

# 宇宙航空研究開発機構研究開発資料

## JAXA Research and Development Memorandum

---

ポテンシャル流れの計算法  
ーパネル法と等角写像法との比較ー

重見 仁

2013年3月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

# ポテンシャル流れの計算法\*

—パネル法と等角写像法との比較—

重見 仁\*<sup>1</sup>

## Methods to Solve Potential Flow Problems ---Comparisons of Panel Method and Conformal Mapping---\*

Masashi SHIGEMI\*<sup>1</sup>

### ABSTRACT

The conformal mapping is a classical method to solve potential flow problems. In 1979, Dr. I. Imai published a book in which he showed that the conformal mapping can be utilized to solve many problems of potential flow. The author of this paper applied the panel method to solve the same problems which Dr. Imai introduced in his book, and compared the solutions obtained by the two methods separately. The results of the comparison revealed that the two solutions obtained by two different methods agreed in very good accuracy in all problems. In this comparison, Visual Basic 2010 Express, which is supplied free from the Microsoft Corporation, was used as a development tool. All through the computations, Visual Basic 2010 Express proved to be very sophisticated in helping the easy coding of the programs, in operating the programs and in producing the results in not only numerical values but also in beautiful graphics expressions.

**Keywords:** Potential Flow, Conformal Mapping, Panel Method, Joukowski Transformation, Kármán-Trefftz Transformation

### 概 要

等角写像法はポテンシャル流れを解くための古典的な解法であり、今井はその著書「等角写像とその応用」<sup>1)</sup>でこの解法が色々な問題を解くのに有用であることを示している。筆者はこの本技術資料で、今井の文献に挙げられた多くのポテンシャル流れの問題を、数値的解法であるパネル法を用いて解き、解析解との結果を比較して、そのすべてにおいて非常に良い一致が得られることを示した。パネル法による解のすべてと等角写像による解の多くを解くためのツールとして、マイクロソフト社が無償で提供する Visual Basic 2010 Express を用いた。本解析を通じて Visual Basic 2010 Express が非常に使いやすく、流れのグラフィックス表示などわかりやすい形で解を表現できることが示された。

---

\* 平成 25 年 1 月 22 日受付 (Received 22 January 2013)

\*<sup>1</sup> 研究開発本部 風洞技術開発センター  
(Wind Tunnel Technology Center, Aerospace Research and Development Directorate)

## 1. 導 入

パネル法は物体まわりを流れるポテンシャル流れを、数値的に解く解法である。同じ目的の古典的解法としては等角写像法があるが、応用の広さ、答えを出す手順の簡単さにおいてパネル法の方が優れていると、著者は信じている。

本稿を著した動機は2つある。今から30年以上も前になるが、今井による「等角写像とその応用」<sup>1)</sup>を読んだ時、流れの解析がきちんとした数学によって構成されており、さらにそれを支える定理や変換やモデルなどが多くの優れた碩学によって積み上げられていることを知って感銘を受けた。しかしその一方で、この本で扱われている流れの解析例のすべてとは言わずともその多くが、当時確立の域に達していたパネル法を用いればずっと簡単に解けるのではないかと、との思いを抱いた。その予想を確認するということが動機の第1である。

動機の第2は開発のツールに関してである。パネル法は数値的な解析法であるから、ハードとしての計算機と、ソフトとしての開発ツールが必要になる。パネル法の計算を実行して結果を図示したいという要求を満たすツールとして、マイクロソフト社の Visual Basic 2010 Express<sup>2)</sup>があって無償でダウンロードでき利用できることを暫く前に知った。筆者は Visual Basic を10年以上前に使った経験があり、FORTRAN でプログラムを書いていた身にもすぐ適用できるうえ、グラフィックス出力も容易で使いやすいツールであるとの印象を持った。しかしその後の発展の中で Visual Basic は大きく変容し、筆者の知識の多くは使えないものとなってしまっていた。この度最新版の Visual Basic が無償で使えるということを知ったため、再度これを使ってパネル法の解析ツールを構築し、統一的な形で多くの計算結果を表現してみたい、と思ったのが第2の動機である。

実際に上記の今井の文献から多くの例題を拾い出し、計算してみると、Visual Basic 2010 Express は気持ちよく動いてくれて、信頼するに足る解を次々に生み出してくれた。全体で、円柱まわり2ケース(循環無し/有り)、NACA4 桁翼型まわり1ケース、一枚の平板まわり4ケース、二枚の平板まわり4ケース、Joukowski 変換の応用2ケース、Kármán-Trefftz 変換の応用2ケース、の合計15ケースの流れを解き、1ケース(フラップ付き平板)を除く、すべてのケースで解析解とパネル法による解の比較を行い、いずれも極めてよい一致が得られることを示すことができた(結果の比較を表す図では、前者は「Theory」、後者は「Comp.」というラベルをつけて区別した)。

筆者はパネル法の扱いには親しんでいるものの、等角写像法に基づいて物体まわりの流れを実際に計算するのは初めてであり、忘れかけていた複素数の計算に意外に手間取った。電卓すらない時代に等角写像法を用いて、翼型まわりの流れを計算した先達たちの苦労が実感としてわかった。今井がかなりの紙幅を割いて説明している薄翼理論による近似は、そのような背景の下で重用されたのではないかと推測される。

Kármán-Trefftz 変換は、今井の文献<sup>3)</sup>に書かれている変換式を用いると、当初どうしても写像解とパネル法の解とを一致させることができず、両者間の対応する各点で速度比を取るとそれが一定値になるという現象が起きた。他の幾つかの文献<sup>3)-6)</sup>を調べると Kármán-Trefftz 変換の式として、いずれも今井のそれとは異なった式が与えられており、こちらを用いて写像解を計算すると、パネル法の解と見事に一致することが分かったため、3.5節では、後者の変換式を用いた。その後、著者がなぜ前者の変換式から正しい解を得ることができなかったか、どうすれば正しい解が求まるか、について著者なりの結論を得たので、それを APPENDIX に記した。

## 2. 準 備

### 2.1 パネル法

パネル法は物体まわりのポテンシャル流れを解く方法であるが、これを数学的にみれば、支配方程式であるラプラスの式

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

を境界条件、(i)流れは物体の境界に沿って流れる(言い換えれば、境界を横切る流れは無い)、(ii)無限遠で流れは

一様流に一致する、の下に解くことである。解法として特解を線形結合することを考える。特解とは境界条件に無関係に、それ自身が支配方程式の解となっている特別な解のことである。式(1)は $\phi$ の線形微分方程式であるから、特解の線形結合もまた式(1)を満足する。そこで、式(1)の特解である、たとえば、

$$\phi_U = Ux + Vy \quad (2)$$

$$\phi_V = \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$\phi_S = \frac{Q}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4)$$

(式(2)~(4)中の  $U$ ,  $V$ ,  $\Gamma$ ,  $Q$  はいずれも定数。)などを適当に線形結合して、全体として上に記した2つの境界条件を満たすように作れば、それは求める解となる。

同じことを物理的に見れば以下のようになる。一様流中の物体はこれを乱す作用をしているから、一様流というベースの上に、これを乱す渦、湧き出し ( $Q$  が正の場合)あるいは吸い込み ( $Q$  が負の場合)などを配置して、全体として境界条件を満たす流れを作る。

数学的見方をするにせよ物理的見方をするにせよ、実際には同じことを言っているのであり、特解(2)とは一様流、(3)は原点にある渦、(4)は原点にある湧き出し/吸い込みの作るポテンシャルである。因みに特解(3)と(4)の作り出す流れ(その速度成分  $u$ ,  $v$  は、ポテンシャルを  $x$  及び  $y$  で偏微分すると求められる)は無限遠で0となり、境界条件(ii)は自ずと満たされていることが分かる。渦や湧き出し/吸い込みが作り出す流れは無限遠で0になり、ベースである一様流成分だけが残るとのことである。

では渦や湧き出し/吸い込みなどの特解をどのように配置すれば、境界条件(i)を満たす流れを作ることができるか、が問題になる。この方法は既に確立しており、物体境界に沿って渦や湧き出しを分布させるのがよいことが分かっている。式(1)の特解である式(3)の渦や式(4)の湧き出し/吸い込みなどを一括して特異点と呼ぶ。元々は渦や湧き出し/吸い込み等の存在する点では速度が計算できないことから、その点は特異点であるという事実由来する名称であろう。つまり特異点という語はそもそも渦、湧き出しなどの存在する点のことを示す語であったが、転じて(我が国では)渦、湧き出しなど、一様流中であってこれを乱す要素のことを示すようになったようである。本稿でもこの慣例に従う。なお、パネル法のことを特異点分布法 (Distributed Singularity Method の訳語)とも言う。原語の *singularity* は「特異性」くらいの意味か。

特異点として渦を使うか、湧き出し/吸い込みを使うか、両方を使うか、それともそれ以外の(二重湧き出しなど)を使うか、など1960年代から70年代にかけて、色々な研究が行われた。それらを通じて物体境界に沿って湧き出し/吸い込みを分布させる方法、と渦を分布させる方法が代表的なものとして残った。前者は旧ダグラス社の Hess and Smith<sup>7)</sup>が開発したもの、後者としてはロッキード社の Stevens, Goradia and Braden<sup>8)</sup>の開発したものが有名である。前者の欠点として、そのままでは循環のある流れを表せないということがある。これでは実用上大きな制約となるから、孤立なり分布なりの渦を導入する必要がある。筆者は後者である渦のみのパネル法を長年使い、重宝してきた。渦しか用いないことで特段の制約を感じたことはなく、任意の形状まわりの単数或いは複数の物体まわりの流れを得るのに困ったことはない。湧き出し/吸い込みを用いる方式は循環のある流れ(翼まわりの流れは循環を持つのがふつうである)に適用しようとする、結局、一点であれ、渦を導入せざるを得ない。これは計算を複雑化させる。特に翼型の逆問題(翼型周りの流れが与えられていて、それを実現する翼型の形状を求める問題)に適用しようするとそうなる<sup>8)</sup>。従って、筆者は渦のみを物体まわりに分布させるタイプのパネル法の方が優れていると信ずる。以下で用いたパネル法はすべてこのタイプのパネル法である。

具体的な説明を簡単しておく。図1に示すように物体(翼型とする)を多角形で近似し、その頂点に番号をつける。番号は後縁点を1とし、2, 3...と時計回りに付する。多角形は  $m$  角形とすると頂点の数が  $m$  だから、 $m$  番目の頂点で番号付は終わったことになるが、さらに頂点1(後縁点)をもう一度数えて、これを  $m+1$  番の頂点とする。多角

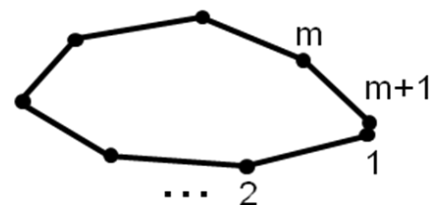


図1 物体表面のパネル分割

形の辺（パネルと呼ぶ）にも 1 から  $m$  まで番号をつけておく。パネル  $i$  は両端が頂点  $i$  と  $i+1$  になるから、この両頂点における渦密度（単位長さ当たりの循環。すなわち速度のディメンションを持つ。式(3)の  $\Gamma$  が循環である。）を  $\gamma_i$  と  $\gamma_{i+1}$  とし、辺に沿っては  $\gamma_i$  から  $\gamma_{i+1}$  まで線形に渦密度  $\gamma$  が変化するとする。こうして  $\gamma$  の分布が離散化される。

境界条件はパネルの midpoint で満足させる。すなわち各パネル midpoint において一様流と分布渦とで誘起された速度を求め、その法線成分=0 とする。 $m$  個のパネルの midpoint にこの条件を課すると  $m$  本の式ができる。これらはすべて未知数  $\gamma_i$  に関する線形方程式である。未知数は  $\gamma_1$  から  $\gamma_{m+1}$  までの  $m+1$  本であるのに対して、式の数は  $m$  本しかない。これを補うものとして Kutta の条件

$$\gamma_1 + \gamma_{m+1} = 0 \quad (5)$$

を与える。

こうして求められた  $\gamma_i$  と一様流によって、流れ場中の任意の点の速度が計算できる。但し、厚みのある物体表面の速度を知りたいのであれば、実は  $\gamma_i$  がそのまま表面速度になっている。詳しくは重見<sup>9)</sup>を参照して頂きたい。

次章の計算例で翼型まわりの圧力係数を図示する。圧力係数の定義は

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (6)$$

但し  $p$ ,  $p_\infty$ ,  $\rho$ ,  $U$  はそれぞれ局所静圧, 一様流静圧, 密度, 一様流速度である。一方, Bernoulli の式

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \quad (7)$$

がなり立つから ( $u$  は局所の流速である), 式 (6) は次のように書ける。

$$C_p = 1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2 \quad (8)$$

次章の計算例に対して、対象とする物体まわりの流線を図示した。パネル法を用いて計算した流れの流線の描き方については重見<sup>9)</sup>を参照して頂きたい。流線を描くには流れ関数  $\psi$  を計算しなければならないが、この求め方も同文献に述べられている。さらに同文献中で流線の描き方には、巨視的方法と微視的方法があることが示唆されているが、本応用では専ら微視的方法を採用した。

