

宇宙航空研究開発機構研究開発資料

JAXA Research and Development Memorandum

複合材構造の疲労寿命実証試験における荷重設定について —ベイジアン・アプローチ—

伊藤 誠一, 杉本 直, 青木 雄一郎, 岡田 孝雄

2013年10月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

目 次

概要	2
1. はじめに	2
2. LEF と複合材強度データベース	3
2.1 静強度と疲労寿命に対する確率モデル	4
2.2 CMH-17 基本データベース	4
2.3 LEF の設定	7
2.4 形状母数 α の確率モデル	7
2.5 データベース構造のモデル化	8
2.5.1 Building Block を想定した多層データ構造	8
2.5.2 共役分布の応用	9
3. ベイズ法に基づく LEF 期待値(LEF)	10
4. LEF 評価例	11
4.1 数値計算例	11
4.2 形状母数の確率分布の推定	12
4.3 LEF の比較	13
5. ノンパラメトリック評価	13
5.1 スプライン関数を用いた形状母数 pdf の推定	14
5.2 情報量基準(ME)による方法	15
5.3 ベイズ情報エントロピ(BME)の適用	15
5.4 ノンパラメトリック法による pdf の推定	16
5.5 ノンパラメトリック法に基づく LEF 期待値	19
6. おわりに	19
参考文献	20
補記 1 LEF の定義	22
補記 2 スプライン基底関数	24
補記 3 スプライン関数による確率密度関数の推定	25
補記 4 複雑な確率密度関数への情報量基準(ME)応用例	27

複合材構造の疲労寿命実証試験における荷重設定について

—ベイジアン・アプローチ*

伊藤 誠一^{*1}、杉本 直^{*2}、青木 雄一郎^{*2}、岡田 孝雄^{*3}

Application of Bayesian analysis to determining fatigue load on composite material structures*

Seiichi ITO^{*1}, Sunao SUGIMOTO^{*2}, Yuichiro AOKI^{*2} and Takao OKADA^{*3}

Abstract

The load enhancement factor (LEF) approach is proposed as a fatigue acceleration test to demonstrate the fatigue strength of composite material structures. The objective of the LEF approach is to increase the applied loads in the fatigue spectrum so that the same level of reliability can be achieved with short test durations. Some fatigue tests on the full-scale composite structure are executed on the basis of this method. In the LEF approach, the probability distribution of residual strength and fatigue life is assumed to be a two-parameter Weibull distribution. LEF is defined as a function of shape parameters from the Weibull distributions. As a consequence, the uncertainty in residual strength and fatigue life greatly affects LEF assessment. For simplicity, modal values of the shape parameters are used in the Composite Materials Handbook (CMH-17).

This study investigates the uncertainty in the shape parameters in more detail. First, the shape parameters are modeled as a probability distribution, by using Bayesian analysis to evaluate the scatter of the shape parameter. As the so-called parametric method, the unknown parameters of the distribution are estimated using the Bayesian method from the database. The Bayesian expected value of the LEFs is calculated from the estimated probability distribution of the shape parameter. When the uncertainty of the shape parameter is large and the assumption of the usual probability distribution is problematic, the non-parametric estimation method for the distribution is applied. The probability distribution approximation that uses the spline function is used here. Last, this paper presents two types of expected LEF values mentioned above and their comparison with already reported results in CMH-17.

* 平成 25 年 8 月 26 日 受付 (Received 26 August 2013)

*1 一般財団法人航空宇宙技術振興財団
(Japan Aerospace Technology Foundation)

*2 宇宙航空研究開発機構 航空本部複合材技術研究センター
(Advanced Composite Research Center, Institute of Aeronautical Technology, JAXA)

*3 宇宙航空研究開発機構 航空本部構造技術研究グループ
(Structures Research Group, Institute of Aeronautical Technology, JAXA)

概 要

実機規模の複合材構造の疲労寿命実証試験では、荷重増分係数(LEF:Load Enhancement Factor)に基づく加速試験が適用されている。LEF は静強度ならびに疲労寿命の変動に対する双方のワイブル確率分布モデルの形状母数で定義され、複合材強度データベースを基本として LEF の値が設定される(CMH-17: Composite Material Handbook-17)。LEF 評価の基本データベースは広範囲にわたる試験条件から構成されるため、静強度ならびに疲労寿命の形状母数の不確定性は大きい。これに対して CMH-17 の LEF 設定では形状母数のモード値が用いられている。しかし形状母数の変動が大きいことから、本報告では形状母数の確率分布を仮定してこれらの母数をベイズの方法で推定し、LEF のベイズ的期待値を求める。一方、形状母数の分布が複雑である場合を想定し、スプライン関数を適用したノンパラメトリック確率分布を仮定して LEF の期待値を得る手法も記す。これらの確率モデルを基本として、CMH-17 の LEF 推奨値と、本報告のパラメトリックならびにノンパラメトリック評価の LEF 期待値との比較検討を行う。

Key words : 複合材構造、疲労試験、荷重増分係数、構造信頼性、ベイズ理論、スプライン曲線

1. はじめに

複合材構造に対する疲労寿命の実証試験法として、荷重増分係数 LEF を用いた加速試験が提案され¹⁾、これに基づいていくつかの実機構造規模の実証試験も行われている^{1),2),3)}。LEF 法は、静強度と疲労寿命の不確定性を併合して、MIL-B 値(95%信頼水準、90%信頼度)を満たす負荷荷重と試験期間を適切に定める疲労試験法である。LEF 法ではワイブル統計解析を基本として、複合材の静強度と疲労寿命に関する広範囲にわたるデータベースが適用されている。すなわち、強度および寿命変動に対してそれぞれ2母数ワイブル確率分布 $W(x|\alpha,\beta)$ (α :形状母数、 β :尺度母数)を仮定して未知母数を推定する。このモデル化によって、LEF は最終的に両者の形状母数の関数として表される。一般にワイブル分布は平均値に比較してモード値が小さいので、複合材ハンドブック CMH-17 の LEF 評価⁴⁾では、データベース解析で得られた形状母数のモード値が適用されている。しかし、応用されるデータベースは広範囲の試験条件から構成されるために静強度と疲労寿命双方の形状母数の変動は大きく、疲労寿命実証試験は基本となるデータベースの不確定性に大きな影響を受ける。

そこで本報告では LEF 自身も確率変数として捉えて、さらに広範囲な不確定性にも適合できるようにベイズ法(Bayesian method)^{5),6)}を応用した確率モデルを構成する。CMH-17 で用いられているデータベースの静強度および疲労寿命に対する形状母数の変数域は広いが、これらの分布には単峰型が認められることから、ここでは形状母数が対数正規分布に従う確率変数であると仮定する。さらにさまざまなデータに対応するために、対数正規分布の母数(平均値と分散)にも確率分布を設定した階層構造を考慮する。静強度および疲労寿命に対する複合材強度データベースとベイズ解析を用いて、上記対数正規分布の未知母数の確率分布を推定する。これら平均値および分散の事後分布を基に、静強度および疲労寿命の形状母数の確率分布が周辺分布として得られる。以上の手順で得られた形状母数の確率分布からベイズ的期待値としての LEF を計算して、CMH-17 で示されている代表的な LEF 値との比較検討を行う。なお、静強度の定義には荷重履歴の明らかな残留強度の情報が要求されるが、ここでは一般化して広範囲な静強度を想定する。

扱うデータベースにも依存するが、形状母数の変動がさらに広範囲になり、また単峰型ではなく複雑な分布状況を示す場合には上記の対数正規分布のモデル化は不可能である。このような状

表 1 本報告の概要

評価・解析項目	解析手法
<ul style="list-style-type: none"> LEF(Load Enhancement Factor)の解析手法^{1),2),3)} LEFの定義、運用方針(CMH-17)の解説⁴⁾ 	<ul style="list-style-type: none"> 残存強度および疲労寿命の2母数ワイブル分布確率モデルからLEFの定式化 各種データベースから形状母数の確率特性取得 残存強度および疲労寿命に関する形状母数のモード値を適用
<ul style="list-style-type: none"> 形状母数の確率モデル 期待値としてのLEF評価 複雑な形状母数の確率分布の取扱い LEF比較評価 	<ul style="list-style-type: none"> 対数正規分布を仮定、未知母数を階層ベイズの方法で推定 ベイズ的期待値 ノンパラメトリック確率分布の評価、期待値で評価

況では、形状母数の変動をノンパラメトリックに評価して任意形状の確率分布を直接推定して、これらの形状母数の分布からLEFの期待値を求める方法が考えられる。具体的には、複雑な形状母数の分布状況をスプライン関数によって補間近似し、情報エントロピとベイズ推定を用いてノンパラメトリックに形状母数の確率密度関数(pdf: probability density function)を求めてLEFの期待値を得る。

以上に記したように、本報告では最初にLEF法の概略を示し、次にCMH-17で用いられているデータベースを参照して、パラメトリック推定のベイジアン解析に基づくLEF評価の定式化を行う。また、データベースのさらなる不確定性の拡大も想定して、スプライン関数を応用したノンパラメトリックなpdfを用いたLEF評価の定式化を示す。最後に、CMH-17におけるLEF値と、本報告に記すパラメトリックおよびノンパラメトリック法に基づくLEF期待値を比較する。本報告ではLEFの解説を前半に、そしてLEFに対するベイズ解析を後半にまとめる(表1)。

2. LEFと複合材強度データベース

LEFの概念を図1に示す。LEFの目的は、短期間の試験でも同じ信頼度Rと信頼水準 $1-\gamma$ (MIL値)が得られるように、疲労強度実証試験における最大疲労荷重を増加させることである。図1のS-N曲線においてMIL-B値に基づく疲労寿命安全係数を S_F とすると、無次元化した目標設計

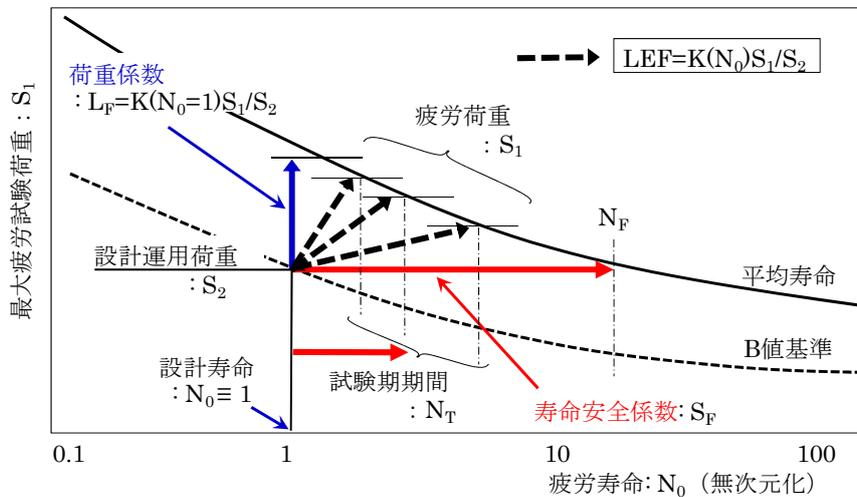


図 1 LEF概念図

寿命 $N_0=1$ の設計運用荷重に等しい疲労荷重 S_2 を平均静強度 S_1 まで増加させた場合、静強度の B 値は設計疲労荷重 S_2 と等価になる。換言すると、荷重 S_1 で試験期間 $N_0=1$ までの疲労試験、および試験荷重 S_2 で寿命安全係数 S_F を乗じた期間 N_F までの疲労試験は、双方ともに B 値を共有する。またこれら双方の中間に位置する疲労試験条件では、試験荷重および試験期間が本章 2.3 節に示す LEF の定義に基づいて定められる。すなわち、図 1 の点線の矢印で示すように、 S_2 に LEF を乗じた試験荷重と、対応する試験期間 N_T との多様な組合せが可能になる^{1),2)}。

2.1 静強度と疲労寿命に対する確率モデル

半世紀近くにわたり、複合材強度に関する多くのデータが取得されている⁴⁾。複合材の強度の変動は金属材料に比べて大きいことから、航空機構造の設計や耐損傷性を証明するためには、MIL 規格に代表される適切な統計的評価が必要である^{5),6),7),8)}。

複合材構造の疲労強度実証に適用される代表的な LEF の設定には、広範囲の複合材に関するデータベースが参照され、静強度と疲労寿命の変動に対して共にワイブル統計解析が行われた。CMH-17 の LEF 設定の基本となっている静強度および疲労寿命に対するデータベースは大きく分けて 3 種類あり、静強度は米国海軍 (NADC: Naval Air Development Center) と空軍 (AFWAL: Air Force Wright Aeronautical Laboratories, AFML: Air Force Materials Laboratory) で蓄積された広範囲の試験データから構成され、また疲労寿命は NADC と米国材料試験協会 (ASTM: American Society for Testing and Materials) 報告を基本としている¹⁾。

