毎の接続点において値をそのまま引き継ぐ。

[制御変数] $4 \times \text{NHREV}$ 個 (5年ミッションの場合、 $\text{NHREV}=20$ であり、制御変数は計80個)

- (1) x^i_0 ($i = 1, \text{NHREV}$)
- (2) u^i_0, v^i_0 ($i = 1, \text{NHREV}$)
- (3) Δt^i ($i = 1, \text{NHREV}$)

制御変数の定義は、定式化1と同じである。

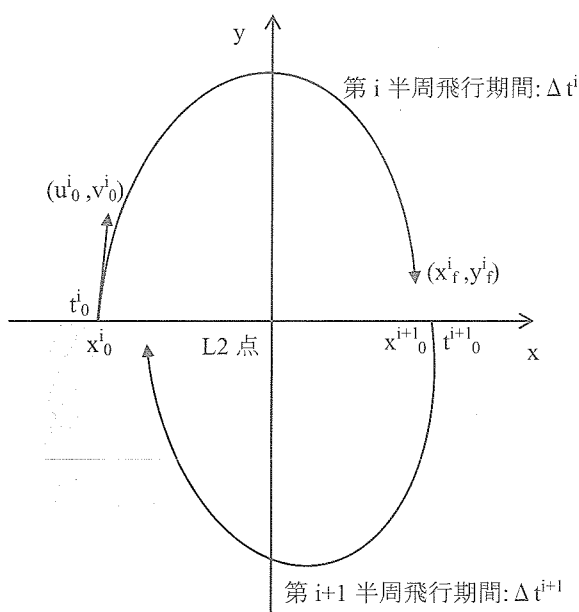


図4-14 定式化2における基本的な量

[等号制約] $4 \times \text{NHREV}$ -3 個 (5年ミッションの場合、77 個)

- (1) $x^i_f = x^{i+1}_0$ ($i = 1, \text{NHREV}-1$)
- (2) $y^i_f = 0$ ($i = 1, \text{NHREV}$)
- (3) $u^i_f = u^{i+1}_0$ ($i = 1, \text{NHREV}-1$)
- (4) $v^i_f = v^{i+1}_0$ ($i = 1, \text{NHREV}-1$)

前半の2つが位置の等号制約であり、後半の2つが速度の等号制約である。

[目的関数]

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\text{NHREV}-1} (x^{2k+1}_0 - x^1_0)^2 \Rightarrow \text{最小}$$

この目的関数は、各週の左側の通過 x 値と第1半周の x^1_0 との差の2乗和を最小にするもの。この問題には、3個の余剰自由度があり、この自由度を使って、目的関数を最小にする。

[正規化]

定式化1と同じである。

定式化2による解

地球軌道の離心率と月潮汐力を考慮した楕円制限4体問題の場合のゼロ ΔV リサージュ基準軌道を、定式化2により求める。初期軌道は、4.1.2節で使用したのと同じ以下の軌道を用いる。

初期時刻: 2005年1月1日0時UT

ミッション期間: 5年間

地球軌道の離心率 : ON

月潮汐力 : ON

z_0 : 16万km \dot{z}_0 : 0

x_{\min} : -8.5万km

x_{\max} : 4.2万km

平均 ΔV : 20.41m/s 最大 ΔV : 25.01m/s

5年間の総 ΔV : 387.86m/s

数値積分の局所許容誤差を $1D-8$ として、定式化2で解を求めた。終了コード=0の良い解が得られた。使用したSQPプログラムでは、Kuhn-Tucker条件が満たされ、ペナルティ関数値の反復当たりの減少量が十分小さくなると、終了コードが0となる。定式化1では、終了コードは5であった。line searchにおいてペナルティ関数値が十分小さくなる刻みを見つける事ができなかった時に、この終了コードが出力される。しかし、たいいていの場合、最適解にかなり近いものが得られている。

表 4-2 収束までの目的関数と制約関数の変化

繰り返し回数	目的関数	等号制約関数の最大値
0	0	23595E-5
1	69.138	21543E-5
2	30.864	2204E-5
3	23.638	10E-5
10	18.265	13E-5
30	13.381	16E-5
50	9.810	17E-5
70	7.199	18E-5
90	5.290	17E-5
95	0.512	17E-5
96	0.108	2E-5
97	0.108	1E-5 以下
99 収束	0.108	

99回の繰り返し回数で収束したが、収束までの目的関数と等号制約関数の最大値の変化の概要を表4-2に示す。なお、目的関数と制約関数は、最初に、SQPプログラム内部で勾配のオーダーが揃う様に自動スケーリングされているため、値の絶対値には意味は無い。初期軌道は通過x値が全ての周で同じであるため、繰り返し回数0での目的関数値は0である。初期軌道の最大速度gapは約25m/sと大きいため、繰り返し回数0での等号制約関数値は大きな値になっている。1回目の繰り返しで目的関数が大きくなっているが、2回目、3回目の繰り返しで、目的関数を少しずつ減らしながら、等号制約関数を大きく減らしている。その後、95回目の繰り返しまでは、目的関数の減少に重点が置かれている。96回までの繰り返し計算で等号制約関数は約4桁改善されている。初期軌道の最大速度gapは約25m/sであり、収束後の最大速度gapは0.242E-8 m/sなので、この間に約10桁の改善がなされていることから、最後の3回の繰り返し計算で6桁の改善

表 4-3 定式化2の解の情報 (ERRLOC=1D-8)

項目	数値	備考
CPU時間(分)	64.48	CPUの周波数は3.0GHz
最大位置gap(m)	0.463E-2	定式化1より4桁改善された
最大速度gap(m/s)	0.242E-8	定式化1より6桁改善された

表 4-4 定式化2の解の情報 (ERRLOC=1D-10)

項目	数値	備考
CPU時間(分)	150.57	CPUの周波数は3.0GHz
最大位置gap(m)	0.949E-02	
最大速度gap(m/s)	0.502E-08	

