

# 宇宙航空研究開発機構研究開発資料

## JAXA Research and Development Memorandum

---

### 強度不確定性に対する簡易評価指標 －MCMCに基づくベイズ期待信頼度－

Application of Bayesian expectation to reliability index on material strength

伊藤 誠一，加藤 久弥，原 栄一，岡田 孝雄

Seiichi ITO, Hisaya KATOH, Eiichi HARA and Takao OKADA

2019年2月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

## 目 次

概要.....	1
1. はじめに.....	2
2. ベイズ期待信頼度.....	3
3. MIL-A/B 許容値 .....	3
3.1 正規強度モデル.....	3
3.2 ワイブル強度モデル.....	4
4. 計算例.....	5
4.1 複合材強度に対する評価例.....	6
4.2 標本数とベイズ期待信頼度.....	7
5. おわりに.....	8
参考文献 .....	8
補記 1 ベイズ期待信頼度.....	10
補記 2 信頼限界.....	10
補記 3 正規分布の片側許容値.....	10
補記 4 2 母数ワイブル分布の片側許容値.....	11
補記 5 赤池情報量基準 AIC .....	13

# 強度不確定性に対する簡易評価指標 —MCMC に基づくベイズ期待信頼度—\*

伊藤 誠一<sup>\*1</sup>, 加藤 久弥<sup>\*2</sup>, 原 栄一<sup>\*3</sup>, 岡田 孝雄<sup>\*2</sup>

## Application of Bayesian expectation to reliability index on material strength\*

Seiichi ITO<sup>\*1</sup>, Hisaya KATOH<sup>\*2</sup>, Eiichi HARA<sup>\*3</sup>, Takao OKADA<sup>\*2</sup>

### Abstract

The MIL-A/B (Military specification A and B-basis) values for the reliability assessment of material strength are evaluated by two factors of reliability (0.99 and 0.9 for the A and B values) and confidence level (0.95). Towards this evaluation method, the expected reliability index is modelled as a reliability grasping technique using Bayesian analysis that integrates reliability and confidence level. The Bayesian method is applied to the uncertainty evaluation of unknown parameters to define the Bayesian expected reliability as a unitary reliability index for the allowable material strength. The construction of the Bayesian reliability method and a concrete evaluation example for the MIL value of the material strength are shown in using MCMC (Markov chain Monte Carlo) which is a representative method of calculation statistics.

### 概 要

信頼度と信頼水準を統合して、平明な一元評価を可能にする、ベイズ理論を応用した強度の信頼性評価モデルを構築する。ここでは標本や確率分布の未知母数の不確定性に対してベイズ理論を適用して、目的の強度レベル対する一元評価としてのベイズ期待信頼度を定義する。

ベイズ法では工学的判断などの事前情報と標本結果を用いて、未知母数をベイズ理論によって推定する。推定された未知母数は事後確率分布として形成されるが、事後分布は未知母数に対する事前分布の設定に影響を受ける。本報告では事前分布の設定に依存しないマルコフチェーン・モンテカルロ(MCMC)法を用い、得られた事後分布から MIL 値に対する信頼度のベイズ期待値を求めて、これを MIL 値に対応する一元評価指標とする。

**Key words :** 構造安全性・信頼性、ベイズ期待信頼度、MCMC 法、MIL-A/B 値、AIC

---

\* 平成 30 年 12 月 3 日受付 (Received December 3, 2018)

<sup>\*1</sup> 宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 構造・複合材技術研究ユニット客員  
(Guest researcher, Aeronautical Technology Directorate, Structural and Advanced Composite Research Unit, JAXA)

<sup>\*2</sup> 宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 構造・複合材技術研究ユニット  
(Aeronautical Technology Directorate, Structural and Advanced Composite Research Unit, JAXA)

<sup>\*3</sup> (株) IHI ジェットサービス (IHI Jet Service Co., Ltd.)

## 1. はじめに

材料強度に対する不確定性の取り扱いでは MIL-A/B 値が適用され、信頼度 (A 値 99%、B 値 90%) および信頼水準 (95%) の二元評価が行われる<sup>1),2)</sup>。この二元表示に対して不確定性を直視的に捉えるため、ある係数を標本平均値に乗じた簡易な評価も存在する。信頼度および信頼水準の二元評価が不確定性の基準として捉えにくいことも一因と思われるが、強度の変動が大きい場合には取り扱いに注意が必要である。そこで、本報告では信頼度と信頼水準を統合して、平明な一元評価を可能にする、ベイズ理論<sup>3,4)</sup>を応用した強度の信頼性評価モデルを構築する。

一元評価の試みでは、信頼度と信頼水準の二元評価について荷重-強度 (Stress-Strength) モデルとして統合し、あらゆる強度レベルに対する破損確率の平均値 (あるいは平均信頼度) という定義を用いた一般式が導かれている<sup>5)</sup>。ここでは、強度の不確定性の取扱いをさらに明確にして、標本や確率分布の未知母数についてベイズ理論を用いて推定し、ある特定の強度レベルに対する一元評価としてのベイズ期待信頼度を定義する。ベイズ法では、工学的判断などの事前情報と標本結果を用いて未知要因や母数をベイズ理論によって推定する。推定された未知母数は事後確率分布として形成されるが、事後分布は未知母数に対する事前情報の設定に影響を受ける。本報告では事前分布設定に依存しないマルコフチェーン・モンテカルロ (MCMC: Markov Chain Monte Carlo)<sup>6)</sup> 法を用い、得られた事後分布から MIL-A/B 値に対する信頼度のベイズ期待値を求めて、これを信頼度および信頼水準の二元評価に対応する一元評価指標とする。また MIL-A/B 許容値の計算においては、強度の不確定性モデルとして正規分布と 2 母数ワイブル分布の双方の確率分布を想定し、各分布を構成する母数はすべて未知として取り扱う。本手法の概略を図 1 に示す。