複合材の強度に対して適切な信頼水準で目的の信頼度を満たす許容値を得るには十分な試験データが必要である。そこで LEF の設定にあたり、特に疲労寿命解析に対する情報を補うために次の 2 つの評価手法が適用された。これらは、結合ワイブル解析と等価強度モデルである^{1),2)}。

ここで、静強度 S と疲労寿命 N の 2 母数ワイブル確率密度関数をそれぞれ $f_r(S|\alpha_r, \beta_r)$, $f_L(N|\alpha_L, \beta_L)$ と記し、 α_r, α_L を各々の形状母数として、これらの pdf を以下に示す。

$$f_r(S|\alpha_r, \beta_r) = \frac{\alpha_r}{\beta_r} \left(\frac{S}{\beta_r}\right)^{\alpha_r-1} \exp\left\{-\left(\frac{S}{\beta_r}\right)^{\alpha_r}\right\} \quad (1)$$

$$f_L(N|\alpha_L, \beta_L) = \frac{\alpha_L}{\beta_L} \left(\frac{N}{\beta_L}\right)^{\alpha_L-1} \exp\left\{-\left(\frac{N}{\beta_L}\right)^{\alpha_L}\right\} \quad (2)$$

2 母数ワイブル分布を適用した結合ワイブル解析では、その形状母数が疲労荷重 (応力) に独立であることを仮定する。すなわち、同一の応力レベルでは形状母数は大きく異なることはないとする。また Sendeckjy の等価強度モデル¹⁾は、静強度、疲労強度そして残留強度の 3 種類のデータを損傷評価と疲労損傷則を用いて等価静強度に変換する方法である。この等価静強度の変動は 2 母数ワイブル分布でモデル化され、さらに等価静強度と疲労寿命の両者の形状母数の間には線形関係が見出されており、等価強度モデルは疲労寿命データの補足に対して重要な役割を果たしている。

次節では、CMH-17 の LEF 設定に関連する複合材強度基本データベースについて、Whitehead らによって行われた、FAA/DOT 資料 (NADC-87042-60)¹⁾ の静強度および疲労寿命の統計解析の概要を記す。

2.2 CMH-17 基本データベース

FAA/DOT 資料の LEF 基本データは静強度、疲労寿命共にそれぞれ二つのデータベースから構成されており、静強度では米国海軍 (NADC) の資料を NAVY データとし、米国空軍 (AFWAL, AFML) の試験データを Baseline データとしている。一方、疲労寿命評価については、NAVY デ

表 2 静強度形状母数 α_r の特性値

データベース	標本数 n	平均値 mean	モード mode	変動係数 COV	形状母数 B 値 α_B
NAVY	29	26.1	18.0	0.517	8.5
Baseline	40	21.2	22.0	0.416	9.1
Combined	69	23.3	20.0	0.476	8.7

ータと Baseline データ としての ASTM 報告を用いている。

静強度に関しては各試験結果から 6 点以上のデータ点数を有する資料の選定を経て、荷重モード、荷重伝達様式、積層構成、試験片形状、試験環境等の各種試験条件を合わせて、総計 71 種類の資料、約 1,500 点数のデータを用いて、ワイブル形状母数に対する統計評価が行われた。NAVY データではすべての試験条件に対して形状母数の顕著な差異がなく、また Baseline データもほぼ同様な傾向を示しており、両者の差に著しい有意性はみられない。さらに形状母数自身に対してもワイブル解析を用いた確率特性値が評価されており、NAVY データ、Baseline データそして両データベースを合わせた総合データに対するこれらの統計値を表 2 にまとめる。また総合データの形状母数の分布状況を図 2 に示す。ここで、2 母数ワイブル分布の標本特性値、片側区間推定値、MIL-B 値の諸式を表 3 にまとめる⁹⁾。

FAA/DOT 資料では個々の各試験結果が示されていないが、形状母数データ数 n、平均値 mean、そして変動係数(COV: Coefficient variation)が表記されているので、ここでは下記に示す簡易的な評価法に沿って特性値等の確認を行う。2 母数ワイブル分布 $W(\alpha|\eta,\zeta)$ における形状母数 η と変動係数 COV の関係では、形状母数範囲の $1 \leq \eta \leq 50$ において次式の近似が成り立つ¹⁰⁾。

$$COV \cong \eta^{-0.93}, \quad 1 \leq \eta \leq 50 \tag{3}$$

したがって、COV から形状母数 η が推定できる。表 3 の(T2)式によって、形状母数 η とデータ平均値 μ から尺度母数の標本特性値 ζ が求められ、これらの η, ζ とデータ数 n を用いると、形状母数 α の MIL-B 値、 α_B が表 3 の(T4)式で得られる。ここで $\zeta_{1-\gamma}$ は信頼水準 $1-\gamma=0.95$ における下限片側区間推定値であり、標本特性値 ζ を用いて表 3 の(T3)式から得られる。以上から、上述した簡易評価に基づく形状母数 α_B を表 2 の最右列に示す。

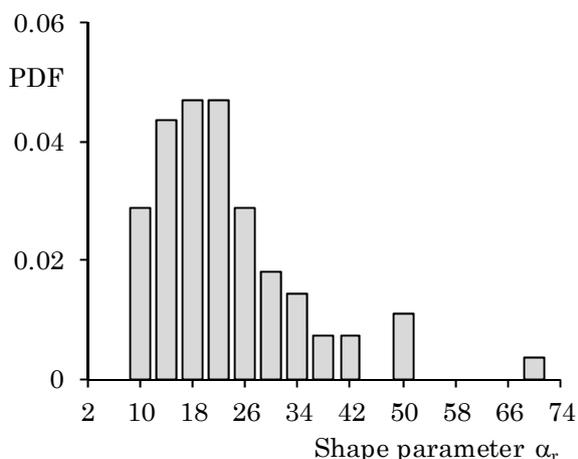


図 2 静強度形状係数 α_r の確率分布

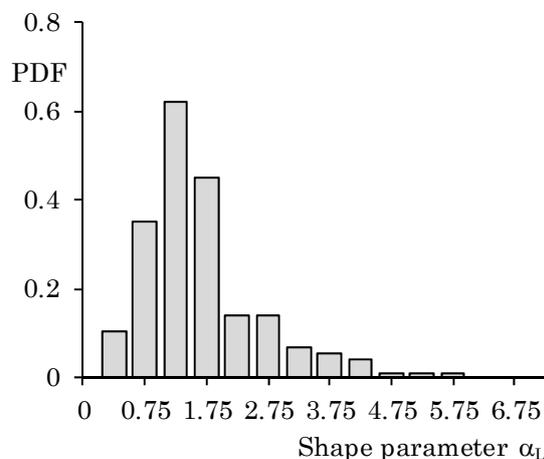


図 3 疲労寿命形状係数 α_L の確率分布

表 3 2 母数ワイブル分布 $W(\alpha|\eta,\zeta)$ の各特性値

特性値	評価式
データ平均値 μ	$\mu = \zeta \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{\eta})$ (T1)
最尤推定値 $\underline{\zeta}$	$\underline{\zeta} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^\eta \right\}^{1/\eta}$ (T2)
片側区間推定値 $\zeta_{1-\gamma}$	$\zeta_{1-\gamma} = \underline{\zeta} \left\{ \frac{1}{2n} \chi_{1-\gamma}^2(2n) \right\}^{-1/\eta}$ (T3)
MIL-B 値 η_B	$\eta_B = \zeta_{1-\gamma} \{ \ln(1/R) \}^{1/\eta}$ (T4)

MIL-B(信頼水準:1- γ =0.95、信頼度:R=0.9)表 4 疲労寿命形状母数 α_L の特性値

データベース	標本数 n	平均値 mean	モード mode	形状母数 B 値 $\alpha_{L,B}$
NAVY	204	2.29	1.25	0.17
Baseline	60	1.68	1.25	0.26
Combined	264	2.17	1.25	0.18

疲労寿命評価においても NAVY データと ASTM 報告の Baseline データを情報源として、形状母数に関するワイブル解析、結合ワイブル解析、そして Sendekjy 等価強度評価が行われた¹⁾。その結果、NAVY データでは、応力比、荷重モード、積層構成、試験片形状、そして試験環境の 5 種類の試験条件に対して、データ集合数 $n=204$ の試験結果が LEF 解析に対して選択された。他方、広範囲な ASTM Baseline のデータでは、統計解析の結果、データ集合数 $n=60$ 、データ数 830 点が LEF 基本データとされた。NAVY データ、Baseline データそして両データベースを合わせた総合データに対する形状母数の統計値を表 4 にまとめる。また疲労寿命に対する総合データの形状母数の分布状況を図 3 に示す。なお、疲労寿命の形状母数の B 値 α_B については変動係数 COV の記載がないため、資料の特性値をそのまま表 4 に記した。

FAA/DOT 資料の静強度および疲労寿命の統計解析を総括すると、以下のようにまとめられる。

- (1) 複合材の疲労寿命は静強度に比較して大きな変動を示す。
- (2) 複合材の静強度の変動は、荷重モード、試験片形状、試験環境、積層構成などの条件に関して大きな影響を受けない。
- (3) 複合材の疲労寿命変動は、荷重レベル、荷重モード、積層構成、破壊モードなどに関して著しい影響を受けないが、応力比、試験片形状、試験環境などの影響を受けやすい。

以上の結果から、CMH-17 では形状母数に対する代表値として、応用の簡便性ならびにワイブル分布ではモード値は平均値よりも小である理由などを考慮し、静強度の形状母数: $\alpha_s=20.0$ 、そして疲労寿命の形状母数: $\alpha_L=1.25$ のモード値が推奨されている¹⁾。

なお、本研究資料ではこれらの基本データベースの統計評価(図 2 および図 3)を用いてベイズ解析を行い、LEF に対する期待値を求めるている。

2.3 LEF の設定

図 1 に示した疲労寿命安全率 S_F は、試験の平均寿命 N_{mean} と MIL-B 値 $N_{B-basis}$ との比として次式で定義される^{1),2),3)}。

$$S_F = \frac{N_{mean}}{N_{B-basis}} = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_L + 1}{\alpha_L})}{\left[\frac{-\ln(R)}{\chi^2_{1-\gamma}(2n^*)/2n^*} \right]^{1/\alpha_L}} \quad (4)$$

複合材の疲労寿命変動は金属に比べて大きいので、寿命安全率 S_F を複合材実機構造試験にそのまま適用すると長期の試験期間を要する。(4)式において、標本数 (供試体) $n^*=1$ で目標寿命を B 値で満たすためには、形状母数が $\alpha=4$ であるアルミニウム合金では S_F が 2.3 となる。これに対して複合材構造では形状母数が小さいので S_F は大きくなり、長期間の寿命試験を遂行しなければならない。そこでより現実的な試験実証法として考えられた方法が、疲労寿命試験の荷重レベルを増加させて試験時間の短縮をめざす LEF である。LEF の基本的な考え方は、疲労実証試験の負荷荷重を増加させた短期間の試験においても、同じ信頼度レベル (B 値) が維持できるように適切な荷重増分を図ることにある。LEF の最終結果を(5)式に示すが^{1),2),3)}、この荷重増分係数 LEF の関連諸式の展開を補記 1 に記す。

$$LEF = \frac{K(N_0)\Gamma(\frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r})}{\left[\frac{-\ln(R)}{\chi^2_{1-\gamma}(2n^*)/2n^*} \right]^{1/\alpha_r}} = \frac{K(N_0)S_1}{S_2} = (N_F/N_0)^{\alpha_L/\alpha_r} \quad (5)$$

上式中、 $K(N_0)$ は補正係数を示し、また信頼度 $R=0.9$ および信頼水準は $1-\gamma=0.95$ である。(5)式の LEF の評価では、静強度および寿命の標本データベースから導かれるワイブル分布の形状母数 α_r 、 α_L にはモード値が用いられる。(5)式から明らかのように、LEF は静強度と疲労寿命の形状母数に依存する。しかし、得られている静強度および疲労強度の形状母数の変動は大きく、単峰型分布ではあるがその変数値域は広い。そこで本報告では疲労および静強度のワイブル分布の形状母数を階層構造に考えて、それぞれの形状母数の不確定性について対数正規分布を構成し、ベイズモデルを適用して両者の形状母数の変動に対する不確定性を評価する。

2.4 形状母数 α の確率モデル

ワイブル形状母数の対数を取った確率分布が厳密に正規分布に従うか否かは統計的検定が必要であるが、FAA,NAVY のデータには広範囲のデータベースが含まれていることから、ここでは対数変換した双方の形状母数 $\ln\alpha_r$ と $\ln\alpha_L$ を共に正規分布におく。