がなされている事が判る。表4-3に、得られた解の情報を掲げる。

図4-15に定式化2の解を、定式化1の解と比較して示す。x方向だけを約3倍拡大したものを図4-16に示す。この軌道のサイズ A_y は約20万kmである。

次に、数値積分の局所許容誤差 (ERRLOC) を1D-10として定式化2のソフトを実行した。表4-4にCPU時間、位置・速度のgapを示す。位置・速度のgapは、1D-8の時の約2倍になっている。図4-17に、得られた5年間のtrajectoryを、1D-8の場合 (赤色) と比較して示す。2つ

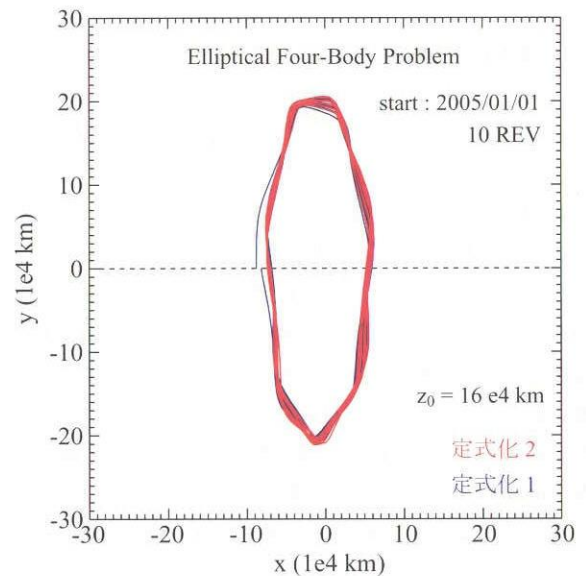


図 4-15 定式化2による解

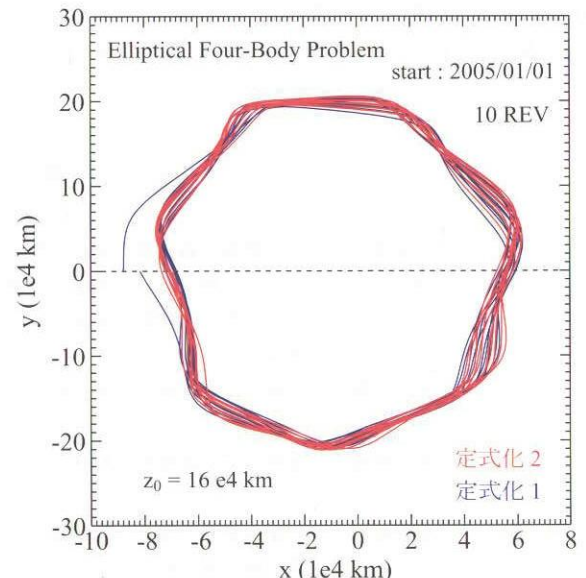


図 4-16 定式化2による解 (x方向を拡大)

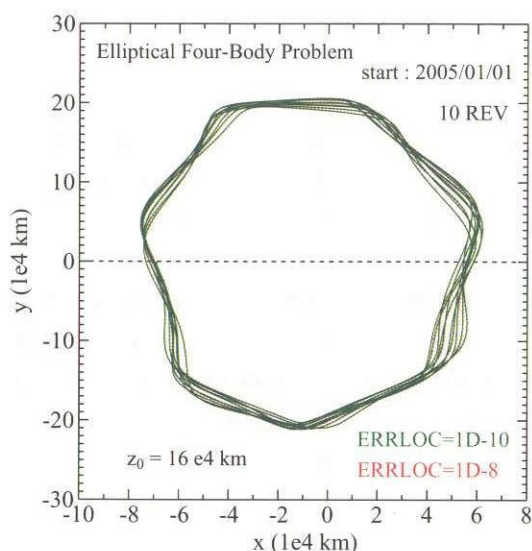


図 4-17 定式化 2 による解 (ERRLOC=1D-10)

の trajectory で僅かにずれている所が赤点状になっている。

1D-10 の場合は、位置・速度の gap が僅かに大きくなっているが、積分誤差との関係でそれらを考えねばならない。表 2-1 と表 2-2 から、90 日間（約半周）伝播後の積分誤差は、ERRLOC=1D-10 の時、位置誤差は 0.01m 以下、速度誤差は 1D-8m/s 以下である事が判る。定式化 2 での解の誤差は、1D-8 でも 1D-10 でも、0.01m、1D-8m/s 程度である。1D-9 以上では積分誤差が解の位置・速度 gap を上回る状況になるため、真の gap を表わしているとは言えない。よって、局所許容誤差は 1D-10 が良いと考える。

定式化 2 により、位置・速度 gap が軌道決定誤差より 5 桁以上も小さい解を得る事ができた。まだ、サイズ 20 万 km の場合だけなので、より大きなサイズでの検討が必要である。

文献 18) との比較

定式化 2 は、文献 18) の方法と似ている点がある。まず、文献 18) の方法を以下に簡単に紹介する。

— 文献 18) の概要 —

- ・この論文は、円制限 3 体問題における L1, L2 点周りのリサージュ基準軌道を作成している。
- ・3 次の解析解を初期軌道として使用している。
- ・約半周期間の部分軌道に分割し、数値積分により、初めに分割点の位置だけを合わせ、次に速度も合わせる 2 段階の手続きを使用。その際に使用する勾配計算は、変分方程式を運動方程式と同時に積分する事で行なう。
- ・制御変数の数が位置・速度の接続条件の数より多いので、制御変数の修正量のノルムを最小にする行列計算で解を得ている。