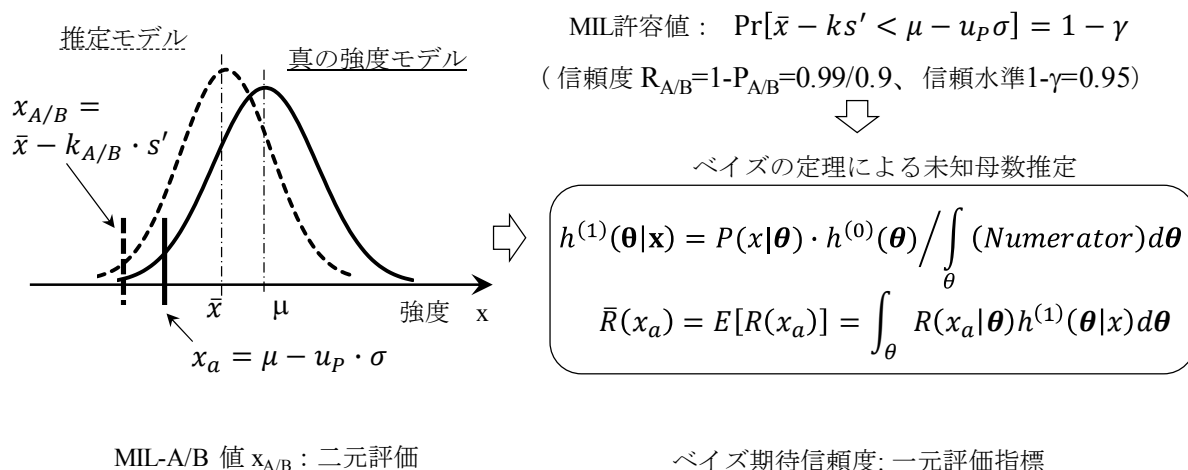


図 1 ベイズ期待信頼度(正規分布モデル)

## 2. ベイズ期待信頼度

強度の確率分布の未知母数ベクトルを $\theta$ とすると、許容値 $x_a$ におけるベイズ期待信頼度 $\bar{R}(x_a) = E[R(x_a)]$ は次式で定義される。

$$\bar{R}(x_a) = E[R(x_a)] = \int_{\theta} R(x_a|\theta)h^{(1)}(\theta|x)d\theta \quad (1)$$

ここで、 $R(x_a|\theta)$ は母数 $\theta$ で記述される許容値 $x_a$ に対する信頼度を示す。また未知母数 $\theta$ の事後分布 $h^{(1)}(\theta|x)$ は、 $n$ 個の標本データ $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の生起確率 $P(\mathbf{x}|\theta)$ 、および $\theta$ に対する確信の度合いである事前分布 $h^{(0)}(\theta)$ を用いて、ベイズの定理<sup>3)</sup>から次式で求められる。

$$h^{(1)}(\theta|x) = P(\mathbf{x}|\theta) \cdot h^{(0)}(\theta) / \int_{\theta} (\text{Numerator})d\theta \quad (2)$$

ベイズの定理では未知母数(あるいは要因)の事後分布は、上式のように、生起事象確率の尤度 $P(\mathbf{x}|\theta)$ と未知母数に対する事前分布 $h^{(0)}(\theta)$ の積に比例する。事前分布のモデル化では、予め情報が得られていれば未知母数の確率分布が多様な手法で形成され、他方、情報がない場合には無情報事前分布として一様分布が選択される。尤度関数形にも依存するが、事後分布計算の複雑さを避けるために、事前分布と事後分布を同形の確率分布に仮定した自然共役分布も広く応用される。また共役分布で対応できない状況では、複雑に形成された事後分布はマルコフチェーン・モンテカルロ (MCMC) 法などの計算統計の手法を用いて評価される<sup>6)</sup>。事前分布については数学的考察が論じられているが<sup>7)</sup>、ここではベイズの定理の工学的応用を目的に、適用しやすい確率分布や計算手法などを考慮する。具体的にはMCMCの一手法である未知母数の事前分布を仮定しないメトロポリス法<sup>6)</sup>を適用して、(2)式の事後分布 $h^{(1)}(\theta|x)$ を求めている(補記1)。

以上のように、本報告では未知母数をベイズ法で推定して事後分布を得て、許容値に対する信頼度のベイズ期待値を(1)式によって一元指標として求め、信頼度および信頼水準の二元評価と対応させる。

## 3. MIL-A/B 許容値

材料強度の不確定性に対するMIL許容値は信頼度 $R_A=0.99$ (A値)、 $R_B=0.9$ (B値)および信頼水準 $1-\gamma=0.95$ の二元評価で記述される。MIL値は標本を用いて下記する手順<sup>1), 8)</sup>に従って計算されるが、強度の確率分布についてここでは正規分布および2母数ワイブル分布を仮定し、すべての母数を未知として評価を行う。本報告では、このMIL値に対する一元評価として、MCMC法を適用した(1)式のベイズ期待信頼度、 $\bar{R}(x_a=\text{MIL-A/B})$ を計算する。なお、以下では強度の下限界値の定式(補記2)を示すので、確率分布を強度モデルとして記述する。

### 3.1 正規強度モデル

強度が正規分布 $N(x|\mu, \sigma^2)$ に従うとき、標本平均 $\bar{x}$ と標本標準偏差 $s'$ から求められる許容値 $x_a$ は、区間推定の下限界値として係数 $k$ を用いて次式で表される(補記3)。

$$x_a = \bar{x} - ks' \quad (3)$$

ここで真の平均値を $\mu$ 、標準偏差を $\sigma$ とすると、 $x_a$ を真の許容値よりも小さく設定する確率 $1-\gamma$ は信頼水準であり、次式に書ける。

$$\Pr[\bar{x} - ks' < \mu - u_p\sigma] = 1 - \gamma \quad (4)$$

式中、 $u_p$ は標準正規分布の累積確率の $P$ パーセント点である。(4)式を標準正規分布と自由度 $n-1$ のカイ2乗分布を用いて展開すると、標本数 $n$ に依存する係数 $k$ は次式で表される。

$$k = t'_{\gamma}(n-1, \sqrt{na_p})/\sqrt{n} \quad (5)$$

ここで、 $t'_{\gamma}$ は自由度  $n-1$ 、非心度  $\sqrt{na_p}$  の非心  $t$  分布の上側  $\gamma$  パーセント点である。なお、MIL-A 値では、 $a_p=a_{0.01}=2.326$ 、MIL-B 値では  $a_p=a_{0.1}=1.282$  の上側パーセント点が各々設定されている。下限界値  $x_a$  を定める係数  $k_A$  および  $k_B$  を表 1 にまとめる。また標本数  $n$  に対する係数  $k(n)$  を図 2 に示す。