## 2.2 Visual Basic 2010 Express

今日我が国では Basic というプログラム言語を使う人はあまり多くないかもしれない。恐らく C や C++ が主流なのであろう。しかし世界全体ではそうでもないらしく Microsoft 社は Visual Studio 2010 というパッケージソフトウェアの中に Visual Basic 2010 を入れて販売している。Basic の抱えるマイナスのイメージは、初歩的である、計算が遅い、といったことであらう。初心者向きという印象が定着し使うに格好良くないかもしれないが FORTRAN との共通点が多く、計算プログラムといえば FORTRAN しか知らなかった世代にとって、とっつきやすいことは大きな利点である。さらに計算が遅いという批判は、PC の性能がここまで進歩した今日に於いては全く当たらない。筆者の使っている PC は JAXA が職員（事務系も技術系も区別なく一律）に支給する汎用の標準パソコンと呼ばれるものであるが、この後で述べる例題を解くに当たって、なんらストレスを感じることはなかった。

さて Visual Basic 2010 Express (以下 VB と略す) はその Visual Basic 2010 の評価版という位置付けで、Microsoft 社から無償で提供される。すなわち同社のウェブサイトからダウンロードすることができる<sup>2)</sup>。最初は 30 日間の期間限定で使用が許されるが、その間に登録（無料）を行えば、その後ずっと使うことができる。

VB は科学計算を特定の目的としていない汎用の開発ツールである。これをプログラム言語と呼ばず開発ツールと呼ぶのは、Windows の GUI (Graphical User Interface) と緊密に結びついており、グラフィカルな表現が得

意なこと、ビルド+ランという手順を陽に踏んで走らせるのではなく、図 2 に示すようなインターフェースを通じて動かすからである。このインターフェースは **Form** と呼ばれる基盤の上に **Control** と呼ばれる部品を配して

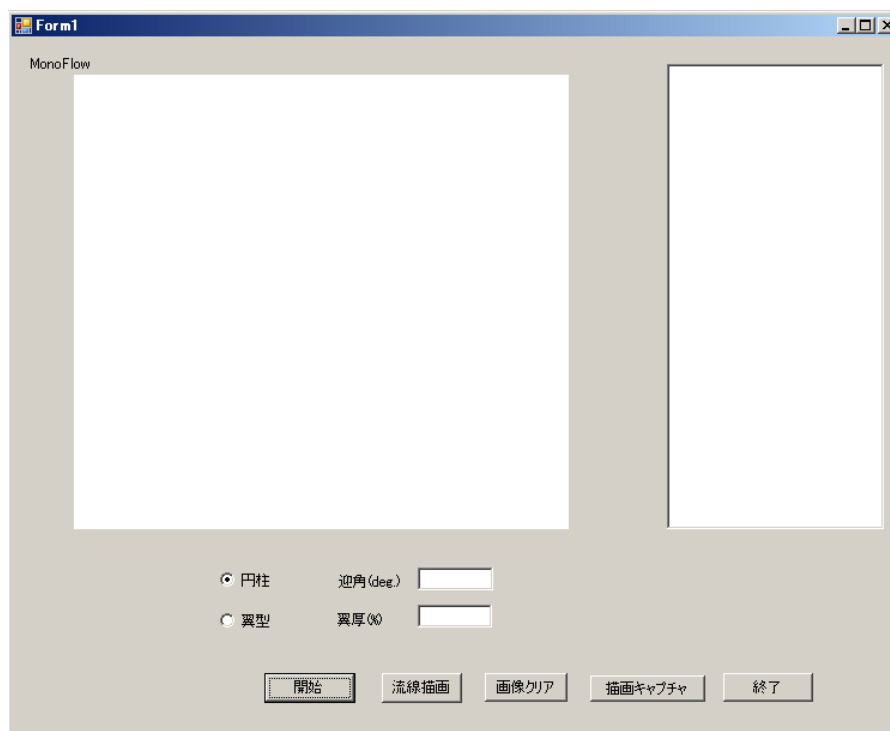


図 2 Visual Basic 2010 Express のインターフェース

作成する。Control としてはきわめて多くの種類のものが用意されているが、図の例では、計算の開始、終了、描画、などのイベントを開始させるための「Button」、プログラムと文字データのやり取りをする「TextBox」や「ListBox」、選択を指示する「RadioButton」、画像を表示する「PictureBox」などを用いている。プログラムはどこにあるのかというと、各 Button の裏にそれがクリックされた時に実行するステートメントが書かれている。勿論サブルーチンなどを配することも可能である。

次章で述べる計算では基本的に図 2 に示したものと類似のインターフェースを使い、以下を実行する。

- (1)与えられた形状まわりの流れをパネル法によって解き、物体形状の座標、表面速度分布値を **ListBox** に表示し、表面圧力係数の分布を **PictureBox** に描画する。
- (2)物体まわりの流線を **PictureBox** に描画する。
- (3)必要あれば画像データを画像ファイルとして取り込む。

パネル法の解の信頼性を調べるために、解析解のわかっている流れ（取り上げた課題の殆どすべて）については、解析解を求めてパネル法の解との比較に供した。今井<sup>1)</sup>が薄翼理論に基づく速度分布の近似解について、かなりの紙幅を費やしているので、近似解の与えられているものについては、その結果も示した。Joukowski 変換と Kármán-Trefftz 変換の応用については、その具体的な式変形も含めて、やや詳しく記述した。これらの変換を実行してみようという読者の参考になれば幸いである。著者の解法例よりも簡潔で優れた解法を見出されんことを期待している。

### 3. 計算例

#### 3.1 円柱, 翼型

パネル法と言えば、任意形状の物体まわりの流れを解くことのできるツールとして周知されている。そこで、まず代表的形状として円柱と NACA の 4 桁翼型を選んだ。どちらもパネル枚数は 60 枚。円柱では円周を 60 等分

して同じ大きさのパネルを作り，翼型では円柱を近似した正 60 角形の頂点を  $x$  軸上に射影した点が節点の  $x$  座標となるように，翼型表面をパネル分割した．従ってパネルの大きさは等しくなく，前縁，後縁近くでは中央付近に比べて小さくなっている．

### (1) 円柱

図 3 に循環  $\Gamma=0$  の円柱まわり流れを示す．(a)は圧力係数の分布，(b)は流線である．次に円柱の  $x$  座標が一番大きい点（時計盤の 3 時の位置）を後縁として固定し（ここに Kutta の条件を与える），迎え角を 30 度にとって求めた流れの流線を図 4 に示す．後縁を  $\theta=0$  として時計回りに  $\theta$  を回転させて測った表面位置における速度のパネル法による解と，解析解

$$\frac{u}{U} = 2[-\sin(\theta + \alpha) + \sin \alpha] \quad (9)$$

との比較（ $\alpha=0^\circ$  及び  $\alpha=30^\circ$ ）を図 5 に示した．

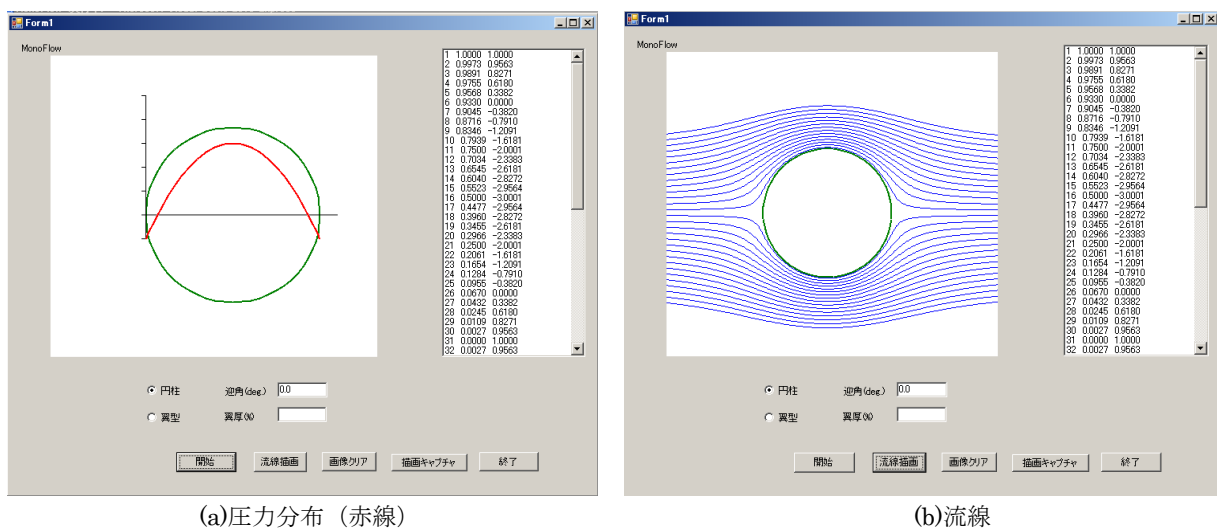
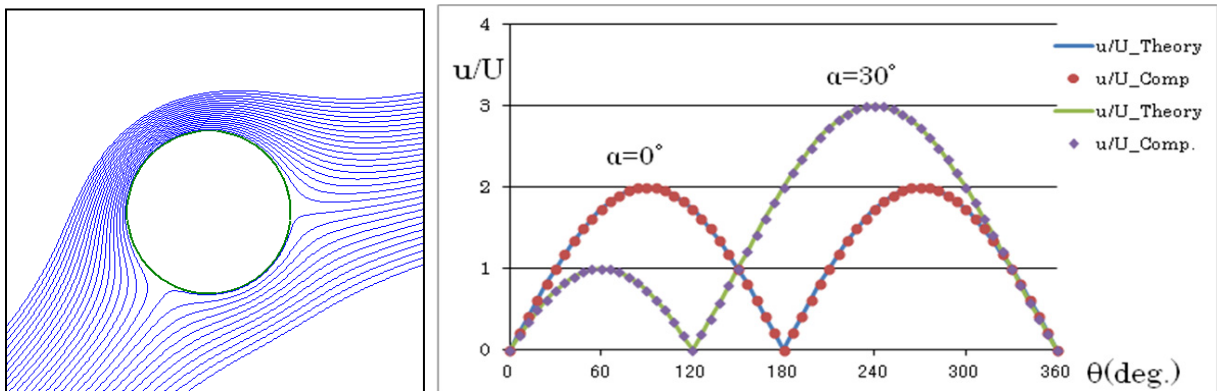


図 3 円柱まわりの流れ (循環  $\Gamma=0$ )



なお，本課題では，パネル法の節点番号の付け方（図 1 参照）に一致させて， $\theta$  を後縁から時計回りに測ったが，後述する等角写像法の応用では， $\theta$  は複素平面上で反時計回りを正としている．式(32)の分子は式(9)から得られる  $u$  に等しい筈だが， $\theta$  の取り方が逆なため，異なった表記となっている．

(2) 翼型 (NACA 4桁の対称翼)

この計算も円柱の場合と同様に図1に示したFormから、この場合はRadioButtonで「翼型」を選び、翼厚と迎え角 $\alpha$ を指定して計算を実行する。翼厚は翼弦長の何%かをしめす2桁以下の数値を入れる。例えば12と入れれば、NACA 0012翼型が選ばれる。3つの迎え角 $\alpha$ に対する流線を図6に示した。 $\alpha=0^\circ$ のケースについては速度分布を図7に示し、Abbott and Doenhoff<sup>11)</sup>の与えるデータと比較した。また表面の速度分布を周に沿って数値積分して循環 $\Gamma$ を求め、以下の式から揚力係数 $C_L$ を求めて図8にプロットした( $c$ は翼弦長)。

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \frac{\rho U \Gamma}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} = \frac{2\Gamma}{Uc} \tag{10}$$

薄翼理論から求められる揚力傾斜 $\partial C_L / \partial \alpha = 2\pi$ の直線を図中に描き、厚みを持った実際の翼型で得られる傾向との比較を行った。

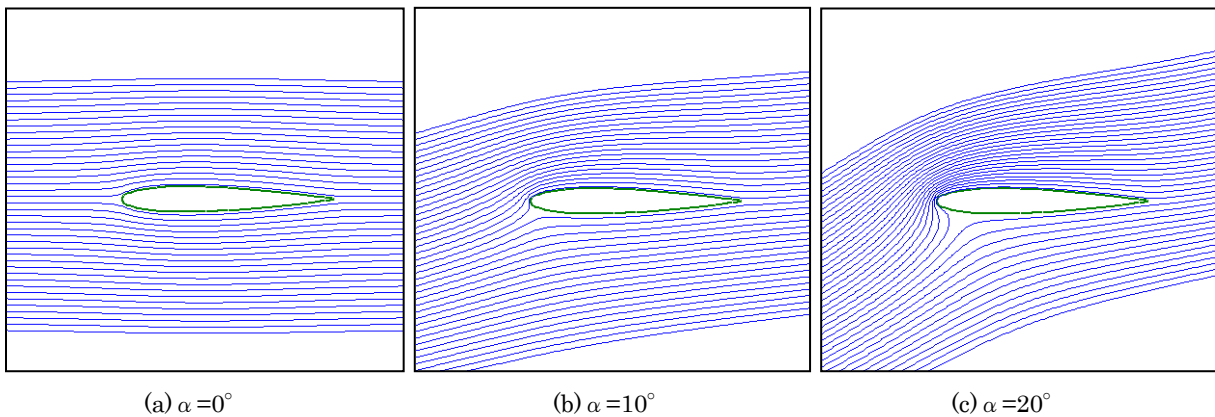


図6 NACA 0012翼型まわりの流線

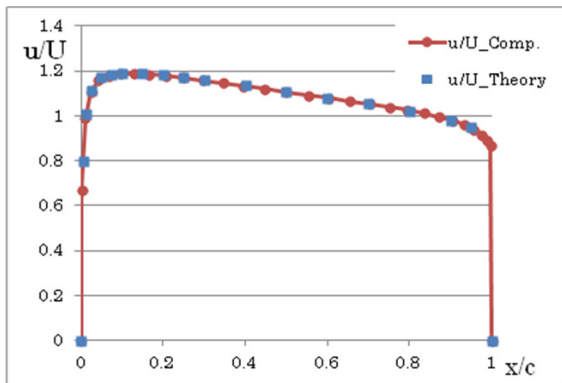


図7 表面速度分布 ( $\alpha=0^\circ$ )