次に、文献 18) の方法と定式化 2 を比較する。図 4-18 に 2 つの方法を模式図で表わす。文献 18) の方法は、解に近

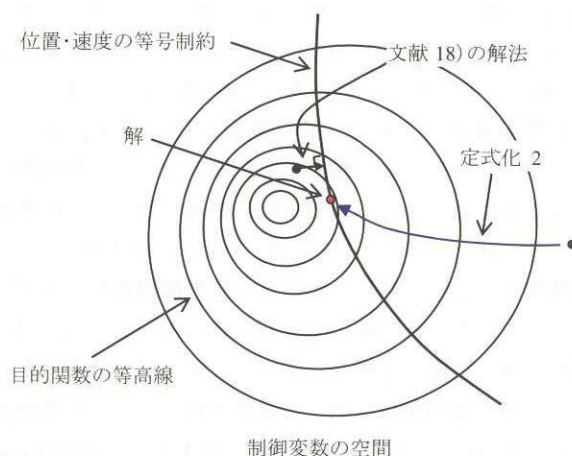


図 4-18 文献 18) の方法と定式化

表 4-5 文献 18) の方法と定式化 2 の比較

	文献 18) の方法	定式化 2
初期値への要求	制御変数の修正量の大きさを最小にする方法のため、解に近い初期値が必要。 3 次程度の解析解を事前に求めておく必要がある。	意味のある目的関数を最小にするため、初期値が解からかなり離れていても良く、線型解で良い。
第 1 処理ステップ	接続点での位置のみを合わせる。	IQG-3 法で通過 x 値固定の初期軌道を作成する。ここで線型解を使用する。
第 2 処理ステップ	接続点での速度も合わせる。	接続点での位置と速度に等号制約を課し、目的関数を最小にする解を求める。
処理時間	勾配も変分方程式の数値積分で求め、制御変数の修正量を最小にするだけのため、処理時間が短い。	勾配を数値微分で計算して、目的関数を最小にするため、長い計算時間が必要。

い初期軌道を解析的に求めておき、位置・速度の等号制約を満たす最小の修正量を求めるものである。図 4-18 に示したように、初期位置から等号制約曲線に下ろした垂線の足が解となる。一方、定式化 2 では、誤差は大きいのが求めるのが容易な線型近似を使用して得た初期軌道から出発し、位置・速度の等号制約を満たす条件の下で、4.2 節の目的関数を最小にする軌道を求める。

表 4-5 に、両者の方法をもう少し詳しく比較する。

4.3 サイズ 60 万 km までの基準軌道（定式化 2 と 2a による）

本節では、サイズ 20 万 km 以上の色々な大きさ（約 30 万 km、約 40 万 km、約 50 万 km、約 60 万 km）のリサジュ基準軌道の作成を、定式化 2 で試みる。特に断りがない限り、以下の条件を使用する。

- ・初期時刻 : 2005 年 1 月 1 日 0 時 UT
- ・ミッション期間 : 5 年間（6 年間の計算をして、初期時刻からの 5 年分を利用する場合もある）
- ・摂動 : 地球軌道の離心率と月潮汐力
- ・局所許容誤差 : 1D-10
- ・z 成分の初期値 : $z_0=16$ 万 km、 $\dot{z}_0=0$

4.3.1 サイズ約 30 万 km の場合

IQG-3 法を使い、位置 gap がゼロで速度 gap が最小に近い初期軌道を求めた。xz 面通過 x 値の x_{\min} を -11.75 万 km とし、 x_{\max} を 6 万 km から 8 万 km の範囲で変えて計算した。 x_{\max} に対する平均 ΔV （平均速度 gap）の変化を図 4-19 に示す。 $x_{\max}=7$ 万 km の軌道を初期軌道として採用する。

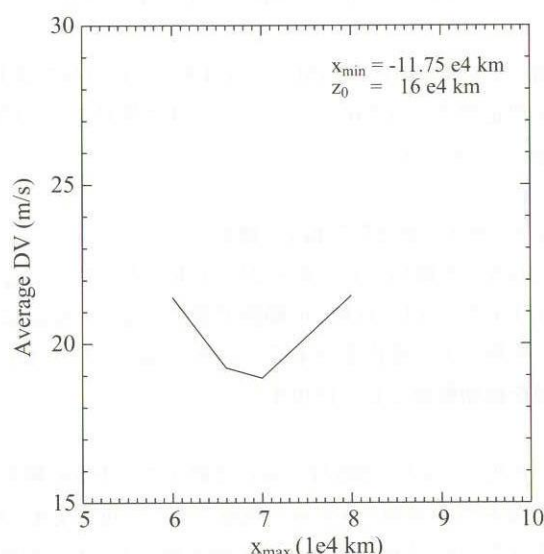


図 4-19 x_{\max} による平均 ΔV の変化（30 万 km サイズ）

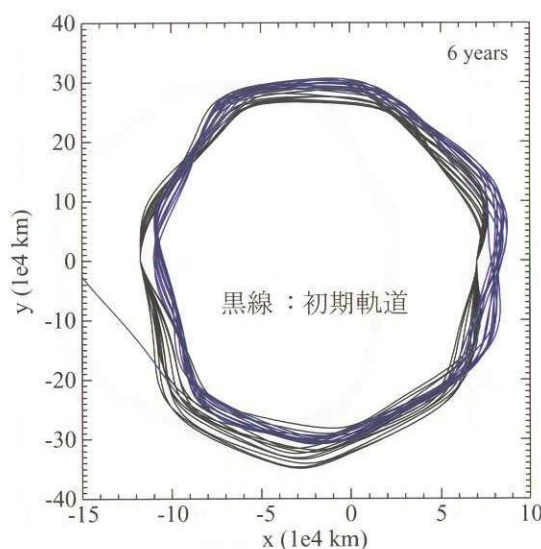


図 4-20 定式化 2 の解（サイズ 30 万 km）

定式化 2 のソフトにより、リサジュ基準軌道を求めた。CPU 時間 17 分の 1 回の実行で終了コード 0 の解を得た。Pentium 4 の 3.0GHz マシンを使用した。位置 gap の最大値は $6.83\text{E-}6$ km、速度 gap の最大値は $3.74\text{E-}6$ mm/s であり、軌道決定誤差に比して、5 桁以上小さい。図 4-20 に trajectory を示す。黒線は初期軌道であり、青線が定式化 2 による解である。最後の半周の終端 x 値だけが外れている。これは、定式化 2 による目的関数が最後の半周の終端 x 値を陽に含んでいないためと考えられる。最後の半周以外は基準軌道として問題ないと考えられるので、図 4-20 では 6 年間の trajectory を作成している。初期時刻からの 5 年間の軌道を基準軌道として使用できる。