表 1 正規分布下限界係数:  $k_{A/B}$ 

n	$k_A$	$k_B$
4	12.39	4.162
6	7.335	3.006
10	5.074	2.355
30	3.447	1.777
50	3.125	1.646
100	2.850	1.527

表 2 2 母数ワイブル分布下限界係数:  $k_{1A/B}$ 

n	$k_{1A}$	$k_{1B}$	MIL 近似式 $k^*_1$		Bain 近似式 $k^{**}_1$	
			$k^*_{1A}$	$k^*_{1B}$	$k^{**}_{1A}$	$k^{**}_{1B}$
4	14.52	7.441	15.25	10.09	15.77	7.995
6	10.55	5.421	10.73	5.853	10.72	5.451
10	8.174	4.158	8.236	4.246	8.109	4.114
30	6.206	3.134	6.200	3.131	6.051	3.036
50	5.764	2.896	5.760	2.894	5.631	2.811
100	5.371	2.682	5.371	2.862	5.280	2.618

### 3.2 ワイブル強度モデル

形状母数  $\alpha$ 、尺度母数  $\beta$  の 2 母数ワイブル分布  $W(x|\alpha, \beta)$  では下限界値を解析的に求めることは困難である。そこでワイブル変数を極値分布  $F_E(t|u, b)$  に対数変換し、ワイブル母数の最尤推定値 (MLE: Maximum Likelihood Estimation),  $MLE(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  を援用することによって、(3)式と同形な区間推定の下限係数  $k_1$  を数値計算で求めることが可能である。これを次式に示す(補記 4)。

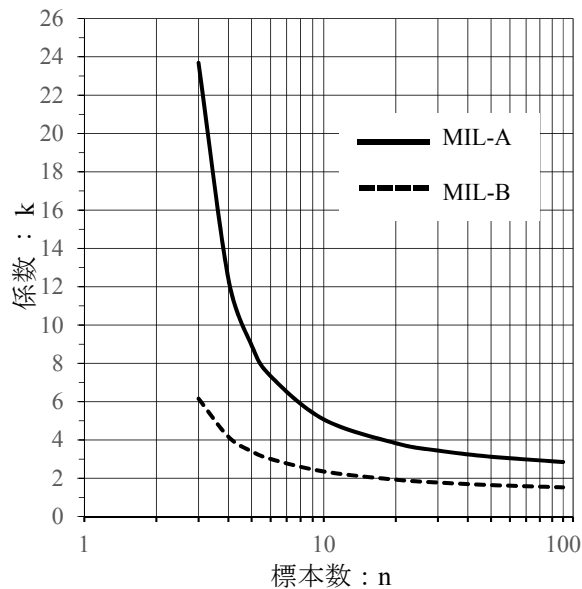
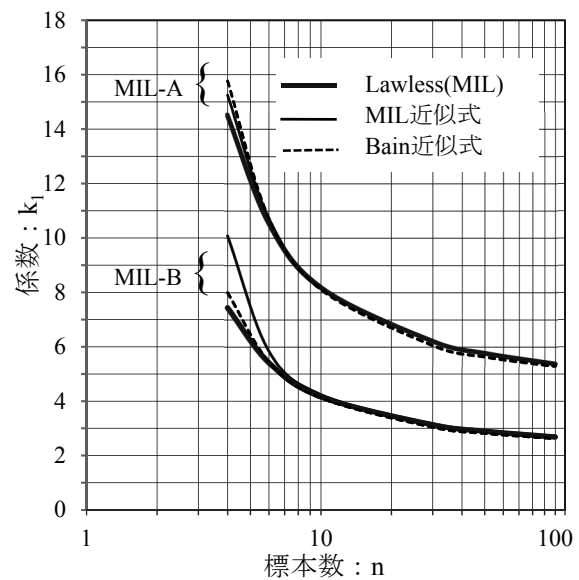
$$t_a = \tilde{u} - k_1 \tilde{b} \quad (6)$$

ここで、 $t_a = \ln x_a$ ,  $\tilde{b} = 1 / \hat{\alpha}$ ,  $\tilde{u} = \ln \hat{\beta}$  である。

下限界値を求める係数  $k_1$  は、未知母数  $(u, b)$  に独立なピボット変数と  $MLE(\hat{u}, \hat{b})$  を用いて、Lawless<sup>8)</sup>によって信頼度  $R_{A/B}(=1-P_{A/B})$ 、信頼水準  $1-\gamma$ 、そして標本数  $n$  のみから求められている。しかし数値計算手順が複雑であるため、MIL-HDBK では係数  $k_1$  ではなくピボット変数としての係数  $V$  が標本数に対応する形で表記されている<sup>1)</sup>。またピボット量に対して数値シミュレーションを適用して、ワイブル区間推定を行うための数値表も得られている<sup>9)</sup>。なお、ここでは正規分布の下限界値(3)式に対応させるために、係数  $V$  の代わりに次式に示す係数  $k_1$  を扱う。

$$k_{1A/B} = \ln(-\ln R_{A/B}) - V_{A/B} / \sqrt{n} \quad (7)$$

標本数  $n < 10$  では  $MLE(\hat{u}, \hat{b})$  値の精度が問題となるために、MIL-HDBK ではこの範囲の係数  $V$  の記載はないが、参考のために本報告では  $n < 10$  の  $k_1$  について、Lawless に従い補足計算を行った。しかし、高い信頼度要求の MIL-A 値に対する係数  $k_1$  は大きな値になるため、下限界値はかなり安全側になる。他方、標本数が十分である状況、すなわち  $n \geq 16$  の範囲の係数  $V$  の近似式が

図2 正規分布下限界係数:  $k$ 図3 各種ワイブル下限界係数:  $k_1$ 

MIL-HDBK に掲載されており<sup>1)</sup>、近似誤差は0.5%程度である。さらに、非心  $t$  分布を応用した  $k_1$  の近似解が Bain らによっても提案されている<sup>10)</sup>。ワイブル分布に対するこれらの係数  $k_1$  を表 2 にまとめ、またこれらの結果を図 3 に示す。

#### 4. 計算例

強度の確率分布には過去の実績や経験から正規分布が多用されているが、ここでは確率モデルの選定の一例として、次式の赤池情報量基準(AIC: Akaike Information Criteria)<sup>11)</sup>を応用し、正規モデルとワイブルモデルの比較を行う。

$$AIC(m) = -2 \cdot MLL(m) + 2 \cdot q \quad (8)$$

ここで、 $q$  はモデル  $m$  に含まれる未知母数の数、そして  $MLL$  はモデル  $m$  の標本から得られる最大対数尤度である(補記 5)。