静強度の形状母数 α_r に対する対数正規分布のモデル $\text{LogN}[\alpha_r | \mu_r, \sigma_r^2]$ を(6)式に表す。また寿命分布の形状母数 α_L についても同様に $\text{LogN}[\alpha_L | \mu_L, \sigma_L^2]$ と表記し、これを(7)式に示す。

$$f_{\alpha_r}(\alpha_r | \mu_r, \sigma_r^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r\alpha_r} \exp\left\{-\frac{(\ln\alpha_r - \mu_r)^2}{2\sigma_r^2}\right\} \quad (6)$$

$$f_{\alpha_L}(\alpha_L | \mu_L, \sigma_L^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_L\alpha_L} \exp\left\{-\frac{(\ln\alpha_L - \mu_L)^2}{2\sigma_L^2}\right\} \quad (7)$$

静強度と疲労の詳細な識別を次節以降に示すとして、形状母数の対数を取ったデータを Data: $\{x_1, \dots, x_n\}$ と記述する。n はデータ数、Data は $N[\text{Data} | \mu, \sigma^2]$ に従うと仮定する。データは適宜補

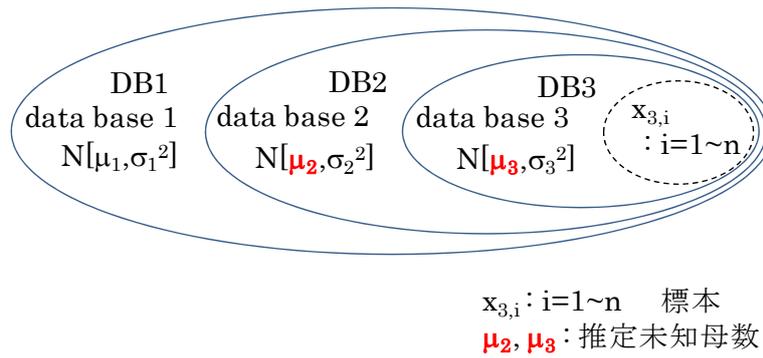


図4 形状母数推定（データベースモデル1）

充されること、また広範囲のデータベースを対象とする観点などから、Dataの平均値と分散についてはさらに確率分布を仮定し、ベイズ解析を適用してこれらの未知母数の推定を行う。推定には平均値 $\mu=(\mu_r, \mu_L)$ と分散 $\sigma^2=(\sigma_r^2, \sigma_L^2)$ に対する事前分布の適切な設定によって、事後分布も同型となるベイズ共役モデルを適用する。そしてベイズ解析で得られた μ と σ^2 の事後分布を用いて形状母数 $\alpha=(\alpha_r, \alpha_L)$ の分布特性を把握する。

2.5 データベース構造のモデル化

LEFの評価にあたり、2.1節に述べたように試験部材や試験条件など広範囲なデータベースから形状母数 α の確率モデルを構成してその未知母数を推定する必要がある。ここでは主たるデータベース構造を想定して、確率モデルの母数推定法について検討する。幅広い情報源では固有の多くの特性が含まれるので、推定すべき未知母数、要因も増えることになる。これらの要因を適切に推定する手法として、ここでは共役分布を応用した階層構造を持つベイズ推定を応用する。

2.5.1 Building Block¹¹⁾を想定した多層データ構造

対数を取った形状母数($x=ln\alpha$)が図4のデータ構造で示されると仮定する。最下位（広範囲なデータベース）DB1の $N[\mu_1, \sigma_1^2]$ から μ_2 が標本として得られ、DB2の $N[\mu_2, \sigma_2^2]$ から μ_3 が取得され、そして最上位DB3の標本 $\{x_{3,i}=1\sim n\}$ が得られるとする。このDB3の平均値の期待値 $E[\mu_3]$ と分散 $V[\mu_3]$ は、正規分布の階層モデル¹²⁾を用いると、それぞれ次式で表わされる。

$$E[\mu_3 | x_{3,i}] = \left\{ \frac{n}{\sigma_3^2} + \frac{1}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{nx_3}{\sigma_3^2} + \frac{\mu_1}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} \right\} \quad (8)$$

$$V[\mu_3 | x_{3,i}] = \left\{ \frac{n}{\sigma_3^2} + \frac{1}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} \right\}^{-1} \quad (9)$$

ただしこの結果は、すべての変数は独立で、かつ分散 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ を既知とする限られた仮定の下であり、実際のデータベースに適合するとは限らない。しかし、(10)式のような係数、 $\xi(0 < \xi < 1)$ を考慮すると、(11)式に示す期待値 $E[\mu_3]$ に対するデータ依存性が判断できる。すなわち広範囲の

$$\xi = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 / n} \quad (10)$$

$$E[\mu_3 | x_{3,i}] = \xi \cdot \overline{x_3} + (1 - \xi) \mu_1 \quad (11)$$

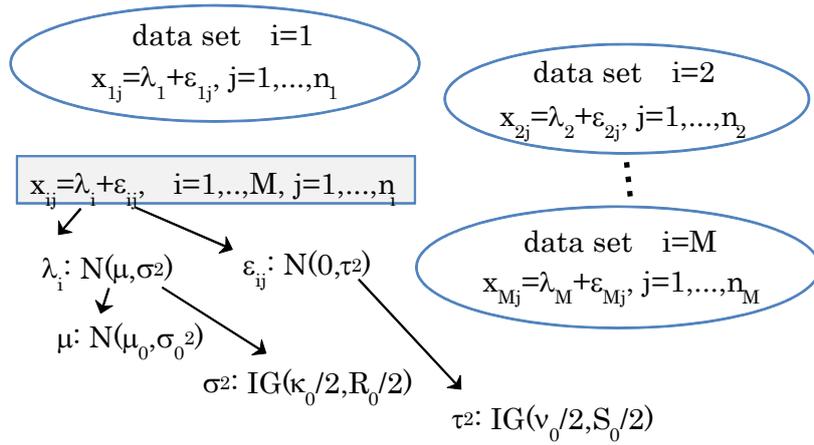


図 5 形状母数推定 (データベースモデル 2)

DB1 (μ)か、あるいは最上位の DB3(μ_3)を基本とするか、これらの選択指針を係数 ξ によって計ることが可能になる。

DB3 に示すような実機規模の情報は少ないため、その特性の推定精度は低い。これに対して上記のような階層構造を考慮して、構造部位の情報(DB2)およびこれを構成する広範囲の部材レベルのデータベース(DB1)を援用する、実機構造に対するデータ推定法が考えられる。

2.5.2 共役分布の応用

次に図 5 に示すように、形状母数のデータが独立に M 組得られる状況を想定する。取得データの尤度はこれまでと同様に正規性を仮定するが、各組の平均値 λ_i は正規分布 $N(\lambda_i | \mu, \sigma^2)$ に従い、また各組共通の不確定因子 (誤差) を $N(\epsilon_{ij} | 0, \tau^2)$ とモデル化する。母集団の平均値と分散、ならびに誤差の分散も未知とする。さらに、 λ_i の平均値 μ と分散 σ^2 、そして誤差分散 τ^2 について、それぞれの事前分布を $N(\mu | \mu_0, \sigma_0^2)$ 、逆ガンマ分布の $IG(\sigma^2 | k_0/2, R_0/2)$ 、 $IG(\tau^2 | v_0/2, S_0/2)$ とする階層構造を仮定すると、標本データの正規性の前提から、このようなデータベース構造については階層ベイズモデルの共役モデル^{12), 13)}が適用できる。

平均値を $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$ と記述すると、形状母数 α の尤度は $\ln \alpha = \{x_{ij}, i=1, \dots, M, j=1, \dots, n_i\}$ として次式に示される。ここで n_i はデータ組 i の標本数である。

$$L(\ln \alpha | \lambda, \tau^2) = \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\ln \alpha_{i,j} - \lambda_i)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (12)$$

ここで未知母数 $(\lambda, \mu, \tau^2, \sigma^2)$ の結合事前分布 $h^{(0)}(\lambda, \mu, \tau^2, \sigma^2)$ を(13)式に表記すると、(12)式の尤度を用いて、ベイズの定理から事後分布 $h^{(1)}(\lambda, \mu, \tau^2, \sigma^2)$ が(14)式で得られる。

$$h^{(0)}(\lambda, \mu, \tau^2, \sigma^2) = \prod_{i=1}^M h^{(0)}(\lambda_i | \mu) h^{(0)}(\mu) h^{(0)}(\tau^2) h^{(0)}(\sigma^2) \quad (13)$$

$$h^{(1)}(\lambda, \mu, \tau^2, \sigma^2 | \ln \alpha) \propto L(\ln \alpha | \lambda, \tau^2) h^{(0)}(\lambda, \mu, \tau^2, \sigma^2) \quad (14)$$

これら未知母数の事後分布を基に、形状母数 α の周辺分布を計算する。

3. ベイズ法に基づく LEF 期待値(LEF)

以下では図5のデータベースモデル2を対象としてLEFを求めるが、形状母数に関する標本は限られているので、ここではデータの組数 $M=1$ 、そして誤差分散 τ^2 を0と簡略化して、以下に示す定式化を行う。LEFのベイズ的期待値を求める概略手順を図6にまとめる。

対数をとった形状母数の平均値 μ 、と分散 σ^2 に対して、静強度と疲労寿命に関する添字 (r, L) を省略し、それぞれの事前分布 (正規分布と逆ガンマ分布) を以下に示す。なお、 $IG[\cdot]$ は(17)式の逆ガンマ分布を表す。また、 ν_0, S_0, μ_0, ξ_0 は事前分布を設定する工学的判断に基づく初期設定パラメタである。

$$h^{(0)}(\sigma^2) = IG[\nu_0/2, \nu_0 S_0/2] \quad (15)$$

$$h^{(0)}(\mu | \sigma^2) = N[\mu_0, \sigma^2 / \xi_0] \quad (16)$$

$$IG[\lambda, \eta] = f(x | \eta, \lambda) = \frac{\eta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{-\lambda-1} \exp\left\{-\frac{\eta}{x}\right\} \quad (17)$$

ベイズ共役分布の計算から、 μ, σ^2 の条件付事後分布が以下に得られる。

$$h^{(1)}(\sigma^2) = IG\left[\frac{\nu_1+1}{2}, \frac{\nu_1 S_1 + \xi_1(\bar{x} - \mu_1)^2}{2}\right] \quad (18)$$

$$h^{(1)}(\mu | \sigma^2) = N[\mu_1, \sigma^2 / \xi_1] \quad (19)$$

上式中の変数 ξ_1 および μ_1 は、次式で示される。

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_0 + n, \quad \nu_1 = \nu_0 + n, \\ \nu_1 S_1 = \nu_0 S_0 + Vn + \frac{\xi_0 n}{\xi_0 + n} (\bar{x} - \mu_0)^2 \\ \mu_1 = \frac{n\bar{x} + \xi_0 \mu_0}{n + \xi_0}, \quad Vn = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{cases} \quad (20)$$

共役モデルをまとめると、平均値 μ と分散 σ^2 の結合事後分布 $h^{(1)}(\mu, \sigma^2)$ が次式で表される。ここ

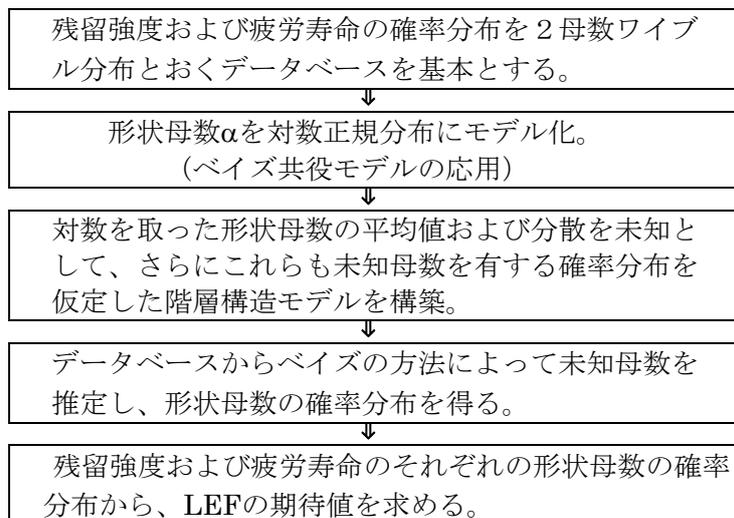


図6 LEFベイズ的期待値の導出

で、 $L\{D(\ln\alpha_1, \dots, \ln\alpha_n)\}$ は尤度を示す。

$$\begin{aligned} h^{(1)}(\mu, \sigma^2) &\propto L(D|\mu, \sigma^2)h^{(1)}(\mu|\sigma^2)h^{(1)}(\sigma^2) \\ &\propto \sigma^{2\left(\frac{\nu_1+1}{2}-1\right)} \exp\left\{-\frac{\nu_1 S_1 + \xi_1(\mu - \mu_1)^2}{2}\right\} \end{aligned} \quad (21)$$