最後の半周の終端 x 値のずれを無くするため、以下の目的関数を持つ定式化 2a を考えた。定式化 2 の目的関数に、第 2 項を追加した。

[定式化 2a の目的関数]

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{\text{HREV}}-1} (x^{2k+1}_0 - x^1_0)^2 + (x^{N_{\text{HREV}}}_f - x^1_0)^2 \Rightarrow \text{最小}$$

図 4-21 に定式化 2a の 5 年間の解を示す。CPU 時間 67 分の 1 回の実行で終了コード 5 の解を得た。位置 gap の最大値は $2.79\text{E-}3$ km、速度 gap の最大値は $1.27\text{E-}3$ mm/s であり、軌道決定誤差に比して、約 3 桁小さい。2 回目の継続実行でも改良されなかった。定式化 2a の目的関数は、追加した項の分だけ複雑になっており、収束性が低下している。 $x^{N_{\text{HREV}}}_f$ は最後の半周の約 90 日間の数値積分によって求められる事に注意。しかし、この解も使用できると考えられる。

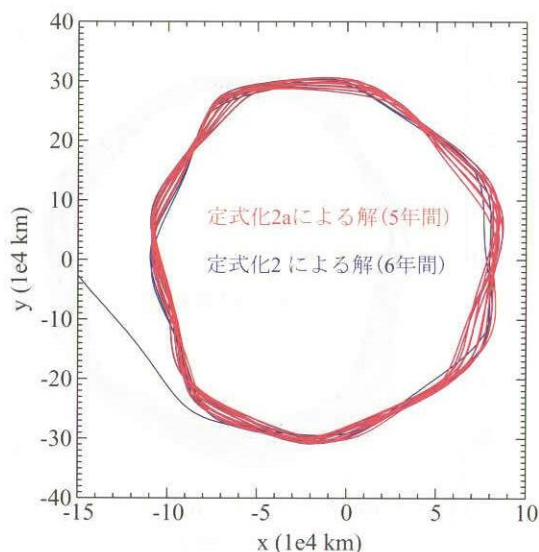


図4-21 定式化 2a の解 (サイズ 30 万 km)

4.3.2 サイズ約 40 万 km の場合

IOG-3 法により、 x_{\min} を -15 万 km として、 x_{\max} を 7 万 km から 10 万 km の範囲で変えて得た、 x_{\max} に対する平均 ΔV の変化を図 4-22 に示す。 $x_{\max} = 9$ 万 km の軌道を初期軌道として採用する。

定式化 2 により、CPU 時間 23 分の 1 回の実行で終了コード 0 の解を得た。図 4-23 に赤色で表示した。6 年分の軌道である。位置 gap の最大値は $9.29E-6$ km、速度 gap の最大値は $4.04E-6$ mm/s であり、軌道決定誤差に比して 5 桁小さい。

定式化 2a では、1 回目の実行で 27 分後に終了コード 5 の解を得た。位置・速度の gap は軌道決定誤差より約 4 桁小さい。更に 4 分の継続実行で終了コード 0 の解を得た。

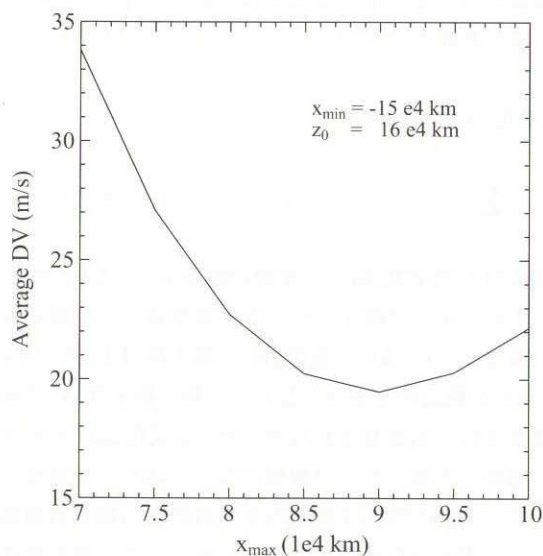
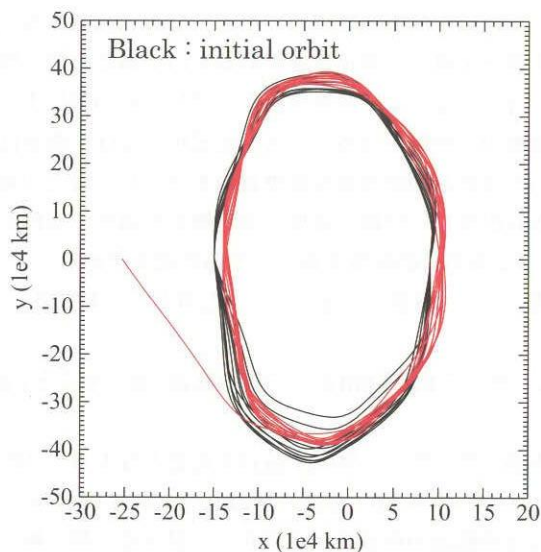
図 4-22 x_{\max} による平均 ΔV の変化 (40 万 km サイズ)

図 4-23 定式化 2 の解 (サイズ 40 万 km)

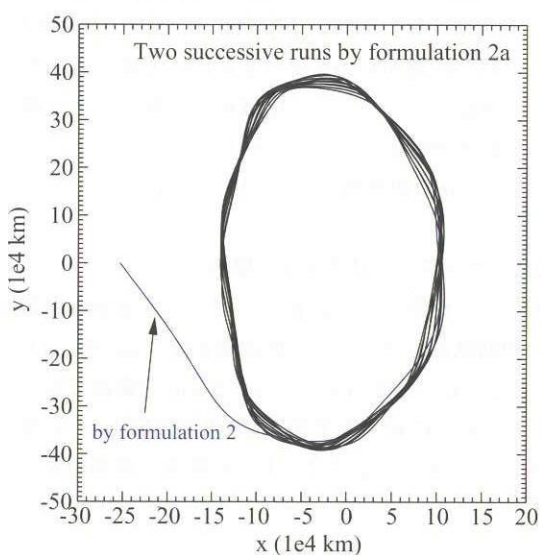


図 4-24 定式化 2a の解 (サイズ 40 万 km)