(2)式のベイズ母数推定における標本生起確率の尤度  $P(\mathbf{x}|\theta)$  は一般に複雑であり、共役分布などを除き、未知母数  $\theta$  の事後分布  $h^{(1)}(\theta|\mathbf{x})$  が解析的に得られることは稀である。これに対して現在では計算統計学の発展によって、事後分布を効率よく疑似できる方法としてマルコフチェーンを応用したサンプル法が確立されている<sup>12)</sup>。

(1)式のベイズ期待信頼度を求めるにあたり、MCMC メトロポリス法<sup>6), 12)</sup>によって未知母数の分布関数の値に比例した密度の点列をサンプリングして、(2)式の事後分布を得る。また本報告では Geweke の収束条件<sup>6)</sup>を用い、マルコフチェーンの最初の部分(10%)と後半部分(50%)の平均値の差を有意水準 5%でチェーンの収束を判定する。

数値例における強度レベル  $x_a$  については上述の MIL-A/B 許容下限値を想定する。また各種の確率分布に対する信頼度  $R$ 、信頼水準  $1-\gamma$  の区間推定においては、厳密解や標本数に対応した近似解などを求める計算プログラムがフリーソフト “R” によって提案されており<sup>13)</sup>、標本系列や作図機能を含めて、その応用範囲は広い。さらに MCMC に代表される数値シミュレーション・ツールも、計算統計を基盤として “R” の適用が数多く検討されている<sup>14)</sup>。



表 3 複合材強度の例 (標本数  $n=6$ )

材料	複合材	[積層構成]	強度特性	標本平均	変動係数
A	T800H/EP:#3633	[45/0/-45/90] <sub>2s</sub>	面圧強度(MPa),82℃	717	0.034
B	T800H/EP:#3633	[45/0/-45/90] <sub>2s</sub>	引張強度(MPa),25℃	875	0.052
C	T800H/EP:#3633	縹子織物[0] <sub>3s</sub>	せん断強さ(MPa),22℃	87	0.095
D	T800S/#3900-2B	[0] <sub>24</sub> , Model	層間剥離(KJ/m <sup>2</sup> ),-54℃	0.485	0.137

表 4 AIC 評価例

材料	Normal	Weibull
A	58.4	59.0
B	65.8	65.3
C	45.3	44.8
D	-12.6	-12.1

表 5 各材料に対する MIL-A/B 値

材料	Normal 分布		Weibull 分布	
	MIL-A(MPa)	MIL-B(MPa)	MIL-A(MPa)	MIL-B(MPa)
A	592	643	529	619
B	643	737	576	715
C	45.3	62.2	40.5	60.1
D	0.148(KJ/m <sup>2</sup> )	0.285(KJ/m <sup>2</sup> )	0.137(KJ/m <sup>2</sup> )	0.262(KJ/m <sup>2</sup> )

#### 4.1 複合材強度に対する評価例

複合材強度に対する具体例として、表 3 に示す強度の変動が異なる四種類の材料強度データ(A, B, C, D)<sup>15), 16)</sup>についてベイズ期待信頼度を求める。標本数はすべて  $n=6$  である。これらのデータに対する AIC のモデル選定評価を表 4 に示す。正規分布とワイブル分布の AIC の差は四種類ともに基準の 1.0 未満であり、双方の確率モデルの選択が可能である。複合材四種の MIL-A/B 許容値については、正規モデルでは(3)式、またワイブルモデルでは(6)式を各々用いて求めた。これらの結果を表 5 に示す。

材料 B に対して正規モデルを適用した MCMC 結果例を図 4 に可視化する。左図は平均値  $\mu$  および標準偏差  $\sigma$  の反復回数 20,000 とした標本系列であり、疑似乱数に関連する初期値安定のためのバーンイン数を 1,000 に設定した。また右図は未知母数  $\mu$  および  $\sigma$  のカーネル密度で表現した同系列の事後分布を示す。また Geweke 診断では双方の母数系列ともに収束基準を満たしている。ワイブルモデルに対する MCMC 結果例を図 5 に示す。MCMC 計算の条件は正規モデルと同様であり、未知母数  $\alpha$  および  $\beta$  の標本時系列はともに Geweke 基準を満たす。

複合材許容値は MIL-B 値が基本であるが、参考までに MIL-A 値に対応するベイズ期待信頼度も併せて示す。これらの結果を表 6 にまとめる。表 3 に従って標本変動係数の小さい順

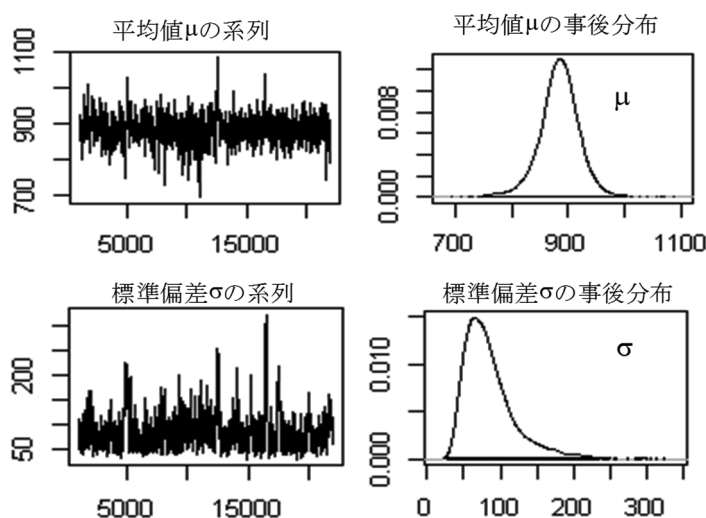


図 4 MCMC 結果例 (正規モデル)