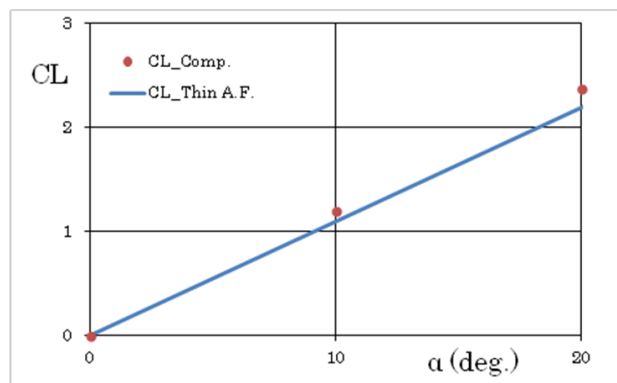


図8 揚力傾向

3.2 1枚の平板

本節の4課題に対して、パネルの枚数はすべて50枚であり、平板を50等分してパネルを構成した。平板のパネル分割を図9に示す。また本節で示した計算は、パネル法に関してはすべてVBを用いて行ったが、解析解の方はExcelを用いてプログラムを組むことなしに計算を行った。

(1) 一様流中の平板

今井<sup>1)</sup>の第10章第3図に示された平板のまわりの流れである(図10(a)参照)。Kuttaの条件として後縁点の渦密度 $\gamma_{m+1}$ を0に固定した。迎え角 $\alpha=10^\circ$ の流れの流線を図10(a)に示

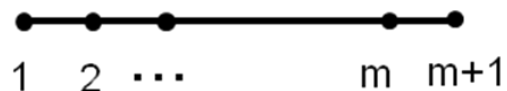


図9 平板のパネル分割



し、平板表面に沿う流れの速度分布を図 10(b)に示すと同時に、今井<sup>1)</sup>の第 10 章の式(2.9)，すなわち半径 1 の円柱まわりの流れ ( $\zeta = \xi + i\eta$  平面) を出発点として Joukowski 変換によって求められた平板まわりの流れ ( $z = x + iy$  平面) の解，

$$w = Ue^{-i\alpha} \frac{\zeta + e^{2i\alpha}}{\zeta + 1} \quad (11)$$

と比較した。  $w$  は複素速度，

$$w \equiv \frac{df}{dz} = u - iv \quad (12)$$

である。具体的には、平板表面は単位円の周囲  $\zeta = e^{i\theta}$  に対応するから、これを式 (11) に代入して複素計算を行うが、平板表面に沿う流れであることがわかっているということは、流れの向きがわかっているということであるから、速度の大きささえわかればよい。言い換えれば複素速度の実部と虚部をそれぞれ求める必要はなく、複素速度の絶対値さえ求めればよい。従って計算しなければならないのは式 (11) の分数部分の分母と分子の絶対値である。積 (商) の絶対値は絶対値の積 (商) だから、式 (11) の各項の絶対値を求めて、掛け算、割り算してやればよい。  $e^{-i\alpha}$  の絶対値が 1 であることは言うまでもない。

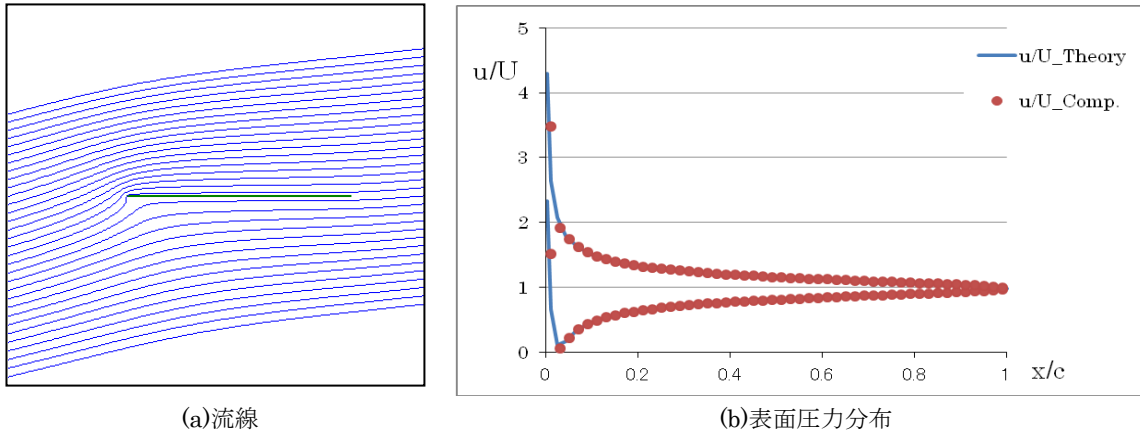


図 10 一様流中の平板まわりの流れ

## (2) 直撃流

今井<sup>1)</sup>の第 10 章，第 4 図の(b)の流れである (図 11(a)参照)。(原書の図 4(a)は平板に平行な流れであり，計算するまでもないので取り上げない。) 翼後縁に Kutta の条件を与える代わりに，平板の中央となる節点での渦密度  $\gamma$  を 0 に固定した。これは流れの対称性からの要求である。得られた流線パターンを図 11(a)に，表面速度分布を(b)に示す。

この流れに対する解析解は今井<sup>1)</sup>の第 10 章の式(3.5)で与えられており，書き写すと

$$w = -iU \sin \alpha \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad (13)$$

である。但し  $\alpha$  は迎え角で，対象としている直撃流では  $\alpha = \pi/2$  である。式 (13) から求まる平板上の速度分布を図 11(b)に書き入れパネル法の解と比較した。

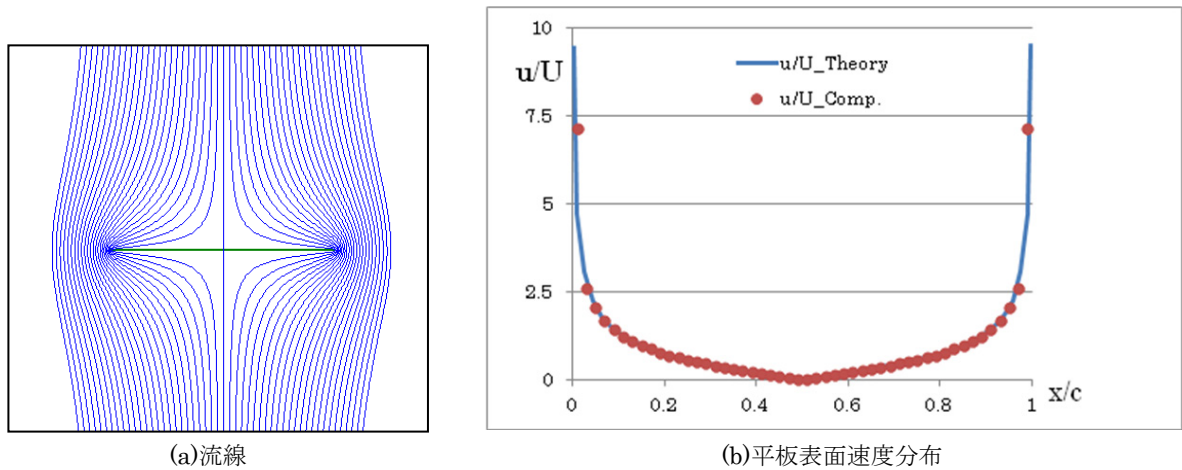


図 11 直撃流

(3) 循環流

今井<sup>1)</sup>の第 10 章, 第 4 図 (c)の流れである (図 12(a)参照). この流れには一様流  $U$ は存在しない. この問題に対して平板の中央となる節点での渦密度  $\gamma$  を 2 に固定した. この値は 0 以外であれば任意でよいのだが, 2 を選んだ理由は後で述べる. 求められた流線と平板に沿う速度分布を図 12(a)と(b)に示す.

同じ流れの厳密解は今井<sup>1)</sup>の第 10 章式(3.7)に与えられている. これも下に書き写す.

$$w = i\kappa \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \tag{14}$$

$\kappa$  は任意の実数である. このように循環流では基準となる一様流が無いので, 流れが一つに決まらない.  $\kappa$  がどんな値を取ろうと (0 でない限り) 流線パターンは変わらないのである (流速は勿論  $\kappa$  によって変わる).  $\kappa$  を 1 として平板表面の速度分布を計算して図 12(b)に書き入れ, パネル解と比較した.

本節で今井<sup>1)</sup>から引用した平板まわりの各流れの式は, いずれも  $z$  平面の実軸上の点  $(-1,0)$  から点  $(1,0)$  を

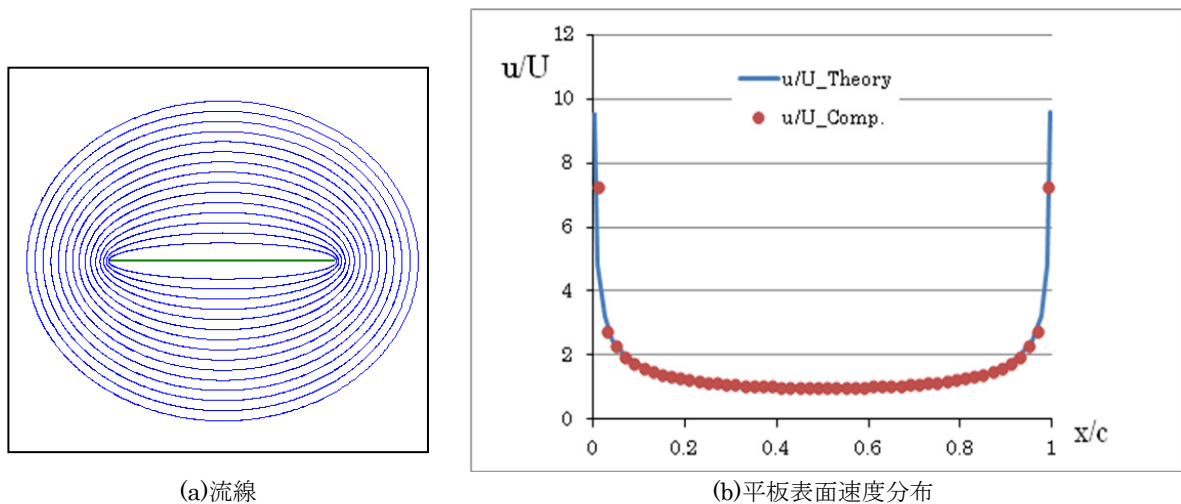


図 12 循環流

占める部分を平板部分と規定している. パネル法の解と比較するに当たり,  $x$  座標を翼弦長  $c$  で割って無次元化すると同時に正規化した.

式 (14) の  $\kappa$  を 1 と決めたということは, 平板の中央点 (式 (14) では  $z=0$ ) での速度を  $\pm 1$  としたことに相当する. 平板上面が  $+1$ , 下面が  $-1$  である. 従って,  $\kappa$  を 1 に取った場合, 式 (14) の流れは時計回りの循環流に

なる。平面上の点の複素座標  $z$  は実軸上にあるから実数であり、さらに  $-1 \leq z \leq 1$  だから  $z^2 - 1$  は 0 あるいは負になる。 $z$  が  $\pm 1$  の時、式 (13) の分母は 0 になり、計算ができない。すなわち  $z = \pm 1$  は特異点である。特異点を除いて  $z^2 - 1$  は負になるから、 $\sqrt{z^2 - 1} = i\sqrt{|z^2 - 1|}$  であり、式 (14) に代入すると分母・分子の  $i$  が消し合って  $w$  は実数となる。このことは  $w$  の定義式 (12) を思い出すと、平板上の流れが  $x$  成分  $u$  だけを持ち、 $y$  成分  $v$  が 0 であることに対応している。しかし、こうして求まる  $w$  の値は一値であり、それが平板上面に沿う流れなのか或いは下面に沿う流れなのかが、わからない。上で行ったように流れの絶対値だけを問題にする場合はこれ以上の検討は不要であるが、すでに触れたように上面と下面の流れは絶対値が等しく、向きが逆である筈だから、その絶対値だけでなく  $w$  そのものを導くためには平板上の  $z$  を、それが上面に属するのか、下面に属するのかで扱いを変えなければならない。そのためには複素数  $z^2 - 1$  を極形式を用いて  $|z^2 - 1| \exp(\pm \pi i)$  と表す。複合の上は上面、下は下面に対応する。すると

$$w = i\kappa \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} = i\kappa |z^2 - 1|^{-1/2} \exp\left(\mp \frac{\pi i}{2}\right) = \pm \kappa |z^2 - 1|^{-1/2} \quad (15)$$

となり、上下面が区別できる。

さてもう一度、パネル法の解に戻る。パネル法では平板上に渦を分布させる。従って平板の上下で流れは不連続になる。上の速度と下の速度の差が局所の渦密度  $\gamma$  になるから、解析解で平板中央の速度が  $\pm 1$  に規定されて作られた流れと同じ流れを作るには、平板中央位置の渦密度  $\gamma$  として  $1 - (-1) = 2$  を与えてやればよい。これがパネル法の計算でそのように条件を与えた理由である。