位置・速度の gap は、 $9.79E-6$ km、 $4.86E-6$ mm/s であり、軌道決定誤差より 5 桁小さい。図 4-24 に黒色で 5 年間の trajectory を示す。

4.3.3 サイズ約 50 万 km の場合

IOG-3 法を使い、 x_{\min} を -21.5 万 km として、 x_{\max} を 11 万 km から 13.5 万 km の範囲で変えて得た、 x_{\max} に対する平均 ΔV の変化を図 4-25 に示す。 $x_{\max} = 12$ 万 km の軌道を初期軌道として採用する。

定式化 2 により、285 分の実行で終了コード 5 の解を得た。図 4-26 を参照。6 年分の軌道である。位置 gap の最大値は $3.13E-5$ km、速度 gap の最大値は $1.72E-5$ mm/s であり、軌道決定誤差に比して 5 桁小さい。

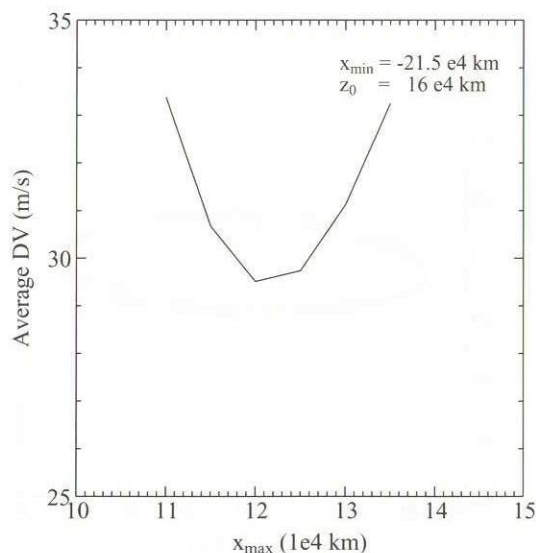
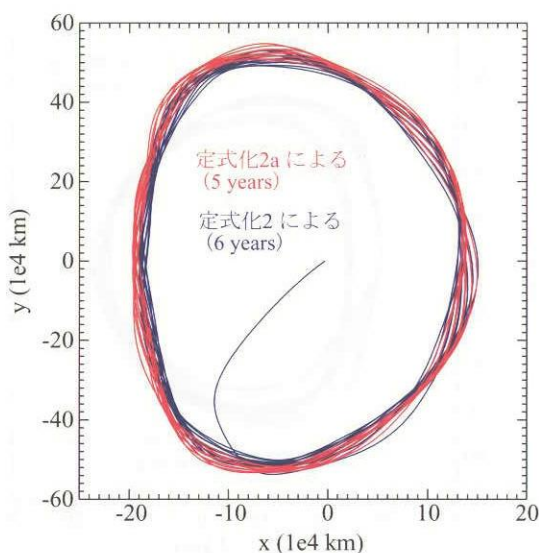
図 4-25 x_{\max} による平均 ΔV の変化 (50 万 km サイズ))

図 4-27 定式化 2a の解 (サイズ 50 万 km)

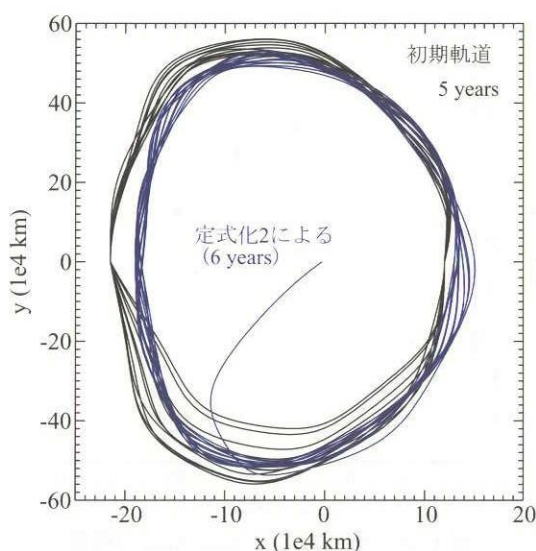


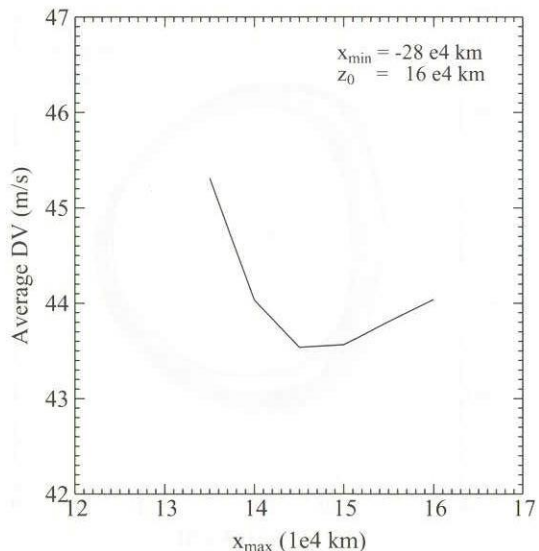
図 4-26 定式化 2 の解 (サイズ 50 万 km)

定式化2aでは、50分の実行で終了コード5の解を得た。位置と速度のgapは、 $1.23\text{E-}5$ km, $6.49\text{E-}6$ mm/sであり、やはり軌道決定誤差より5桁小さい。図4-27にtrajectoryを示す。