に例示したが、信頼度の期待値を採るのでベイズ期待信頼度は材料強度の変動係数の影響を受けない。正規モデルでは四種の材料ともに MIL-B 値に対するベイズ期待信頼度は  $\bar{R}_N(x_B) \doteq 0.97$  という結果が示され、従来の二元評価の信頼度  $R_B=0.9$  と比較してほぼ一桁高い信頼度指標となっている。またワイブルモデルでは  $\bar{R}_W(x_B) \doteq 0.98$  となり、正規モデルよりもわずかに高い指標を示す。分布特性にも依存するが、両者の MIL-A/B 値を比較すると、正規モデルに対してワイブルモデルの MIL 値が保守側の値であることが一要因である。また、MIL-A 値に対するベイズ期待信頼度は正規モデルでは  $\bar{R}_N(x_A) \doteq 0.995$ 、ワイブルモデルでは  $\bar{R}_W(x_A) \doteq 0.999$  となり、MIL-B 値と同様にワイブルモデルが保守側の信頼度指標を示す。また両モデルともに、二元評価の信頼度  $R_A=0.99$  に対してベイズ期待信頼度を一桁ほど高く設定している。

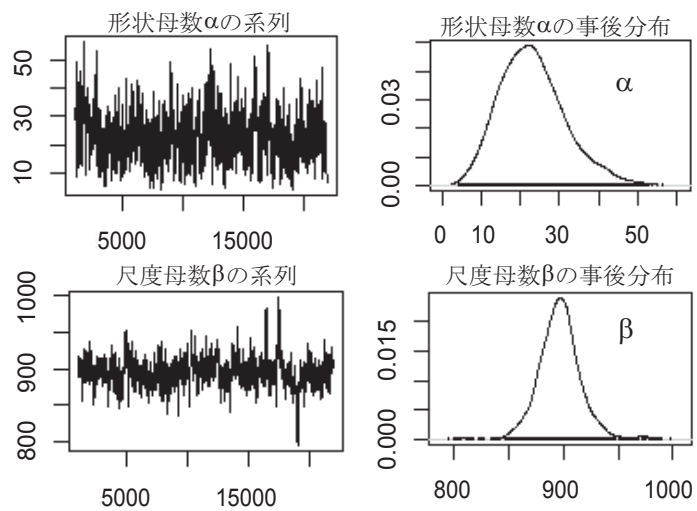


図5 MCMC結果例（ワイブルモデル）

#### 4.2 標本数とベイズ期待信頼度

表 3 の材料強度データ B を例として、標本数  $n$  に対するベイズ期待信頼度を求める。 $n=6$  以外の標本がないため、正規分布ではデータ B の  $n=6$  の標本特性値から不偏推定値を用い、一方、ワイブル分布に対しては最尤推定値を使用してモンテカルロ法により、各  $n$  に対する標本データを作成した。したがって同一の母集団からの標本ではなく、 $n=6$  以外では疑似標本データとなる。これらの標本から正規およびワイブル各モデルの MIL-A/B 値を求め、MCMC によって対応するベイズ期待信頼度を計算した。図 6 にこれらの結果をまとめる。

MIL-A 値および MIL-B 値に対するベイズ期待信頼度は、標本数の増加とともにそれぞれ  $R_A=0.99$ 、 $R_B=0.9$  の二元評価の信頼度レベルに近づく。 $n < 30$  の範囲では、上述した理由によりベイズ期待信頼度はワイブルモデルの方が多少高く設定されるが、 $n > 30$  では両モデル間のベイズ期待信頼度の差はなくなる。MIL-A 値については正規およびワイブルモデルともに  $n \leq 100$  の範囲で、 $\bar{R}(x_A)=0.998 \sim 0.995$  であり、ベイズ

表 6 ベイズ期待信頼度（標本数  $n=6$ ）

材料	Normal / Weibull	MIL-A/B(MPa) $x_A/x_B$	$\bar{R}(x_A), \bar{R}(x_B)$
A	N	$x_A=592$	0.996
		$x_B=643$	0.969
	W	$x_A=529$	0.998
		$x_B=619$	0.981
B	N	$x_A=643$	0.995
		$x_B=737$	0.969
	W	$x_A=576$	0.998
		$x_B=715$	0.979
C	N	$x_A=45.3$	0.996
		$x_B=62.2$	0.969
	W	$x_A=40.5$	0.998
		$x_B=60.1$	0.981
D	N	$x_A=0.148(\text{KJ/m}^2)$	0.995
		$x_B=0.285(\text{KJ/m}^2)$	0.969
	W	$x_A=0.137(\text{KJ/m}^2)$	0.998
		$x_B=0.262(\text{KJ/m}^2)$	0.982

期待信頼度の変動は少ない。

## 5. おわりに

信頼性評価の平明さを目的に、標本数および材料強度の変動に対応する一元評価としてのベイズ期待信頼度を求めた。本評価指標は材料強度の不確定性を端的に把握できる。いくつかの例から下記の結論が得られた。

(1) ベイズ事後確率を求める計算では、未知母数に対する事前の設定に影響を受けない MCMC が有効である。

(2) 強度モデルの設定について AIC を適用したが、複合材強度の例の標本数  $n=6$  および変動係数が 3~14% 程度の少量標本では、正規分布およびワイブル分布の双方の確率モデルが選択可能である。

(3) 確率分布の特性により、ワイブル分布のベイズ期待信頼度が正規分布に比べて僅かではあるが高い指標を与える。

(4) 標本数  $n=6$  のベイズ期待信頼度は、標本の変動にかかわらず、MIL-B 値に対しては正規モデルが  $\bar{R}_N(x_B) \doteq 0.97$ 、ワイブルモデルでは  $\bar{R}_W(x_B) \doteq 0.98$  と評価される。一方、MIL-A 値に対しては、 $\bar{R}_N(x_A) \doteq 0.995$ 、 $\bar{R}_W(x_A) \doteq 0.999$  と各々指標が定まる。

(5) MIL-B 値に対して、標本数の増加とともにベイズ期待信頼度  $\bar{R}_{N \text{ or } W}(x_B)$  は  $R_B=0.9$  に向けて緩和される。他方、MIL-A 基準では二元評価の要求信頼度が  $R_A=0.99$  と高いことから、ベイズ期待信頼度の漸近は MIL-B 基準に比べて顕著ではない。