以上のように、 $\ln\alpha_r, \ln\alpha_L$ に対する共役モデルの適用によって事後確率分布の推定計算を行い、形状母数の推定結果を得る。

静強度、疲労寿命の形状母数の平均値および分散の事後分布を $h^{(1)}(\mu_r, \sigma_r^2)$ 、 $h^{(1)}(\mu_L, \sigma_L^2)$ と表記し、さらにワイブル分布の形状母数の分布、 $f_{\alpha_r}(\alpha_r|\mu_r, \sigma_r^2)$ 、 $f_{\alpha_L}(\alpha_L|\mu_L, \sigma_L^2)$ の双方を考慮すると、静強度と疲労寿命に対する形状母数の確率分布が、事後分布(21)式を用いて次式で得られる。

$$f_{\alpha_r}(\alpha_r) = \iint_{\mu_r, \sigma_r^2} f_{\alpha_r}(\alpha_r|\mu_r, \sigma_r^2)h^{(1)}(\mu_r, \sigma_r^2)d\mu_r d\sigma_r^2 \quad (22)$$

$$f_{\alpha_L}(\alpha_L) = \iint_{\mu_L, \sigma_L^2} f_{\alpha_L}(\alpha_L|\mu_L, \sigma_L^2)h^{(1)}(\mu_L, \sigma_L^2)d\mu_L d\sigma_L^2 \quad (23)$$

上記の形状母数の確率分布 $f_{\alpha_r}(\alpha_r)$ 、 $f_{\alpha_L}(\alpha_L)$ から、最終的に LEF のベイズ的期待値 \underline{LEF} が先の(5)式を用いて(24)式で得られる。

$$\underline{LEF} = \iint_{\alpha_r, \alpha_L} LEF(\alpha_r, \alpha_L)f_{\alpha_r}(\alpha_r)f_{\alpha_L}(\alpha_L)d\alpha_r d\alpha_L \quad (24)$$

次に示す計算例では、この \underline{LEF} を用いて CMH-17 で記述される LEF と比較する。

4. \underline{LEF} 評価例

4.1 数値計算例

静強度と疲労寿命に関するワイブル分布の形状母数のデータには Whitehead の資料¹⁾を参照した。本データは複合材に対する荷重モード、試験片タイプ、積層構成、試験環境などについて幅広い条件から構成されている。これらを基本に形状母数に対する最終評価資料が得られているが、本報告においてもこれを適用して、静強度 69 点、疲労寿命 264 点から構成される資料を用いた。ちなみにこれらに対数変換した結果、 $\ln\alpha_r$ はデータ点数 $n=69$ で標本平均=3、標本分散=0.5² となり、 $\ln\alpha_L$ は $n=264$ で標本平均=0.3、標本分散=0.7² と計算された。上述の強度と疲労寿命の資料を、ベイズ解析の未知母数推定で用いる尤度の基本データとした。

2.4 節に述べた形状母数の対数正規分布のモデル化に対し、図 2 および図 3 の CMH-17 の基本データを用いた確率分布の適合性の検定について、参考までに以下にまとめる。適合度の仮説を、“形状母数の対数は正規分布 $N(\ln\alpha|\mu, \sigma^2)$ に従う。”とする。ここでは、コルモゴロフ・スミルノフの適合性検定法¹⁴⁾によって仮説を検定する。標本データの累積頻度分布と仮説の累積確率分布(正規分布)との差の最大値である D_{\max} を求めて、標本数 n と危険率 γ によって定まる限界値 $D_{n,\gamma}$ と比較することで検定を行う。この検定条件を次式に示す。

$$D_{\max} < D_{n,\gamma} \quad (25)$$

一方、Feller の近似式を用いると、限界値 $D_{n,\gamma}$ は次式で表される¹⁴⁾。

$$D_{n,\gamma} \cong \sqrt{\frac{1}{2n} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)} \quad (26)$$

以上の検定法に基づく結果を表 5 に示す。なお、危険率は $\gamma=0.05$ を用いている。本結果から、“静強度および疲労寿命の形状母数の確率分布は対数正規分布である。”という仮定を棄却することはできないことが示される。

表 5 形状母数の確率分布の適合度検定

	$\ln\alpha_r$	$\ln\alpha_L$
標本平均	3	0.3
標本分散	0.5^2	0.7^2
標本数 n	69	264
D_{\max} (標本から)	0.072	0.07
$D_{n,\gamma}$ ($\gamma=0.05$)	0.153	0.075

未知母数の事前分布の設定には上記の標本平均と分散の値を参照して、 $\ln\alpha_r$ の平均値の事前分布に緩やかな山型を想定し、(16)式で $\mu_0=3, \xi_0=0.333$ とする。また $\ln\alpha_L$ も同様に $\mu_0=0.3, \xi_0=0.25$ とおく。他方、分散については単調減少の逆ガンマ関数を用い、 $\ln\alpha_r$ および $\ln\alpha_L$ の分散には(15)式で $\nu_0=0.02, S_0=1$ を仮定してその形状を定義する。事後分布を得るための尤度計算に必要な各パラメータは(20)式から求められる。なお、LEF評価の(5)式における信頼水準を定めるための標本数(供試体) n^* については、構造供試体が少量標本であることを想定して1体の $n^*=1$ を仮定する。

4.2 形状母数の確率分布の推定

共役モデルの定義から事後分布に関連するパラメータの値は容易に計算できるが、形状母数の確率分布の計算について、ここでは視覚的表現としてのマルコフチェーン・モンテカルロ法(MCMC: Markov chain Monte Carlo)^{13),15)}を適用した例を記す。疲労寿命に対する形状母数の対数 $\ln\alpha_L$ の分散 σ_L^2 および平均値 μ_L に関する(18)および(19)式の事後分布を、MCMCの一手法であるギブスサンプリング法によって求める。 μ_L と σ_L^2 のシミュレーション結果例(点列)を図7に示す。サンプリング点数は10,000で、これから求めた頻度分布を同図の右端に表記する。なお、静強度の $\ln\alpha_r$ に対する平均値および分散についても同様に得られる。

ベイズ解析によって得られた条件付の事後分布 $h^{(1)}(\sigma^2)$ および $h^{(1)}(\mu|\sigma^2)$ と、(6)および(7)式の形状母数の対数正規分布 $\text{LogN}[\mu, \sigma^2]$ を用いて、静強度および疲労強度の形状母数の確率分布がそれ

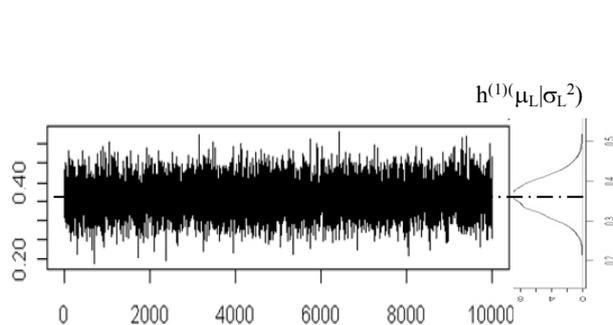
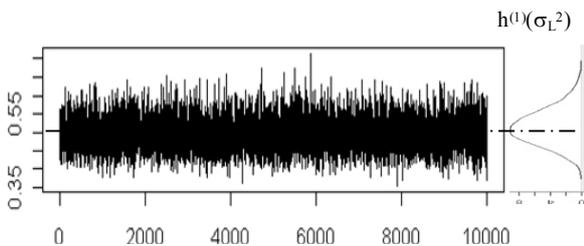
(1) μ_L のシミュレーション例と事後分布(2) σ_L^2 のシミュレーション例と事後分布

図7 疲労寿命形状母数の平均値と分散の事後分布サンプリング

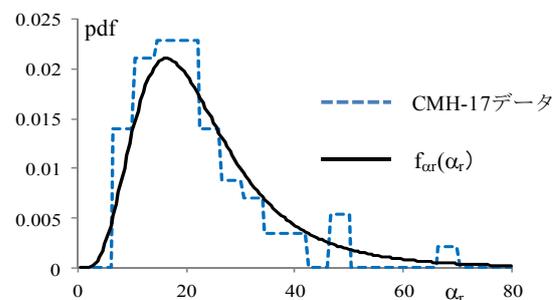
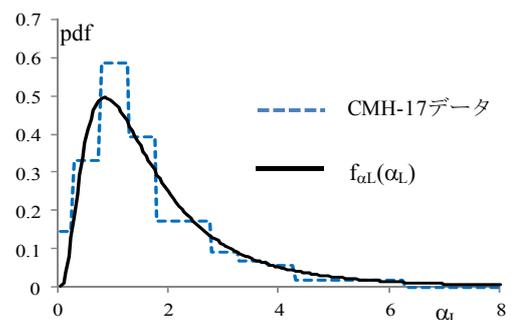
図8 静強度の形状母数確率分布 $f_{\alpha_r}(\alpha_r)$ 図9 疲労強度の形状母数確率分布 $f_{\alpha_L}(\alpha_L)$

表6 LEF ベイズ的期待値 (パラメトリック評価)

Fatigue test period $x N_0$ (N_T)	LEF(Bayes expectation)			CMH-17 LEF $\alpha_{L,mode}=1.25$ $\alpha_{r,mode}=20.0$
	Range of integration			
	Case 1 $\alpha_r > \alpha_L$	Case 2 $\alpha_r > 2\alpha_L$	Case 3 $\alpha_r > 4\alpha_L$	
0.5	---	---	---	1.23
1	1.35	1.31	1.24	1.18
2	1.23	1.21	1.17	1.13
3	1.17	1.16	1.13	1.10
5	1.11	1.10	1.08	1.06
10	1.03	1.03	1.02	1.02
13.3	1	1	1	1
25	0.94	0.94	0.95	0.961

それ (22), (23)式に得られる。図 8 および図 9 には、これらの pdf の $f_{\alpha_r}(\alpha_r)$, $f_{\alpha_L}(\alpha_L)$ を実線に示し、また MCMC 尤度計算に用いたデータベースの頻度分布を点線に示す。本結果からも前述の分布適合検定と同様に、データベースから得られた形状母数は、静強度、疲労寿命共に対数正規分布に適合していることがわかる。

4.3 LEF の比較

CMH-17 では、静強度と疲労強度の形状母数に対して、2.2 節に述べたように、 $\alpha_{r,mode}=20.0$, $\alpha_{L,mode}=1.25$ なるモード値を適用している。しかし、データ資料が多くなれば不確実性も増えることになり、得られた形状母数の頻度分布を適切に活用することが重要である。モード値に代わって、データ源の資質を表現する一つの手法として、ここでは(24)式で示した LEF のベイズ的期待値 LEF を用いる。

表 6 に示すように、CMH-17 の評価では試験期間 $N_T=1$ に対して $LEF=1.18$ となり、逆に試験荷重が運用レベル S_2 の際には $N_T=13.3 (=S_F)$ と計算される。この間の領域では、各試験期間 N_T に対して設定すべき LEF の値が(5)式を用いて得られる。これに対してベイズ解析では、(24)式の積分範囲 (α_r, α_L) を 3 ケースに分けて LEF の期待値を得ている。すなわち範囲を、 $\alpha_r > \alpha_L$, $\alpha_r > 2\alpha_L$, $\alpha_r > 4\alpha_L$ として、静強度および疲労寿命の形状母数の値域の実情を考慮する。積分範囲が狭くなるほど CMH-17 の LEF に近づくが、ベイズ的期待値としての LEF はモード値を用いた LEF よりも全般に大きく、安全側の設定となる。したがって例えば、CMH-17 の $N_T=1$, $LEF=1.18$ の試験条件に対して、ベイズ解析では $N_T=1$ で LEF=1.24 以上となる。他方、LEF=1.23 以下では $N_T \geq 2$ 、すなわち設計寿命の 2 倍以上の試験期間設定が必要である。

これらの結果から、CMH-17 で設定されている LEF と比較してベイズ的期待値の LEF は大きく、疲労実証試験では 1.5~2 倍程度の試験期間を要することになる。しかし強度データベースのさらなる蓄積によって形状母数の不確実性が少なくなることが期待されるので、LEF および LEF の差も縮小して試験期間の短縮化が可能となろう。

5. ノンパラメトリック評価

前章では形状母数の不確実性に対して対数正規分布を仮定して、その分布の適合性の検定、ならびに未知母数を推定して LEF に対するベイズ的期待値を求めた。また、CMH-17 においても形状母数の確率特性についてワイブル解析を用いて B 値などを求めている。いずれも形状母数の変動が単峰型の確率分布によって記述できるという前提条件の下で、パラメトリック評価を行っ