4.3.4 サイズ約 60 万 km の場合

IOG-3法を使い、 x_{\min} を -28 万kmとして、 x_{\max} を13.5万kmから16万kmの範囲で変えて得た、 x_{\max} に対する平均 ΔV の変化を図4-28に示す。 $x_{\max} = 14.5$ 万kmの軌道を初期軌道として採用する。

定式化2により、50分の実行で終了コード5の解を得た。図4-29を参照。6年分の軌道である。位置gapの最大値は $2.79\text{E-}5$ km、速度gapの最大値は $1.48\text{E-}5$ mm/s

図 4-28 x_{\max} による平均 ΔV の変化 (60 万 km サイズ)

であり、軌道決定誤差に比して5桁小さい。

定式化2aでは、210分の実行で終了コード5の解を得た。位置と速度のgapは、 $1.07\text{E-}3$ km, $5.33\text{E-}4$ mm/sであり、軌道決定誤差より3桁小さい。図4-30にtrajectoryを示す。

図4-31に、定式化2aで得たリサージュ基準軌道のyz平面図を示す。サイズが60万kmを超えると、ハロー軌道にかなり近い事が判る。

4.3.5 各サイズのリサージュ基準軌道の比較

4.2節と合わせて、約20万kmから約60万kmまでのサイズのリサージュ基準軌道を設計した。なお、サイズの値は概略値である。定式化2及び2aの目的関数から判る

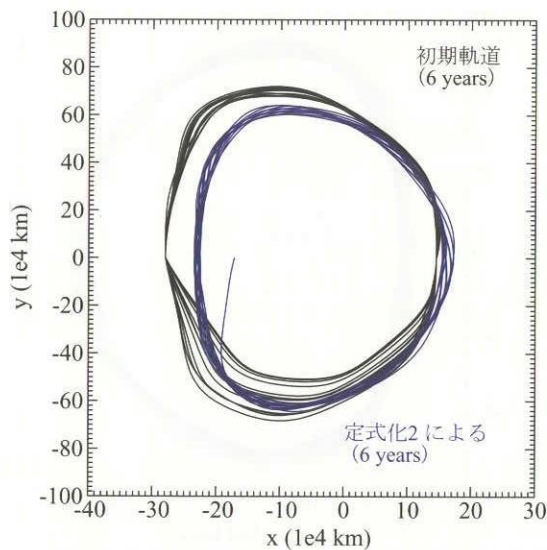


図 4-29 定式化 2 の解 (サイズ 60 万 km)

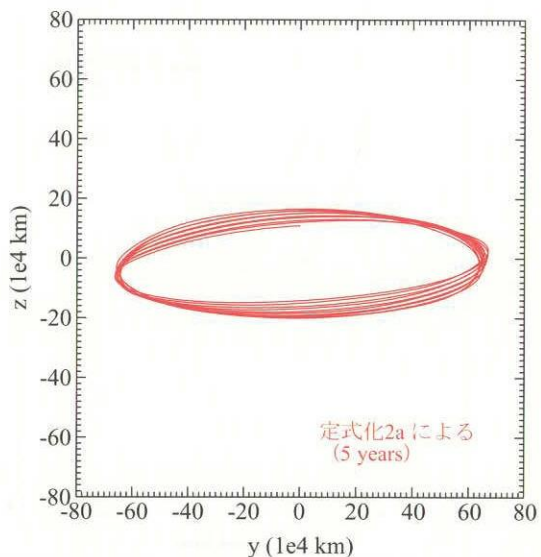


図 4-31 定式化 2a の解 (サイズ 60 万 km、y-z 平面図)

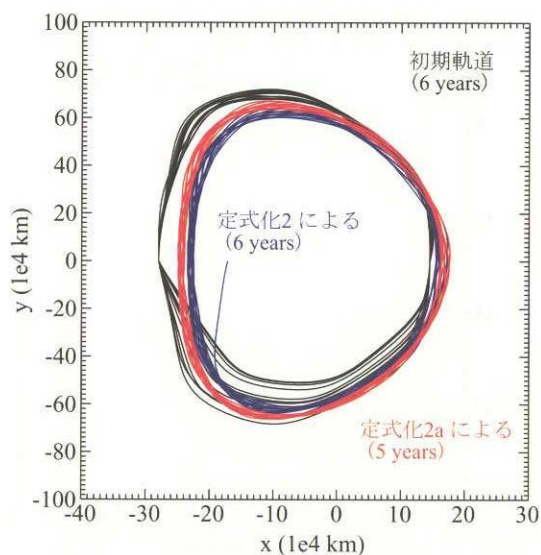
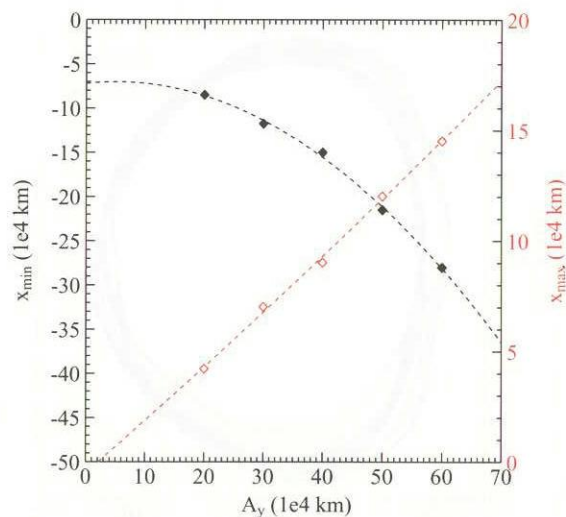


図 4-30 定式化 2a の解 (サイズ 60 万 km)

図 4-32 サイズ A_y と x_{\min} , x_{\max} の関係

ように、これらの定式化による基準軌道設計では、サイズ A_y を正確に指定する事はできない。使った初期軌道に近いサイズに収束する。但し、同じ初期軌道を使っても、定式化2と2aでは、収束後の軌道サイズは僅かに異なる。サイズが大きくなると、定式化2aの方が大きめの軌道に収束している（図 4-21 と図 4-30 を参照）。初期軌道により得られる基準軌道のサイズがほぼ決まるので、図 4-32 に収束後のサイズ A_y (概略値) と初期軌道の x_{\min} , x_{\max} の関係を掲げる。但し、これは $z_0 = 16$ 万 km、 $\dot{z}_0 = 0$ の場合であり、これらの値が変われば、傾向は幾分変わるものと考えられる。