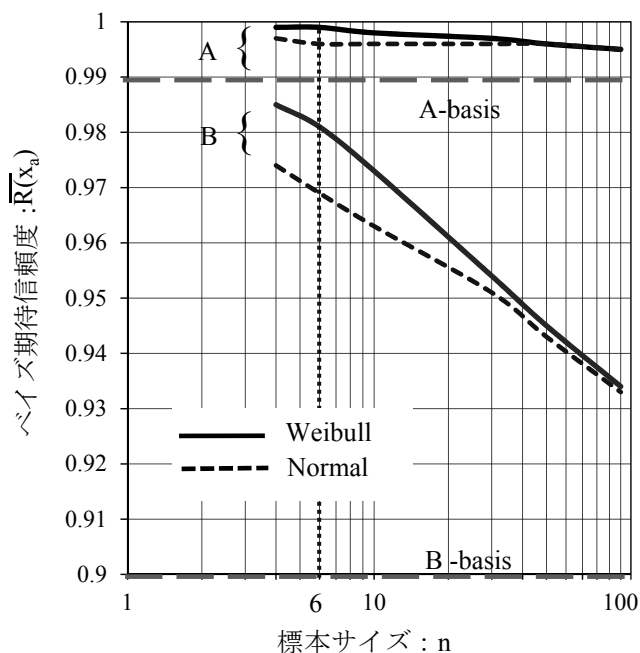


図6 標本サイズとベイズ期待信頼度(データB)

## 参考文献

- 1) MIL-HDBK-17-1F
- 2) CMH-17-Composite Material Handbook, Vol.3: Polymer Matrix Composites Materials Usages, Design, and Analysis, Chapter 12, Rev.G.
- 3) 岡村弘之、板垣 浩、“強度の統計的取り扱い”、破壊力学と材料強度講座-6、培風館、1979.
- 4) 伊藤誠一、杉本 直、岡田孝雄、“疲労寿命安全率に関するノート”、宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-11-007, 2012.
- 5) 市川昌弘、“信頼性設計における信頼度と信頼水準の試み”、日本機械学会論文集(A編), Vol.58, No.549, pp.765-768, 1992.
- 6) 伊庭幸人、種村正美、大森裕浩、和合 肇、佐藤整尚、高橋明彦、“計算統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺”、統計科学のフロンティア 12、岩波書店、2005.
- 7) 尾形良彦、“ベイズ統計の最前線”、総合研究大学院大学葉山彙報, 2(2013), 17-38.
- 8) Lawless, J.F., “Statistical Methods for Lifetime Data”, John Wiley & Sons, 1982.

- 9) 下河利行、“数表による数値積分と2母数ワイブル分布の母数およびパーセント点の信頼性限界値推定”、材料、Vol.41, N0.468, pp.1446-1451, 1992.
- 10) Lee J. Bain and Max Engelhardt, “Simple Approximate Distributional Results for Confidence and Tolerance Limits for the Weibull Distribution Based on Maximum Likelihood Estimators” , Technometrics, Vol.23, No.1, 15-20, 1981.
- 11) 赤池弘次、甘利俊一、北川源四郎、樺島祥介、下平英寿、“赤池情報量基準 AIC—モデリング・予測・知識発見”、共立出版、2007.
- 12) 久保拓弥、“データ解析の統計モデリング入門”、一般線形モデル・階層ベイズモデル・MCMC、岩波書店、2012.
- 13) Derek S.Young, “An R Package for Estimating Tolerance Intervals” , Journal of Statistical Software, Vol.36, Issue 5, 2010.
- 14) 船尾暢雄、“The R Tips(第2版)”、オーム社、2009.
- 15) 森本哲也、杉本 直、加藤久弥、原 栄一、安岡哲夫、岩堀 豊、小笠原俊夫、伊藤誠一、“JAXA 先進複合材料力学特性データベース改訂版”、JAXA-RM-17-004,2018.
- 16) 邊 吾一、石川隆司、“先進複合材料工学”、培風館、2005.
- 17) William Q. Meeker, Gerald J. Hahn, Luis A. Escobar, “Statistical Intervals: A Guide for Practitioners and Researchers” , 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2017.

## 補記 1 ベイズ期待信頼度

本文(1)式は、信頼度  $R(x_a|\theta)$  に対して未知母数ベクトル  $\theta$  の事後分布  $h^{(1)}(\theta|x)$  の重みづけで平均化している。この積分値はベイズ予測と呼ばれている。これに対して事後分布の最大値を示す推定母数ベクトル  $\theta_{\max}$  を選択する例のように、ある特定の推定母数値を評価信頼度に代入した  $R(x_a|\theta_{\max})$  をプラグイン予測と呼ぶ。プラグイン予測に比較して、ベイズ予測は標本数が少ない時に優れた予測を行えることが示されている<sup>7)</sup>。このように本文(1)式は信頼度の確率モデルに関して推定母数による期待値  $\bar{R}(x_a)$  を採ることから、この  $\bar{R}(x_a)$  をベイズ期待信頼度として定義する。

## 補記 2 信頼限界

推定対象のパラメタ  $\theta$  の確率的な区間（信頼限界）を標本  $X(X_1, \dots, X_n)$  を用いて次式で表記する。

$$\Pr[L(X_1, \dots, X_n) \leq \theta \leq U(X_1, \dots, X_n)] = 1 - \gamma \quad (A1)$$

上式において  $L(X_1, \dots, X_n)$ 、 $U(X_1, \dots, X_n)$  は各々下限、上限であり、(A1)式を信頼水準  $(1-\gamma)$  の信頼区間と定義する。一般に、信頼区間を導くためには対象パラメタに依存しないピボット変数の分布を求めなければならない<sup>13,17)</sup>。ピボット変数の例として、平均値  $\mu$  が未知で分散  $\sigma^2$  が既知である正規分布  $N(X|\mu, \sigma^2)$  から  $n$  個の標本  $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)$  を得て平均値  $\mu$  に対する信頼区間を求める問題を考える。標本平均を  $\bar{x}$ 、標本標準偏差を  $s'$  とすると、変数  $t = \bar{x} - \mu / (s' / \sqrt{n})$  は自由度  $n-1$  の  $t$  分布に従う。自由度  $n-1$  の  $t$  分布の  $p$  パーセント点を  $t_{p,n-1}$  と記すと、(A1)式に対応する区間推定は、推定の精度を  $1-\gamma$  と考えて次式に示される。

$$\Pr[-t_{\gamma/2, n-1} < \bar{x} - \mu / (s' / \sqrt{n}) < t_{\gamma/2, n-1}] = 1 - \gamma \quad (A2)$$