#### (4) フラップ付き平板

今井<sup>1)</sup>の第 1 章第 18 図に示されたフラップ付き平板のまわりの流れを計算した。フラップは平板の 60% 翼弦長位置から下流部分を  $30^\circ$  折り曲げてある。Kutta の条件の取り方は一様流中の平板まわりの流れ (3.2 (1)) の場合と共通である。図 13(a) に示した流線と図 13(b) の平面速度分布は平板の迎え角  $\alpha = 10^\circ$  の場合である。フラップで大きく乱される入射流れが特徴的である。

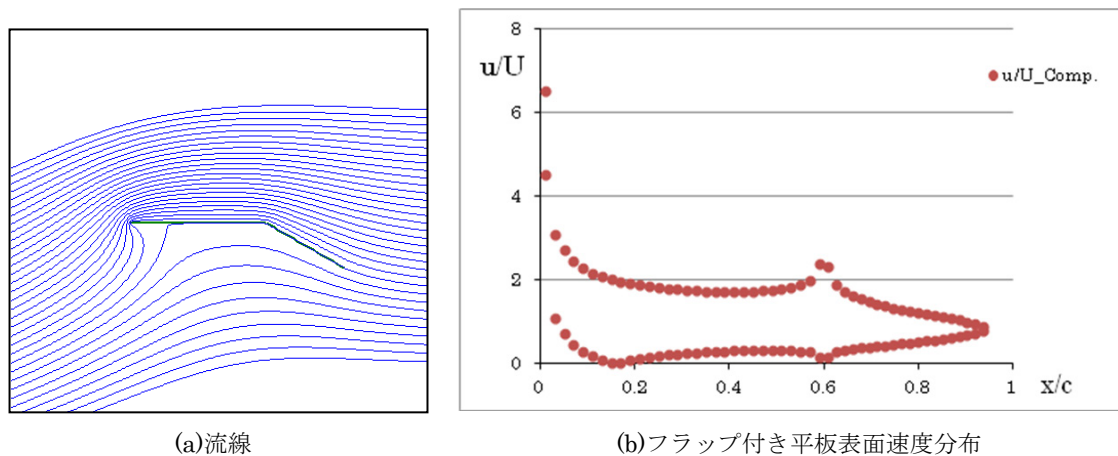


図 13 フラップ付き平板まわりの流れ

### 3.3 2枚の平板

本節では、2枚の平板がタンデムの形で配置されている問題を扱う。今井<sup>1)</sup>の第 10 章、第 7 図(b)~(d)に示された流れである。(a)は2枚の平板に平行な流れで、計算するまでもないので取り上げない。その代わりに(1)で迎え角を持った一様流中の平板まわりの流れを示す。)2枚の平板の長さは等しく ( $c$  とする)、その間隔もまた  $c$  である。パネルはそれぞれの平板につき 40 枚で、すべて同じ大きさである (これは本節の各課題に共通する)。本節の各課題でも、パネル法の計算は VB を使って行ったが、解析解の方は Excel を用いた。

## (1) 一様流中の2枚の平板

図14(a)と(b)にパネル法によって求めた流線と平板上の速度分布を示す ( $\alpha = 12^\circ$ )。Kutta の条件として上流側, 下流側のそれぞれの平板の後縁点における渦密度を0と指定した。

この流れの解析解は今井<sup>1)</sup>の第10章式(6.3)に, 平板がn枚の場合の一般形として与えられている。n=2の場合その式は以下の通りである。

$$w = U \cos \alpha - iU \sin \alpha \times \left( \frac{z - a_1}{z - b_1} \right)^{1/2} \left( \frac{z - a_2}{z - b_2} \right)^{1/2} \quad (16)$$

平板は複素平面内の実軸上にあり, 下流側平板の後縁, 前縁のx座標がそれぞれ $a_1, b_1$ であり, 同様に上流側平板の後縁, 前縁のx座標が $a_2, b_2$ である。この式から求めた平板上の速度分布も図14(b)にプロットしてパネル法の解との比較に供した。

図を見ると, 上流側の平板の方が下流のに比べて局所的な迎え角が大きい, これは下流の平板まわりの循環が上流の平板位置に up flow を誘起するのに対して, 上流の平板まわりの循環は下流の平板位置に down flow を誘起するからであろう。

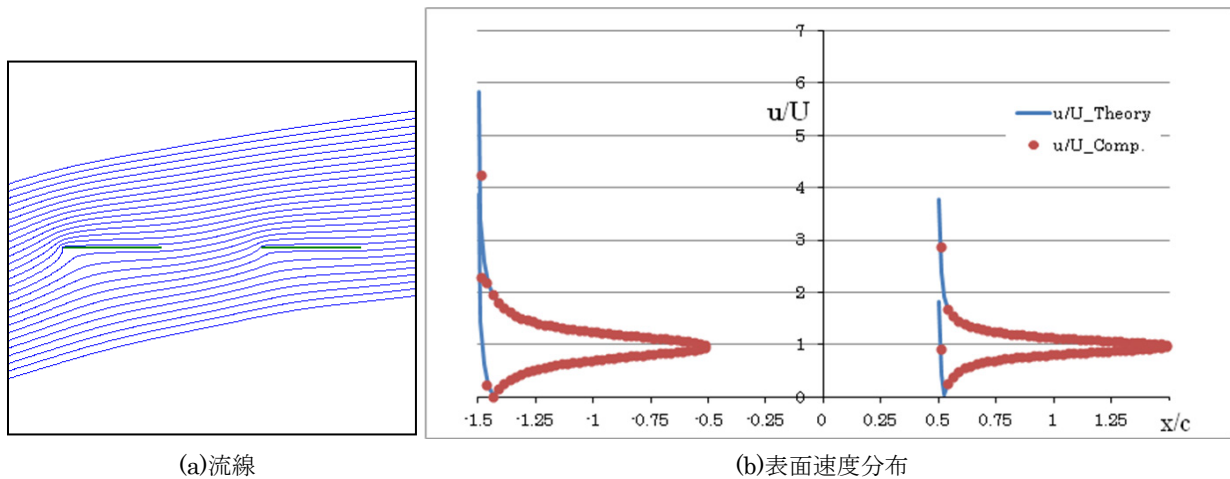


図14 一様流中の二枚の平板まわりの流れ

## (2) 循環流 (逆方向の回転)

パネル法で解いた流れを図15(a)及び(b)に示す。Kutta の条件に替わる付加条件として, 上流側平板の中心の渦密度を-1, 下流側平板の中心の渦密度を+1と規定した。この値は仮の値で, 後に解析解と比較して, 同じ流れになるように変える。要は2つの点の渦密度が, 絶対値は同じで符号が逆であれば, 求める流れの一つが得られる。

この流れの解析解は今井<sup>1)</sup>の第10章, 式(4.4)で与えられている。書き写すと次のようになる。

$$w = \frac{i\kappa_1}{\sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - k^2)}} \quad (17)$$

$\kappa_1$ は任意の実数,  $k$ は $0 < k < 1$ の実数で, 二枚の平板は実軸上 $-1 < z < -k$ と $k < z < 1$ の範囲を占めていると仮定されている。先に述べた平板配置に対応させるために $k = 1/3$ とする。式(17)から平面上の速度分布を求めて図15(b)に実線で示し, パネル法の解と比較した。解析解を求める際 $\kappa_1 = 1$ と決めて速度分布を決め, パネル法(暫定)と解析法で得られた平板中心の対応する速度の比をとって, パネル法の付加条件の値を変え, 計算をやり直した。こうしてパネル法の持つ任意性(特異点密度の与え方)と解析解の持つ任意性( $\kappa$ の取り方)を調和させた。

流線図(a)を見ると平板に挟まれた領域の方が, 両平板の外側の領域よりも流線が密であり, 速度が速いことを示唆しているが, この結果は表面速度分布(b)からも明確に読み取れる。

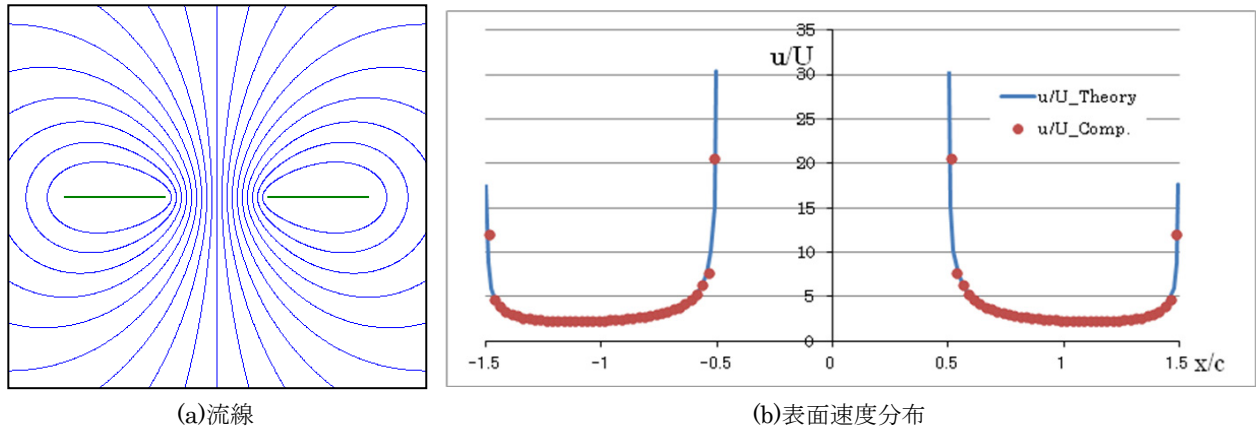


図 15 2 枚平板まわりの循環流 (逆方向)

## (3) 循環流 (同じ方向の回転)

パネル法の計算結果は図 16(a)と(b)である。このケースでは付加条件として両平板の中心の渦密度を-1 と規定した。この値も暫定値で、後に解析解の任意定数に与えた値と対応させて、同じ速度分布が得られるように修正する。図 16(b)はその修正後の結果である。

この流れの解析解を今井<sup>1)</sup>の第 10 章、式(4.5)から書き写す。 $\kappa_2$  は任意の実数定数である。

$$w = \frac{i\kappa_2 z}{\sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - k^2)}} \quad (18)$$

$\kappa_2 = 1$  として式 (18) から求めた平板まわりの速度分布を図 16(b)に書き込み、パネル法の解と比較した。

この流れでは上に示した(2)循環流 (逆方向の回転) の場合と逆に、平板間の流れは両平板の外側の流れよりも遅い。

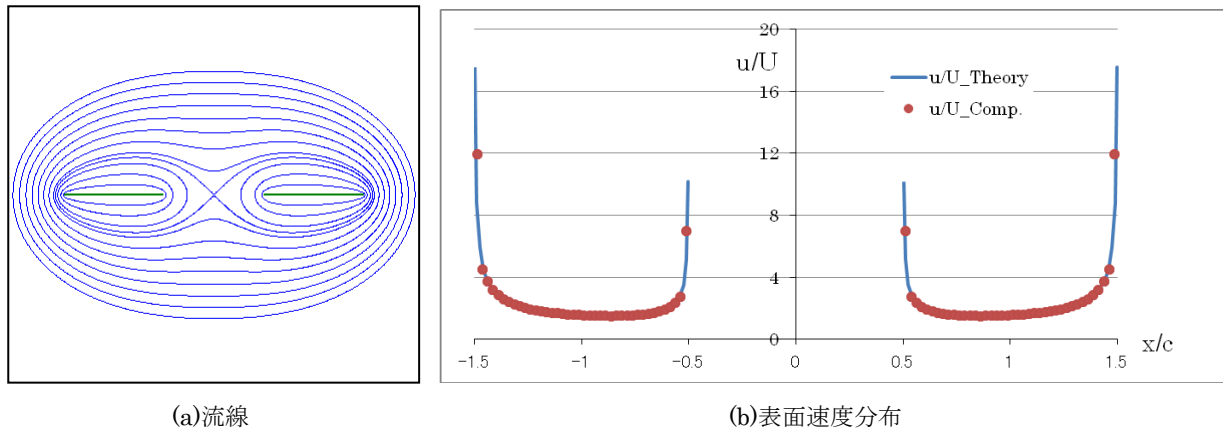


図 16 2 枚平板まわりの循環流 (同方向)

## (4) 直撃流

パネル法を解くに当たり必要な付加条件として、上流側平板の 70%翼弦長点及び下流側平板の 30%翼弦長点の渦密度に 0 を与えた。結果の流線と、平板まわりの速度分布を図 17(a)と(b)に示す。

この流れの解析解を今井<sup>1)</sup>の第 10 章、式(4.6)から以下に書き写す。

$$w = -iU \sin \alpha \times \frac{z^2 - a^2}{\sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - k^2)}} \quad (19)$$

図 17(a)に示すような直撃流れの場合迎え角  $\alpha$  は  $\pi/2$  だから  $\sin$  の項は 1 となる。また  $a$  は平板上の淀み点

$z = \pm a$  を表す実数定数である. 式 (19) から求めた平板まわりの速度分布を図 17(b)に重ねてパネル法との比較を行った.