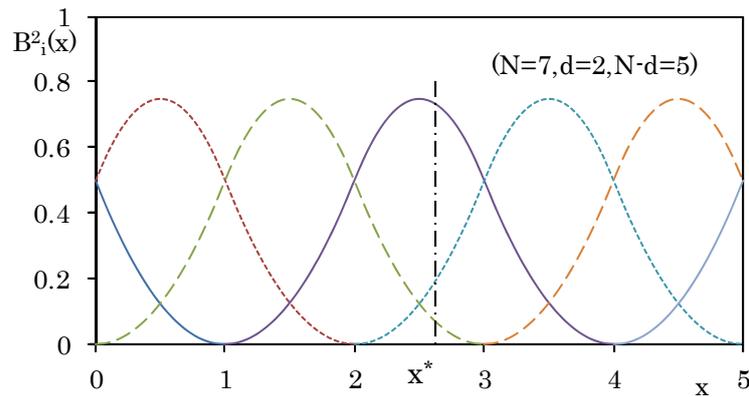


図10 2次スプライン基底関数の例

ている。しかし、形状母数の分布特性が常に単峰型であるとは限らず、仮定した分布の適合性が成立しない状況もあり得る。各種データベースの採用などの情報範囲の拡大化によっては、形状母数の分布の複雑化が予想される。単峰型で近似できない分布については、混合分布や複合分布の応用が考えられる。しかし、これらを構成する未知要因の数も増えるので、データベースの情報量に適した他の確率モデルが必要である。そこでパラメトリック評価に代わり、ノンパラメトリック手法によって確率分布を近似して、LEFの期待値を求める確率モデルを構成する。

5.1 スプライン関数を用いた形状母数 pdf の推定

本報告では確率分布の近似にスプライン関数¹⁶⁾を適用したノンパラメトリック推定法を用いる。取得されたデータ点を適切に補間して、スプライン関数を用いて補間点を滑らかに結ぶ近似曲線としての pdf を得る手法である。データ点間の区分を補間多項式を用いて近似するが、ここでは2次のBスプライン曲線(Basis spline curves)による線形結合によって pdf を推定する。形状母数 α の pdf を $f(\alpha)$ とすると、 $f(\alpha)$ は対応する区間 j におけるスプライン基底関数 $B_j(\alpha)$ と係数 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ との線形結合によって次式に近似される。なお、係数 a_j は制御点として定義される。

$$f_{\alpha}(\alpha | \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^N a_j B_j(\alpha) \quad (27)$$

上式で、係数の総数 N は制御点数として定義され、補間精度を表すスプライン関数の総数である。最適な近似表現は、得られる情報量(標本数 n)に依存して制御点数 N と係数 a_j から定めることができる。ここで3次までのスプライン基底関数を補記2に示す。また制御点数 $N=7$ 、スプライン関数の次数 $d=2$ 、対象域分割数 $N-d=5$ 、そして階数 $r=d+1=3$ 、のスプライン基底関数の例を図10に示す。同図に示すように、ある点 x^* において3種類のスプライン基底関数が存在し(階数 $r=3$)、これは3つの制御点が影響することを表している。ただし、その効果は局所的であり、他の関数が点 x^* に関与しないことも示している。

確率密度関数 $f(\alpha)$ の推定に対して、スプライン関数の影響度を表す区間 j の係数 a_j の設定には、得られる情報量によって次の2種類の手法が提案されている。ここでは Zhi Zong の手法¹⁷⁾に沿って、形状母数の pdf 近似を得る。なお、Zhi Zong による定式化の詳細を補記3に示す。

- (1) 情報量 n が十分に期待できる場合には、情報量基準(ME: Measured entropy)にしたがって最適な係数 a_j を得る。
- (2) 情報量 n が少ない状況では、情報を有効に活用するためにベイズ情報エントロピ(BME: Bayesian measured entropy)を適用して係数 a_j を得る。

以下では、この2種類の最適化手法を用いて線形結合の係数を求めて形状母数の pdf を近似し、

これを基に LEF の期待値を計算する。

5.2 情報量基準(ME:measured entropy)による方法¹⁷⁾

線形結合である(27)式の係数 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ を求めるために、最初に標本を $x_i(i=1, 2, \dots, n)$ と表記する。 n は標本数である。係数 \mathbf{a} は最尤推定法で求められるが、補間精度のスプライン関数の数 N に依存して pdf が決まるので、最良の pdf を得るための N を定めなければならない。そこで、統計モデルの最良選択としてのエントロピ (情報の価値) 基準を適用して、自己情報量 (衝撃度) の期待値である情報エントロピを最小化する。すなわち、最良の pdf を定める係数 \mathbf{a} は、適切な制御点数 N でエントロピを最小化する。したがって、係数 \mathbf{a} と制御点数 N は次式のエントロピ (ME:measured entropy) を最小にする最適化問題の解として得られる。

$$ME = -\int f(\alpha | \mathbf{a}) \log f(\alpha | \mathbf{a}) dx + \frac{3(N-1)}{2n} \quad (28)$$

ここで係数 \mathbf{a} は、標本 $x_i(i=1, 2, \dots, n)$ から得られる対数尤度 (29)式を、ある N に対して(30)式の拘束条件において最大化する。

$$L = \sum_{j=1}^N \log f(x_j | \mathbf{a}) \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^N a_j \frac{x_j - x_{j-3}}{3} = 1, \quad a_j \geq 0 (j=1, \dots, N) \quad (30)$$

上記問題の最適解である係数 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ は、次式の反復法によって得られる。

$$\hat{a}_j^{(q)} = \frac{1}{n_s c_j} \frac{\sum_{l=1}^{n_s} \hat{a}_j^{(q-1)} B_j(x_l)}{\sum_{j=1}^N \hat{a}_j^{(q-1)} B_j(x_l)} \quad (31)$$

なお、上式の q は反復回数を示し、また c_j は対象領域を分割するための基準化係数である。なお、係数 c_j と反復条件を補記 3 に示す。

5.3 バイズ情報エントロピ(BME:Bayesian measured entropy)の適用¹⁷⁾

前節では制御点数 N に比較して標本数 n が十分である場合に適切な解を得られるが、他方、情報量が少ない状況では他の判断基準が必要となる。そこで、少ない情報を有効に活用するために隣り合う結合係数のスムーズ性を仮定して、標本データから結合係数をバイズの方法で推定する手順を考える。最初に、結合係数 \mathbf{a} の変動を真実値 \mathbf{b} と誤差 \mathbf{w} に分けて次式で記述する。

$$a_i = b_i + w_i \quad (32)$$

ここで、 b_i は a_i の平均値を表し、また w_i は係数の変動分で、 $N(0, \sigma^2)$ とモデル化が可能であるとす。これから、真実値としての $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_N)^T$ が与えられた時の $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ の尤度は次式に書ける。

$$p(\mathbf{a} | \mathbf{b}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(a_i - b_i)^2\right\} \quad (33)$$

一方、係数 b_i を用いると、上述のスムーズ性については次式の e_i で表すことができる。

$$b_{i+1} - b_i = b_i - b_{i-1} + e_i \quad (34)$$

ここで $\mathbf{e}_i (i=2, \dots, N-1)$ の確率モデルを $p(\mathbf{e}_i) = N(0, \tau^2)$ とし、また $\omega^2 = \sigma^2 / \tau^2$ と記述すると、スムーズ性の仮定の下で得られた係数 \mathbf{b} の事前分布 $p(\mathbf{b})$ が次式で得られる。ここで \mathbf{D} は \mathbf{e}_i から構成される行列を示す (補記 3)。

$$p(\mathbf{b}) = \omega^{N-2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^{N-2} \exp \left\{ -\frac{\omega^2}{2\sigma^2} \|\mathbf{D}\mathbf{b}\|^2 \right\} \quad (35)$$

ベイズの定理によって、事前分布 $p(\mathbf{b})$ および尤度 $p(\mathbf{a} | \mathbf{b})$ から、 \mathbf{b} の事後分布の (36) 式を得る。

$$p(\mathbf{b} | \mathbf{a}) \propto p(\mathbf{b} | \mathbf{a}) p(\mathbf{b}) \quad (36)$$

この事後分布 $p(\mathbf{b} | \mathbf{a})$ を最大化することによって \mathbf{b} の点推定 $\hat{\mathbf{b}}$ が得られる。これを用いると、形状母数 α の pdf が次式で表現できる。

$$f_\alpha(\alpha | \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^N b_j B_j(\alpha) \quad (37)$$

上式の $f(\alpha | \mathbf{b})$ は ω^2 に依存するので、最適な ω^2 値を求める必要がある。そこで (33) 式および (35) 式から次式に示す係数 \mathbf{a} の周辺分布の尤度を考えて、これを最大化するハイパーパラメタ ω^2 を決める。

$$p(\mathbf{a} | \omega^2) = \int p(\mathbf{a} | \mathbf{b}) p(\mathbf{b}) d\mathbf{b} \quad (38)$$

これは第2種最尤推定法、あるいは経験ベイズ法と定義される。また BME (Bayesian measured entropy) は上式の対数を取って負にしたものであるため、これを次式に示す。

$$BME(\omega^2) = -2 \log p(\mathbf{a} | \omega^2) = -2 \log \int p(\mathbf{a} | \mathbf{b}) \cdot p(\mathbf{b}) d\mathbf{b} \quad (39)$$

上式で、 $-\log p(\mathbf{a} | \omega^2)$ はエントロピであり、周辺尤度の最大化は $BME(\omega^2)$ の最小化であるため、この時の ω^2 を用いることによって、最適な結合係数 $\hat{\mathbf{b}}$ が得られることになる。

5.4 ノンパラメトリック法による pdf の推定

ノンパラメトリック評価を適用した形状母数の pdf 推定結果を図 11 から図 14 に示す。ここでは単峰型を満たす CMH-17 の基本データ (4.3 節) を用いているため、前章のパラメトリック推定である図 8 ならびに図 9 との大きな差異はみられない。

情報量基準 ME による静強度の形状母数分布 $f(\alpha_L)$ を図 11 に示し、また疲労寿命の形状母数分布 $f(\alpha_L)$ を図 12 に示す。図 11 の静強度では、ME が最小 (ME=3.92) となるスプライン関数の最適数は $N=15$ であり、一方、疲労寿命の図 12 においては ME=1.46 の時に最適なスプライン関数の数が $N=15$ と導出された。図 11 および図 12 の結果から、推定 pdf は明らかに単峰型分布ではなく、変数域の裾野近傍に多モード性がみられる。静強度および疲労寿命共にスプライン関数の数 N が小である場合には分布形状の単純化傾向がみられ、逆に N が大きくなるにしたがって pdf の分布形状は振動を呈して複雑化の様子を見せる。

図 13 および図 14 は BME に基づく静強度および疲労寿命の pdf 推定結果である。4.3 節の基本データの標本数は静強度が $n=69$ 、疲労寿命では $n=264$ と、BME 法の適用に際しては十分に大きいので、スプライン関数の数 N については静強度では $N=40$ 、そして疲労寿命では $N=50$ とおく。また BME 法に対する標本数は十分に大きいことから、疲労寿命の標本数を $n=132$ とし頻度分布を再設定した。図 13 の静強度の形状母数分布では、パラメタ $\omega^2=5$ のところで、最適解である pdf の最小の $BME=-82.4$ が得られ、他方、疲労寿命では図 14 に示すように、 $\omega^2=6$ で $BME=187.9$ の最適な pdf が得られている。静強度および疲労寿命の両 pdf の形状は ω^2 が小さくなるに従って発散するが、 ω^2 値が大きくなると共に滑らかな pdf 形状に移行していく。

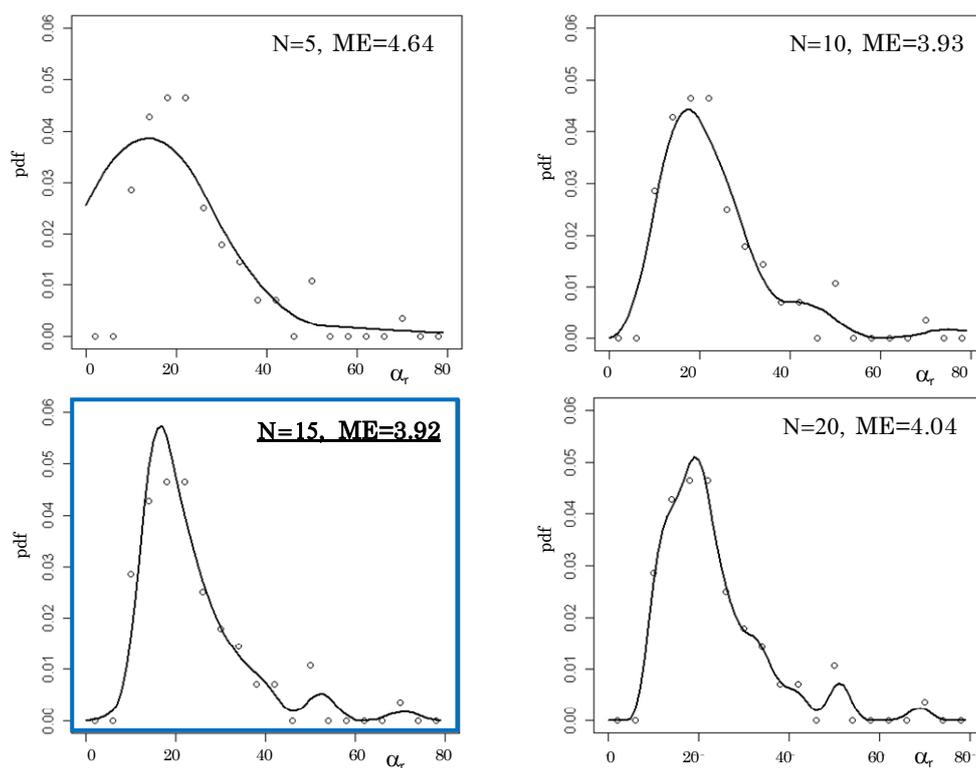


図11 MEに基づく残留強度形状母数の分布 $f(\alpha_r)$

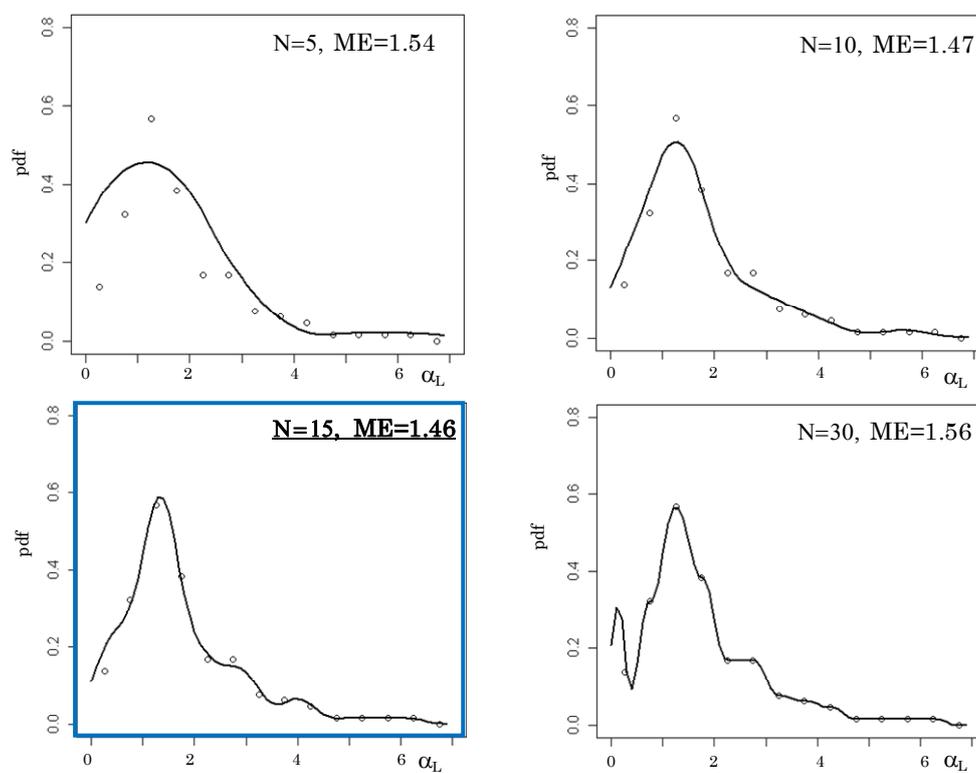


図12 MEに基づく疲労寿命形状母数の分布 $f(\alpha_L)$

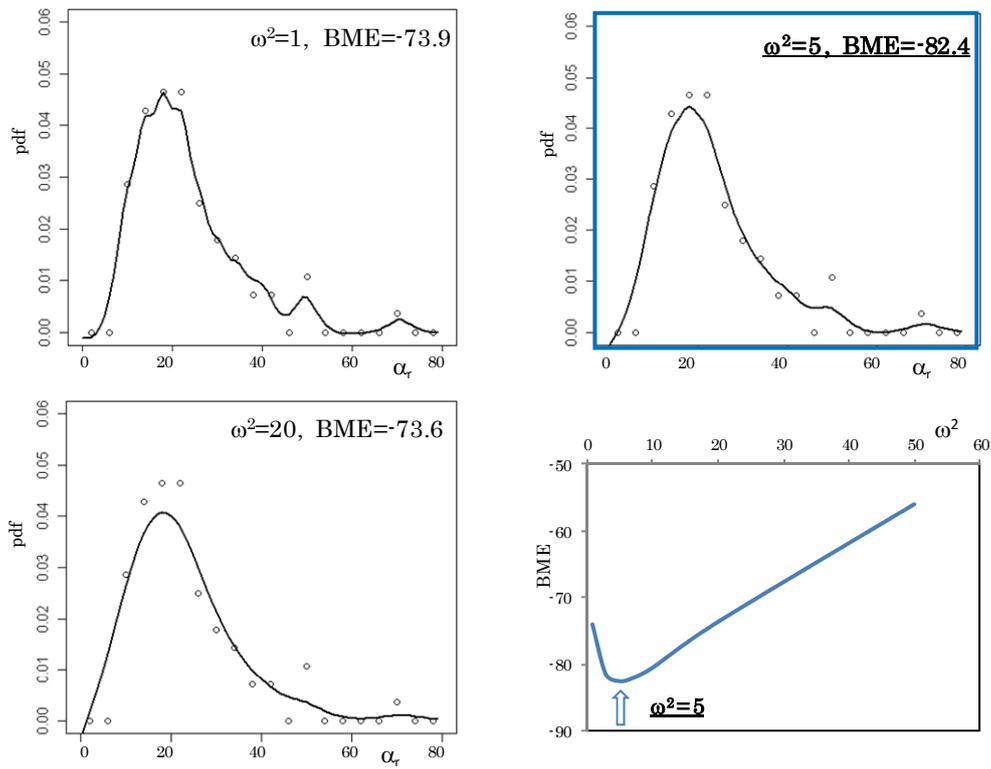


図13 BMEに基づく残留強度形状母数の分布 $f(\alpha_r)$

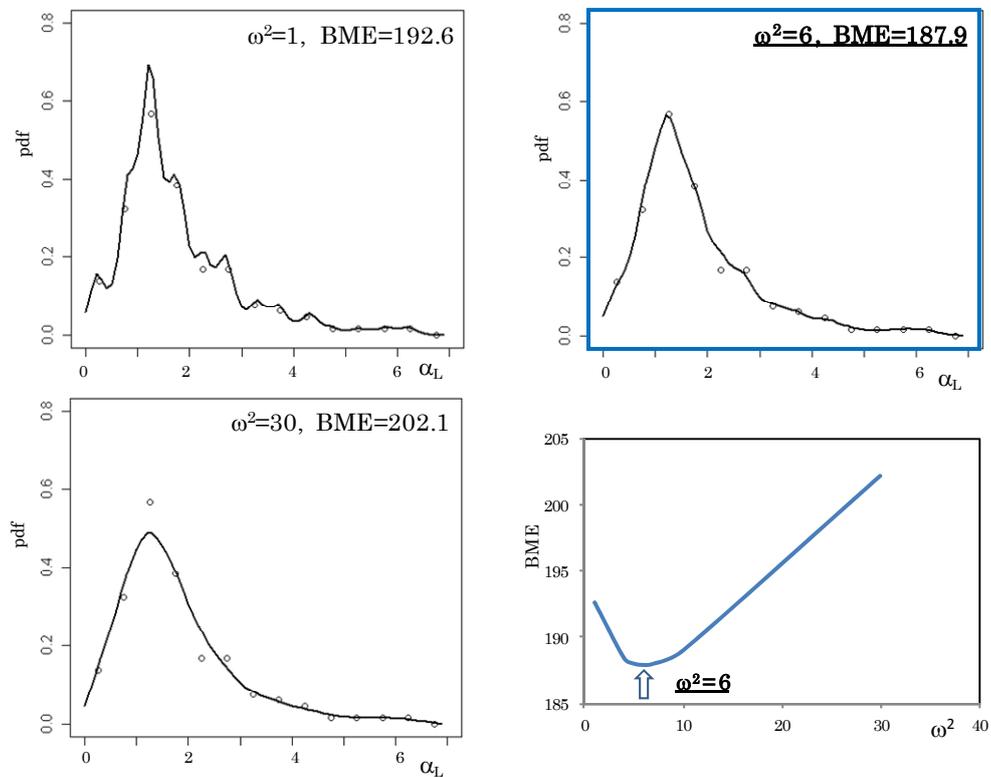


図14 BMEに基づく疲労寿命形状母数の分布 $f(\alpha_L)$

表 7 LEF 期待値 (ノンパラメトリック評価)

Fatigue test period x N ₀ (N _T)	LEF ME: Measured entropy, BME: Bayesian measured entropy pa: parametric(Table 6)									CMH-17 LEF α _{L,mode} =1.25 α _{r,mode} =20.0
	Range of integration									
	Case 1			Case 2			Case 3			
	α _r >α _L			α _r >2α _L			α _r >4α _L			
	ME	BME	pa	ME	BME	pa	ME	BME	pa	
0.5	---	---	---	---	---	---	---	---	---	1.23
1	1.29	1.33	1.35	1.28	1.30	1.31	1.24	1.25	1.24	1.18
2	1.20	1.22	1.23	1.19	1.21	1.21	1.17	1.18	1.17	1.13
3	1.15	1.17	1.17	1.15	1.16	1.16	1.13	1.13	1.13	1.10
5	1.09	1.10	1.11	1.09	1.10	1.10	1.08	1.09	1.08	1.06
10	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.02	1.02	1.02	1.02
13.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	0.95	0.94	0.94	0.95	0.94	0.94	0.95	0.95	0.95	0.961

5.5 ノンパラメトリック法に基づく LEF 期待値

情報量基準 ME ならびにベイズ情報エントロピー BME に基づく、ノンパラメトリック法による LEF 期待値を表 7 に示す。なお、比較のために先のパラメトリック法で計算したベイズの期待値の LEF をイタリック体にて同表に示す。ノンパラメトリック法による LEF 期待値は、3 章の(24)式中の事後確率分布である $f(\alpha_r)$ と $f(\alpha_L)$ に代わり、ME 法では(27)式で表される $f_{ME}(\alpha_r)$ と $f_{ME}(\alpha_L)$ 、また BME では(37)式の pdf, $f_{BME}(\alpha_r)$ と $f_{BME}(\alpha_L)$ を用いる。この LEF 期待値を次式に示す。

$$LEF = \iint_{\alpha_r, \alpha_L} LEF(\alpha_r, \alpha_L) f_{ME \text{ or } BME}(\alpha_r) f_{ME \text{ or } BME}(\alpha_L) d\alpha_r d\alpha_L \quad (40)$$

本結果から、ノンパラメトリック BME 法による LEF 期待値とパラメトリック評価の LEF 期待値 (表 6) との間に大きな差異はなく、ノンパラメトリック ME 法の LEF 期待値は、BME 法ならびにパラメトリック法の LEF 期待値に比べて 1 ~ 2 % 程度小さい。これは、図 11 から図 14 の pdf に示すように、ME 法は BME 法の pdf に比して尖度があり、多モードを有していること、一方、BME の pdf は図 9 のパラメトリック推定と同様に、モード値を中心として平滑であることなどが起因している。また図 12 と図 14 の最適と判定した pdf を用いて疲労寿命形状母数 α_L の期待値と分散を計算すると、ME 法と BME 法では分散はほぼ等しいが、ME 法の期待値は BME 法の期待値よりも小さく見積もる結果となっている。

このように形状母数の確率特性を一つの期待値で代表すると、本例のような分布形状が複雑ではない単峰型を満たす状況においては、パラメトリックとノンパラメトリックの LEF の差はそれほど顕著ではない。したがって、形状母数がより複雑な pdf を有する状況に対してノンパラメトリック法の有効性が期待される。

6. おわりに

複合材構造に対する静強度と疲労寿命のデータベースから、強度と寿命の変動をベイズ法によって定式化して評価し、ベイズ的期待値としての荷重増分係数 LEF を求めた。CMH-17 の LEF 評価では、各データベースから試験荷重モード、積層構成、試験供試体、そして試験環境などの諸条件を併合して導いた形状母数 α のモード値が基本となっている。これに対して本報告では形状

母数のデータ変動を対数正規分布に仮定して、これにベイズ共役モデルを応用して **LEF** を求めた。また複合材料に関する幅広い各種データベースの導入によって、形状母数の分布形状のさらなる複雑化が予想される。このような形状母数の分布が単峰型ではない状況を想定して、本報告ではスプライン関数を適用した pdf の補間推定法を導入し、形状母数のノンパラメトリックな確率分布を推定して **LEF** の期待値を求める手法も記した。

現在では **LEF** を基本とする試験評価手法が検討されており、**Waruna** らは **FAA** の **LEF** 評価時のデータベースに加えて、広範囲な積層材料や試験片、そして種々の荷重モード等を考慮した材料および要素試験を実施して静強度および疲労寿命の形状母数の再評価を行い、新たな **LEF** の評価を行っている¹⁸⁾。そこでは従来の **CMH-17** の **LEF** よりもさらに短期間の疲労実証試験が期待されるが、**CMH-17** と同様に形状母数のモード値が使用されている。**LEF** の実機構造への適用における主要な課題は、荷重増分に対する金属材料のクリッピングに基づく損傷遅延や局部塑性などを避けることである。特に実機構造試験のスペクトル荷重負荷では、高荷重を低減させて負荷を分散させるなどの適切な工夫が必要である。**Waruna** らは疲労実証の試験短縮化を目的とした荷重-寿命シフト法を提案し、数種の **LEF** 値と **Miner** 累積損傷則を用いて、クリッピング・レベルに対応したスペクトル荷重の構成を試みている¹⁹⁾。

実機規模の複合材構造に対する疲労試験荷重の設定では、基本となる静強度および疲労寿命の不確定性に大きな影響を受ける。本報告では、静強度と疲労寿命の不確定評価にベイズ法ならびにスプライン曲線を適用した合理的な疲労試験荷重の設定法について、**LEF** の期待値を基本とする提案を示した。本報告の **LEF** 期待値は、実機構造試験への試験期間短縮化において **CMH-17** の設定に比べて安全余裕は大きい。データベースの蓄積とこれに対する適切な評価によって、さらなる合理的な **LEF** の評価が期待できる。

参考文献

- (1) Whitehead, R. S., Kan, H.P., Cordero, R., Saet5her, E.S., "Certification Testing Methodology for Composite Structures Volume I – data analysis. Volume II – Methodology Development" Northrop Corp., NADC-87042-60 Report. 1986.
- (2) Lameris, J., "The use of Load Enhancement Factors in the Certification of Composite Aircraft Structures," NLR Report: NLR TP 90068 U, 1990.
- (3) James Giancaspro, Winston Taam, Raymond Wong, "Modified Joint Weibull approach to determine Load Enhancement Factors", Journal of Fatigue 31, p.782, 2009.
- (4) CMH-17-Composite Material Handbook, Vol.3: Polymer Matrix Composites Materials Usages, Design, and Analysis, Chapter 12, Rev.G.
- (5) 岡村弘之、板垣 浩、“強度の統計的取り扱い”、培風館、1979.
- (6) 朝田洋雄、“構造安全性に対する信頼性解析の役割”、航空技術、No.442, p.17, 1992.
- (7) 石川 浩、“実働荷重下における機械・構造物疲労寿命の信頼性解析”、材料、日本材料学会、Vol.24, No.259-266, 1975.
- (8) 板垣 浩、“疲れ設計とスキャッターファクターについて”、第1回設計における信頼性工学シンポジウム、日本材料学会、1997.
- (9) 伊藤誠一、杉本 直、岡田孝雄、“疲労寿命安全率に関するノート”、宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-11-007, 2012.
- (10) 市川昌弘、“構造信頼性工学—強度設計と寿命予測のための信頼性手法”、海文堂出版、1988.

- (11) 邊 吾一、石川隆司、”先進複合材料工学”、培風館、2005.
- (12) 石黒真木夫、松本 隆、乾 敏郎、田邊國士、“階層ベイズモデルとその周辺、時系列・画像・認知への応用”、統計科学のフロンティア 4、岩波書店、2004.
- (13) 伊庭幸人、種村正美、大森裕浩、和合 肇、佐藤整尚、高橋明彦、“計算統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺”、統計科学のフロンティア 12、岩波書店、2005.
- (14) 山内二郎編、“統計数値表 JSA-1972”、(財)日本規格協会、1972.
- (15) 舟尾暢男、“The R Tips 第2版”、オーム社、2009.
- (16) 水島二郎、柳瀬眞一郎、“理工学のための数値計算法（新・数理工学ライブラリ数学）”、数理工学社、2002.
- (17) Zhi Zong, “Information-Theoretic Methods for Estimating Complicated Probability Distributions”, ELSEVIER, 2006.
- (18) John S. Tomblin and Waruna P. Seneviratne, “Determining the Fatigue Life of Composite Aircraft Structures Using Life and Load-Enhancement Factors”, DOT/FAA/AR-10/6, 2011.
- (19) Waruna P. Seneviratne and John S. Tomblin, “Certification of Composite-Metal Hybrid Structure using Load-Enhancement Factors”, FAA Joint Advanced Materials and Structures(JAMS)/Aircraft Airworthiness and Sustainment(AA&S), 2012.
- (20) 塩原竹治、内本徹雄、祖式章雄、“国産旅客機 YS-11 の長期使用に対する安全性の評価”、三菱重工技法、第 20 巻、第 6 号、1983.

補記1 LEFの定義^{1),2)}

複合材の強度試験データに対する変動解析では、対象構造部位に対する荷重モードがクープン試験や構造要素試験で再現可能であることや、材料、積層順、積層構成、結合部、そして環境要因などが静強度変動の解析の中で取り扱われることが必要である。また、疲労寿命解析ではこれに応力比の影響を加えることになる。これらの個々のデータベースの変動に対しては2母数ワイブル分布が適用され、各データベースごとに最尤推定法(MLE)等によって統計解析を行い、形状母数と尺度母数を推定する(単一ワイブル解析)。一方、疲労寿命解析ではデータ点数が少ないこともあり、複数の応力レベルの試験データをまとめて疲労データを一つのデータベースとして解析する、結合ワイブル解析法が用いられる。これは、各応力レベルに対する形状係数は大きく異なることはなく、形状母数が応力レベルには独立と仮定する手法である。また、静強度と残留強度を疲労寿命に関連付ける Sendekyj 等価応力モデルも援用される。静強度および疲労寿命に対する形状母数の不確定性に対する本文図2および図3に示す CMH-17 の評価結果は、上記の計算手順を経て求められている。これらの統計解析の詳細については記述を省略するが、以下では LEF の導出過程をまとめる。なお、CMH-17 では静強度と疲労寿命の形状母数(α_r, α_L)にはモード値が適用されている。

確率変数を x とする 2 母数ワイブル確率分布関数を(A-1)式に示す。ここで α は形状母数、 β は尺度母数を表す。また平均値は(A-2)式に示される。

$$P(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right\} \quad (\text{A-1})$$

$$x_{mean} = \beta \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \quad (\text{A-2})$$

形状母数 α が既知であるとき、尺度母数の最尤推定値 $\underline{\beta}$ が、得られた n 個の標本値 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を用いて (A-3)式で求められる。

$$\underline{\beta} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \right\}^{1/\alpha} \quad (\text{A-3})$$

また最尤推定値 $\underline{\beta}$ は確率変数であり、その pdf, $f(\underline{\beta})$ が次式に書ける。

$$f(\underline{\beta}) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\underline{\beta}}\right)^{n\alpha-1} \exp\left\{-n\left(\frac{\beta}{\underline{\beta}}\right)^\alpha\right\} \quad (\text{A-4})$$

真の尺度母数 β は、標本から得られた推定値の近傍で、ある確率を持って存在している。したがって、未知である母数 β については信頼水準を用いて真の母数を推定しなければならない。ここで変数 $\eta=2n(\beta/\underline{\beta})^\alpha$ を考えると、これは自由度 $2n$ のカイ 2 乗分布に従うことから、危険率を γ とすると、未知母数 β に対する $(1-\gamma)*100\%$ 信頼水準、 $\beta_{1-\gamma}$ が次式で定義される。

$$\Pr[\beta \leq \beta_{1-\gamma}] = 1 - \gamma \quad (\text{A-5})$$

信頼度 R を満たす設計許容値は、信頼度および信頼水準 $(1-\gamma)$ を(A1)式に代入すると、次式で得られる。

$$x_{1-\gamma} = \underline{\beta} \left\{ \frac{-\ln R}{\chi_{1-\gamma}^2(2n)/2n} \right\}^{1/\alpha} \quad (\text{A-6})$$

なお、 $R=0.9$ 、信頼水準 $1-\gamma=0.95$ の設計許容値は MIL-B 値として定義される。

ここで上記の変数 x を疲労寿命 N に置き換えて、疲労寿命安全率 S_F を次式で定義する。

$$S_F = \frac{N_{mean}}{N_{1-\gamma}} \quad (A-7)$$

上式の平均寿命 N_{mean} に(A-2)式を代入し、また設計許容値 $N_{1-\gamma}$ に(A-6)式を用いると、疲労寿命安全率 S_F は、形状母数 α_L を用いて次式で表される。

$$S_F = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_L + 1}{\alpha_L})}{\left\{ \frac{-\ln R}{\chi^2_{1-\gamma}(2n)/2n} \right\}^{1/\alpha_L}} \quad (A-8)$$

疲労寿命における尺度母数の信頼水準を $\beta_{L,1-\gamma}$ とし、疲労寿命 N を設計目標で基準化（単位設計寿命、 $N_0=1$ ）すると、(A-1)式と B 基準から任意時刻 N における信頼度 $R(N)$ が次式で表現できる。

$$R(N | \beta_{1-\gamma}) = \exp(-0.9 \cdot N^{\alpha_L}) \quad (A-9)$$

ある繰返し荷重負荷後の残留強度の確率分布は、静強度と同様に 2 母数ワイブル確率分布でモデル化される。ここで形状母数 α_r 、尺度母数 β_r 、そして平均値（試験荷重レベル）を S_1 と記す。残留強度の設計許容値(B 値) N_r は(A-6)式と同様に(A-10)式に書ける。

$$N_r = \beta_r \left\{ \frac{-\ln R}{\chi^2_{1-\gamma}(2n)/2n} \right\}^{1/\alpha_r} \quad (A-10)$$

本文図 1 に示すように、設計疲労荷重を S_2 とすると、荷重増分係数 LEF は次式で定義される。

$$LEF = \frac{S_1}{S_2} \quad (A-11)$$

ここで係数 K を用いて、 $N_r=K \cdot S_2$ と表記すると、LEF は(A-9)および(A-10)式から次のように表される。

$$LEF = K \frac{S_1}{N_r} = K \frac{\Gamma(\frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r})}{\left\{ \frac{-\ln R}{\chi^2_{1-\gamma}(2n)/2n} \right\}^{1/\alpha_r}} = K \frac{\Gamma(\frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r})}{\left\{ \frac{-\ln 0.9 \cdot N^{\alpha_L}}{\chi^2_{1-\gamma}(2n)/2n} \right\}^{1/\alpha_r}} \quad (A-12)$$

上記係数 K は、 $N=N_F$ で $LEF(N_F)=1$ にするための補正係数である（本文では $K(N_0)$ と表記。）。

(12)式において $LEF=1$, $N=N_F$ として、また(A-8)式の S_F を代入すると、係数 K が次式で定まる。

$$K = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_L + 1}{\alpha_L})^{\alpha_L/\alpha_r}}{\Gamma(\frac{\alpha_r + 1}{\alpha_r})} \quad (A-13)$$

上記(A-13)式を(A-12)式へ代入すると、荷重増分係数 $LEF(N)$ が最終的に次式で定義される。

$$LEF = \left(\frac{N_F}{N} \right)^{\alpha_L/\alpha_r} \quad (A-14)$$

補記2 スプライン基底関数

本文(27)式に示すように、形状母数 α の pdf を、B スプライン曲線(Basis spline curves)を用いた線形結合の次式で定義する。

$$f_{\alpha}(\alpha | \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^N a_j B_j^d(\alpha) \quad (\text{A-15})$$

ここで、 N は pdf を近似するための B スプライン関数の数で、制御点数として定義される。また、 a_j は最適な近似を得るためのこれから求める結合係数であり、 $B_j^d(\alpha)$ の d 次のスプライン基底関数で、次式の漸化式によって定義される α の d 次関数を示す。

$$B_{j-1}^d(\alpha) = \frac{\alpha - \alpha_{j-1}}{\alpha_{j+n-1} - \alpha_{j-1}} B_{j-1}^{d-1}(\alpha) + \frac{\alpha_{j+n} - \alpha}{\alpha_{j+n} - \alpha_j} B_j^{d-1}(\alpha) \quad (\text{A-16})$$

$$B_{j-1}^0(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha_{j-1} \leq \alpha < \alpha_j \\ 0, & \text{etc} \end{cases} \quad (\text{A-17})$$

B スプライン曲線では、pdf の概形を表すために pdf を折線で最初に近似する。折線を構成する点列を制御点と記し、また制御点間の分割された曲線区間単位をセグメントと定義している。なお、(A-15)式においてセグメント数は制御点数からスプライン関数の次数を引いたもの、すなわち、“セグメント数” = $N - d$ となる。また一つのセグメントからなる d 次のスプライン曲線は、 $\{a_1, a_2, \dots, a_{d+1}\}$ の $d+1$ 個の制御点から構成され、ここで $r=d+1$ は階数と定義される。B スプライン曲線は(A-16)および(A-17)式に示すように局所的に定義され、制御点が関数の近似に対して影響を与える範囲は、階数で示される r 個のスプライン関数のみに限定される。

ここで、3次までのスプライン基底関数を図 A-1 に示す。

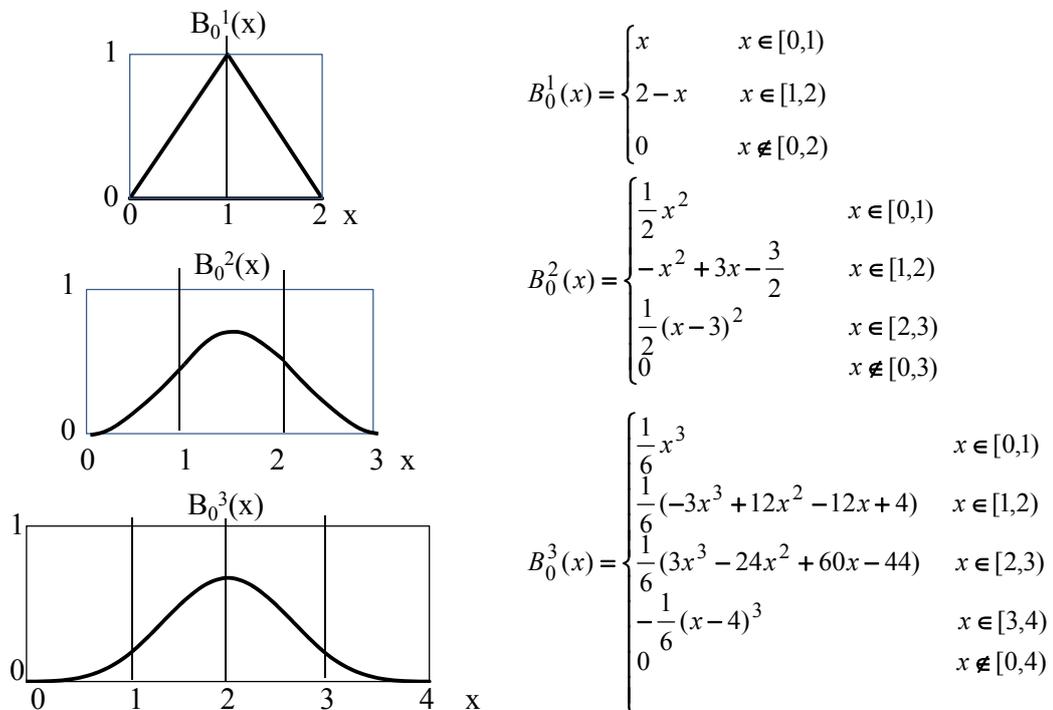


図 A-1 スプライン基底関数

補記3 スプライン関数による確率密度関数の推定¹⁷⁾

(1) 反復法による係数 \mathbf{a} の導出

本文 5.2 節の(31)式における線形係数 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ を求める反復計算では、対象変数域を分割する基準化係数 c_j をあらかじめ定めておく。係数 c_j は次式で表され、また線形係数の初期値 $\mathbf{a}^{(0)}$ を(A-20)式で設定する。

$$c_j = \frac{(x_j - x_{j-3})}{3} \quad (\text{A-19})$$

$$a_j^{(0)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^N c_j} \quad (\text{A-20})$$

係数 \mathbf{a} の決定では、微小値 ε を仮定して次式を満たすまで繰り返す。

$$\left| \frac{\ell(q) - \ell(q-1)}{\ell(q)} \right| \leq \varepsilon \quad (\text{A-21})$$

ここで $\ell(q)$ は、繰り返し回数 q で、 $f(x|\hat{a}_j^{(q)}) = \sum \hat{a}_j^{(q)} B_j(x)$ が与えられた時の標本値 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ から得られる対数尤度である。

(2) 係数 \mathbf{b} の点推定

本文(34)式から $b_{i+1} - b_i = b_i - b_{i-1} + e_i$ で、 $e_i = b_{i+1} - 2b_i + b_{i-1}$ を誤差とする。すなわち \mathbf{e} は \mathbf{b} のスムーズさを表す。 \mathbf{e} に対して正規分布を仮定して $\mathbf{e} \sim N(0, \tau^2)$ とすると、

$$p(\mathbf{e}) = \prod_{i=2}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{e_i^2}{2\tau^2}\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\right)^{N-2} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2} \mathbf{e}^T \mathbf{e}\right\} \quad (\text{A-22})$$

さらに、 \mathbf{D} を次式の $(N-2) \times N$ の行列表示とすると、

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & \end{pmatrix} \quad (\text{A-23})$$

係数 \mathbf{b} の事前分布 $p(\mathbf{b})$ は以下のようにになる。

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{b} \quad (\text{A-24})$$

$$p(\mathbf{b}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\right)^{N-2} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2} (\mathbf{D}\mathbf{b})^T (\mathbf{D}\mathbf{b})\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\right)^{N-2} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2} \|\mathbf{D}\mathbf{b}\|^2\right\} \quad (\text{A-25})$$

ここで $\omega^2 = \sigma^2 / \tau^2$ とおくと、

$$p(\mathbf{b}) = \omega^{N-2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{N-2} \exp\left\{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2} \|\mathbf{D}\mathbf{b}\|^2\right\} \quad (\text{A-26})$$

このように上式の $p(\mathbf{b})$ は、スムーズ性の仮定で得られた \mathbf{b} の事前分布の表現である。本文(33)式と(A-26)式から、 \mathbf{b} に対するベイズ推定の事後分布として、次式を得る。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{b} | \mathbf{a}) &= C \cdot P(\mathbf{a} | \mathbf{b}) P(\mathbf{b}) \\ &= C \cdot \omega^{N-2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{2N-2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 + \omega^2 \|\mathbf{D}\mathbf{b}\|^2)\right\} \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

上記の事後分布を次の手順によって最大化することで、 \mathbf{b} の点推定が得られる。すなわち、

$$Q^2(\mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 + \omega^2 \|\mathbf{D}\mathbf{b}\|^2 \quad \text{minimize} \quad (\text{A-28})$$

$Q(\mathbf{b})^2$ を \mathbf{b} で微分すると、点推定 $\underline{\mathbf{b}}$ が(A-29)で得られる。

$$\frac{\partial Q^2}{\partial b_i} = 0, \quad (i=1, \dots, N)$$

$$\underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{I} + \omega^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A-29})$$

ここで、 \mathbf{I} は $N \times N$ の単位行列を示す。

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(N \times N)}$$

以上から、 \mathbf{b} の点推定の $\underline{\mathbf{b}}$ を用いて pdf を表現すると、 $f(x|\underline{\mathbf{b}})$ が次式に書ける。

$$f(x|\underline{\mathbf{b}}) = \sum_{j=1}^N b_j B_j(x) \quad (\text{A-30})$$

(3) BME の定式化

\mathbf{a} の周辺分布を考えると、これは \mathbf{a} の平均的な挙動を示す。 $\mathbf{p}(\mathbf{b})$ を事前分布として、 \mathbf{a} の周辺尤度が次式で得られる。

$$p(\mathbf{a}|\omega^2) = \int p(\mathbf{a}|\mathbf{b}) \cdot p(\mathbf{b}) d\mathbf{b} \quad (\text{A-31})$$

ここで、上記の $p(\mathbf{a}|\omega^2)$ を最大化する ω^2 を決定する(第2種最尤推定法、周辺分布の最大化)。計算の容易性から $p(\mathbf{a}|\omega^2)$ の対数を取り、これに負を乗じたものが、BME(Bayesian measured entropy)として定義される。

$$-2 \log p(\mathbf{a}|\omega^2) = -2 \log \int p(\mathbf{a}|\mathbf{b}) \cdot p(\mathbf{b}) d\mathbf{b} = \text{MEB}(\omega^2) \quad (\text{A-32})$$

また情報理論との関連で、 $-\log p(\mathbf{a}|\omega^2)$ はエントロピである。したがって、周辺尤度の最大化は BME(ω^2)の最小化であるので、この時の ω^2 を選択することになる。

$p(\mathbf{a}|\mathbf{b})$, $p(\mathbf{b})$ を代入して、幾つかの手順を経て、BME(ω^2)が下記に書ける。

$$\text{BME}(\omega^2) = -(N-2) \log \omega^2 + (N-2) \log q^2 + \log |\mathbf{F}^T \mathbf{F}| + \text{const.} \quad (\text{A-33})$$

ここで、上式の行列 \mathbf{F} および q は、(A-23), (A-28) および (A-29) 式を用いて次式で示される。

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{(N \times N)} \\ \dots \\ \omega \mathbf{D}_{(N-2) \times N} \end{pmatrix}, \quad q^2 = Q^2(\underline{\mathbf{b}}) \quad (\text{A-34})$$

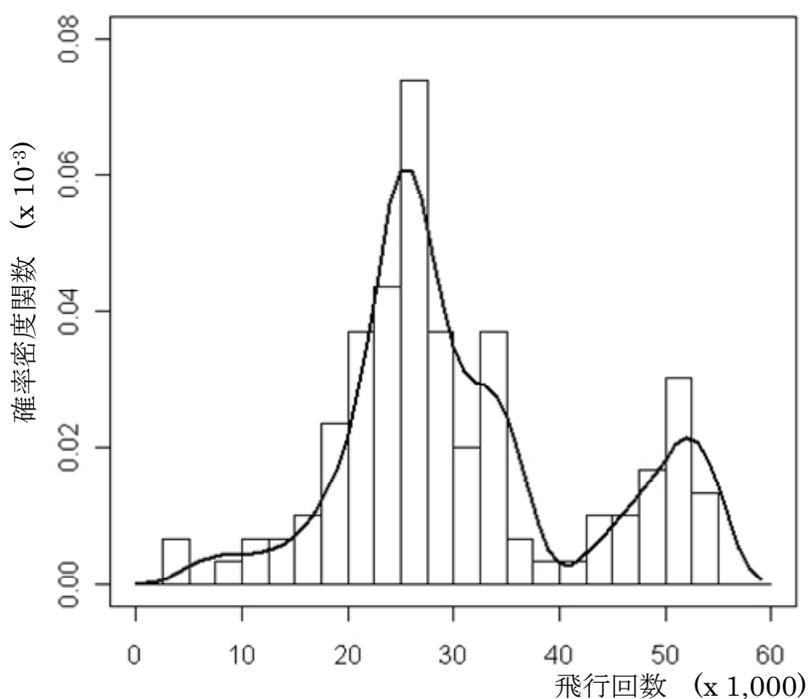
また、 $|\mathbf{F}^T \mathbf{F}|$ は $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ の行列式である。

以上から、上記(A-33)式によって BME(ω^2)最小化の係数ベクトル、 $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ が得られる。

補記4 複雑な確率密度関数への情報量基準(ME)応用例

情報量基準(ME)を用いた確率密度関数近似の応用例を図 A-2 に示す。本データは、ある時点における輸送機のフリート運用状況を示す。横軸は飛行回数（または飛行時間）を表し、これに対応する機体数を縦軸に取り、標準化を行って pdf として表している。このようなフリート運用表示の応用範囲は広く、この時点におけるフリート全体としての信頼度の計算（フリート信頼性）はもとより、経年機体の分布状況ならびに経年損傷を効率良く検出するためのサンプリング検査計画などに適用される。通常の棒グラフの頻度分布ではなく、pdf に表現することによって、フリート信頼性をはじめとして各種の信頼性評価に対する精度向上が期待できる。また、フリート運用状況は時刻と共に変わるので、これを pdf と同時に確率過程として捉えてフリート状態空間を逐次推定する、動的な信頼性評価モデルの構築が可能になる。

図 A-2 の頻度グラフは、1982 年/4 月時までの国産旅客機 YS-11（当時のフリートの大きさ 119 機）の飛行回数(60,000 飛行回数まで)の運用状況²⁰⁾を示す。これに対して、スプライン関数によるノンパラメトリック手法、情報量基準(ME:measured entropy)による方法で推定した曲線を実線にて併せて示す（最適なスプライン関数の数 $N=15$ 、標本数 $n=119$ ）。



図A-2 スプライン関数によるフリート運用状況の表示