ここで  $t$  は上記したように標本  $\mathbf{x}$  と対象未知母数  $\mu$  によって記述される。他方、 $t$  の確率分布は自由度  $n-1$  の  $t$  分布であり、未知母数  $\mu$  に無関係である。すなわち  $t$  はピボット変数である。(A2)式を変形し、ピボット変数とその分布を用いることによって、 $\mu$  の信頼水準  $1-\gamma$  の信頼区間が次式で得られる。

$$\Pr[\bar{x} - t_{\gamma/2, n-1} \cdot (s' / \sqrt{n}) < \mu < \bar{x} + t_{\gamma/2, n-1} \cdot (s' / \sqrt{n})] = 1 - \gamma \quad (A3)$$

確率モデルや未知母数の設定に依存して信頼限界を求める過程は異なるが、ピボット量を用いることにより、区間推定は未知母数と無関係に信頼水準  $1-\gamma$ 、信頼度  $R$ 、標本数  $n$  によって記述される<sup>9,17)</sup>。

MIL-A/B 値は材料強度データから設計許容値を求める基準であり、強度に対する確率モデル（確率分布）からピボット量を求めて、信頼水準  $1-\gamma=0.95$  で信頼度  $R_A=0.99$  (A 値)、 $R_B=0.9$  (B 値) の区間の下限界値を定義している。

## 補記 3 正規分布の片側許容値

片側許容値  $x_a$  を標本  $(x_1, \dots, x_n)$  の平均値  $\bar{x}$ 、標本標準偏差  $s'$  を用い、 $x_a = \bar{x} - ks'$  と設定する。ここで真の母数を  $\mu$ 、 $\sigma$  とすると、真の許容値  $\mu - u_p \sigma$  よりも高く  $x_a$  を設定する危険性を考える。なお、 $u_p$  は標準正規分布における累積確率  $P$  のパーセント点である。以上から、 $x_a > \mu - u_p \sigma$  である確率を微

少な  $\gamma$  に抑えるためには次式が成立しなければならない。

$$\Pr[\bar{x} - ks' < \mu - u_p \sigma] = 1 - \gamma \quad (\text{A4})$$

また (A1)式は次式のように展開できる。

$$\Pr\left[\frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \sqrt{n}u_p}{\sqrt{\frac{(n-1)s'^2/\sigma^2}{n-1}}} > \sqrt{n}k\right] = \Pr\left[t = \frac{u + \sqrt{n}u_p}{\sqrt{\frac{v}{n-1}}} > \sqrt{n}k\right] = \gamma \quad (\text{A5})$$

ここで、上式の変数  $u$  は、以下に示すように標準正規分布に従い、また  $v$  は自由度  $n-1$  のカイ二乗分布に従う確率変数である。

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = u \rightarrow N(u|0, 1^2) \quad (\text{A6})$$

$$(n-1)s'^2/\sigma^2 = v \rightarrow \chi_{n-1}^2 \quad (\text{A7})$$

以上から、 $u, v$  で示される(A5)式の確率変数  $t$  は、自由度  $n-1$ 、非心度  $\sqrt{n}u_p$  の非心  $t$  分布を形成する。これより、 $t_{\gamma}(n-1, \sqrt{n}u_p)$  は非心  $t$  分布の上側確率の  $\gamma\%$  点となる。MIL-A/B 値の標本数  $n$  に対応する係数  $k(n)$  は、信頼度  $R_A = 1 - P_A = 0.99$  (A 値),  $R_B = 0.9$  (B 値)、そして双方の信頼水準  $1 - \gamma = 0.95$  を本文(5)式に代入することによって得られる。

#### 補記 4 2 母数ワイブル分布の片側許容値

MIL-A/B 値の基本となっている Lawless<sup>8)</sup>の展開を下記にまとめる。2 母数ワイブル分布  $W(x|\alpha, \beta)$  に対する信頼限界を正規分布のように解析的に求めることは困難であるので、取扱いを容易にするためにワイブル変数  $x$  の自然対数を取り、 $t = \ln(x)$  に変数変換した最小極値分布  $F_E(t|u, b)$  の許容下限界値  $t_L$  を求める。なお、ワイブル下限界値は  $x_L = \exp(t_L)$  となる。 $W(x|\alpha, \beta)$  および  $F_E(t|u, b)$  の確率分布関数を下記に各々示す。ここで、 $u = \ln \beta$ ,  $b = 1/\alpha$  である。

$$W(x|\alpha, \beta) = 1 - \exp\{-(x/\beta)^\alpha\} \quad (\text{A8})$$

$$F_E(t|u, b) = 1 - \exp[-\exp\{-(t - u)/b\}] \quad (\text{A9})$$

本文(6)式に示すように、極値分布の母数( $u, b$ )の最尤推定値 MLE を( $\tilde{u} = \ln \beta$ ,  $\tilde{b} = 1/\alpha$ )とすると、下限界値  $t_L$  は以下に導く係数  $k_1$  を用いて次式で記述される。

$$t_L = \tilde{u} - k_1 \tilde{b} \quad (\text{A10})$$

上記の信頼限界  $t_L$  を求めるためには、ピボット量とその分布を把握する必要がある。そこで、ピボット変数として下記する 3 変数と、標本  $\mathbf{t}$  を順序統計量に置き換えた  $\mathbf{t}^*(t_1^* \leq \dots \leq t_n^*)$  から構成する補足変数  $\mathbf{a}: \{a_i = (t_i^* - \tilde{u})/\tilde{b}, i = 1 \sim n\}$  を定義する。

$$\left. \begin{aligned} z_p &= (\tilde{u} - t_p)/\tilde{b} = (\tilde{u} - u - w_p b)/\tilde{b} \\ z_1 &= (\tilde{u} - u)/\tilde{b} \\ z_2 &= \tilde{b}/b \end{aligned} \right\} \quad (A11)$$

ピボット変数  $z_1, z_2, z_p$  と補足変数  $\mathbf{a}$  との結合確率密度関数を求め、いくつかの過程を経て  $\mathbf{a}$  の条件における確率分布関数  $\Pr(z_p < T | \mathbf{a})$  が以下に展開できる<sup>8)</sup>。

$$\Pr(z_p \leq T | \mathbf{a}) = \int_0^\infty \frac{t^{n-2} \exp\{(t-1) \sum_{i=1}^n z_i\} \cdot IG_n\{\exp(\lambda_p - T) \sum_{i=1}^n \exp(z_i t)\}}{\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(z_i t)\}^n} dt \quad (A12)$$