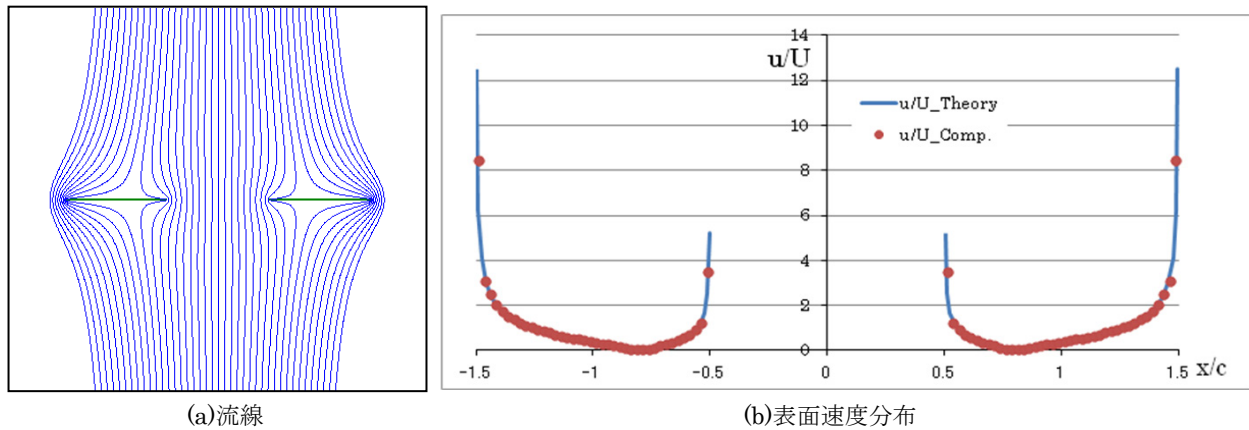


図 17 2 枚平板への直撃流

### 3.4 Joukowski 変換の応用

本節の計算にはすべて VB を用いた.

#### (1) 楕円翼

厚み比 20%の楕円まわりの流れ( $\alpha=10^\circ$ )をパネル法で解き, 図 18(a)と(b)に示した. パネル枚数は 60 枚, 頂点の座標は式

$$\begin{aligned} x &= 0.5 + 0.5 \times \cos \theta \\ y &= 0.1 \times \sin \theta \end{aligned} \tag{20}$$

によって,  $\theta$  を 6 度ずつ等間隔にとって決めた ( $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ). 従ってパネルは等サイズではなく, 前縁, 後縁付近で小さくなっている.

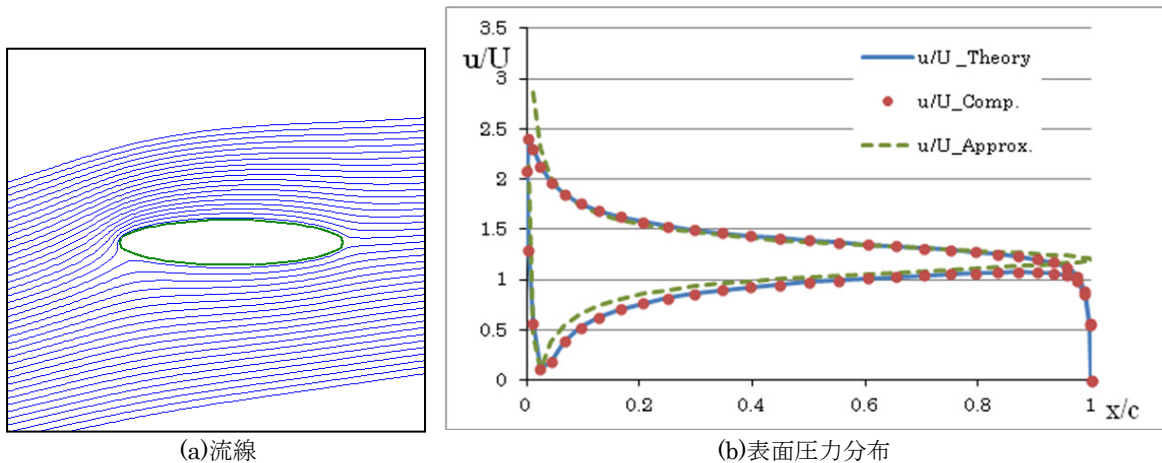


図 18 楕円翼まわりの流れ

楕円翼まわりの等角写像法による流れの求め方は今井<sup>12)</sup>(文献 1)ではないことに注意)の P. 139 以下に詳しい. しかし同書では迎え角  $\alpha=0$  で循環  $\Gamma=0$  の場合しか書かれていないので, 以下に抜粋しつつ一般化する.

$\zeta$  平面の原点を中心とし半径  $R = a/k$  ( $k < 1$ ) の円  $K_1$  を Joukowski 変換

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \tag{21}$$

によって,  $z$  平面の楕円  $P_1$  に写像する. 写像によって得られた  $P_1$  の座標は式(21)に  $\zeta = Re^{i\theta}$  を代入して,

$$z = Re^{i\theta} + \frac{a^2}{R}e^{-i\theta} = \left(R + \frac{a^2}{R}\right)\cos\theta + i\left(R - \frac{a^2}{R}\right)\sin\theta \quad (22)$$

である。楕円翼の厚み比が 20% となるようにするには、長半径=1.0, 短半径=0.2 を与えて、

$$R + \frac{a^2}{R} = 1.0, \quad R - \frac{a^2}{R} = 0.2 \quad (23)$$

すなわち、

$$R = 0.6, \quad a^2 = 0.24 \quad (24)$$

とすればよい。

円  $K_1$  を過ぎる迎え角  $\alpha$  の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f = U\left(e^{-i\alpha}\zeta + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{\zeta}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta \quad (25)$$

であるから、複素速度は

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \Big/ \frac{dz}{d\zeta} = \left\{ U\left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2 e^{i\alpha}}{\zeta^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi\zeta} \right\} \Big/ \left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2}\right) \quad (26)$$

である。楕円翼表面の速度を求めることが目下の目的であるが、楕円翼表面は円の表面に対応するから  $\zeta = Re^{i\theta}$  を代入して

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_s = \left\{ Ue^{-i\alpha}\left(1 - e^{2i(\alpha-\theta)}\right) + \frac{i\Gamma e^{-i\theta}}{2\pi R} \right\} \Big/ \left(1 - \frac{a^2 e^{-2i\theta}}{R^2}\right) \quad (27)$$

となる。なお、添え字  $S$  は翼表面を意味する。後縁に対応する  $\theta=0$  で流れの速度が 0 になるためには (Kutta の条件)、式(27)の  $\{ \quad \} = 0$  でなければならない。この条件より循環  $\Gamma$  の値が決まる。

$$\Gamma = 4\pi UR \sin \alpha \quad (28)$$

この  $\Gamma$  を式(27)に代入して

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dz}\right)_s &= U \left\{ e^{-i\alpha}\left(1 - e^{2i(\alpha-\theta)}\right) + 2i \sin \alpha e^{-i\theta} \right\} \Big/ \left(1 - \frac{a^2 e^{-2i\theta}}{R^2}\right) \\ &= Ue^{-i\alpha}\left(1 - e^{2i(\alpha-\theta)} + 2i \sin \alpha e^{i(\alpha-\theta)}\right) \Big/ \left(1 - \frac{a^2 e^{-2i\theta}}{R^2}\right) \\ &= Ue^{-i\alpha} \left\{ 2 \sin^2(\alpha - \theta) - 2i \sin(\alpha - \theta)\cos(\alpha - \theta) + 2i \sin \alpha e^{i(\alpha-\theta)} \right\} \Big/ \left(1 - \frac{a^2 e^{-2i\theta}}{R^2}\right) \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分子} &= -2iUe^{-i\alpha} \left[ \sin(\alpha - \theta)\{\cos(\alpha - \theta) + i \sin(\alpha - \theta)\} - \sin \alpha e^{i(\alpha-\theta)} \right] \\ &= -2iUe^{-i\alpha} e^{i(\alpha-\theta)} \{\sin(\alpha - \theta) - \sin \alpha\} \quad (30) \end{aligned}$$

$$\text{分母} = 1 - \frac{a^2}{R^2} \cos 2\theta + i \frac{a^2}{R^2} \sin 2\theta \quad (31)$$

表面の速度の大きさを求めるには、複素速度の絶対値を取って

$$\left| \frac{df}{dz} \right|_s = \frac{\left| \frac{\text{分子}}{\text{分母}} \right|}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{a^2}{R^2}\right)\cos 2\theta + \left(\frac{a^4}{R^4}\right)}} \quad (32)$$

式 (24) を代入すると求める速度の大きさが決まるから、それを図 18(b)にプロットした。

最後に楕円翼を薄翼近似した時の速度分布の式が、今井<sup>1)</sup>に第 11 章式(7.10)として与えられているので、それについても計算し、他の計算結果と比較することにする。今井の式を書き写すと、

$$\frac{u}{U} = 1 + \alpha \tan \frac{\theta}{2} + b \quad (33)$$

である。但し  $b$  は厚み比であり我々のケースでは 0.2 である。この式から得られた結果を図 18(b)中にプロットした。Approx.と記されているのがこの薄翼近似の値である。

なお、Joukowski 変換の式として、式 (21) を用いたが、これは上にも述べたように今井の文献 12) の P. 135 で示されている式である。今井の文献 1) ではやや異なった形の式が用いられている。両者に本質的な違いがあるわけではなく、あるのは係数の違いである。本節の議論は文献 12) に準拠したため、式も文献 12) の形である式(21)を用いた。APPENDIX で詳しく述べるが  $z$  を  $\zeta$  で展開する際に、 $\zeta$  の一次の項の係数が 1 でないと、 $\zeta$  平面の一樣流に修正を加えなければならなくなる。式(21)は見ての通り、 $\zeta$  の一次の項の係数が 1 であるために、この点の気遣いをする必要がない。

(2) Joukowski 翼

前の課題では、原点に中心を持つ円を Joukowski 変換することによって楕円翼が得られた。一般の Joukowski 翼は中心が原点から外れて複素平面の第 2 象限にある円を Joukowski 変換することによって求められる。なお、この問題については谷<sup>13)</sup>が簡潔ながら要を得た説明を与えており、理解に役に立つ。

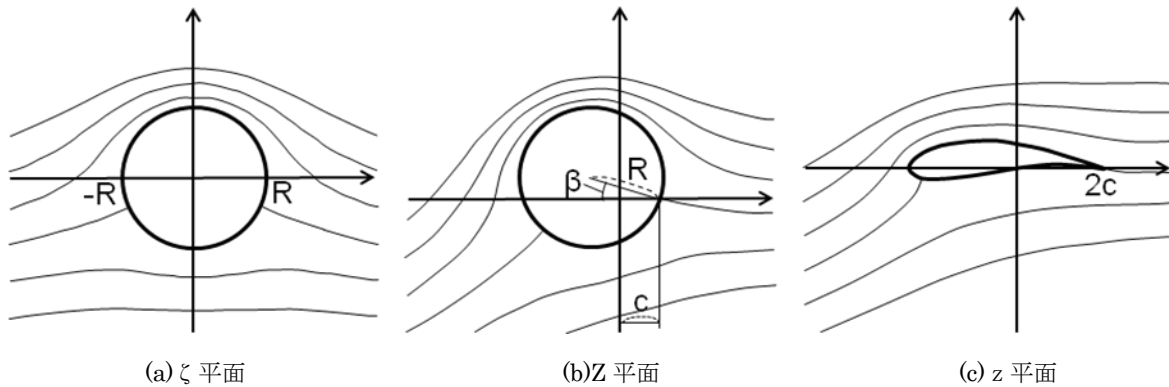


図 19 変換プロセス

図 19 に示すように  $\zeta$  平面上、原点に中心を持つ半径  $R$  の円のまわりの循環  $\Gamma$  を持った流れ（無限遠で実軸に平行）を、 $Z$  平面の円まわりの流れに写像し、更にそれを  $z$  平面の翼型まわりの流れに写像する。以下の式中で用いられる記号は図 19 の中で定義されている。 $Z$  平面の  $Z = c$  が翼型の後縁に対応する、すなわち Kutta の条件を与えられる点になる。

変換のプロセスは以下のとおりである。

- $\zeta$  平面から  $Z$  平面への変換：

$$Z - c - Re^{i(\pi-\beta)} = \zeta e^{i\alpha} \quad (34)$$

- $Z$  平面から  $z$  平面への変換 (Joukowski 変換)：

$$z = Z + \frac{c^2}{Z} \quad (35)$$



$z$  平面での翼型の座標を求めるには、式 (34) で  $\zeta = Re^{i\theta}$  とし、これを式(35)に代入する。

$$z = c + R \left( e^{i(\theta+\alpha)} + e^{i(\pi-\beta)} \right) + \frac{c^2}{c + R \left( e^{i(\theta+\alpha)} + e^{i(\pi-\beta)} \right)} \quad (36)$$

この式をいじってもこれ以上の簡単化は出来そうもなく、力づくで実部と虚部に分離して  $x$  座標と  $y$  座標を求めざるを得ない。パラメータを色々変えて得られる形状を検討し、翼型として受け入れられそうなものを探した。採用したパラメータの組み合わせは、

$$\begin{aligned} R &= 1 \\ c &= 0.85 \\ \beta &= 8.0^\circ \end{aligned}$$

であった。得られた翼型形状及びそのまわりの流れ ( $\alpha = 0^\circ$ ) を図 20(a)に示す。よく知られているように Joukowski 翼の後縁はカスプとなる (後縁角が  $0^\circ$  になる)。 $\zeta$  平面の円周を 60 等分して、対応する 60 角形の翼型を得たが、後縁付近の点が互いに接近し過ぎ、パネル法の計算に不調を来したので、下面側の後縁の隣の 1 点を削除してパネル枚数 59 枚で流れを求めた。パネル法で後縁がカスプになる翼型まわりの流れを計算する際に起きるこの問題は、夙に Stevens et al. (文献 8), P.173) が指摘している。翼型周りの速度分布をパネル法と等角写像法によって求め、図 20(b)に示した。

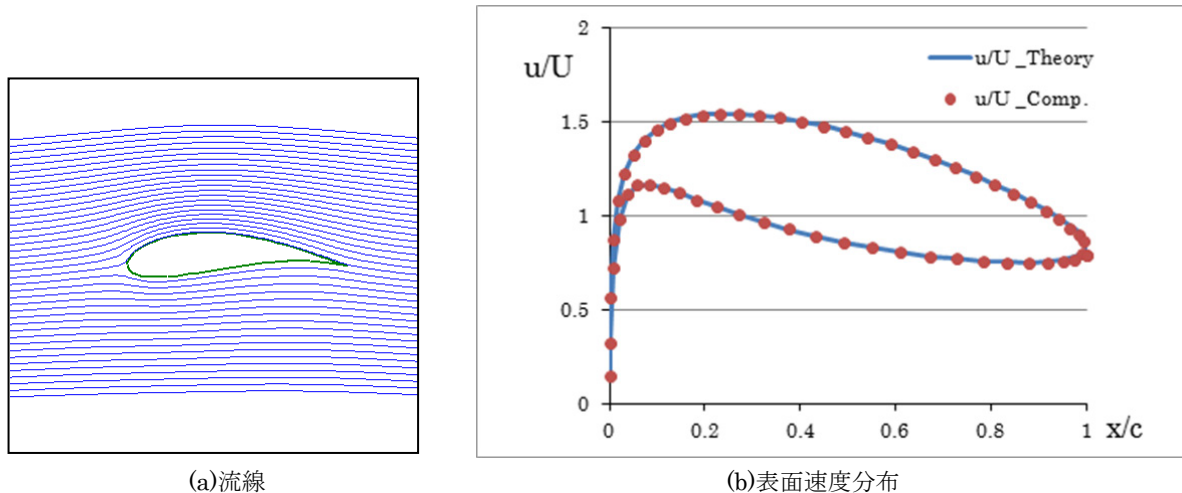


図 20 Joukowski 翼型まわりの流れ

等角写像法による流れの計算の実際を、以下に示しておく。基礎式は式(34)と(35)そして、実軸に平行な一様流中、原点に中心を持ち、半径が  $R$  の円のまわりの循環を伴う流れ、すなわち  $\zeta$  平面の流れに対する複素速度ポテンシャル：

$$f = U \left( \zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta \quad (37)$$

の 3 本である。これらから  $z$  平面での複素速度を以下の通り計算する。

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \Big/ \frac{dz}{dZ} = e^{-i\alpha} \left\{ U \left( 1 - \frac{R^2}{\zeta^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi\zeta} \right\} \Big/ \left( 1 - \frac{c^2}{Z^2} \right) \quad (38)$$

Kutta の条件は、 $Z = c$  すなわち式 (34) より  $\zeta = -Re^{i(\pi-\alpha-\beta)}$  において式 (38) の  $\{ \}$  が 0 である、というものである。これを計算すると循環  $\Gamma$  が決まり、

$$\Gamma = 4\pi R U \sin(\alpha + \beta) \quad (39)$$

となる。

翼型まわりは円の周  $\zeta = Re^{i\theta}$  に対応するから、そこでの速度の大きさは式 (38) に  $\zeta = Re^{i\theta}$  を代入して絶対値を取る。この時  $Z$  は式 (34) により  $Z = c + Re^{i(\pi-\beta)} + Re^{i(\theta+\alpha)}$  になっている。

$$\begin{aligned} \left| \frac{df}{dz} \right|_S &= \left| e^{-i\alpha} \left\{ U(1 - e^{-2i\theta}) + 2Ui \sin(\alpha + \beta) e^{-i\theta} \right\} \right| \left/ \left| 1 - \frac{c^2}{(c + Re^{i(\alpha-\beta)} + Re^{i(\theta+\alpha)})^2} \right| \right. \\ &= \left| e^{-i(\alpha+\theta)} U \left\{ (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + 2i \sin(\alpha + \beta) \right\} \right| \left/ \left| 1 - \frac{c^2}{(c + Re^{i(\alpha-\beta)} + Re^{i(\theta+\alpha)})^2} \right| \right. \quad (40) \end{aligned}$$

$$\text{分子} = 2U \left| i e^{-i(\alpha+\theta)} (\sin \theta + \sin(\alpha + \beta)) \right| = 2U |\sin \theta + \sin(\alpha + \beta)| \quad (41)$$

$$\text{分母} = \frac{R \left| e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i(\theta+\alpha)} \right| \left| 2c + Re^{i(\alpha-\beta)} + Re^{i(\theta+\alpha)} \right|}{\left| c + Re^{i(\alpha-\beta)} + Re^{i(\theta+\alpha)} \right|^2} \quad (42)$$

分子は随分簡単になったが、分母はこれ以上簡単に出来そうもない。そのためここで妥協して、

$$\left| \frac{df}{dz} \right|_S = \frac{2U |\sin \theta + \sin(\alpha + \beta)| \left| c + Re^{i(\alpha-\beta)} + Re^{i(\theta+\alpha)} \right|^2}{R \left| e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i(\theta+\alpha)} \right| \left| 2c + Re^{i(\alpha-\beta)} + Re^{i(\theta+\alpha)} \right|} \quad (43)$$

を計算する。

### 3.5 Kármán-Trefftz 変換の応用

Joukowski 変換で得られる形状は後縁がカスプになる、という欠点があることは前に書いた。この欠点为了避免、後縁角が有限な形状を得るための変換が Kármán-Trefftz 変換である。まず予習としてレンズ翼を作りそのまわりの流れを計算し、ひき続いて Kármán-Trefftz 翼型まわりの流れを求める。なお、本節の計算もすべて VB を用いて行った。

#### (1) レンズ翼

レンズ翼は  $\zeta$  平面にある原点に中心を持つ円 (単位円とする) を、次式で与えられる Kármán-Trefftz 変換して得られる。

$$\frac{z - n}{z + n} = \left( \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right)^n \quad (44)$$

$n$  は後縁角  $\tau$  の大きさで決まる実数で、

$$n = 2 - \frac{\tau}{\pi} \quad (45)$$

と定義される。式(44)は今井の文献<sup>1)</sup>の式と異なるが前者を選択した事情は1章で述べた通りである。APPENDIXに今井の式を示し、そこから得られる結果の解釈と、対処に関して行った考察を記す。

まずパネル法の計算を行う。そのためにはレンズ翼の形状が必要になる。レンズ翼の形状は代数式でも求めることができるが、ここでは Kármán-Trefftz 変換(44)を用いて作ることにする。式(44)を  $z$  について解くと、

$$z = \frac{n \left\{ (\zeta + 1)^n + (\zeta - 1)^n \right\}}{(\zeta + 1)^n - (\zeta - 1)^n} \quad (46)$$

となるから、 $\zeta$  平面の単位円 (図 22(a)参照) の外形  $\zeta = e^{i\theta}$  を代入して得られる、

$$z = \frac{n \left\{ (e^{i\theta} + 1)^n + (e^{i\theta} - 1)^n \right\}}{(e^{i\theta} + 1)^n - (e^{i\theta} - 1)^n} \quad (47)$$

を計算し、実部、虚部をそれぞれ  $x$ ,  $y$  座標とするレンズ翼を得る (図 22(c)参照). 複素数同士の足し算, 引き算はそれぞれを実部, 虚部に分けて両者を個別に演算するが, 掛け算 (べき乗を含む), 割り算は複素数を極形式に直してから演算する. 極形式にする際その複素数の偏角 (argument) が必要になり, その値を求めるためにプログラム組み込みの逆正接関数を使うが,  $\text{ATAN}$  ( $-\pi/2 \leq \text{主値} \leq \pi/2$ ) ではなく  $\text{ATAN2}$  ( $-\pi < \text{主値} \leq \pi$ ) を使うべきである. (脱線になるが, 関数  $\text{ATAN2}$  は二つの引数  $x$ ,  $y$  (複素数の実部と虚部の大きさ) を必要とする.  $\text{VB}$  をはじめ著者が今まで経験したすべてのプログラム言語の製品では, これら引数を与える順は  $(y, x)$  だが,  $\text{Excel}$  では  $(x, y)$  になっていることに注意.) 単位円の周囲を  $6^\circ$  おきに 60 等分して, 各分割点を式(46)で写像して 60 角形の翼を得たので, 各パネルの大きさは等しくない. 後縁角  $\tau=36^\circ$  とした. 迎え角  $\alpha=10^\circ$  の流れの流線を図 21(a)に, 翼まわりの速度分布を図 21(b)に示した.

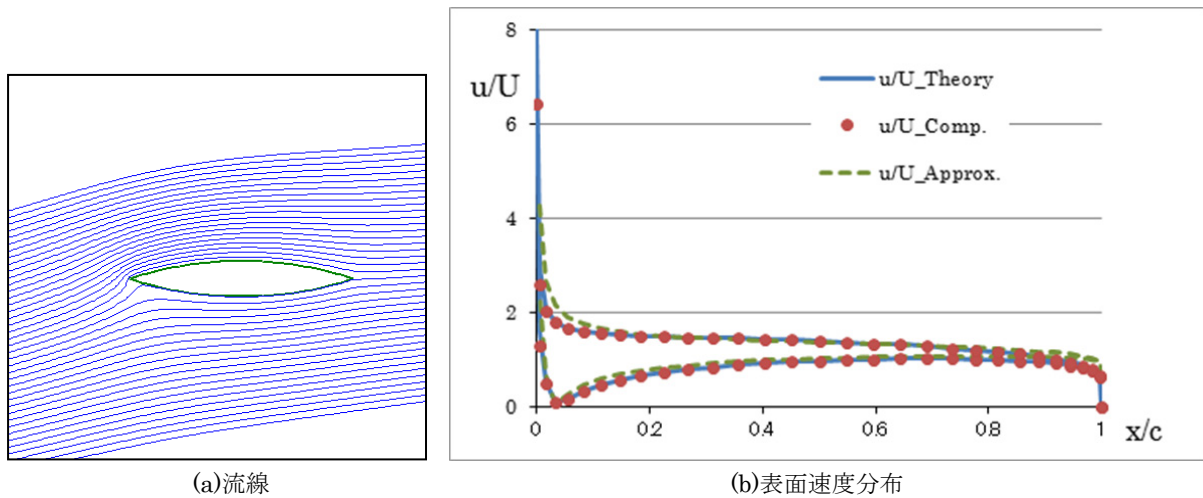


図 21 レンズ翼まわりの流れ

$z$  平面での形状まわりの流れを写像法によって求めるために,  $\zeta$  平面と  $z$  平面の間に  $Z$  平面を挟み,  $\zeta \rightarrow Z \rightarrow z$  と変換することを考える. 各平面での流れは図 22 に示す通りで, 改めて記すと,  $\zeta$  平面の流れは原点を中心とする単位円まわりの循環ある流れで, その流れは無遠くで実軸に平行である.  $Z$  平面での流れは, 円の後方の淀み点が実軸上に来るように, 流れを迎え角  $\alpha$  だけ回転したものである. そして  $z$  平面での流れが求めるレンズ翼まわりの迎え角ある流れである.

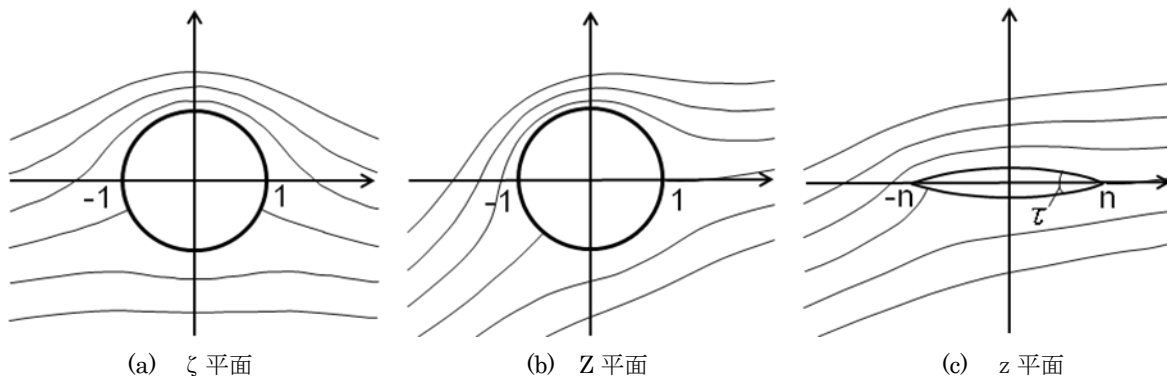


図 22 変換プロセス

$\zeta$  と  $Z$  の変換は

$$Z = \zeta e^{i\alpha} \quad (48)$$

である. また Kármán-Trefftz 変換は  $Z$  から  $z$  への変換になるから式(46)の  $\zeta$  を  $Z$  で置き換えて次式を得る.

$$z = \frac{n\{(Z+1)^n + (Z-1)^n\}}{(Z+1)^n - (Z-1)^n} \quad (49)$$

すぐ後で使うため、これを微分しておく。

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{4n^2(Z+1)^{n-1}(Z-1)^{n-1}}{\{(Z+1)^n - (Z-1)^n\}^2} \quad (50)$$

$\zeta$  平面での複素速度ポテンシャルは既に式 (37) で与えられている (その半径  $R$  はここでは 1 とする)。そこで  $z$  平面での複素速度

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dZ} \bigg/ \frac{dz}{dZ} \quad (51)$$

に各微係数の式を代入して

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\alpha} \left\{ U \left( 1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi\zeta} \right\} \bigg/ \frac{4n^2(\zeta e^{i\alpha} + 1)^{n-1}(\zeta e^{i\alpha} - 1)^{n-1}}{\{(\zeta e^{i\alpha} + 1)^n - (\zeta e^{i\alpha} - 1)^n\}^2} \quad (52)$$

を得るが、点  $Z=1$  すなわち点  $\zeta = e^{-i\alpha}$  において Kutta の条件からの要求、複素速度=0 となるために、式(52) の分子の { } の項が 0 にならねばならない。すなわち、

$$\Gamma = -\frac{2\pi U}{i} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \quad (53)$$

ここで  $\zeta = e^{-i\alpha}$  を代入すると

$$\Gamma = 4\pi U \sin \alpha \quad (54)$$

となり、循環  $\Gamma$  の値が決まる。

レンズ翼表面の速度の大きさを求めるためには、式 (52) に  $\zeta = e^{i\theta}$  を代入して絶対値を取る。

$$\begin{aligned} \left| \frac{df}{dz} \right|_s &= \left| e^{-i\alpha} \left\{ U \left( 1 - \frac{1}{e^{2i\theta}} \right) + \frac{2Ui \sin \alpha}{e^{i\theta}} \right\} \bigg/ \frac{4n^2(e^{i\theta} e^{i\alpha} + 1)^{n-1}(e^{i\theta} e^{i\alpha} - 1)^{n-1}}{\{(e^{i\theta} e^{i\alpha} + 1)^n - (e^{i\theta} e^{i\alpha} - 1)^n\}^2} \right| \\ &= \frac{|U e^{-i(\alpha+\theta)}(e^{i\theta} - e^{-i\theta} + 2i \sin \alpha)| |(e^{i(\alpha+\theta)} + 1)^n - (e^{i(\alpha+\theta)} - 1)^n|^2}{|4n^2(e^{i(\alpha+\theta)} + 1)^{n-1}(e^{i(\alpha+\theta)} - 1)^{n-1}|} \\ &= \frac{U |\sin \theta + \sin \alpha| |(e^{i(\alpha+\theta)} + 1)^n - (e^{i(\alpha+\theta)} - 1)^n|^2}{2n^2 |(e^{i(\alpha+\theta)} + 1)(e^{i(\alpha+\theta)} - 1)|^{n-1}} \quad (55) \end{aligned}$$

得られた翼型周りの速度分布を図 21(b)に重ね書きした。

薄翼近似によるレンズ翼まわりの速度分布は、今井<sup>1)</sup>の第 11 章、式 (7.20) に次のように与えられている

$$\frac{u}{U} = 1 + \alpha \tan \frac{\theta}{2} + \frac{4\beta}{\pi} \left\{ 1 + \cos \theta \log \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| \right\} \quad (56)$$

なお

$$\tan \beta = \frac{\text{翼厚}}{\text{翼弦長}} \quad (57)$$

である．この式を図 21(b)に書き入れて他との比較に供した．図 18(b)とも合わせて近似式が理論値（パネル法による計算値も同様）を極めてよく表現していることが理解できる．

## (2) Kármán-Trefftz 翼

レンズ翼は複素平面の原点を中心とする円を Kármán-Trefftz 変換して作ったが，Kármán-Trefftz 翼を作るためには，元の平面（図 23(b)及び(d)に示される Z 平面）の円  $K_2$  は次の要件を満たさねばならない．まず中心は第 2 象限にあり，半径は  $R$ ，そして  $Z=\pm 1$  を通り中心が実軸上正の領域にある円  $K_1$ （その半径を  $r$  とする）に点  $Z=1$  で内接する．円  $K_2$  の中心と点  $Z=1$  を結ぶ半径が実軸となす角を  $\delta$  とする（図 23(d)参照のこと）．

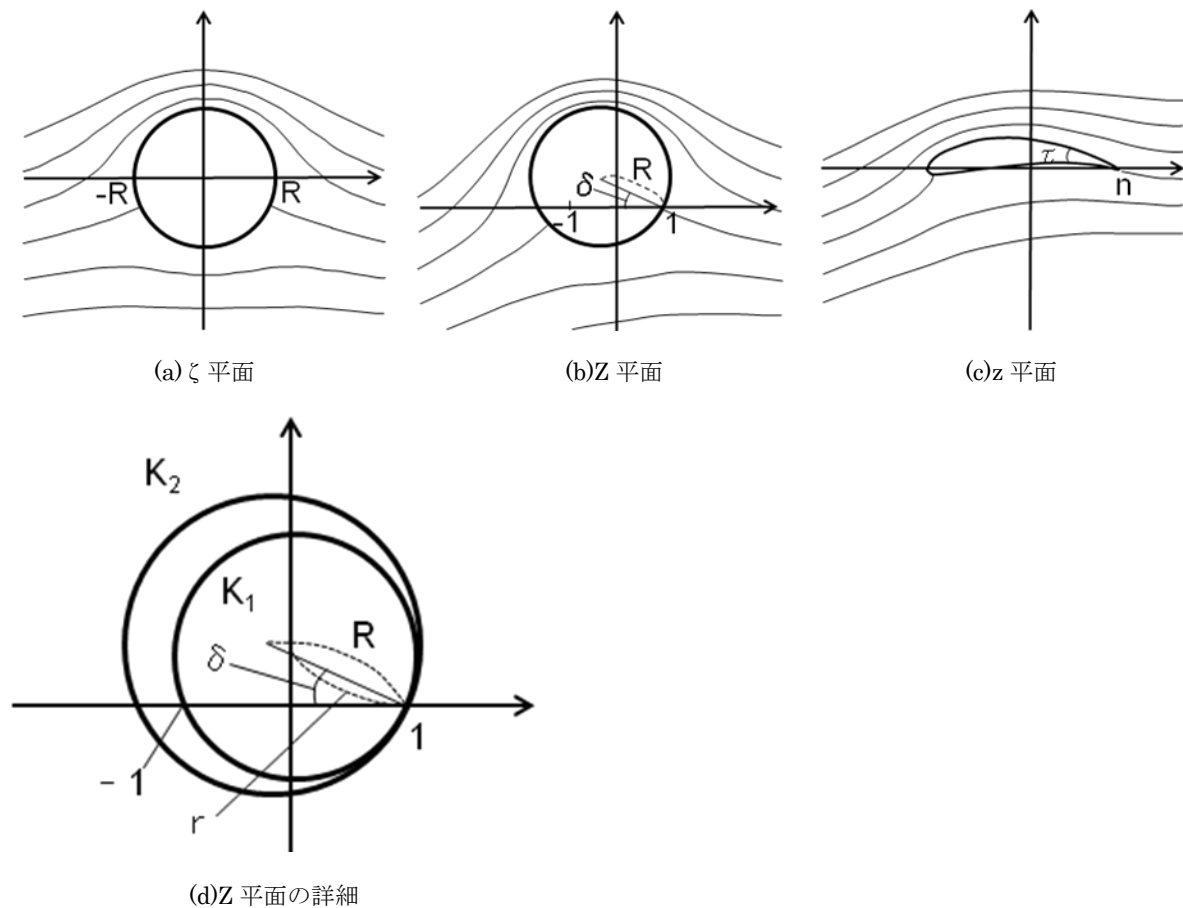


図 23 変換プロセス

本課題でも，Joukowski 翼，あるいはレンズ翼と同様に  $\zeta \rightarrow Z \rightarrow z$  と変換する（図 23）． $\zeta \rightarrow Z$  の変換は，

$$Z = \zeta e^{i\alpha} + 1 - R e^{-i\delta} \quad (58)$$

と表される． $Z \rightarrow z$  が Kármán-Trefftz 変換であり，式(44)の  $\zeta$  を  $Z$  で置き換えたもの，あるいは式(49)で与えられる．

$\zeta$  平面の円の外周が  $z$  平面の翼になるから (図 23 参照), 式(58)で  $\zeta$  に  $Re^{i\theta}$  を代入して得られた  $Z$ , すなわち

$$Z = Re^{i(\theta+\alpha)} + 1 - Re^{-i\delta} \quad (59)$$

を式(49)へ代入して翼形状  $z$  を得る. 複素数計算上の注意点はレンズ翼の項で書いたと同じである.

レンズ翼の場合と同じ方法で, 60 枚パネルからなる Kármán-Trefftz 翼型を得た. 後縁の開きがはっきり見える翼型らしい形状を探して,

$$r=1.02$$

$$R=1.12$$

$$\tau=10^\circ$$

とした. また  $\cos \delta = 1/r$  だから  $\delta = 11.365^\circ$  になる. パネル法によって迎え角  $\alpha = 5^\circ$  の流れを計算し, 得られた流線と翼型周りの速度分布を図 24(a)と(b)に示す.

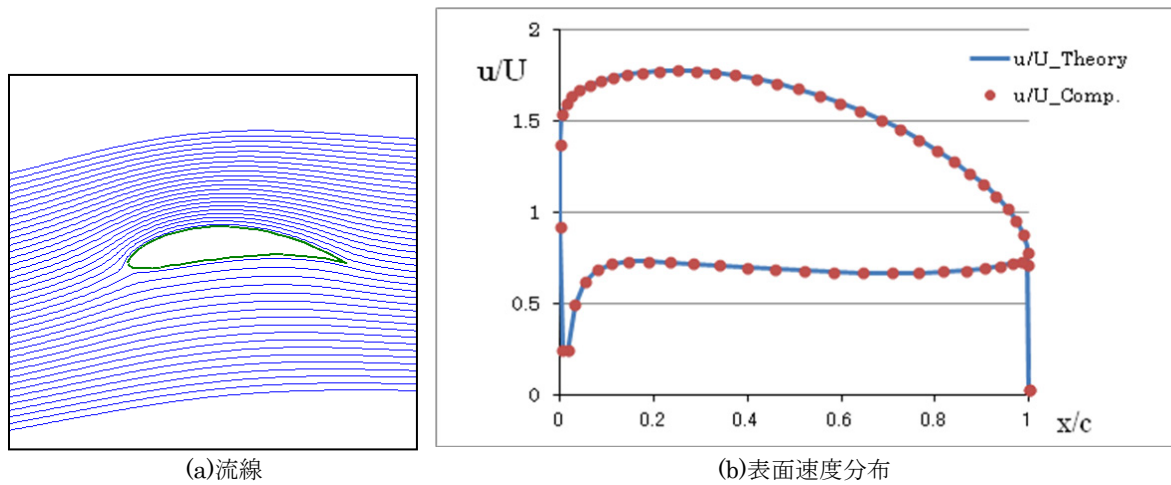


図 24 Kármán-Trefftz 翼まわりの流れ

写像解の求め方も今までと同じ方針で行う. 複素速度ポテンシャルを微分して複素速度を得る.

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dZ} \Big/ \frac{dz}{dZ} \quad (60)$$

右辺の各項を調べると, 今回も  $\zeta$  平面の複素速度ポテンシャル  $f$  は式(37)であるから  $df/d\zeta$  は容易に求まる (式(38)の  $\{ \}$  内に同じ).  $d\zeta/dZ$  は式(58)から求まる. 分母の  $dz/dZ$  は式(49)の微分であり, 式(50)で与えられているから, 結局のところ式(60)は次のように書き直される.

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\alpha} \left\{ U \left( 1 - \frac{R^2}{\zeta^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi\zeta} \right\} \Big/ \left[ \frac{4n^2(Z+1)^{n-1}(Z-1)^{n-1}}{\{(Z+1)^n - (Z-1)^n\}^2} \right] \quad (61)$$

Kutta の条件として点  $Z=1$ , すなわち点  $\zeta = Re^{-i(\alpha+\delta)}$  (式(58)より) において,  $df/d\zeta = 0$ , すなわち式(61)の  $\{ \}$  の項=0 でなければならないから,

$$\Gamma = -\frac{2\pi U}{i} \left( Re^{-i(\alpha+\delta)} - \frac{R^2}{Re^{-i(\alpha+\delta)}} \right) = 4\pi UR \sin(\alpha + \delta) \quad (62)$$

となる.

翼型表面の速度の大きさは式(61)に式(62)で求めた  $\Gamma$  の値を代入し, さらに  $\zeta = Re^{i\theta}$  を代入した上で絶対値を取ることで求まる.

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_s = \left| U e^{-i(\alpha+\theta)} \left\{ (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + 2i \sin(\alpha + \delta) \right\} \right| \left/ \left| \frac{4n^2 (Z+1)^{n-1} (Z-1)^{n-1}}{\{(Z+1)^n - (Z-1)^n\}^2} \right| \right.$$

$$= \frac{U |\sin \theta + \sin(\alpha + \delta)| |(Z+1)^n - (Z-1)^n|^2}{2n^2 |(Z+1)(Z-1)|^{n-1}} \quad (63)$$

ただし

$$Z = R e^{i(\alpha+\theta)} + 1 - R e^{-i\delta} \quad (59) \text{に同じ}$$

である。こうして求まった速度の大きさの分布を図 24(b)に書き加えてパネル法の解との比較に供した。

#### 4. まとめ

本研究開発資料では、今井の「等角写像とその応用」<sup>1)</sup>に課題を得て、多くの形状まわりの流れをパネル法と写像法（一部は写像法と呼ぶよりは、広く解析的方法と呼んでおくべきであろう）によって解き、両者の比較を行った。写像法（解析的方法）は数学的なバックグラウンドがあるのに対して、パネル法は物理的あるいは数学的な基礎の上に組み立てられたとはいえ、最終的には数値的解法であるから、基準となるのは写像法（解析的方法）の解であり、パネル法は試される立場にある。多くの課題を解き比較した結果は極めて満足できるものであった。もはや十分に確立されているとも言えるパネル法の信頼性を更に強化することができた。

パネル法解析のツールとして使った Visual Basic 2010 Express も十分にその期待に応えた。自分の机の上の業務用の PC で、瞬時に解が得られ、その結果を数値だけでなく、画像のデータとして手にすることができることに欣快の念を抱いた。

本研究開発資料を上梓するにあたり、今さらポテンシャル流れの計算だろうかというためらいの気分はあったが、そんな時に日本航空宇宙学会誌で読んだ 2 つの記事に勇気づけられた。一つは Honda Aircraft Company の藤野道格氏の寄稿<sup>14)</sup>で、HondaJet の翼に触れて「コンフォーマル・マッピング（等角写像）法を用いて新しいコンセプトの自然層流翼型 SHM-1 を独自開発した」と述べられていることである（括弧書きは筆者が加筆）。HondaJet といえば遷音速をその飛行領域とする機体であり、藤野氏の言うコンフォーマル・マッピングが今井先生の文献が繰り広げるポテンシャル流れの世界に属するものなのか否か確証はないものの、最新鋭機の翼の設計に古典的な解法が使われているという事実に背を押された。もう一つは学会の行ったパネル・ディスカッションの記録<sup>15)</sup>である。「ポテンシャルフローの教育は必要か不要か」という課題に対して、事前に行われたアンケート結果と会場でのパネリストの議論内容が記されている。いずれもポテンシャルフローの教育に対して肯定的であることに安堵した。本資料が、ポテンシャルフローの教育においていささかでも役に立つことを願う。

等角写像とパネル法は共にポテンシャル法の解法ではあるけれど、一対一に対応するものではない。本研究開発資料で扱ったのは、両者が共通して解くことのできる問題だけである。第 1 章で、本資料を著した動機の一つは、今井先生の「等角写像とその応用」を読んで、「そこで扱われている問題のすべてとは言わずともその多くが、パネル法を用いればずっと簡単に解けるのではないかと考えた」ことであると書いた。今回今井先生の本を（拾い読みながら）読み返して、改めて等角写像では解けるがパネル法では扱えない問題が多くあることを再認識した。角を曲がる流れや、円や多角形の内部の流れなどである。一般にパネル法は、無限遠から流れてきて、（物体まわりを過ぎて）再び無限遠に流れ去る流れ（上流側の一様流と下流側の一様流が同じ）にしか適用できない。従って、パネル法さえあれば等角写像法はいらない、という議論にはならない。勿論逆も言えて、等角写像としては不得意だが、パネル法は得意とする流れの計算もある。任意形状の多体問題（フラップ、スラット付きの翼型など）や三次元ポテンシャル流れ問題への拡張などである。よくしたものだと思う。

画像データの処理法に関して、風洞技術開発センター低速風洞セクションの浦 弘樹君と、島田直樹君（IHI エアロスペースエンジニアリング）のお知恵を拝借した。

## 参 考 文 献

- 1) 今井 功; 等角写像とその応用, 岩波書店 (1979).
- 2) <http://www.microsoft.com/japan/msdn/vstudio/express/>
- 3) L. M. Milne-Thomson; Theoretical Aerodynamics, Dover Publications (1975).
- 4) 中村佳朗; 非圧縮性流体力学, <http://fluid.nuae.nagoya-u.ac.jp/lecture/incomp11.pdf> (2011).
- 5) J. J. H. Blom; Some Characteristic Quantities of Kármán-Trefftz Profiles, NASA TM-77013 (1983).
- 6) D. W. Zingg; Low Mach Number Euler Computations, NASA TM-102205 (1989).
- 7) J. L. Hess and A. M. O. Smith; Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies, Progress in the Aeronautical Sciences, Vol. 8, Pergamon Press (1966).
- 8) W. A. Stevens, S. H. Goradia and J. A. Braden; Mathematical Model for Two-dimensional Multi-component Airfoils in Viscous Flow, NASA CR-1843 (1971).
- 9) 重見 仁; 多翼素翼型の逆問題の解法, 航空宇宙技術研究所報告 TR-571 (1979).
- 10) 重見 仁; パネル法を応用した格子形成法, 航空宇宙技術研究所報告 TR-860 (1985).
- 11) Ira. H. Abbott and A. E. von Doenhoff; Theory of Wing Section, Dover Publications (1959).
- 12) 今井 功; 流体力学 (前編), 裳華房 (1973).
- 13) 谷 一郎; 流れ学 - 第3版 -, 岩波全書 (1967).
- 14) 藤野道格; 開発事例(2) HondaJet の開発, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 60, 2012年4月号.
- 15) 李家賢一, 佐宗章弘, 川添博光, 渡辺重哉, 加茂圭介; 航空宇宙分野の空気力学教育はどうあるべきか 第2部 パネルディスカッション (後編), 日本航空宇宙学会誌, Vol. 60, 2012年1月号.

## APPENDIX

## 今井による Kármán-Trefftz 変換の式を使うときの注意

なぜ今井<sup>1)</sup>の与える Kármán-Trefftz 変換の式では, うまく行かなかったのかを検討し, 何が悪かったのかを突き止めたのでその原因を以下に記す. 等角写像によく通じている読者にとっては, 今さら耳新しくもないことかもしれないが,

まず今井の式とは原書第14章, 式(5.1),

$$\frac{z-a}{z+a} = \left( \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^n \quad (\text{A1})$$

である. この式により  $z$  平面の単位円は  $z$  平面のレンズ翼 (前後縁の座標はそれぞれ  $-a$  及び  $a$  である) に変換される.  $z$  について解くと,

$$z = \frac{a \left\{ (\zeta+1)^n + (\zeta-1)^n \right\}}{(\zeta+1)^n - (\zeta-1)^n} \quad (\text{A2})$$

を得る.  $n$  の定義は式 (45) の通りである. 式 (44) と (A1) を比べると左辺の  $n$  が  $a$  で置き換えられている. また式 (46) と (A2) を比較すると, 分子の係数  $n$  が  $a$  で置き換えられている. たいした違いは無いように見えるが,  $n$  は式 (45) で決められる意味のはっきりした定数であるのに対して,  $a$  は任意の実数である.

次に筆者が式 (A1) を式 (44) の代わりに使って (任意の実数  $a=1$  とした), 漫然と 3.5(1)節の計算をした結果, どのような解が得られたか, というと, レンズ翼まわりの速度分布がパネル法で得られた速度分布と比べて, 対応する各点の間で丁度  $n$  倍だけ速かったのである.

式 (A2) から明らかのように,  $\zeta=\pm 1$  は  $z=\pm a$  に写像される. すなわち円の前後縁は翼の前縁に, 後縁は後縁に写像されるのである. 従って  $a$  が任意の実数ということになると,  $a$  を大きくとれば大きな翼が得られ, 小さ



くとれば小さな翼ができるということになる。等角写像では循環が保存されるということはよく知られた事実である（文献 1）の P. 158）。単位円まわりの流れ（循環ありとする）が  $a$  の取り方によって大きな翼でも小さな翼にも写像され、その過程で循環が変わらなるとすれば、大きな翼では小さな翼に比べて速度分布が小さくなければならない。こんなことが起こり得るだろうか。相似な物体まわりのポテンシャルフローは互いに対応する点の速度が等しくなるのではないか、というのが筆者の抱いた疑問だった。ここで速度といったのは、あくまでも一様流速度で無次元化された速度である。

今井<sup>1)</sup>は“第 11 章, § 10 任意翼型の理論”で「 $z$  平面に任意の翼型  $P$  が与えられたとき、その外側の領域を  $\zeta$  平面の単位円  $K$  の外側に等角写像する解析関数が存在し

$$z = c_{-1}\zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots \quad |\zeta| > 1 \quad (A3)$$

のように級数展開されることが知られている。」と説き始める。（以下「」で括った部分は今井の書からの引用である。）そこで式 (A2) を展開してみることにする。

$$\begin{aligned} z &= \frac{a\{(\zeta+1)^n + (\zeta-1)^n\}}{(\zeta+1)^n - (\zeta-1)^n} = \frac{a\left\{\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^n\right\}}{\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^n} \\ &= \frac{a\left\{\left(1 + \frac{n}{\zeta} + \dots\right) + \left(1 - \frac{n}{\zeta} + \dots\right)\right\}}{\left(1 + \frac{n}{\zeta} + \dots\right) - \left(1 - \frac{n}{\zeta} + \dots\right)} \rightarrow \frac{a\zeta}{n} \quad (\zeta \rightarrow \infty) \quad (A4) \end{aligned}$$

つまり

$$c_{-1} = \frac{a}{n} \quad (A5)$$

である。

「いま、速度  $U$  の一様流が迎え角  $\alpha$  で翼型  $P$  にあたるものとしよう。その流れを表す複素速度ポテンシャルは

$$f = Ue^{-i\alpha}z + \dots, \quad z \rightarrow \infty \quad (A6)$$

という形を持つであろう。この流れを  $\zeta$  平面で考えると式 (A3) により

$$f = c_{-1}Ue^{-i\alpha}\zeta + \dots, \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (A7)$$

であるから、やはり無限遠で一様な流れを表わす。  $c_{-1}$  は一般に複素数であるから、これを

$$c_{-1} = Ae^{i\beta} \quad (A8)$$

と書くことにすると、式 (A7) は

$$\begin{aligned} f &= U'e^{-i\alpha'}\zeta + \dots, \quad \zeta \rightarrow \infty \\ U' &= AU, \quad \alpha' = \alpha - \beta \quad (A9) \end{aligned}$$

の形になる。つまり  $\zeta$  平面での流れは速度  $U'$  の一様流が迎え角  $\alpha'$  で翼型  $K$ （実は単位円！）にあたるばあいに対応する。」（既に使っている記号との混同を避けるため、原書の記号を一部変えてある。）

我々の問題では式 (A5) の示すように  $c_{-1}$  は実数であるから、  $\beta = 0$  で  $\zeta$  平面の一様流は

$$U' = AU = \frac{a}{n}U \quad (A10)$$

となる. すなわち変換式 (A1) を使うときには平面の一樣流を式 (A10) の形にしなければならないのだ. その結果, 式(52)の  $U$  は  $aU/n$  で置き換えられなければならない. その挙句起きることは, すべての流れが一樣流を  $U$  として計算した場合の  $a/n$  倍になることである. 筆者の誤った計算結果も ( $a=1$  であるから)  $1/n$  倍になってパネル解と一致する. 確かに平面の一樣流を式 (A10) のように修正しなかったことが, 誤った解を導いた原因であったと確認できた.

先に等角写像では循環が保存されるから, 任意に選べる  $a$  の大きさによって単位円から作られるレンズ翼の大きさが変化するとすると, 大きな翼では速度が小さく, 小さな翼では速度が大きくなってしまわないか, という疑問を呈した. これに対しては以下のように答えられる.  $\zeta$  平面の翼 (円柱) は大きさが決まっているが (実際, 単位円である), 一樣流の速さは  $a$  に比例する. 一方  $z$  平面のレンズ翼の方では, 大きさは  $a$  に比例するが一樣流の速度は  $U$  で一定である. 例えば  $a=1$  とし, 両者の循環が等しい筈だから, その値が  $\Gamma_0$  であるとする. 次に  $a$  を 1 でない値にすると, 円柱では一樣流が  $a$  倍になることに対応して速度が  $a$  倍になるが, 積分路長は変わらないから, 循環は  $a\Gamma_0$  になる. 一方レンズ翼の方は速度は一樣流が  $U$  のまま不変であるが翼の大きさが  $a$  倍になった結果, 循環はやはり  $a\Gamma_0$  になる. すなわち写像元と写像先の循環は等しく保たれる.

最後に 3.5 節で使った式(44)あるいは(46)では, なぜこういった問題が起きなかったのであろうか. 式(46)を展開する.

$$z = \frac{n\{(\zeta+1)^n + (\zeta-1)^n\}}{(\zeta+1)^n - (\zeta-1)^n} = \frac{n\left\{\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^n\right\}}{\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^n}$$

$$= \frac{n\left\{\left(1 + \frac{n}{\zeta} + \dots\right) + \left(1 - \frac{n}{\zeta} + \dots\right)\right\}}{\left(1 + \frac{n}{\zeta} + \dots\right) - \left(1 - \frac{n}{\zeta} + \dots\right)} \rightarrow \zeta \quad (\zeta \rightarrow \infty) \quad (\text{A11})$$

これからわかるように,  $c_{-1} = A = 1$  であり, その結果,

$$U' = U \quad (\text{A12})$$

である. このため  $\zeta$  平面の一樣流速度の修正を考えることなく正しい解が得られたのである.

以上はレンズ翼に即して述べたが, 要点は Kármán-Trefftz 変換の式の形に起因することであり, 同じ式を用いる Kármán-Trefftz 翼型についてもそのまま当てはまる.