収束後のサイズを正確に指定する目的で、定式化2bを試みた。これは、定式化2に、第1半周の初期 x 値が入力で指定される値に等しいという等号制約を追加したもの

である。4.3.4 節の軌道（サイズ約 60 万 km）に対して、初期 x 値が -30 万 km や -25 万 km 等の値に等しいという等号制約を課して収束を試みたが、失敗した。最初の解の更新時において、下位の 2 次計画問題を解く際に等号制約が線型独立でないというエラーメッセージが出て終了した。物理的には解はある筈であるが、原因は判らない。

サイズ約 20 万 km ～ 約 60 万 km の基準軌道設計における定式化2と2aの性能を図 4-33 に比較する。左軸は、位置・速度の gap と軌道決定誤差の比であり、軌道決定誤差は 1km, 1mm/s と仮定した。位置と速度のこの比を比べて大きい方の値をプロットした。今の場合は、位置の比の方が全ての場合において 2 倍程度大きかった。右軸は Pentium 4 の 3GHz マシンによる CPU 時間である。位置・速度 gap は、定式化2の方が安定している。CPU 時

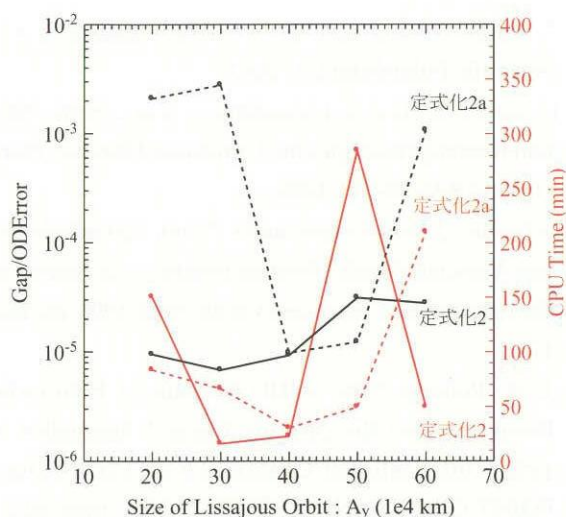


図 4-33 サイズによる 2 つの定式化の性能変化

間には17分から285分と大きなバラツキが見られる。150程度は覚悟しておくべきであろう。

4.4 サイズ 60 万 km 超の基準軌道設計の問題点

リサージュ軌道は、ハロー軌道（サイズ約65万km以上）に比べてサイズを小さくできる事が利点であり、60万kmを超えるリサージュ軌道を考える必要はないと考えるが、参考までに70万km程度のリサージュ軌道を、定式化2、2aで設計する事を試みた。

IOG-3法を使い、 $x_{\min} = -35$ 万kmとして、 x_{\max} を15万km～19万kmの範囲で変えて平均 ΔV を求めた。図4-34を参照。 $x_{\max} = 17.5$ 万kmの軌道を初期軌道として選択した。この5年間のtrajectoryを図4-35に示す。

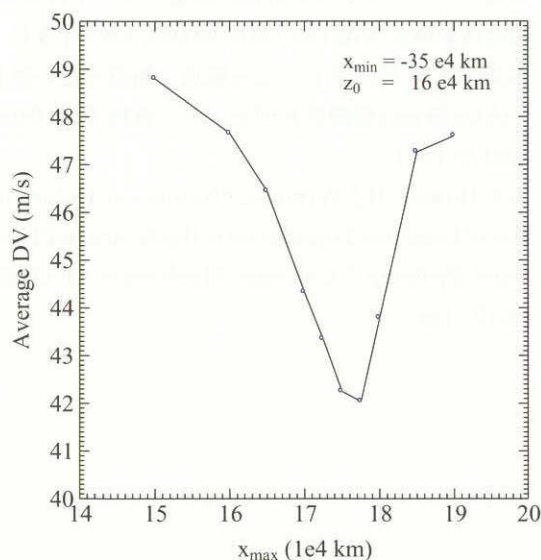
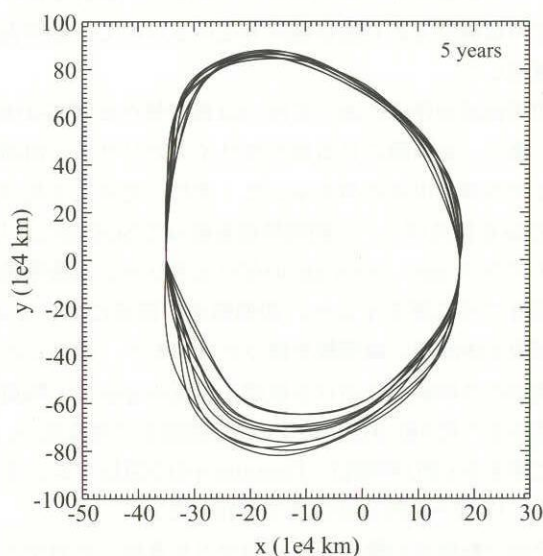
図 4-34 x_{\max} による平均 ΔV の変化 (70 万 km サイズ)

図 4-35 サイズ 70 万 km を狙った初期軌道

この初期軌道を定式化2のソフトに入力すると、1回目のiteration時に、「等号制約が独立でない」というエラーメッセージが出て終了した。定式化2aのソフトに入力すると、4回目のiteration時に、「下位の2次計画問題の目的関数の係数行列が正定でない」というエラーメッセージを出して終了した。摂動（月潮汐力と地球軌道の離心率）が悪影響を与えているかも知れないと考えて、円制限3体問題近似で初期軌道を作り、同じ近似で定式化2のソフトに入力してみたが、摂動を考慮した場合と同様に、1回目のiteration時に「等号制約が独立でない」というエラーメッセージが出て終了した。以上の事から、サイズが大きくなった事による円制限3体問題自体の非線型性の増大が悪影響を与えていると考えられる。