上式において、

$$\left. \begin{aligned} C^{-1} &= \int_0^\infty \frac{t^{n-2} \exp\{(t-1) \sum_{i=1}^n z_i\}}{\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(z_i t)\}^n} dt \\ \lambda_p &= \ln(-\ln(R)) \\ IG_n(x) &= \frac{\int_0^x t^{n-1} \exp(-t) dt}{\Gamma(n)} \end{aligned} \right\} \quad (A13)$$

極値分布(A9)式の信頼度関数は  $R_E(t|u, b) = 1 - F_E(t|u, b)$  であるので、極値分布の  $p$  パーセント点  $t_p$  は  $t_p = u - w_p b$  と表され、ここで  $w_p$  は  $R_E[(t_p - u)/b] = R_E(w_p) = 1 - p$  を満たす。したがって、ピボット変数における  $\Pr(z_p < T) = \gamma$  は  $\Pr(t_p < u - w_p b)$  と等価であり、 $t_p$  の  $1 - \gamma$  信頼水準の下限界値は標本  $t$  が得られた条件の下で(A12)式の  $T$  を求めて、これを(A10)式の  $k_1$  に置く。

MIL-HDBK では下限界値を定める係数は  $k_1$  ではなく、本文(7)式に示すように係数  $V_{A/B}$  として表記されているが<sup>1)</sup>、標本数の大きい領域では比較的精度の高い近似式も併記されている。さらにワイブル分布に対する信頼限界の近似式では Bain の非心  $t$  分布を適用した近似<sup>10)</sup>も提案されており、MIL-HDBK の近似式と同様にやや保守側の係数を与えるが実用性を備えている。以下では Bain の近似法の概略を記す。

極値分布  $F_E(t|u, b)$  の  $P$  %点を  $y_p = u + \lambda_p b$  ( $\lambda_p = \ln(-\ln R)$ ,  $R = 1 - P$ )と記すと、本文(7)式に示した MIL-HDBK の係数  $V_{A/B}$  は次式に書ける。

$$V_R = \sqrt{n}(\tilde{y}_R - y_R)/\tilde{b} \quad (A14)$$

ここで、 $\tilde{y}_R$  は極値分布  $F_E(t|u, b)$  の  $(1 - P)$  %点の MLE 値である。これより、 $V_\gamma(R)$  は  $V_R$  の  $\gamma$  %点となり、また変数  $t^* = \sqrt{n - 1}(V_R/\sqrt{n} - \lambda_R)$  を考慮すると、 $t^*$  は近似的に自由度  $n - 1$ 、非心度  $-\sqrt{n}\lambda_R$  の非心  $t$  分布  $t'(n - 1, -\sqrt{n}\lambda_R)$  に従うことが示される。(A11)式と同様に、 $k_1^* \approx t'_\gamma(n - 1, -\sqrt{n}\lambda_R)$  を用いると、下限值  $t_a$  が次式に求められる。

$$t_a = \tilde{u} - k_1^* \cdot \tilde{b} \quad (A15)$$



## 補記 5 赤池情報量基準、AIC(Akaike Information Criteria)<sup>11)</sup>

応用範囲の広いモデル選択法として、取得した情報に基づいていくつか想定したモデルの中で最良なモデルを選択する AIC が提案されている。対象モデル  $m$  の最大対数尤度を  $MLL(m)$ 、モデルのパラメタ数を  $q$  として、AIC の本文(8)式をあらためて (A16)式に記す。ここではモデルとして確率分布を考える。

$$AIC(m) = -2 \cdot MLL(m) + 2 \cdot q \quad (A16)$$

AIC は、上式において確率モデル  $m$  を  $n$  個想定すると AIC は  $n$  個算出されるが、この中で最小の AIC 値を持つモデルが真のモデルに近いと評価する基準であり、K-L(Kullback-Leibler)情報量を基本としている。以下にその概要を示す。

モデルの選択基準として、提案モデル  $f(x)$  の良さを真のモデル  $g(x)$  との近さで評価する K-L 情報量を考える。K-L 情報量は二つの情報量の期待値のずれであり、モデルの近さを測る尺度として次式に書ける。

$$E[-\log\{f(x)\}] - E[-\log\{g(x)\}] = \int \log\{g(x)/f(x)\} \cdot g(x)dx = E[\log\{g(x)/f(x)\}] \quad (A17)$$

なお、情報  $x$  を観測したとき、 $x$  の持っている情報量は  $-\log\{g(x)\}$  であり、情報量の期待値は次式に示すエントロピーである。

$$E[-\log\{g(x)\}] = \int -\log\{g(x)\} \cdot g(x)dx \quad (A18)$$

したがって(A17)式から、K-L 情報量が小さいモデル  $f(x)$  ほど正しいモデルに近づく。真のモデル  $g(x)$  についての対数尤度の期待値、すなわち平均対数尤度を最大化することによって、モデル  $f(x)$  が K-L 情報量を最小化する良いモデルとなる。しかし、K-L 情報量は真のモデルに依存して一般に不明であるから、平均対数尤度の推定量を最大化することになる。(A16)式右辺第 1 項の最大対数尤度  $MLL$  は対数尤度関数を偏微分した方程式の解として得られるが、通常は対数尤度関数の最大値問題として数値解析によって最尤解を得る。

最大対数尤度は最良なモデルの推定量と考えられるが、最大対数尤度に対するパラメタの推定量は不偏推定量になるとは限らず、モデルの中のパラメタ数  $q$  が多いほど不偏推定量に比べて大きなバイアスを持つ傾向がある。AIC 右辺第 2 項はこれらのバイアスを解消するための補正として、パラメタ数の増加によるモデルの不安定性を抑制するために漸近的に求められた項である。



宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-18-011  
JAXA Research and Development Memorandum

強度不確定性に対する簡易評価指標－MCMCに基づくベイズ期待信頼度－  
Application of Bayesian expectation to reliability index on material strength

---

発	行	国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 (JAXA) 〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1 URL: <a href="http://www.jaxa.jp/">http://www.jaxa.jp/</a>				
発	行	日	平成31年2月15日			
電	子	出	版	制	作	松枝印刷株式会社

※本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等加工することを禁じます。  
Unauthorized copying, replication and storage digital media of the contents of this publication, text and images are strictly prohibited. All Rights Reserved.

---