5. 結論

太陽-地球系 L2 点のリサージュ軌道でミッションを遂行する宇宙機を少ない燃料で軌道保持するためには、各種誤差が無い時のゼロ ΔV リサージュ基準軌道を設計する必要がある。欧米では3次以上の高次の解析解を初期軌道として使用し、半周程度の期間に分割した軌道群の位置・速度のmatching条件を満たす解を数値的に求める事で、ゼロ ΔV リサージュ基準軌道を作成している。この方法は、初期軌道を作る段階で高次解析解を必要とする難点がある。

そこで、本報告では、非線型計画法の解法の一つであるSQP (Sequential Quadratic Programming) 法を使い、高次解析解を求める事なく、 ΔV ゼロのリサージュ基準軌道を設計する事を考えた。摂動としては、地球公転軌道の離心率の影響と月潮汐力を考慮した。この他の摂動と

して、太陽輻射圧と惑星潮汐力があるが、輻射圧はほぼ一定の加速度であり惑星潮汐力も小さいので、本報告では無視した。

初期軌道の作成においては、3.4節で述べたIOG-3法を使う事で、長期間に亘る色々なサイズのリサージュ初期軌道を作る事が出来る事を示した。次に、定式化2及び定式化2aを使えば、この初期軌道を使ってSQP法により、サイズ20万km～60万kmのゼロ ΔV リサージュ基準軌道を設計できる事を示した。初期軌道の作成においては、円制限3体問題の線型解を使うだけである。設計した基準軌道の各接続点における位置・速度のgapは、軌道決定誤差より約5桁小さい値であり、問題とはならない。設計に要するCPU時間は、Pentium 4の3GHzマシンを使って、17分～285分の範囲で変化した。

地球公転軌道の離心率と月潮汐力を考慮した力学モデルにおいて、本報告の手法により、高次解析解を用いることなくゼロ ΔV リサージュ基準軌道の設計が可能となった。太陽輻射圧はほぼ一定の加速度であり、惑星潮汐力も小さいので、本方法は実際の太陽系モデルにも適用できると考えられる。

参考文献

- 1) T.Nakagawa, SPICA Working Group, "SPICA: Space Infrared Telescope for Cosmology and Astrophysics," *Advances in Space Research*, 34, 2004, pp. 645-650.
- 2) JASMINE チーム, "赤外線位置天文観測衛星 (JASMINE) 計画 第1回検討報告書," 2003年7月.
- 3) 歌島, "ラグランジュ点近傍の軌道力学," 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-960033, 1997年3月.
- 4) M.Hechler, J.Cobos, "HERSCHEL, PLANCK AND GAIA ORBIT DESIGN," *International Conference on LIBRATION POINT ORBITS AND APPLICATIONS*, June 10-14, 2002, Spain.
- 5) G.Gomez, J.Llibre, R.Martinez, C.Simo, "Dynamics and Mission Design Near Libration Points, Vol.1," *World Scientific Monograph Series in Mathematics*, World Scientific Publishing Co., 2001.
- 6) G.Gomez, J.Llibre, R.Martinez, C.Simo, "Dynamics and Mission Design Near Libration Points, Vol.3," *World Scientific Monograph Series in Mathematics*, World Scientific Publishing Co., 2001.
- 7) G.Gomez, K.Howell, J.Masdemont, and C.Simo, "Station-Keeping Strategies for Translunar Libration Point Orbits," *AAS 98-168*, 1998.
- 8) G.Gomez, J.Masdemont, and C.Simo, "Quasihalo Orbits Associated with Libration Points," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol.46, No.2, 1998, pp. 135-176.
- 9) C. E. Roberts, "The SOHO Mission L1 Halo Orbit Recovery from the Attitude Control Anomalies of 1998," *International Conference on LIBRATION POINT ORBITS AND APPLICATIONS*, June 10-14, 2002, Spain.
- 10) J.Rodriguez-Canabal, "OPERATIONAL HALO ORBIT MAINTENANCE TECHNIQUE FOR SOHO," *ESA P-255*, 1986.
- 11) 茂木俊秀, 福島雅夫, "FORTRAN77 最適化プログラミング (岩波コンピュータサイエンスシリーズ)," 岩波書店, 1991.
- 12) 渡部 力, 名取 亮, 小国 力, "Fortran77 による数値計算ソフトウェア," 丸善株式会社, 1989年.
- 13) 堀 源一郎, "現代天文学講座14・天文計算セミナー," 恒星社, 1981年.
- 14) Victor Szebeheley, "Theory of Orbits (The Restricted Problem of Three Bodies)," Academic Press, 1967.
- 15) 歌島, "太陽-地球系 L4, L5 点近傍軌道の摂動解析," 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-980010, 1999年3月.
- 16) 歌島, "ラグランジュ点近傍の軌道力学," 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-960033, 1997年3月.
- 17) 歌島, "太陽-地球系 L1, L2 点軌道の軌道決定の概要," JAXA 情報技術開発共同センター資料 GSB-04032, 2004年10月.
- 18) K.C.Howell, H.J.Pernicka, "Numerical Determination of Lissajous Trajectories in the Restricted Three-Body Problem," *Celestial Mechanics* 41 (1988), pp.107-124.

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-04-021

発行日 2005年2月14日
編集・発行 独立行政法人 宇宙航空研究開発機構
〒182-8522
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
TEL 0422-40-3935
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区宮前1-20-19

© 2005 JAXA

※本書（誌）の一部または全部を著作権法の定める範囲を超え、無断で複写、複製、転載、テープ化およびファイル化することを禁じます。

※本書（誌）からの複写、転載等を希望される場合は、下記にご連絡ください。

※本書（誌）中、本文については再生紙を使用しております。

＜本資料に関するお問い合わせ先＞

独立行政法人 宇宙航空研究開発機構 情報化推進部 宇宙航空文献資料センター



宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency