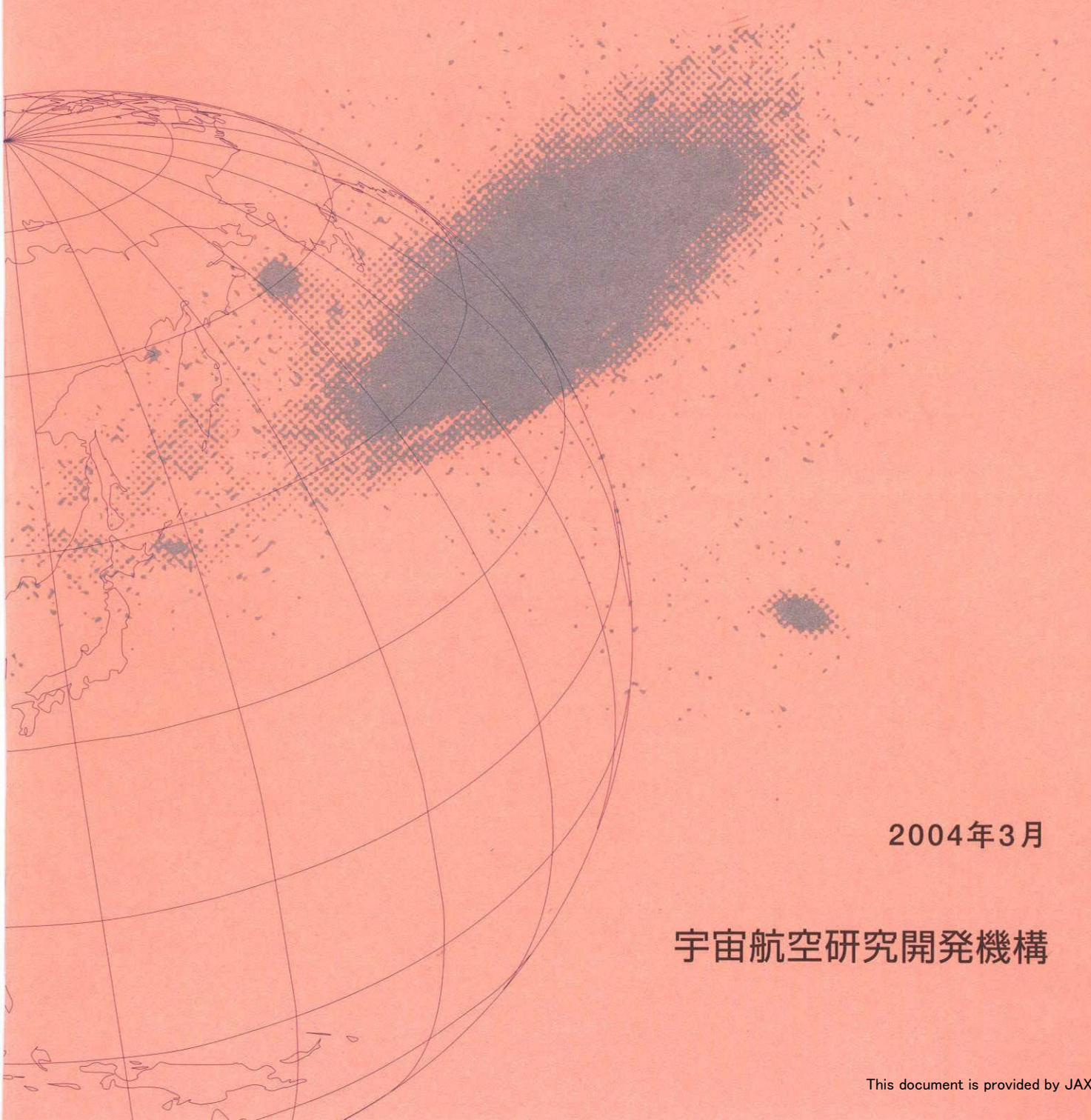


宇宙航空研究開発機構研究開発資料

宇宙機の姿勢運動の定式化



2004年3月

宇宙航空研究開発機構

宇宙航空研究開発機構研究開発資料
JAXA Research and Development Memorandum

宇宙機の姿勢運動の定式化
Equations of Spacecraft Dynamics

谷脇 滋宗

Shigemune TANIWAKI

総合技術研究本部 システム誘導技術グループ
Spacecraft Guidance, Control and Dynamics Engineering Group
Institute of Space Technology and Aeronautics

2004年3月
March 2004

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

目次

第1章	表記法と数学的準備	1
1.1	ベクトル	1
1.2	ダイアディック	1
1.3	代数演算	2
1.3.1	内積	2
1.3.2	外積	3
1.3.3	ノルム	3
1.3.4	命題	3
第2章	運動学	4
2.1	座標変換	4
2.1.1	オイラーの回転軸	4
2.1.2	方向余弦行列	5
2.1.3	オイラー角	7
2.1.4	クォータニオン	9
2.2	微分量	10
2.2.1	角速度	10
2.2.2	任意のベクトルの微分	11
2.2.3	並進速度、加速度	11
2.2.4	オイラー角の微分	12
2.2.5	クォータニオンの微分	12
第3章	動力学	15
3.1	質点の力学	15
3.2	質点系の力学	16
3.3	単一剛体(連続体)の力学	17
3.4	慣性ダイアディックを用いた角運動量ベクトルの表現	18
3.5	単一剛体の並進および回転運動の干渉	19
3.6	多体系の力学	20
3.6.1	記号の定義	21
3.6.2	一般化速度の定義	22
3.6.3	運動学の定式化	22
3.6.4	部分角速度・部分速度	23
3.6.5	慣性力ベクトルおよび作用ベクトルの定式化	24
3.6.6	一般化力の定式化	25
3.6.7	ケイン方程式	26
第4章	宇宙機の姿勢制御運動	27
4.1	単一剛体としての定式化	27
4.1.1	回転に関するオイラーの運動法定式	27
4.1.2	軸対称剛体の運動	28
4.2	非単一剛体としての定式化	29
4.2.1	回転体を有する宇宙機の定式化	29
4.2.2	エネルギー散逸部をもつ宇宙機の定式化	30
付録A	慣性ダイアディック	32
付録B	重力傾度トルク	33
付録C	演習問題	35

第1章 表記法と数学的準備

複雑な機械系の運動学表現や動力学を定式化する場合、表記法を設けて統一的に書き表すことが重要である。本章では、ベクトル、行列、座標系などの定義と表記法、および演算則について述べる。

1.1 ベクトル

物体の位置、速度、加速度、角速度、角加速度いずれも3次元空間内のベクトルとして表現できる。ベクトルは一般に大きさや向きをもった量であり、特に向きを定量的に表現しようとする場合、座標系を定義する必要がある。座標系は3つの独立な基底ベクトルの組で規定される。たとえば、基底ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ とする場合、任意のベクトル \mathbf{x} は

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 \quad (1.1)$$

と表現できる。ここで、 x_1, x_2, x_3 は基底ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を用いたときのベクトル \mathbf{x} の座標成分と呼ばれる。さらに

$$\{\mathbf{a}\}^T \triangleq \{\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3\} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \quad (1.3)$$

を定義することで、式(1.1)は形式的に次式のように書き換えられる。

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{a}\}^T \mathbf{x} \quad (1.4)$$

ベクトルの座標成分で構成される \mathbf{x} は、数学一般の定義と異なりベクトルとは呼ばないで、3行1列の行列とみなされる。 \mathbf{x} をベクトル \mathbf{x} の行列表現と呼ぶ。 \mathbf{x} は 3×1 の列行列であり、座標系の選び方によって値が変わるものであるから、ベクトル \mathbf{x} とは区別される。(ベクトル \mathbf{x} との混同をさけるため、 \mathbf{x} に対してベクトルという言い方をしない。) また、 $\{\mathbf{a}\}$ をベクトリックスやベクトル配列という呼び方をする場合もある。

明らかに以下の関係が成り立つ。

$$\mathbf{a}_1 = \{\mathbf{a}\}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \{\mathbf{a}\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \{\mathbf{a}\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.2 ダイアディック

式(1.1)において任意のベクトルは基底ベクトルの線形結合として表現されたが、この拡張として、基底ベクトルの2次形式としてダイアディックが定義できる。基底ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ として

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \quad (1.6)$$

のように書き表される。あるいは、3行3列の行列 $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ を用いて

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{a}\}^T \mathbf{X} \{\mathbf{a}\} \quad (1.7)$$

のように書き換えられる。式 (1.4) でベクトル x そのものは座標系のとり方とは無縁であるが行列 x は座標系のとり方に依存してきまる量であったのと同様に、式 (1.7) でダイアディック X そのものは座標系のとり方とは無縁であるが行列 X は座標系のとり方に依存してきまる量である。

ダイアディックの例として、単位ダイアディック、回転ダイアディック、慣性ダイアディックなどがある。単位ダイアディックについては 1.3.1 節、回転ダイアディックについては 2.1.1 節、慣性ダイアディックについては付録 A で述べる。

1.3 代数演算

本節では、ベクトルやダイアディック、あるいは、その行列表現に関連する代表的な代数演算法と命題を紹介する。任意の 2 つのベクトルを x, y とする。これらの同一の正規直交基底ベクトル $\{a\}$ に対する座標をそれぞれ $x \triangleq [x_1 \ x_2 \ x_3]^T, y \triangleq [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ とする。すなわち

$$\begin{aligned} x &\triangleq \{a\}^T x = \{a\}^T [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \\ y &\triangleq \{a\}^T y = \{a\}^T [y_1 \ y_2 \ y_3]^T \end{aligned}$$

また、任意のダイアディック D は、次式で記述されるものとする。

$$D \triangleq \{b\}^T D \{b\} = \{b\}^T \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \{b\} \quad (1.8)$$

1.3.1 内積

x, y の内積 (スカラー積) は次式で定義される。

$$x \cdot y \triangleq x^T y = y^T x \quad (1.9)$$

ベクトルの内積によってスカラーが得られる。また、ベクトル配列についても以下のように内積を定義する。

$$\{a\} \cdot \{b\}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

ベクトル配列の内積によって行列が得られる。

内積の定義より明らかに

$$x_i = x \cdot a_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.11)$$

が成り立つ。また、正規直交基底ベクトルの性質として

$$\{a\} \cdot \{a\}^T = U_{33} \quad (1.12)$$

が成り立つ。ただし、 U_{33} は 3 次の正方行列である。

また、ダイアディックとベクトルの内積についても以下のように定義する。

$$D \cdot x \triangleq \{a\}^T D x \quad (1.13)$$

例

任意のベクトル v との内積がもとのベクトル v となるようなダイアディック U_{33}

$$U_{33} \cdot v = v \quad \forall v \quad (1.14)$$

を単位ダイアディックという。

1.3.2 外積

x, y の外積は次式で定義される。

$$x \times y \triangleq \{a\}^T \tilde{x} y = -\{a\}^T \tilde{y} x \quad (1.15)$$

ただし、演算子 $(\tilde{\quad})$ は任意の 3 行 1 列の行列 $z \triangleq \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^T$ に作用して

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_2 & z_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

の歪対称行列（反対称行列）を得るものである。ベクトルの外積によってベクトルが得られる。また、ベクトル配列についても以下のように外積を定義する。

$$\{a\} \times \{b\}^T = \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \triangleq \begin{Bmatrix} a_1 \times b_1 & a_1 \times b_2 & a_1 \times b_3 \\ a_2 \times b_1 & a_2 \times b_2 & a_2 \times b_3 \\ a_3 \times b_1 & a_3 \times b_2 & a_3 \times b_3 \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

1.3.3 ノルム

x のユークリッドノルムは次式で定義される。

$$|x| \triangleq \sqrt{x^T x} \quad (1.18)$$

1.3.4 命題

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y| \quad (\text{シュバルツの不等式}) \quad (1.19)$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{三角不等式}) \quad (1.20)$$

$$x \cdot (y \times z) = y \cdot (z \times x) = z \cdot (x \times y) \quad (1.21)$$

$$x \times (y \times z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z \quad (1.22)$$

$$(x \times y) \times z = (z \cdot x)y - (z \cdot y)x \quad (1.23)$$

$$\tilde{x}^T = -\tilde{x} \quad (1.24)$$

$$\tilde{x} y = -\tilde{y} x = (x^T \tilde{y})^T \quad (1.25)$$

$$x^T \tilde{y} z = y^T \tilde{z} x = z^T \tilde{x} y \quad (1.26)$$

第2章 運動学

物体の運動を表現するための変数として、物体の速度や角速度が用いられることが多いが、これらの変数と慣性空間内での位置や角度の関係は、運動学（キネマティクス）と呼ばれ、通常は力やトルクを含まない微分方程式で記述される。本章では運動学に関する基礎事項を紹介する。宇宙機の姿勢、角速度などを表現する場合、通常の機械系と同様にある状態変数を定義することとなるが、特に宇宙機の場合は、ベースが3次元空間に浮遊していること、慣性系、軌道、機体、センサなど基準となりうる要素が複数個存在することから、位置、速度、加速度、姿勢、角速度、角加速度の変数の基準となる座標系を自明にしておく必要がある。このことは、定式化におけるミス避けるだけでなく、数値解析結果の正しい解釈や、さらには実機の運用データの解析においてもミス避けるために重要である。

2.1 座標変換

物体の姿勢は、宇宙機に固定された座標系と他の基準となる座標系との間の座標変換として定義される。

2.1.1 オイラーの回転軸

任意の基準座標系を A 、ある物体またはそれに固定された座標系を B とする。 A と B の両者に固定されたある軸まわりに B を回転させることで物体を任意の姿勢に変更できる。逆に、回転前後の姿勢が与えられたとき、これに関係づける回転軸が唯一定まる。これをオイラー軸と呼び、またこのような定理を回転に関するオイラーの定理という（図 2.1 参照）。 A に固定された任意のベクトルを a 、 B を回転させる前の状態において a と一致し、 B に固定された軸を b 、オイラーの回転軸を λ 、その軸まわりの回転角を θ とするとき、次式が成り立つ。

$$b = a \cos \theta - a \times \lambda \sin \theta + a \cdot \lambda \lambda (1 - \cos \theta) \quad (2.1)$$

また、回転ダイアディック

$$C \triangleq U_{33} \cos \theta - U_{33} \times \lambda \sin \theta + \lambda \lambda (1 - \cos \theta) \quad (2.2)$$

を定義すれば、式 (2.1) は次式のようにも書き換えられる。

$$b = a \cdot C \quad (2.3)$$

導出

A 系に固定されたベクトル α_1, α_2 を考え、 λ と組で $\{\alpha_1 \alpha_2 \lambda\}$ が正規直交基底をなすものとする。また、 B 系に固定されたベクトル β_1, β_2 を考え、 λ と組で $\{\beta_1 \beta_2 \lambda\}$ が正規直交基底をなすものとする。ただし、 B 系を回転させる前の状態において β_1, β_2 はそれぞれ α_1, α_2 と一致するものとする。すなわち $\theta = 0$ において、あるスカラー量 p_1, p_2, p_3 を用いて

$$a = p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + p_3 \lambda \quad (2.4)$$

$$b = p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2 + p_3 \lambda \quad (2.5)$$

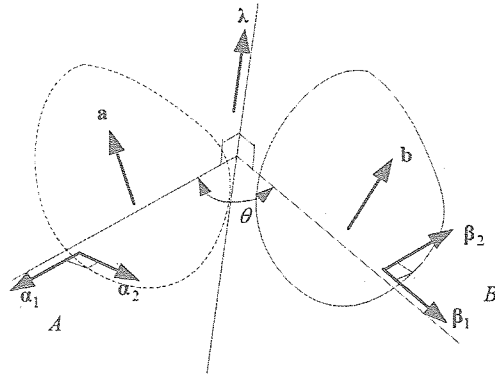


図 2.1: オイラーの回転軸

が成り立つ。一方回転後の β_1, β_2 は, α_1, α_2 の線形結合として

$$\beta_1 = \cos \theta \alpha_1 + \sin \theta \alpha_2 \quad (2.6)$$

$$\beta_2 = -\sin \theta \alpha_1 + \cos \theta \alpha_2 \quad (2.7)$$

として書き表される。したがって

$$b = (p_1 \cos \theta - p_2 \sin \theta) \alpha_1 + (p_1 \sin \theta + p_2 \cos \theta) \alpha_2 + p_3 \lambda \quad (2.8)$$

また, $a \cdot C$ は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} a \cdot C &= a \cos \theta - a \times \lambda \sin \theta + a \cdot \lambda \lambda (1 - \cos \theta) \\ &= p_1 \cos \theta \alpha_1 + p_2 \cos \theta \alpha_2 + p_3 \cos \theta \lambda + p_1 \sin \theta \alpha_2 - p_2 \sin \theta \alpha_1 + p_3 \lambda - p_3 \cos \theta \lambda \\ &= (p_1 \cos \theta - p_2 \sin \theta) \alpha_1 + (p_1 \sin \theta + p_2 \cos \theta) \alpha_2 + p_3 \lambda \end{aligned} \quad (2.9)$$

したがって

$$b = a \cdot C \quad (2.10)$$

2.1.2 方向余弦行列

任意の2つの正規直交基底ベクトルを $\{a\}^T \triangleq \{a_1 \ a_2 \ a_3\}$, $\{b\}^T \triangleq \{b_1 \ b_2 \ b_3\}$ とするとき, 方向余弦と呼ばれる9つのスカラー量は

$$C_{ij} \triangleq a_i \cdot b_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

により定義される。このとき,

$$\{b\}^T = \{a\}^T A C^B \quad (2.12)$$

$$\{a\}^T = \{b\}^T (A C^B)^T \quad (2.13)$$

が成り立つ。ただし

$${}^B C^A \triangleq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

これを $\{b\}$ から $\{a\}$ へ方向余弦行列あるいは座標変換行列という。

方向余弦行列の性質として、以下のようなものがある。

$$C^{-1} = C^T \quad (2.15)$$

$$CC^T = C^T C = U_{33} \quad (2.16)$$

$$({}^B C^A)^{-1} = ({}^B C^A)^T = {}^A C^B \quad (2.17)$$

方向余弦行列により、異なる基底ベクトルに対する座標成分の変換が行われる。たとえば、任意のベクトル r の $\{a\}$ 系での座標を $A_r \triangleq [A_{r1} \ A_{r2} \ A_{r3}]^T$ ($A_{ri} \triangleq r \cdot a_i$ ($i = 1, 2, 3$)), $\{b\}$ 系での座標を $B_r \triangleq [B_{r1} \ B_{r2} \ B_{r3}]^T$ ($B_{ri} \triangleq r \cdot b_i$ ($i = 1, 2, 3$)) とすれば、

$$B_r = A_r {}^A C^B \quad (2.18)$$

が成り立つ。同様に、任意のダイアデック D の $\{a\}$ 系に対応する正方行列を ${}^A D$ (${}^A D_{ij} \triangleq a_i \cdot D \cdot a_j$ ($i, j = 1, 2, 3$)), $\{b\}$ 系に対応する正方行列を ${}^B D$ (${}^B D_{ij} \triangleq b_i \cdot D \cdot b_j$ ($i, j = 1, 2, 3$)) とすれば、

$${}^B D = ({}^A C^B)^T {}^A D {}^A C^B \quad (2.19)$$

が成り立つ。

A 系から B 系へ方向余弦行列を ${}^A C^B$, A 系から \bar{B} 系へ方向余弦行列を ${}^A C^{\bar{B}}$, \bar{B} 系から B 系へ方向余弦行列を ${}^{\bar{B}} C^B$ とするとき、次式が成り立つ。

$${}^A C^B = {}^A C^{\bar{B}} {}^{\bar{B}} C^B \quad (2.20)$$

例

式(2.2)において、 a, b をそれぞれ a_i, b_i で置き換えると

$$b_i = a_i \cdot C \quad (i = 1, 2, 3)$$

が得られる。次に

$$C_{ij} = a_i \cdot b_j = a_i \cdot (a_j \cdot C) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

式(2.3)を用いて

$$C_{ij} = a_i \cdot a_j \cos \theta - a_i \cdot a_j \times \lambda \sin \theta + a_i \cdot \lambda \lambda \cdot a_j (1 - \cos \theta) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

となる。ここで、

$$\lambda_i \triangleq \lambda \cdot a_i \triangleq \lambda \cdot b_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.21)$$

を定義すると、次式が得られる。

$$C_{11} = \cos \theta + \lambda_1^2 (1 - \cos \theta) \quad (2.22)$$

$$C_{12} = -\lambda_3 \sin \theta + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \cos \theta) \quad (2.23)$$

$$C_{13} = \lambda_2 \sin \theta + \lambda_3 \lambda_1 (1 - \cos \theta) \quad (2.24)$$

$$C_{21} = \lambda_3 \sin \theta + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \cos \theta) \quad (2.25)$$

$$C_{22} = \cos \theta + \lambda_2^2 (1 - \cos \theta) \quad (2.26)$$

$$C_{23} = -\lambda_1 \sin \theta + \lambda_2 \lambda_3 (1 - \cos \theta) \quad (2.27)$$

$$C_{31} = \lambda_1 \sin \theta + \lambda_3 \lambda_1 (1 - \cos \theta) \quad (2.28)$$

$$C_{32} = \lambda_1 \sin \theta + \lambda_2 \lambda_3 (1 - \cos \theta) \quad (2.29)$$

$$C_{33} = \cos \theta + \lambda_3^2 (1 - \cos \theta) \quad (2.30)$$

λ が \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) と平行, すなわち \mathbf{b}_i ととも平行であるとき, $\lambda = \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ まわりの回転を表す方向余弦行列 $C_i(\theta)$ は次式のようになる.

$$C_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$C_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$C_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

2.1.3 オイラー角

式 (2.12) や (2.13) より, 任意の 2 つの座標系の関係は, 方向余弦行列により表現できることを述べた. しかし, 方向余弦行列の 9 つの成分は独立ではなく, 3 成分のみ独立である. また, 方向余弦行列そのものから, 回転の様子を物理的にイメージすることは難しい. 方向余弦行列に代わって任意の 2 つの座標系の関係を表す変数として, オイラー角がある. これは, 独立な 3 つのスカラー量の組として定義され, その物理的イメージも容易である.

参照座標系 A に固定された基底ベクトルを $\{\mathbf{a}\}$, 物体座標系 B に固定された基底ベクトルを $\{\mathbf{b}\}$, A 系から B 系へ方向余弦行列を ${}^B C^A$ ($\{\mathbf{b}\} = {}^B C^A \{\mathbf{a}\}$) とする. $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ ($i = 1, 2, 3$) の状態から, まず \mathbf{a}_1 まわりに θ_1 , 次に \mathbf{a}_2 まわりに θ_2 , 最後に \mathbf{a}_3 まわりに θ_3 回転させることによって $\{\mathbf{b}\}$ が決まる場合, この $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を空間固定 1-2-3 系でのオイラー角という. また, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ まわりにこの順で $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 回転させたときに, $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ ($i = 1, 2, 3$) になるとき, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ をボディ固定 1-2-3 系でのオイラー角という. ボディ固定 1-2-3 系のオイラー角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ から方向余弦行列 C への変換は, 次式のように得られる.

$$\begin{aligned} {}^A C^B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ s_1 s_2 c_3 + s_3 c_1 & -s_1 s_2 s_3 + c_3 c_1 & -s_1 c_2 \\ -c_1 s_2 c_3 + s_3 s_1 & c_1 s_2 s_3 + c_3 s_1 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

ただし, $c_i = \cos \theta_i, s_i = \sin \theta_i$ ($i = 1, 2, 3$) である. 同様に, 任意の回転に関する方向余弦行列を単軸回転を組み合わせることで表すことができる.

$$C(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = C^{r_3}(\theta_3) C^{r_2}(\theta_2) C^{r_1}(\theta_1) \quad (2.35)$$

ただし, r_i ($i = 1, 2, 3$) はどの軸まわりの回転かを表す. 最初の回転はどの軸まわりでもよく, 2 番目, 3 番目の回転はその直前の回転で用いていない軸まわりであればよい. したがって, 回転軸の組み合わせは全部で 12 通りあることとなる. 任意の 2 つの座標系に対し, このような連続する 3 つの回転を考えると軸の順序を与えれば, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ が一意に決まる. オイラー角と方向余弦行列との対応関係を表 2.1 に示す.

逆に, 方向余弦行列からオイラー角を求めることを考える.

$|C_{13}| \neq 1$ のとき, ボディ固定 1-2-3 系のオイラー角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は, 以下の手順で一意に得られる.

$$\theta_2 = \sin^{-1} C_{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

表 2.1: 方向余弦行列

回転軸順序	方向余弦行列
1-2-3	$\begin{bmatrix} C_3C_2 & C_3W_2S_1 + S_3C_1 & -C_3S_2C_1 + S_3S_1 \\ -S_3C_2 & -S_3S_2S_1 + C_3C_1 & S_3S_2C_1 + C_3S_1 \\ S_2 & -C_2S_1 & C_2C_1 \end{bmatrix}^T$
1-3-2	$\begin{bmatrix} C_3C_2 & C_3S_2C_1 + S_3S_1 & C_3S_2S_1 - S_3C_1 \\ -S_2 & C_2C_1 & C_2S_1 \\ S_3C_2 & S_3S_2C_1 - C_3S_1 & S_3S_2S_1 + C_3C_1 \end{bmatrix}^T$
2-3-1	$\begin{bmatrix} C_2C_1 & S_2 & -C_2S_1 \\ -C_3S_2C_1 + S_3S_1 & C_3C_2 & C_3S_2S_1 + S_3C_1 \\ S_3S_2C_1 + C_3S_1 & -S_3C_2 & -S_3S_2S_1 + C_3C_1 \end{bmatrix}^T$
2-1-3	$\begin{bmatrix} C_3C_1 + S_3S_2S_1 & S_3C_2 & -C_3S_1 + S_3S_2C_1 \\ -S_3C_1 + C_3S_2S_1 & C_3C_2 & S_3S_1 + C_3S_2C_1 \\ C_2S_1 & -S_2 & C_2C_1 \end{bmatrix}^T$
3-1-2	$\begin{bmatrix} C_3C_1 - S_3S_2S_1 & C_3S_1 + S_3S_2C_1 & -S_3C_2 \\ -C_2S_1 & C_2C_1 & S_2 \\ S_3C_1 + C_3S_2S_1 & S_3S_1 - C_3S_2C_1 & C_3C_2 \end{bmatrix}^T$
3-2-1	$\begin{bmatrix} C_2C_1 & C_1S_1 & -S_2 \\ -C_3S_1 + S_3S_2C_1 & C_3C_1 + S_3S_2S_1 & S_3C_2 \\ S_3S_1 + C_3S_2C_1 & -S_3C_1 + C_3S_2S_1 & C_3C_2 \end{bmatrix}^T$
1-2-1	$\begin{bmatrix} C_2 & S_2S_1 & -S_2C_1 \\ S_3S_2 & C_3C_1 - S_3C_2S_1 & C_3S_1 + S_3C_2C_1 \\ C_3S_2 & -S_3C_1 - C_3C_2S_1 & -S_3S_1 + C_3C_2C_1 \end{bmatrix}^T$
1-3-1	$\begin{bmatrix} C_2 & S_2C_3 & S_2S_1 \\ -C_3S_2 & C_3C_2C_1 - S_3S_1 & C_3C_2S_1 + S_3C_1 \\ S_3S_2 & -S_3C_2C_1 - C_3S_1 & -S_3C_2S_1 + C_3C_1 \end{bmatrix}^T$
2-1-2	$\begin{bmatrix} C_3C_2 - S_3C_2S_1 & S_3S_2 & -C_3W_1 - S_3C_2C_1 \\ S_2S_1 & C_2 & S_2C_1 \\ S_3C_1 + C_3C_2S_1 & -C_3S_2 & -S_3S_1 + C_3C_2C_1 \end{bmatrix}^T$
2-3-2	$\begin{bmatrix} C_3C_2C_1 - S_3S_1 & C_3S_1 & -C_3C_2S_1 - S_3C_1 \\ -S_2C_1 & C_2 & S_2S_1 \\ S_3C_2C_1 + C_3S_2 & -S_3C_2S_1 + C_3C_1 & \end{bmatrix}^T$
3-1-3	$\begin{bmatrix} C_3C_2 - S_3C_2S_1 & C_3S_1 + S_3C_2C_1 & S_3S_2 \\ -S_3C_1 - C_3C_2S_1 & -S_3S_2 + C_3C_2C_1 & C_3S_2 \\ S_2S_1 & -S_2C_1 & C_2 \end{bmatrix}^T$
3-2-3	$\begin{bmatrix} C_3C_2C_1 - S_3S_1 & C_3C_2S_1 + S_3C_1 & -C_3S_2 \\ -S_3C_2C_1 - C_3S_1 & -S_3C_2S_1 + C_3C_1 & S_3S_2 \\ S_2C_1 & S_2S_1 & C_2 \end{bmatrix}^T$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{-C_{23}}{C_2} \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\theta_1 = \begin{cases} \alpha & (C_{33} \geq 0) \\ \pi - \alpha & (C_{33} < 0) \end{cases}$$

$$\beta = \sin^{-1} \frac{-C_{12}}{C_2} \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\theta_3 = \begin{cases} \beta & (C_{11} \geq 0) \\ \pi - \beta & (C_{11} < 0) \end{cases}$$

ところが、 $|C_{13}| = 1$ のときは θ_1, θ_3 を一意に決めることが不可能になる。一般に、どのオイラー角を用いる場合でもこのような特異点が存在し、これがオイラー角を用いる場合の大きな欠点である。

2.1.4 クォータニオン

オイラー角の特異点の問題を避けるため、クォータニオンと呼ばれる変数もしばしば姿勢表記に用いられる。これは、従属な4変数の組で表され、個々の物理的解釈は難しいが、大域的に特異点を持たないこと、方向余弦行列との関係式が調和関数を含まないこと、後ほど述べるがその微分形式が非常に簡単な数式で書き表されることなどの利点がある。

A に固定された基底ベクトルを $\{a\}^T \triangleq \{a_1 \ a_2 \ a_3\}$, B に固定された基底ベクトルを $\{b\}^T \triangleq \{b_1 \ b_2 \ b_3\}$, さらにオイラーの回転軸を λ , 回転角を θ とし, まずクォータニオンベクトルと呼ばれるベクトル ϵ を次式で定義する.

$$\epsilon \triangleq \lambda \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.36)$$

このとき, クォータニオンは, 次の4つのスカラー量の組として定義できる.

$$\epsilon_i \triangleq \epsilon \cdot a_i = \epsilon \cdot b_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.37)$$

$$\epsilon_4 \triangleq \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.38)$$

クォータニオンの拘束条件は次式で与えられる.

$$\sum_{i=1}^4 \epsilon_i^2 = 1 \quad (2.39)$$

次に, 方向余弦行列とクォータニオンとの間の関係式を示す.

$$C_{11} = \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 = 1 - 2\epsilon_2^2 - 2\epsilon_3^2 \quad (2.40)$$

$$C_{12} = 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_3\epsilon_4) \quad (2.41)$$

$$C_{13} = 2(\epsilon_3\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_4) \quad (2.42)$$

$$C_{21} = 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_3\epsilon_4) \quad (2.43)$$

$$C_{22} = \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2 - \epsilon_1^2 + \epsilon_4^2 = 1 - 2\epsilon_3^2 - 2\epsilon_1^2 \quad (2.44)$$

$$C_{23} = 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \epsilon_1\epsilon_4) \quad (2.45)$$

$$C_{31} = 2(\epsilon_3\epsilon_1 - \epsilon_2\epsilon_4) \quad (2.46)$$

$$C_{32} = 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_4) \quad (2.47)$$

$$C_{33} = \epsilon_3^2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 + \epsilon_4^2 = 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 \quad (2.48)$$

この, 逆変換は次式で与えられる.

$$\epsilon_1 = \frac{C_{32} - C_{23}}{4\epsilon_4} \quad (2.49)$$

$$\epsilon_2 = \frac{C_{13} - C_{31}}{4\epsilon_4} \quad (2.50)$$

$$\epsilon_3 = \frac{C_{21} - C_{12}}{4\epsilon_4} \quad (2.51)$$

$$\epsilon_4 = \frac{1}{2}(1 + C_{11} + C_{22} + C_{33})^{1/2} \quad (2.52)$$

また, 式(2.1)はクォータニオンを用いて次のように書き換えられる.

$$b = a + 2[\epsilon_4 \epsilon \times a + \epsilon \times (\epsilon \times a)] \quad (2.53)$$

導出

式(1.1.23)より

$$C_{11} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 + 2\lambda_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

ここで

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \lambda \cdot a_1 \sin \frac{\theta}{2} = \varepsilon \cdot a_1 = \varepsilon_1 \\ \cos \frac{\theta}{2} &= \varepsilon_4 \end{aligned}$$

したがって,

$$C_{11} = 2\varepsilon_4^2 - 1 + 2\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2$$

他も同様に得られる.

2.2 微分量

2.2.1 角速度

2つの座標系 A, B に固定された正規直交基底ベクトルをそれぞれ $\{a\}^T \triangleq \{a_1 \ a_2 \ a_3\}$, $\{b\}^T \triangleq \{b_1 \ b_2 \ b_3\}$ とし, これらの方向余弦行列を C とする, すなわち

$$C_{ij} = a_i \cdot b_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.54)$$

また, C の時間微分を \dot{C} で書き表すこととし, これは C の各要素の時間微分で定義するものとする. すなわち

$$\dot{C} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

ここで, 式(2.16)の両辺を微分して

$$\dot{C}^T C + C^T \dot{C} = O_{33} \quad (2.56)$$

したがって

$$C^T \dot{C} = -\dot{C}^T C \quad (2.57)$$

これは, $C^T \dot{C}$ が歪対称行列であることを意味する. このとき新たな変数 $\omega \in R^{3 \times 1}$ を導入し,

$$\tilde{\omega} \triangleq C \dot{C}^T \quad (2.58)$$

を定義する. $\tilde{\omega}$ は A からみた B の角速度行列と呼ばれる. また, 角速度ベクトルを次式により定義する.

$$\omega \triangleq \{b\}^T \tilde{\omega} \quad (2.59)$$

物体の回転運動における任意時刻の瞬間回転軸は回転に関するオイラー軸と一致するが, 角速度ベクトルは, オイラー軸まわりの回転運動に関するベクトルであり, 大きさは $\dot{\theta}$, 向きはオイラー軸と一致する, すなわち次の関係が成り立つことが示される.

$$\omega = \dot{\theta} \lambda \quad (2.60)$$

ただし, θ, λ の意味は, 2.1.1 節と同じである.

なお、 A からみた B の角速度ベクトルであることを明示する場合は、 ω の代わりに ${}^A\omega^B$ と記述する。同様に、 B からみた A の角速度ベクトルは ${}^B\omega^A$ と記述する。このとき、次の関係式が成り立つ。

$${}^A\omega^B = -{}^B\omega^A \quad (2.61)$$

また、中間的な座標系 A_1, \dots, A_n を用いて角速度ベクトル ${}^A\omega^B$ は次式のようにも書き表される。

$${}^A\omega^B = {}^A\omega^{A_1} + {}^{A_1}\omega^{A_2} + \dots + {}^{A_{n-1}}\omega^{A_n} + {}^{A_n}\omega^B \quad (2.62)$$

2.2.2 任意のベクトルの微分

同一ベクトルの異なる座標系に対する時間微分の関係を導出する。任意のベクトル $r = \{b\}^T r$ の A 系に対する時間微分について考える。 A 系に対する時間微分とは、 A 系から見た $r = \{b\}^T r$ の時間変化率の極限を意味する。

$$\left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_A = \left\{ \frac{d\{b\}^T r}{dt} \right\}_A = \left\{ \frac{d\{b\}^T}{dt} \right\}_A r + \{b\}^T \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_A = \left\{ \frac{d\{b\}^T}{dt} \right\}_A r + \{b\}^T \dot{r} \quad (2.63)$$

ただし、 $\dot{r} \triangleq \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_A$ を定義する。また、右下添え字 A は A 系に対する時間微分を意味する。

ここで

$$\left\{ \frac{d\{b\}^T}{dt} \right\}_A = \left\{ \frac{d\{a\}^T C}{dt} \right\}_A = \left\{ \frac{d\{a\}^T}{dt} \right\}_A C + \{a\}^T \left\{ \frac{dC}{dt} \right\}_A = \{a\}^T \dot{C} = \{b\}^T C^T \dot{C} = \{b\}^T \tilde{\omega} \quad (2.64)$$

したがって

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_A &= \{b\}^T (\dot{r} + \tilde{\omega} r) \\ &= \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_B + \omega \times r \end{aligned} \quad (2.65)$$

2.2.3 並進速度、加速度

剛体 B 上に P, Q の 2 点があるとする (図 2.2 参照)。 A からみた B の角速度を ${}^A\omega^B$ 、 A からみた P の並進速度を ${}^A v^P$ 、 A からみた Q の並進速度を ${}^A v^Q$ とするとき、次の関係式が成り立つ。

$${}^A v^P = {}^A v^Q + {}^A\omega^B \times r \quad (2.66)$$

ただし、 r は Q から P への位置ベクトルである。また、 A からみた P の並進加速度を ${}^A a^P$ 、 A からみた Q の並進加速度を ${}^A a^Q$ 、 A からみた B の角加速度を ${}^A \alpha^B$ とするとき、次の関係式が成り立つ。

$${}^A a^P = {}^A a^Q + {}^A\omega^B \times ({}^A\omega^B \times r) + {}^A \alpha^B \times r \quad (2.67)$$

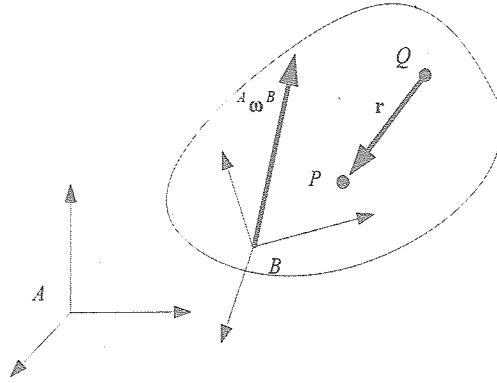


図 2.2: 同一物体上の異なる 2 点

2.2.4 オイラー角の微分

式 (2.35) を微分すると、次式が得られる。

$$\dot{C} = \dot{\theta}_1 C^{r_3}(\theta_3) C^{r_2}(\theta_2) \frac{\partial C^{r_1}(\theta_1)}{\partial \theta_1} + \dot{\theta}_2 C^{r_3}(\theta_3) \frac{\partial C^{r_2}(\theta_2)}{\partial \theta_2} C^{r_1}(\theta_1) + \dot{\theta}_3 \frac{\partial C^{r_3}(\theta_3)}{\partial \theta_3} C^{r_2}(\theta_2) C^{r_1}(\theta_1) \quad (2.68)$$

ここで、次の関係式に着目する。

$$(Cx)^\sim = C\tilde{x}C^T \quad (2.69)$$

$$\tilde{\omega} = C\dot{C}^T \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial C^{r_i}(\theta_i)}{\partial \theta_i} = \tilde{\delta}_{r_i}^T C^{r_i}(\theta_i) \quad (2.71)$$

ただし、 $\delta_{r_i} \in R^{3 \times 1}$ は r_i 番目の要素が 1 で他が 0 の行列である。たとえば

$$\frac{\partial C^{r_1}(\theta_1)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ 0 & -\cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

式 (2.68)~(2.71) より、次式が得られる。

$$\omega = G(\theta)\dot{\theta} \quad (2.73)$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} C^{r_3}(\theta_3) C_{*r_1}^{r_2}(\theta_2) & C_{*r_2}^{r_3} & \delta_{r_3} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

ただし、 $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]^T$ 、 $C_{*r_j}^{r_i}(\theta_i) \in R^{3 \times 1}$ は $C^{r_i}(\theta_i)$ の r_j 番目の列を表す。オイラー角と $G(\theta)$ の関係を表 2.2 にまとめる。また、 $G(\theta)$ が正則であるとき

$$\dot{\theta} = G^{-1}(\theta)\omega \quad (2.75)$$

が計算できる。 $G(\theta)$ が正則にならない状態は、ジンバルロックとして知られており、このように特異点が存在することがオイラー角の欠点である。

2.2.5 クォータニオンの微分

A 系からみた B 系の角速度を ${}^A\omega^B$ とすると、次式が成り立つ。

$${}^A\omega^B = 2(\varepsilon_4 \frac{B d\varepsilon}{dt} - \varepsilon_4 \varepsilon - \varepsilon \times \frac{B d\varepsilon}{dt}) \quad (2.76)$$

表 2.2: オイラー角の微分にもなう変換行列

回転軸順序	変換行列
1-2-3	$\begin{bmatrix} c_3 s_2 & s_3 & 0 \\ -s_3 c_2 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
1-3-2	$\begin{bmatrix} c_3 c_2 & -s_3 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \\ s_3 c_2 & c_3 & 0 \end{bmatrix}^T$
2-1-3	$\begin{bmatrix} s_3 c_2 & c_3 & 0 \\ c_3 c_2 & -s_3 & 0 \\ -s_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
2-3-1	$\begin{bmatrix} s_2 & 0 & 1 \\ c_3 c_2 & s_3 & 0 \\ -s_3 c_2 & c_3 & 0 \end{bmatrix}^T$
3-1-2	$\begin{bmatrix} -s_3 c_2 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \\ c_3 c_2 & s_3 & 0 \end{bmatrix}^T$
3-2-1	$\begin{bmatrix} -s_2 & 0 & 1 \\ s_3 c_2 & c_3 & 0 \\ c_3 c_2 & -s_3 & 0 \end{bmatrix}^T$
1-2-1	$\begin{bmatrix} c_2 & 0 & 1 \\ s_3 s_2 & c_3 & 0 \\ c_3 s_2 & -s_3 & 0 \end{bmatrix}^T$
1-3-1	$\begin{bmatrix} c_2 & 0 & 1 \\ -c_3 s_2 & s_3 & 0 \\ s_3 s_2 & c_3 & 0 \end{bmatrix}^T$
2-1-2	$\begin{bmatrix} s_3 s_2 & c_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \\ -c_3 s_2 & s_3 & 0 \end{bmatrix}^T$
2-3-2	$\begin{bmatrix} c_3 s_2 & -s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \\ s_3 s_2 & c_3 & 0 \end{bmatrix}^T$
3-1-3	$\begin{bmatrix} s_3 s_2 & c_3 & 0 \\ c_3 s_2 & -s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
3-2-3	$\begin{bmatrix} -c_3 s_2 & s_3 & 0 \\ s_3 s_2 & c_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

また,

$$\omega \triangleq \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon \triangleq \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

$$E \triangleq \begin{bmatrix} \varepsilon_4 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

を定義するとき, 次式が成り立つ.

$$\omega = 2\dot{\varepsilon}E \tag{2.77}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}\omega E^T \tag{2.78}$$

式 (1.1) の数値微分を行うことで、クォータニオンが得られる.

第3章 動力学

物体の動的挙動を表す運動方程式は加速度，角加速度と力，トルクとの関係を表すものであり，このような関係は動力学（ダイナミクス）と呼ばれる．本章では動力学の基礎事項を紹介する．

3.1 質点の力学

図 3.1 において，質点 P の慣性系 N に対する任意の点 O まわりの角運動量ベクトル

$$h^{P/O} = r \times m \left\{ \frac{dR}{dt} \right\}_N \quad (3.1)$$

上式を慣性系 N で微分する．

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dh^{P/O}}{dt} \right\}_N &= \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N \times m \left\{ \frac{dR}{dt} \right\}_N + r \times m \left\{ \frac{d^2R}{dt^2} \right\}_N \\ &= \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N \times m \left\{ \frac{d(R_O + r)}{dt} \right\}_N + r \times f \\ &= m \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N \times \left\{ \frac{dR_O}{dt} \right\}_N + r \times f \end{aligned} \quad (3.2)$$

したがって， $r \times f = \tau$ とすれば

$$\left\{ \frac{dh^{P/O}}{dt} \right\}_N + \left\{ \frac{dR_O}{dt} \right\}_N \times m \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N = \tau \quad (3.3)$$

が得られる．

もし，点 O が慣性系 N に固定されている場合は，式 (3.3) は次のように書き換えられる．

$$\left\{ \frac{dh^{P/O}}{dt} \right\}_N = \tau \quad (3.4)$$

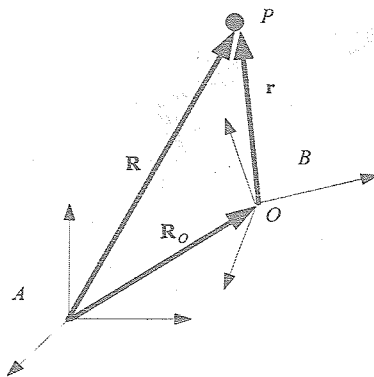


図 3.1: 質点

3.2 質点系の力学

図 3.2 において、質点 P_i ($i = 1, \dots, N$) に働く力の釣り合いより

$$m_i \left\{ \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} \right\}_N = \mathbf{f}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{ij} \quad (3.5)$$

これを $i = 1, \dots, N$ について足し合わせると次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^N m_i \left\{ \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} \right\}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{ij} \quad (3.6)$$

ここで、作用反作用の法則 $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ を用いると

$$\sum_{i=1}^N m_i \left\{ \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} \right\}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \quad (3.7)$$

が得られる。また、以下の関係に注意する。

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_C + \boldsymbol{\rho}_i \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C \quad (m = \sum_{i=1}^N m_i) \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

$$m \left\{ \frac{d^2 \mathbf{R}_C}{dt^2} \right\}_N = \mathbf{f} \quad (\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i) \quad (3.11)$$

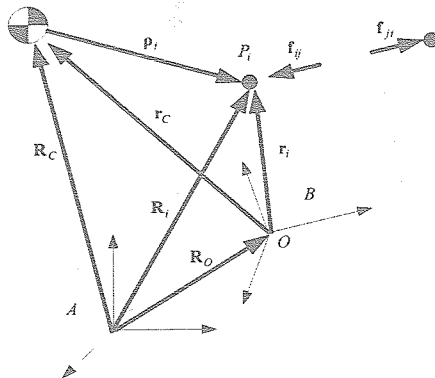


図 3.2: 質点系

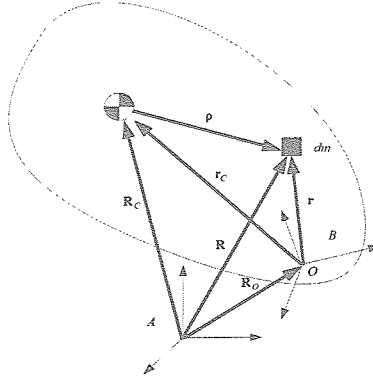


図 3.3: 単一剛体 (連続体)

質点系全体 P の慣性系 N に対する任意の点 O まわりの角運動量ベクトル

$$h^{P/O} = \sum_{i=1}^N r_i \times m_i \left\{ \frac{dR_i}{dt} \right\}_N \quad (3.12)$$

上式を慣性系で微分する.

$$\left\{ \frac{dh^{P/O}}{dt} \right\}_N = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{dr_i}{dt} \right\}_N \times m_i \left\{ \frac{dR_i}{dt} \right\}_N + \sum_{i=1}^N r_i \times m_i \left\{ \frac{d^2 R_i}{dt^2} \right\}_N \quad (3.13)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{dr_i}{dt} \right\}_N \times m_i \left\{ \frac{d(R_O + r_i)}{dt} \right\}_N + \sum_{i=1}^N r_i \times \left(f_i + \sum_{j=1}^N f_{ij} \right) \quad (3.14)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{dr_i}{dt} \right\}_N \times m_i \left\{ \frac{dR_O}{dt} \right\}_N + \sum_{i=1}^N r_i \times f_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N r_i \times f_{ij} \quad (3.15)$$

また, f_{ij} は $(r_i - r_j)$ と平行であるから

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N r_i \times f_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (r_i - r_j) \times f_{ij} = 0 \quad (3.16)$$

が成り立つ. したがって, 次式が得られる.

$$\left\{ \frac{dh^{P/O}}{dt} \right\}_N + \left\{ \frac{dR_O}{dt} \right\}_N \times m \left\{ \frac{dr_C}{dt} \right\}_N = \tau \quad (3.17)$$

ただし, $\tau = \sum_{i=1}^N r_i \times f_i$.

もし, 点 O が慣性系 N に固定されている場合は, 式 (3.16) は次のように書き換えられる.

$$\left\{ \frac{dh^{P/O}}{dt} \right\}_N = \tau \quad (3.18)$$

3.3 単一剛体 (連続体) の力学

図 3.3 において, 剛体 B の慣性系 N に対する任意の点 O まわりの角運動量ベクトル $h^{B/O}$ は次式で表される.

$$h^{B/O} = \int r \times \left\{ \frac{dR}{dt} \right\}_N dm \quad (3.19)$$

両辺を慣性系で微分する.

$$\left\{ \frac{dh^{B/O}}{dt} \right\}_N = \int \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N \times \left\{ \frac{dR}{dt} \right\}_N dm + \int r \times \left\{ \frac{d^2 R}{dt^2} \right\}_N dm \quad (3.20)$$

ここで

$$\int \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N \times \left\{ \frac{dR}{dt} \right\}_N dm = \int \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N \times \left\{ \frac{d(R_O + r)}{dt} \right\}_N dm = \int \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N \times \left\{ \frac{dR_O}{dt} \right\}_N dm \quad (3.21)$$

$$\int r \times \left\{ \frac{d^2 R}{dt^2} \right\}_N dm = \int r \times (df_{in} + df_{ex}) = \int r \times df_{ex} \quad (3.22)$$

ただし, df_{in} は微小要素に作用する内力, df_{ex} は微小要素に作用する外力である. また, $\int r \times df_{ex}$ は, 点 O まわりに作用するトルクとしてひとまとめに τ_O で表すこととする. 以上より, 式 (3.20) は次のように書き換えられる.

$$\left\{ \frac{dh^{B/O}}{dt} \right\}_N + \left\{ \frac{dR_O}{dt} \right\}_N \times m \left\{ \frac{dr_C}{dt} \right\}_N = \tau_O \quad (3.23)$$

もし, 点 O が慣性系 N に固定されている場合は, 式 (3.23) は次のように書き換えられる.

$$\left\{ \frac{dh^{B/O}}{dt} \right\}_N = \tau_O \quad (3.24)$$

3.4 慣性ダイアディックを用いた角運動量ベクトルの表現

$$\begin{aligned} h^{B/O} &= \int r \times \left\{ \frac{dR}{dt} \right\}_N dm \\ &= \int (r_C + \rho) \times \left\{ \frac{dR}{dt} \right\}_N dm \\ &= \int r_C \times \left\{ \frac{d(R_O + r)}{dt} \right\}_N dm + \int \rho \times \left\{ \frac{d(R_C + \rho)}{dt} \right\}_N dm \\ &= \int r_C \times \left\{ \frac{dR_O}{dt} \right\}_N dm + \int r_C \times \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N dm + \int \rho \times \left\{ \frac{dR_C}{dt} \right\}_N dm + \int \rho \times \left\{ \frac{d\rho}{dt} \right\}_N dm \end{aligned} \quad (3.25)$$

ここで $\int \rho \times \left\{ \frac{dR_C}{dt} \right\}_N dm = 0$, $\int r_C \times \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}_N dm = m r_C \times \left\{ \frac{dr_C}{dt} \right\}_N$, $\left\{ \frac{dR_O}{dt} \right\}_N = v$ を利用すると, 次式が得られる.

$$h^{B/O} = \int \rho \times \left\{ \frac{d\rho}{dt} \right\}_N dm + m r_C \times \left\{ \frac{dr_C}{dt} \right\}_N + m r_C \times v \quad (3.26)$$

さらに, ρ, r_C は剛体に固定されたベクトルであることに注意して

$$\begin{aligned} h^{B/O} &= \int \rho \times (\omega \times \rho) dm + m r_C \times (\omega \times r_C) + m r_C \times v \\ &= \int \{ (\rho \cdot \rho) \omega - (\rho \cdot \omega) \rho \} dm + m \{ (r_C \cdot r_C) \omega - (r_C \cdot \omega) r_C \} + m r_C \times v \\ &= \left[\int \{ (\rho \cdot \rho) U_{33} - \rho \rho \} dm \right] \cdot \omega + \left[m \{ (r_C \cdot r_C) U_{33} - r_C r_C \} \right] \cdot \omega + m r_C \times v \end{aligned} \quad (3.27)$$

ここで, 慣性ダイアディック

$$I^{B/B^*} = \int \{ (\rho \cdot \rho) U_{33} - \rho \rho \} dm \quad (3.28)$$

$$I^{B^*/O} = m \{ (r_C \cdot r_C) U_{33} - r_C r_C \} \quad (3.29)$$

を用いると

$$h^{B/O} = I^{B/B^*} \cdot \omega + I^{B^*/O} \cdot \omega + m r_C \times v \quad (3.30)$$

が得られる。また、

$$\begin{aligned} I^{B/O} &= I^{B/B^*} + I^{B^*/O} \\ &= \int \{(r \cdot r) U_{33} - r r\} dm \end{aligned} \quad (3.31)$$

を用いると

$$h^{B/O} = I^{B/O} \cdot \omega + m r_C \times v \quad (3.32)$$

のようにも書き表される。

3.5 単一剛体の並進および回転運動の干渉

図 3.4 のように、単一剛体の任意の点 O に並進力とトルクが作用する場合の運動について定式化する。ただし、点 O に作用する並進力ベクトルを $f = \{f\}^T f$ 、点 O まわりのトルクベクトルを $\tau = \{b\}^T \tau$ とする。まず、回転に関する運動方程式を導出するため、式 (3.32) を慣性系で微分する。

$$\left\{ \frac{dh^{P/O}}{dt} \right\}_N = \left\{ \frac{d(I^{B/O} \cdot \omega)}{dt} \right\}_N + m \left\{ \frac{dr_C}{dt} \right\}_N \times v + m r_C \times \left\{ \frac{dv}{dt} \right\}_N \quad (3.33)$$

この式を式 (3.23) に代入し、 $\left\{ \frac{dR_{O}}{dt} \right\}_N = v$ とすると、次の運動方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{d(I^{B/O} \cdot \omega)}{dt} \right\}_N + m r_C \times \left\{ \frac{dv}{dt} \right\}_N = \tau_O \quad (3.34)$$

一方、並進運動に関する運動方程式は運動量の慣性系での導関数として次式で書き表される。

$$\left\{ \frac{d(mv^{B^*})}{dt} \right\}_N = f \quad (3.35)$$

ただし、 v^{B^*} は慣性系 N からみた質量中心 B^* の速度ベクトルであり、式 (2.66) より

$$v^{B^*} = v^O + r_C \times \omega \quad (3.36)$$

の関係が成り立つ。式 (3.34), (3.35), (3.36) より、 $\{b\}$ 基底の成分を取り出すと次の運動方程式が得られる。

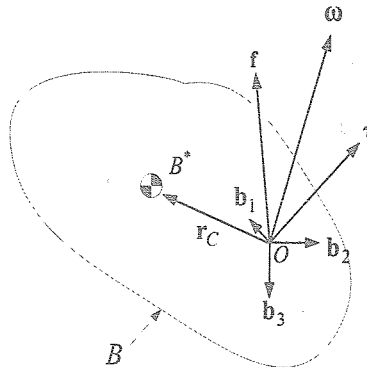


図 3.4: 並進力およびトルクの作用する単一剛体

$$\begin{bmatrix} I^{B/O} & -m\tilde{r}_C^T \\ -m\tilde{r}_C & mU_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}I^{B/O}\omega - m\tilde{r}_C^T\tilde{\omega}v \\ m\tilde{\omega}(v + \tilde{\omega}r_C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

また、点 O が質量中心 B^* と一致するとき、 $r_C = 0, I^{B/O} = I^{B/B^*}, v = v^{B^*}$ となるから、これらを式 (3.37) に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} I^{B/B^*} & O_{33} \\ O_{33} & mU_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v}^{B^*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}I^{B/B^*}\omega \\ m\tilde{\omega}v^{B^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.6 多体系の力学

3.1 から 3.3 節で、質点、質点系、および単一剛体の運動を定式化した。導出の仮定でいずれもニュートンの法則を用いた。しかし、系の自由度が大きくなると、ニュートンの法則による定式化は非常に困難になる。

複雑な構造を有する宇宙機を定式化する上で、多体系力学を理解する必要が生じる。多体系は、そのトポロジ構造に応じて図 3.5 に示されるようないくつかの種類に分類されるが、通常の宇宙機は中心剛体に付属物がツリー状に結合したものと取り扱う場合が多い。本節では、図 3.6 に示すツリー構造について定式化する。

多体系の定式化方法として、ニュートンオイラー方程式、ラグランジュ方程式、ハミルトン方程式、ケイン方程式などさまざまなものが提案されているが、本節ではケインの方法による導出を紹介する。ケインの方法では、系の自由度を表す一般化速度を選択し、系の各部の速度を一般加速度とその係数ベクトルである部分速度との積和に分解し、慣性力や結合部に作用する力と部分速度との内積をとることによって運動方程式を得る。本手法の特徴は、運動方程式を導出する初期の段階で、拘束を受けない自由な方向にのみ変数を設定し、運動方程式の低次元化と拘束力の消去を行うことである。

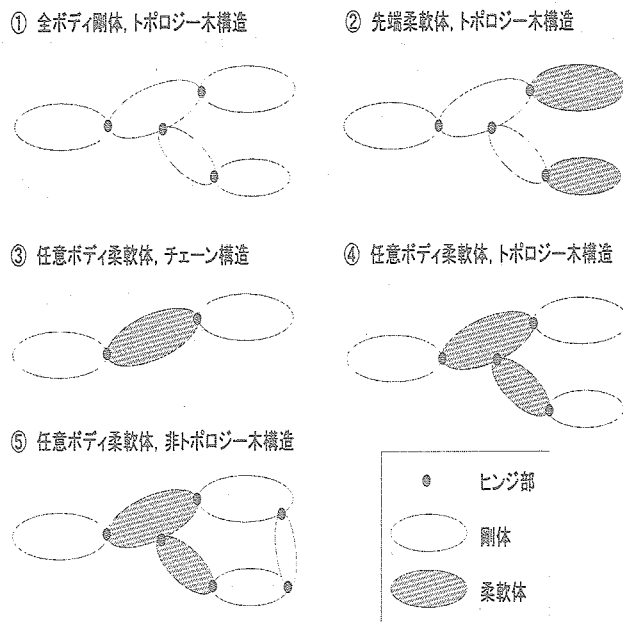


図 3.5: 多体系の分類

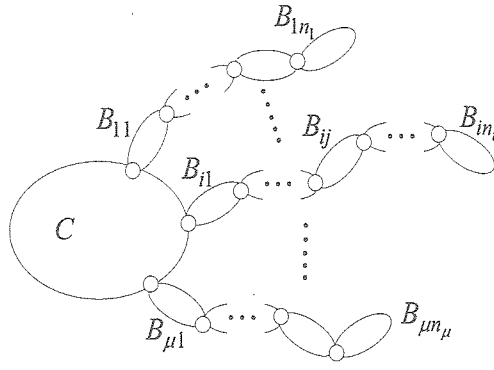


図 3.6: 剛体で構成されるトポロジーツリー構造

3.6.1 記号の定義

μ	:	リンク数
n_i	:	リンク i の構成要素数
N	:	慣性系
C	:	中心剛体
B_{ij}	:	リンク i の j 番目要素
C^*	:	C の質量中心
B_{ij}^*	:	B_{ij} の質量中心
J_{ij}	:	リンク i の j 番目の関節
$\{i\}$:	N に固定された基底ベクトル
$\{c\}$:	C に固定された基底ベクトル
$\{b_{ij}\}$:	B_{ij} に固定された基底ベクトル
q_{ij}	:	J_{ij} の回転角
A_{ij}	:	方向余弦行列 ($\{b_{ij}\} = A_{ij}\{c\}$)
m_C	:	C の質量
$m_{B_{ij}}$:	B_{ij} の質量
$I^{C/C^*} = \{c\}^T I^{C/C^*} \{c\}$:	C の慣性行列
$I^{B_{ij}/B_{ij}^*} = \{b_{ij}\}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} \{b_{ij}\}$:	B_{ij} の慣性ダイアディック
$g_{ij} = \{b_{ij}\}^T g_{ij}$:	J_{ij} の回転軸ベクトル
$d_{0i} = \{c\}^T d_{0i}$:	C^* から J_{i1} までの位置ベクトル
$l_{ij} = \{b_{ij}\}^T l_{ij}$:	J_{ij} から J_{ij+1} までの位置ベクトル
$d_{ij} = \{b_{ij}\}^T d_{ij}$:	B_{ij}^* から J_{ij+1} までの位置ベクトル
$p^{CB_{ij}^*} = \{c\}^T p^{CB_{ij}^*}$:	C^* から B_{ij}^* への位置ベクトル
${}^N \omega^C = \{c\}^T {}^N \omega^C$:	C の角速度ベクトル
${}^N \omega^{B_{ij}} = \{b_{ij}\}^T {}^N \omega^{B_{ij}}$:	B_{ij} の角速度ベクトル
$v^{C^*} = \{c\}^T v^{C^*}$:	C^* の速度ベクトル
$v^{B_{ij}^*} = \{b_{ij}\}^T v^{B_{ij}^*}$:	B_{ij}^* の速度ベクトル
$\tau_{Cex} = \{c\}^T \tau_{Cex}$:	C に作用する外力トルクベクトル
$f_{Cex} = \{c\}^T f_{Cex}$:	C に作用する外力ベクトル
$\tau_{B_{ij}in} = \{b_{ij}\}^T \tau_{B_{ij}in}$:	B_{ij} に作用する内力トルクベクトル

3.6.2 一般化速度の定義

次のように一般化速度 (generalized speed) を選択する場合を考える.

$$u_i = \begin{cases} N_{\omega^C} \cdot c_i & (i = 1, 2, 3) \\ N_{v^{C^*}} \cdot c_{i-3} & (i = 4, 5, 6) \end{cases} \quad (3.39)$$

$$u_{6+n_1+\dots+n_{i-1}+j} = \dot{q}_{ij} \quad (i = 1, \dots, \mu, j = 1, \dots, n_i) \quad (3.40)$$

u_1, \dots, u_3 は中心剛体の角速度成分, u_4, \dots, u_6 は中心剛体の並進速度成分, は各関節の回転角である. これらの一般化速度は, [1/s] または [m/s] の次元をもち, またいずれも独立で, 自由度と同じ個数だけある.

3.6.3 運動学の定式化

各要素の位置, 角速度, 速度, 角加速度, 加速度などの運動学に関する変数を一般化速度およびその1階微分の関数として導出する.

位置ベクトル

$$p^{CB_{ij}^*} = \{c\}^T d_{0i} + \sum_{k=1}^j \{b_{ik}\}^T l_{ik} - \{b_{ij}\}^T d_{ij} = \{c\}^T p^{CB_{ij}^*} \quad (3.41)$$

ただし

$$p^{CB_{ij}^*} = d_{0i} + \sum_{k=1}^j A_{ik}^T l_{ik} - A_{ij}^T d_{ij}$$

角速度ベクトル・速度ベクトル

$$N_{\omega^C} = \{c\}^T N_{\omega^C} \quad (3.42)$$

$$N_{\omega^{B_{ij}}} = \{c\}^T N_{\omega^{B_{ij}}} \quad (3.43)$$

$$N_{v^{C^*}} = \{c\}^T N_{v^{C^*}} \quad (3.44)$$

$$N_{v^{B_{ij}^*}} = N_{v^{C^*}} + \frac{C dp^{CB_{ij}^*}}{dt} + N_{\omega^C} \times p^{CB_{ij}^*} = \{c\}^T N_{v^{B_{ij}^*}} \quad (3.45)$$

ただし

$$N_{\omega^C} = \begin{bmatrix} U_{33} & O_{33} & \dots & O_{3n_i} & \dots \end{bmatrix} u$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_{6+n_1+\dots+n_\mu} \end{bmatrix}^T$$

$$\omega^{B_{ij}} = N_{\omega^C} + \sum_{k=1}^j A_{ik}^T g_{ik} \dot{q}_{ik} = \begin{bmatrix} U_{33} & O_{33} & \dots & \Gamma_{ij} & \dots \end{bmatrix} u$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} A_{i1}^T g_{i1} & A_{i2}^T g_{i2} & \dots & A_{ij}^T g_{ij} & O_{31} & \dots & O_{31} \end{bmatrix}$$

$$v^{C^*} = \begin{bmatrix} O_{33} & U_{33} & \dots & O_{3n_i} & \dots \end{bmatrix} u$$

$$v^{B_{ij}^*} = v^{C^*} + \frac{dp^{CB_{ij}^*}}{dt} - \tilde{p}^{CB_{ij}^*} N_{\omega^C} = \begin{bmatrix} -\tilde{p}^{CB_{ij}^*} & U_{33} & \dots & \Lambda_{ij} & \dots \end{bmatrix} u$$

$$\Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} X_{ij1} & X_{ij2} & \cdots & X_{ijj} & O_{31} & \cdots & O_{31} \end{bmatrix}$$

$$X_{ijl} = \sum_{k=l}^j V_{ikl}^T l_{ik} - V_{ijl}^T d_{ij}$$

$$V_{ijk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_{ik}}$$

角加速度ベクトル・加速度ベクトル

$${}^N \alpha^C = \frac{{}^N d^N \omega^C}{dt} = \{c\}^T \alpha^C \quad (3.46)$$

$${}^N \alpha^{B_{ij}} = \frac{{}^C d^N \omega^{B_{ij}}}{dt} + {}^N \omega^C \times {}^N \omega^{B_{ij}} = \{c\}^T \alpha^{B_{ij}} \quad (3.47)$$

$${}^N a^{C^*} = \frac{{}^C d^N v^{C^*}}{dt} + {}^N \omega^C \times {}^N v^{C^*} = \{c\}^T a^{C^*} \quad (3.48)$$

$${}^N a^{B_{ij}^*} = \frac{{}^C d^N v^{B_{ij}^*}}{dt} + {}^N \omega^C \times {}^N v^{B_{ij}^*} = \{c\}^T a^{B_{ij}^*} \quad (3.49)$$

ただし

$$\alpha^C = \frac{d\omega^C}{dt} = \begin{bmatrix} U_{33} & O_{33} & \cdots & O_{3n_i} & \cdots \end{bmatrix} \dot{u}$$

$$a^{B_{ij}} = \frac{d^N \omega^{B_{ij}}}{dt} + {}^N \tilde{\omega}^C \omega^{B_{ij}} = \begin{bmatrix} U_{33} & O_{33} & \cdots & \Gamma_{ij} & \cdots \end{bmatrix} \dot{u}$$

$$+ \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^k V_{ikl}^T g_{ik} u_{6+n_1+\cdots+n_{i-1}+l} u_{6+n_1+\cdots+n_{i-1}+k} + {}^N \tilde{\omega}^C \omega^{B_{ij}}$$

$$a^{C^*} = \frac{dv^{C^*}}{dt} + {}^N \tilde{\omega}^C v^{C^*} = \begin{bmatrix} O_{33} & U_{33} & \cdots & O_{3n_i} & \cdots \end{bmatrix} \dot{u} + {}^N \tilde{\omega}^C v^{C^*}$$

$$a^{B_{ij}^*} = \frac{dv^{B_{ij}^*}}{dt} + {}^N \tilde{\omega}^C v^{B_{ij}^*} = \begin{bmatrix} -\tilde{p}^{CB_{ij}^*} & U_{33} & \cdots & \Lambda_{ij} & \cdots \end{bmatrix} \dot{u} + P_{ij}$$

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k W_{iklm}^T l_{ik} u_{6+n_1+\cdots+n_{i-1}+m} u_{6+n_1+\cdots+n_{i-1}+l}$$

$$- \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^j W_{ijkl}^T d_{ij} u_{6+n_1+\cdots+n_{i-1}+l} u_{6+n_1+\cdots+n_{i-1}+k} + {}^N \tilde{\omega}^C \left(\frac{dp^{CB_{ij}^*}}{dt} + v^{B_{ij}^*} \right)$$

$$W_{ijkl} = \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial q_{ik} \partial q_{il}}$$

3.6.4 部分角速度・部分速度

角速度ベクトルおよび速度ベクトルにおいて、一般化速度の係数をそれぞれ部分角速度 (partial angular velocity) および部分速度 (partial velocity) という。任意のベクトル r の一般化速度 u_i に対する部分角速度または部分速度は、記号 r_i として表記することとする。

$$\begin{bmatrix} {}^N \omega_1^C & \cdots & {}^N \omega_{6+n_1+\cdots+n_\mu}^C \end{bmatrix} = \{c\}^T \begin{bmatrix} U_{33} & O_{33} & \cdots & O_{3n_i} & \cdots \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\begin{bmatrix} {}^N \omega_1^{B_{ij}} & \cdots & {}^N \omega_{6+n_1+\cdots+n_\mu}^{B_{ij}} \end{bmatrix} = \{c\}^T \begin{bmatrix} U_{33} & O_{33} & \cdots & \Gamma_{ij} & \cdots \end{bmatrix}$$

(3.51)

$$\begin{bmatrix} N v_1^{C*} & \dots & N v_{6+n_1+\dots+n_\mu}^{C*} \end{bmatrix} = \{c\}^T \begin{bmatrix} O_{33} & U_{33} & \dots & O_{3n_i} & \dots \end{bmatrix}$$

(3.52)

$$\begin{bmatrix} N v_1^{B*} & \dots & N v_{6+n_1+\dots+n_\mu}^{B*} \end{bmatrix} = \{c\}^T \begin{bmatrix} -\tilde{p}^{CB_{ij}} & U_{33} & \dots & \Lambda_{ij} & \dots \end{bmatrix}$$

(3.53)

3.6.5 慣性カベクトルおよび作用カベクトルの定式化

各要素に作用する慣性カベクトルおよび作用カベクトルを定式化する.

慣性カベクトル

$$\tau_C^* = -N \alpha^C \cdot I^{C/C^*} - N \omega^C \times I^{C/C^*} \cdot N \omega^C = \{c\}^T \tau_C^* \quad (3.54)$$

$$\tau_{B_{ij}}^* = -N \alpha^{B_{ij}} \cdot I^{B_{ij}/B_{ij}^*} - N \omega^{B_{ij}} \times I^{B_{ij}/B_{ij}^*} \cdot N \omega^{B_{ij}} = \{c\}^T \tau_{B_{ij}}^* \quad (3.55)$$

ただし

$$\begin{aligned} \tau_C^* &= -I^{C/C^*} \alpha^C - N \tilde{\omega}^C I^{C/C^*} N \omega^C \\ &= \begin{bmatrix} -I^{C/C^*} & O_{33} & \dots & O_{3n} & \dots \end{bmatrix} \dot{u} - N \tilde{\omega}^C I^{C/C^*} N \omega^C \\ \tau_{B_{ij}}^* &= -A_{ij}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} A_{ij} \alpha^{B_{ij}} - N \tilde{\omega}^{B_{ij}} A_{ij}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} A_{ij} N \omega^{B_{ij}} \\ &= \begin{bmatrix} -A_{ij}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} A_{ij} & O_{33} & \dots & -A_{ij}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} A_{ij} \Gamma_{ij} & \dots \end{bmatrix} \dot{u} + R_{ij} \\ R_{ij} &= -A_{ij}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} A_{ij} \left(\sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^k V_{ikl}^T g_{ik} u_{6+n_1+\dots+n_{i-1}+l} u_{6+n_1+\dots+n_{i-1}+k} + N \tilde{\omega}^{CN} \omega^{B_{ij}} \right) \\ &\quad - N \tilde{\omega}^{B_{ij}} A_{ij}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} A_{ij} N \omega^{B_{ij}} \end{aligned}$$

作用カベクトル

$$\begin{aligned} \tau_C &= \{c\}^T \tau_C \\ \tau_{B_{ij}} &= \{c\}^T \tau_{B_{ij}} \\ f_C &= \{c\}^T f_C \\ f_{B_{ij}} &= \{c\}^T f_{B_{ij}} \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \tau_C &= \tau_{Cex} - \sum_{i=1}^{\nu} A_{i1}^T \tau_{Bin_{i1}} \\ \tau_{B_{ij}} &= (A_{ij}^T \tau_{Bin_{ij}} - A_{ij+1}^T \tau_{Bin_{ij+1}}) + A_{ij}^T \tau_{Bex_{ij}} \\ f_C &= f_{Cex} \\ f_{B_{ij}} &= A_{ij}^T f_{Bex_{ij}} \end{aligned}$$

3.6.6 一般化力の定式化

慣性力，作用力のなかで，拘束条件に依存して実際に運動に寄与する部分が決まる．ケインの方法の場合，慣性力・作用力と部分速度・部分加速度の内積をとることで実際に運動に寄与する力を求めることができる．このような力を一般化力 (generalized active force) という．

一般化慣性力

$$F_r^* = {}^N \omega_r^C \cdot \tau_C^* + {}^N v_r^{C^*} \cdot (-m_C^N \dot{a}^{C^*}) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} \{ {}^N \omega_r^{B_{ij}} \cdot \tau_{B_{ij}}^* + {}^N v_r^{B_{ij}^*} \cdot (-m_{B_{ij}}^N \dot{a}^{B_{ij}^*}) \} \quad (3.56)$$

より

$$\begin{bmatrix} F_1^* \\ \vdots \\ F_{6+n_1+\dots+n_\mu}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{21} & -A_{22} & -A_{23} \\ -A_{31} & -A_{32} & -A_{33} \end{bmatrix} \dot{u} + \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

ただし

$$\begin{aligned} A_{11} &= I^{C/C^*} + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} (A_{ij}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} A_{ij} + m_{B_{ij}} \tilde{p}^{CB_{ij}^*T} \tilde{p}^{CB_{ij}^*}) \\ A_{12} &= A_{21}^T = - \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} m_{B_{ij}} \tilde{p}^{CB_{ij}^*T} \\ A_{13} &= A_{31}^T = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} \left[O_{31} \quad \dots \quad A_{ij}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} A_{ij} \Gamma_{ij} - m_{B_{ij}} \tilde{p}^{CB_{ij}^*T} \Lambda_{ij} \quad \dots \quad O_{31} \right] \\ A_{22} &= (m_C + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} m_{B_{ij}}) U_{33} \\ A_{23} &= A_{32}^T = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} \left[O_{31} \quad \dots \quad m_{B_{ij}} \Lambda_{ij} \quad \dots \quad O_{31} \right] \\ A_{33} &= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} \begin{bmatrix} O_{31} & \dots & \dots & \dots & \dots & O_{31} \\ O_{31} & \dots & \Gamma_{ij}^T A_{ij}^T I^{B_{ij}/B_{ij}^*} A_{ij} \Gamma_{ij} + m_{B_{ij}} \Lambda_{ij}^T \Lambda_{ij} & \dots & \dots & O_{31} \\ O_{31} & \dots & \dots & \dots & \dots & O_{31} \end{bmatrix} \\ b_1 &= {}^N \tilde{\omega}^C I^{C/C^*} {}^N \omega^C - \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} (R_{ij} + m_{B_{ij}} \tilde{p}^{CB_{ij}^*T} P_{ij}) \\ b_2 &= m_C {}^N \tilde{\omega}^C v^{C^*} + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} m_{B_{ij}} P_{ij} \\ b_3 &= - \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} \left[O_{31} \quad \dots \quad R_{ij}^T \Gamma_{ij} - m_{B_{ij}} P_{ij}^T \Lambda_{ij} \quad \dots \quad O_{31} \right] \end{aligned}$$

一般化作用力

$$F_r = N\omega_r^C \cdot \tau_C + Nv_r^C \cdot f_C + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{n_i} N(N\omega_r^{Bij} \cdot \tau_{Bij} + Nv_r^{Bij} \cdot f_{Bij}) \quad (3.58)$$

より

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{6+n_1+\dots+n_\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

ただし

$$\begin{aligned} d_1 &= \tau_{Cin} + \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n_i} (A_{ij}^T \tau_{Bexij} - \tilde{p}^{CBij*} T A_{ij}^T f_{Bexij}) \\ d_2 &= f_{Cex} + \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}^T f_{Bexij} \\ d_3 &= \begin{bmatrix} \vdots \\ g_{ij}^T \tau_{Binij} + g_{ij}^T A_{ij} \sum_{k=j}^{n_i} A_{ik}^T \tau_{Bexik} + \sum_{k=j}^{n_i} X_{ikj}^T A_{ik}^T f_{Bexik} \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.6.7 ケイン方程式

系の運動は次式で支配される.

$$F_r + F_r^* = 0 \quad (3.60)$$

これをケイン方程式といい, 次式が導かれる.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \dot{u} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

第4章 宇宙機の姿勢運動

3章では一般的な力学系の運動方程式について述べたが、本章ではより宇宙機の運動に特化した運動方程式を導出する。

4.1 単一剛体としての定式化

4.1.1 回転に関するオイラーの運動方程式

並進力が働かない場合、運動量保存則より慣性系に質量中心が固定される。したがって、式(3.24)において、点 O を質量中心と考えれば、剛体の運動は次のように書き表される。

$$\tau = \dot{h} = \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_N \quad (4.1)$$

ただし、 h は質量中心まわりの角運動量ベクトル、 τ は質量中心まわりに作用する外力トルクベクトルである。ベクトルの異なる座標系での微分関係式(2.65)を用いると、式(4.1)は次のように書き換えられる。

$$\tau = \left\{ \frac{dh}{dt} \right\}_B + \omega \times h \quad (4.2)$$

これに、 $h = I \cdot \omega$ を代入すると次式が得られる。

$$\tau = I \cdot \dot{\omega} + \omega \times I \cdot \omega \quad (4.3)$$

ただし、 $\{dI/dt\}_B = 0$, $\{d\omega/dt\}_B = \{d\omega/dt\}_N = \dot{\omega}$ の関係を用いた。式(4.3)を回転に関するオイラーの運動方程式と呼ぶ。

次に、式(4.3)の行列表現を導出する。剛体 B に固定された正規直交基底ベクトルを $\{b\}^T \triangleq \{b_1 \ b_2 \ b_3\}$ とする。 B の質量中心まわりの角運動量ベクトル h は次式で表されるものとする。

$$h \triangleq \{b\}^T I \omega \quad (4.4)$$

ただし、 $I \in R^{3 \times 3}$ は B の質量中心まわりの慣性行列、また $\omega \triangleq \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}^T$ の各要素は次式で定義される。

$$\omega_i \triangleq A \omega^B \cdot b_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

また τ の行列表現は

$$\tau = \{b\}^T \tau \quad (4.6)$$

で与えられるものとし、さらにその成分を $\tau \triangleq \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix}^T \in R^{3 \times 1}$ とする。このとき、行列表現の運動方程式

$$\tau = I \dot{\omega} + \tilde{\omega} I \omega \quad (4.7)$$

が得られる。

4.1.2 軸対称剛体の運動

図 4.1 のような軸対称剛体の場合，慣性行列 I は

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

のように書き表されるから，式 (4.7) は次のように書き換えられる。

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0 \quad (4.9)$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 = 0 \quad (4.10)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad (4.11)$$

となる。式 (4.11) より，スピン角速度は一定となることがわかる。これを $\omega_3 = \bar{\omega}_3 = \text{const.}$ とおく。また，

$$\lambda \triangleq \frac{I_1 - I_3}{I_1} \bar{\omega}_3 \quad (4.12)$$

を定義すると，式 (4.9), (4.10) は次式のように書き換えられる。

$$\dot{\omega}_1 - \lambda \omega_2 = 0 \quad (4.13)$$

$$\dot{\omega}_2 + \lambda \omega_1 = 0 \quad (4.14)$$

これらの一般解は

$$\omega_1(t) = \omega_1(0) \cos \lambda t + \omega_2(0) \sin \lambda t \quad (4.15)$$

$$\omega_2(t) = \omega_2(0) \cos \lambda t - \omega_1(0) \sin \lambda t \quad (4.16)$$

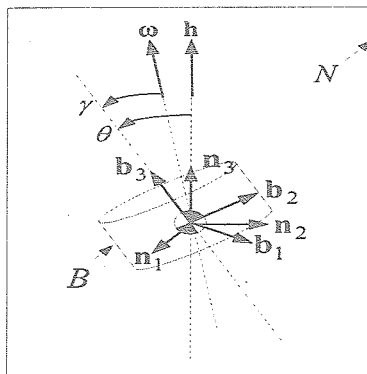


図 4.1: 軸対称剛体の自由運動

で与えられる。ただし、 $\omega_1(0), \omega_2(0)$ は $t=0$ での初期条件である。

ここで

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_1^2(0) + \omega_2^2(0) = \text{const} = \omega_{12}^T \quad (4.17)$$

したがって、角速度ベクトル ω のノルム

$$|\omega| = |\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\omega_{12}^2 + \bar{\omega}_3^2} = \text{const} \quad (4.18)$$

が得られる。これを使うと、角速度ベクトルは次式のように書き表される。

$$\omega = \omega_{12}\epsilon + \bar{\omega}_3 b_3 \quad (4.19)$$

ここで

$$\begin{aligned} \epsilon &= \{\omega_1(0) \cos \lambda t + \omega_2(0) \sin \lambda t\} b_1 + \{\omega_2(0) \cos \lambda t - \omega_1(0) \sin \lambda t\} b_2 \\ &= \sqrt{\omega_1^2(0) + \omega_2^2(0)} \{\sin(\lambda t + \phi) b_1 + \cos(\lambda t + \phi) b_2\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

ただし、 $\phi = \tan^{-1}(\omega_1(0)/\omega_2(0))$ 。 ϵ は角速度 λ で b_1, b_2 平面上を回転する単位ベクトルである。

一方、角運動量ベクトルは

$$\mathbf{h} = I_1 \omega_{12} \epsilon + I_3 \bar{\omega}_3 b_3 \quad (4.21)$$

である。

式(4.19),(4.21)より、ベクトル \mathbf{h}, ω, b_3 は同一平面上にあることがわかる。 \mathbf{h} と b_3 のなす角 θ はニュートン角と呼ばれ、次の関係式より求められる。

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{h} \cdot b_3}{|\mathbf{h}|} = \frac{I_3 \bar{\omega}_3}{\sqrt{(I_1 \omega_{12})^2 + (I_3 \bar{\omega}_3)^2}} = \text{const} \quad (4.22)$$

また、 ω_3 と b_3 のなす角 γ は、次式より求められる。

$$\tan \gamma = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_3} = \frac{\omega_{12}}{\bar{\omega}_3} = \text{const} \quad (4.23)$$

さらに、式(4.22),(4.23)より

$$\tan \theta = \frac{I_1}{I_3} \tan \gamma \quad (4.24)$$

なので、 $I_1 > I_3$ のとき $\theta > \gamma$ 、 $I_1 < I_3$ のとき $\theta < \gamma$ である。また、慣性系に固定されているのは \mathbf{h} だけであるので、 ω と b_3 はそのまわりを回転していることになる。 B の質量中心 B^* を頂点として ω が \mathbf{h} を中心軸として描く円錐面を Space Cone、 ω が b_3 を中心として描く円錐面を Body Cone といい、Body Cone は ω を瞬時の接線として Space Cone 上を転がり回転運動する。

4.2 非単一剛体としての定式化

4.2.1 回転体を有する宇宙機の定式化

宇宙機全体 D は、本体 B と n 個の回転体 C_i ($i = 1, \dots, n$) で構成され、いずれも剛体であると仮定する。また、 C_i に固定された基底ベクトル $\{c\}$ から B に固定された基底ベクトル $\{b\}$ への方向余弦行列を ${}^B H^{C_i}$ とする。このとき、慣性系 N からみた全系 D の角運動量 ${}^N h^D$ は次式のように求められる。

$${}^N h^D = J^N \omega^B + \sum_{i=1}^n {}^B H^{C_i} I^{C_i/C_i^*} \omega^{C_i} \quad (4.25)$$

ただし

$$J \triangleq I^{B/B^*} + \sum_{i=1}^n {}^B H^{C_i} I^{C_i/C_i^*} C_i H^B \quad (4.26)$$

各回転体 C_i ($i = 1, \dots, n$) の運動は B に対してある 1 軸まわりの回転のみ許される場合のみ考えることとすると、式 (4.25), (4.26) は次式に書き換えられる。

$${}^N h^D = J^N \omega^B + {}^B H^C I^{C/C^*} B \omega^C \quad (4.27)$$

$$J = I^{B/B^*} + {}^B H^C I^{C/C^*} C H^B \quad (4.28)$$

ただし、 $e_1 \triangleq [1 \ 0 \ 0]^T$ を用いて、以下を定義する。

$${}^B H^C \triangleq [{}^B H^{C_1} e_1 \quad {}^B H^{C_2} e_1 \quad \dots \quad {}^B H^{C_n} e_1] \quad (4.29)$$

$$I^{C/C^*} \triangleq \text{diag} [e_1^T I^{C_1/C_1^*} e_1 \quad e_1^T I^{C_2/C_2^*} e_1 \quad \dots \quad e_1^T I^{C_n/C_n^*} e_1] \quad (4.30)$$

$${}^B \omega^C \triangleq [e_1^T B \omega^{C_1} \quad e_1^T B \omega^{C_2} \quad \dots \quad e_1^T B \omega^{C_n}]^T \quad (4.31)$$

角運動量の微分に関する関係式

$$\left\{ \frac{d^N h^D}{dt} \right\}_N = \left\{ \frac{d^N h^D}{dt} \right\}_B + {}^N \tilde{\omega}^{BN} h^D \quad (4.32)$$

に式 (4.25) を代入して整理すると次の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & I^{B/B^*} {}^N \dot{\omega}^B + {}^B H^C I^{C/C^*} C H^{BN} \dot{\omega}^B + {}^B H^C I^{C/C^*} B \dot{\omega}^C \\ & + {}^N \tilde{\omega}^B \{ I^{B/B^*} {}^N \omega^B + {}^B H^C I^{C/C^*} C H^{BN} \omega^B \\ & + {}^B H^C I^{C/C^*} B \omega^C \} = \tau_{out} \end{aligned} \quad (4.33)$$

ただし、 τ_{out} は、 B へ加わる外力トルクである。また、 B と C の間で作用する内力トルクを τ_{in} とすると、回転体の運動方程式は次式のように求められる。

$$I^{C/C^*} B \dot{\omega}^C = \tau_{in} \quad (4.34)$$

式 (4.33), (4.34) は、姿勢制御用アクチュエータであるフライホイールの動力学を考慮した宇宙機姿勢運動の方程式として有用である。

また、コントロール・モーメントム・ジャイロ (CMG) で駆動される宇宙機の運動方程式を導出する場合は、 B と C_i の相対運動の拘束条件が異なるだけで、ほぼ同様にして導出できる。

4.2.2 エネルギー散逸部をもつ宇宙機の定式化

エネルギー散逸部のモデリングは、並進バネ・ダンパで支持される質量としたり、回転バネ・ダンパで支持される質量とする方法などいろいろである。本節では、ダンパ効果のみを考慮し、宇宙機の内部に回転 3 自由度運動する剛体球があり、これと宇宙機本体との相対角速度に比例する内力トルクが発生するものとしてモデリングを行い、これについて定式化を行う。

宇宙機本体 B に固定された基底ベクトルを $\{b\}$ 、剛体球 C に固定された基底ベクトルを $\{c\}$ とし、慣性ダイアディックおよび角速度ベクトルとそれらの行列表現との対応は次のように与えられるものとする。

$$I^{B/B^*} = \{b\}^T I^{B/B^*} \{b\} \quad (4.35)$$

$$I^{C/C^*} = \{c\}^T I^{C/C^*} \{c\} \quad (4.36)$$

$${}^N \omega^B = \{b\}^T {}^N \omega^B \quad (4.37)$$

$${}^N \omega^C = \{b\}^T {}^N \omega^C \quad (4.38)$$

Cを一様な剛体球と仮定する場合

$$I^{C/C^*} = \{c\}^T I^{C/C^*} \{c\} = \{b\}^T I^{C/C^*} \{b\} \quad (4.39)$$

のようになる。このとき、角運動量ベクトルは次式のようになる。

$$h^B = I^{B/B^*} \cdot N\omega^B = \{b\}^T I^{B/B^*} N\omega^B \quad (4.40)$$

$$h^C = I^{C/C^*} \cdot N\omega^C = \{b\}^T I^{C/C^*} N\omega^C \quad (4.41)$$

また、剛体球と本体の相対角速度ベクトルは

$${}^B\omega^C = N\omega^C - N\omega^B = \{b\}^T B\omega^C \quad (4.42)$$

であるから粘性抵抗係数を Γ とすれば、粘性抵抗によるトルクベクトルは

$$\tau_{in} = \{b\}^T \tau_{in} = \{b\}^T \Gamma B\omega^C \quad (4.43)$$

で書き表される。

次に、運動方程式をベクトル表記すると次のようになる。

$$\left\{ \frac{dh^B}{dt} \right\}_N = \left\{ \frac{dh^B}{dt} \right\}_B + N\omega^B \times h^B = \tau_{in} \quad (4.44)$$

$$\left\{ \frac{dh^C}{dt} \right\}_N = \left\{ \frac{dh^C}{dt} \right\}_B + N\omega^B \times h^C = -\tau_{in} \quad (4.45)$$

運動方程式を基底ベクトル $\{b\}$ に対する成分表記に書き換えると、次のようになる。

$$I^{B/B^*} N\dot{\omega}^B + N\tilde{\omega}^B I^{B/B^*} N\omega^B = \Gamma B\omega^C \quad (4.46)$$

$$I^{C/C^*} N\dot{\omega}^C + N\tilde{\omega}^B I^{C/C^*} N\omega^C = -\Gamma B\omega^C \quad (4.47)$$

付録A 慣性ダイアディック

質点 B_i ($i = 1, \dots, v$) で構成される質点系 B を考える. 点 O から質点 B_i までの位置ベクトルを p_i とする. このとき, 質点系 B の慣性ダイアディックは次式で定義される.

$$I \triangleq \sum_{i=1}^v m_i (U_{33} p_i^2 - p_i p_i) \quad (\text{A.1})$$

ただし, m_i は質点 B_i の質量, p_i^2 は $p_i \cdot p_i$ と同じ意味である.

次に, 物体 B が連続体である場合を考える. 点 O から物体 B 上の任意の点 P までの位置ベクトルを p とする. このとき, 物体 B の点 O に関する慣性ダイアディックは, 式 (A.1) の極限として次のように定義される.

$$I \triangleq \int \rho (U_{33} p^2 - pp) \quad (\text{A.2})$$

ただし, ρ は物体 B の質量密度である.

質量が物体に並進力を与えた場合の動きにくさを表すのと同様に, 慣性ダイアディックは物体に外力トルクを加えた場合の動きにくさを表す.

物体 B について, 点 O まわりの慣性ダイアディックを $I^{B/O}$, 質量中心 B^* まわりの慣性ダイアディックを I^{B/B^*} , 仮想的に質量中心 B^* に全系質量 m^B が集中しているものとして得られる点 O まわりの慣性ダイアディックを $I^{B^*/O}$ とする. このとき, 次の関係式が成り立つ.

$$I^{B/O} = I^{B/B^*} + I^{B^*/O} \quad (\text{A.3})$$

ただし, 点 O から B^* への位置ベクトルを p^* で表記することとし, 各慣性ダイアディックは次式のようになる.

$$I^{B/O} = \int \rho (U_{33} p^2 - pp) \quad (\text{A.4})$$

$$I^{B/B^*} = \int \rho (U_{33} r^2 - rr) \quad (\text{A.5})$$

$$I^{B^*/O} = m(p^{*2} - p^* p^*) \quad (\text{A.6})$$

座標系 $\{b\}$ を用いたときの慣性ダイアディックの行列表現は以下のようになる.

$$I = \{b\}^T I \{b\} \quad (\text{A.7})$$

$$(\text{A.8})$$

ここで, $I \in R^{3 \times 3}$ を慣性行列と呼ぶ. 慣性ダイアディックは座標系の取り方とは無関係であるが, 慣性行列は座標系の取り方に依存して決まる量である. 一般に慣性行列は対称行列となる. 特に, 座標系を適当に選ぶことにより, 慣性行列を対角化できる. このときの基底ベクトルの軸方向を慣性主軸という. 特に, 慣性行列が最大である軸を最大慣性主軸, 中間値のものを中間慣性主軸, 最小のものを最小慣性主軸という.

付録B 重力傾度トルク

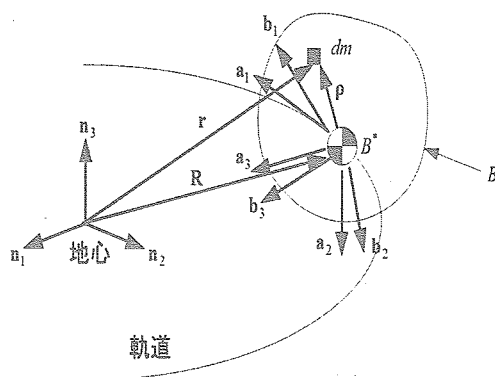


図 B.1: 重力傾度トルク

物体 B の質量を m , 慣性ダイアデイクを I , 重力定数を μ とする. また, その他の記号を図 B.1 のように定義する. このとき万有引力の法則より, B の微小要素 dm に働く重力は

$$df = -\frac{\mu dm}{r^3} r \quad (\text{B.1})$$

となる. したがって, 全系に働くトルクは

$$\tau_g = \int_B \rho \times df = \int_B \rho \times \left(-\frac{\mu dm}{r^3} r\right) = -\int_B (\rho \times R) \frac{\mu dm}{r^3} \quad (\text{B.2})$$

ここで, $|\rho| < |R| = R$ として

$$\begin{aligned} r &= (r \cdot r)^{1/2} = \{(R + \rho) \cdot (R + \rho)\}^{1/2} \\ &= (R \cdot R + 2R \cdot \rho + \rho \cdot \rho)^{1/2} = (R^2 + 2R \cdot \rho + \rho^2)^{1/2} \\ &= R \left\{1 + \frac{2R \cdot \rho}{R^2} + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

ここで, 地球半径と比較し物体の寸法が十分に小さいことを考慮し, $(\frac{\rho}{R})^2 \approx 0$ と近似すると

$$r \approx R \left(1 + \frac{2R \cdot \rho}{R^2}\right)^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

が得られる. したがって

$$r^{-3} \approx R^{-3} \left(1 + \frac{2R \cdot \rho}{R^2}\right)^{-3/2} \approx R^{-3} \left(1 - \frac{3R \cdot \rho}{R^2}\right) \quad (\text{B.5})$$

これを式 (B.2) に代入すると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} \tau_g &= -\int_B (\rho \cdot R) R^{-3} \left(1 - \frac{3R \cdot \rho}{R^2}\right) \mu dm = \frac{3\mu}{R^5} \int_B (R \cdot \rho) (\rho \times R) dm - \frac{\mu}{R^3} \int_B (\rho \times R) dm \\ &= -\frac{3\mu}{R^5} R \times \int_B \rho \rho dm \cdot R + \frac{\mu}{R^3} R \times \int_B \rho dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R} \times \left(\int_B \rho \rho U_{33} - I \right) \cdot \mathbf{R} = -\frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R} \times \int_B \rho \rho U_{33} \cdot \mathbf{R} + \frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R} \times I \cdot \mathbf{R} \\
&= \frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R} \times I \cdot \mathbf{R} = \frac{3\mu}{R^5} (R n_R) \times I \cdot (R n_R) \\
&= \frac{3\mu}{R^3} n_R \times I \cdot n_R
\end{aligned} \tag{B.6}$$

付録 C 演習問題

問題 1

次式を証明せよ.

- (1) $(Cx)^\sim = C\tilde{x}C^T$
- (2) $(Cx)^\sim(Cx)^\sim = C\tilde{x}\tilde{x}C^T$
- (3) $\tilde{x}\tilde{y} = yx^T - x^T y U_{33}$ (U_{33} は単位行列)
- (4) $\dot{C} = \tilde{\omega}^T C$
- (5) $\ddot{C}^T = C^T(\tilde{\dot{\omega}} + \tilde{\omega}\tilde{\omega})$
- (6) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$
- (7) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$

問題 2

慣性系を N , 剛体を B とする. N と B の両者に固定されたある軸まわりに B を回転させることで任意の姿勢に変更できる. 逆に, 回転前後の姿勢が与えられたとき, これを関係づける回転軸が唯一定まる. これをオイラー軸と呼び, またこのような定理を回転に関するオイラーの定理という. N に固定された任意のベクトルを \mathbf{a} , B を回転させる前の状態において \mathbf{a} と一致し, B に固定された軸を \mathbf{b} , オイラーの回転軸を λ , その軸周りの回転角を θ とする. ここで, ダイアディック

$$C = U \cos \theta - U \times \lambda \sin \theta + \lambda \lambda (1 - \cos \theta)$$

を定義するとき, 次の関係式が成り立つことを証明せよ.

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot C$$

問題 3

図 1 に示される 2 軸ジンバルジャイロのジンバルロックについて述べよ.

問題 4

A 系に固定された基底ベクトルを $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, B 系に固定された基底ベクトルを $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ とする. 2 本の平行でないベクトル \mathbf{p}, \mathbf{q} についてそれぞれ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ を用いたときの座標成分, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ を用いたときの座標成分が既知であるとする. このとき, A 系から B 系への座標変換行列 C は次の手順で求められることを示せ.

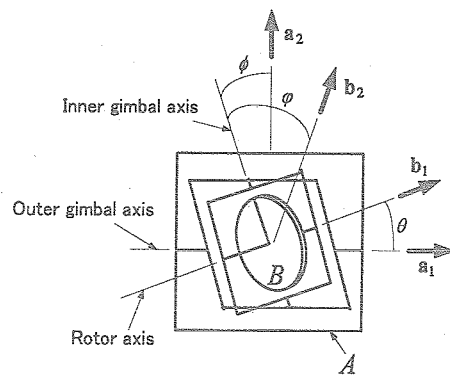


図 1

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{p} \times \mathbf{q} \\ \mathbf{R} &= \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{q} \mathbf{r} + \mathbf{q} \times \mathbf{r} \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{p} \mathbf{q}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \\ C_{ij} &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

問題 5

図 2 において、衛星本体を C 、パドルを B 、両者を合わせた全系を D とする。 C の質量を m^C 、 B の質量を m^B 、 C の質量中心 C^* まわりの慣性ダイアディックを I^{C/C^*} 、 B の質量中心 B^* まわりの慣性ダイアディック

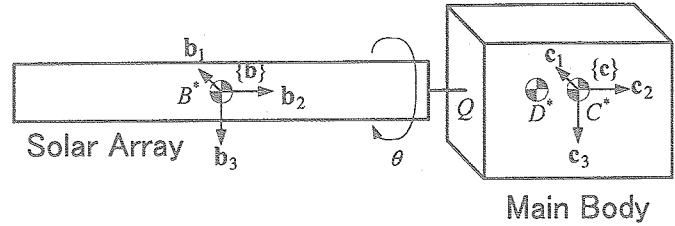


図 2

を I^{C/C^*} 、 C^* からパドル取付点 Q までの位置ベクトルを \mathbf{p}^{CQ} 、 Q からパドル質量中心 B^* までの位置

ベクトルを \mathbf{p}^{QB^*} と記述することとし、これらの値が $\mathbf{p}^{CQ} = \{\mathbf{c}\}^T [0.8 \ -0.7 \ -0.8]^T$ [m],

$$\mathbf{p}^{QB^*} = \{\mathbf{b}\}^T [0.0 \ -12.0 \ 0.1]^T$$
 [m], $m^C = 3500$ [kg], $m^B = 150$ [kg], $I^{B/B^*} = \{\mathbf{c}\}^T \begin{bmatrix} 8700 & 800 & 900 \\ 800 & 18400 & 400 \\ 900 & 400 & 18500 \end{bmatrix} \{\mathbf{c}\}$

$$[\text{kgm}^2], I^{C/C^*} = \{\mathbf{b}\}^T \begin{bmatrix} 18000 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & -80 \\ 0 & -80 & 13000 \end{bmatrix} \{\mathbf{b}\}$$
 [kgm²]

で与えられるものとする。パドル回転角 θ が 0 [deg]、および 90 [deg] の場合それぞれについて、衛星全体の質量中心、慣性テンソル、および慣性主軸を求めよ。ただし、パドルは $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2$ の拘束下で回転し、 $\{\mathbf{b}\}$ と $\{\mathbf{c}\}$ が重なるときを $\theta = 0$ とする。

問題 6

(1) 2 つのベクトル \mathbf{p} と \mathbf{q} を A 系および B 系から観測し、 $\left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}_A, \left\{ \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right\}_A, \left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}_B, \left\{ \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right\}_B$ が得られたも

のとする。このとき、 A 系からみた B 系の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は、次式で求められることを証明せよ。

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\left(\left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}_B \right) \times \left(\left\{ \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right\}_B \right)}{\left(\left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}_B \right) \cdot \mathbf{q}}$$

(2) 衛星に固定した 2 台のカメラから恒星を観測することを考える。機体座標系の正規直交基底ベクトルを $\{\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3\}$ とし、視線ベクトルはそれぞれ $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ で与えられるものとする。ある時刻に

において、 $\mathbf{p} = \mathbf{b}_2$ 方向にあった恒星の速度ベクトルが $\left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}_B = \{\mathbf{b}\}^T [-0.0188 \ 0 \ -0.0119]^T$, $\mathbf{q} = \mathbf{b}_3$ 方

向にあった恒星の速度ベクトルが $\left\{ \frac{dq}{dt} \right\}_B = \{b\}^T [-0.0163 \quad -0.0044 \quad 0]^T$ として観測された。このときの慣性座標系からみた衛星の角速度を求めよ。

問題 7

慣性系 $\{n\}$ からみた B 系の角速度を ω とする。ただし、 B に固定された座標系原点を O とする。任意の点 P に対し、図 3 に示すように位置ベクトル R, R_O, r を定義する。このとき、加速度ベクトルについて以下の関係式を導出せよ。

$$\left\{ \frac{d^2 R}{dt^2} \right\}_N = \left\{ \frac{d^2 R_O}{dt^2} \right\}_N + \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \right\}_B + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) \cdot n_1$$

ただし、 $\dot{\omega} = \left\{ \frac{d\omega}{dt} \right\}_N = \left\{ \frac{d\omega}{dt} \right\}_B$.

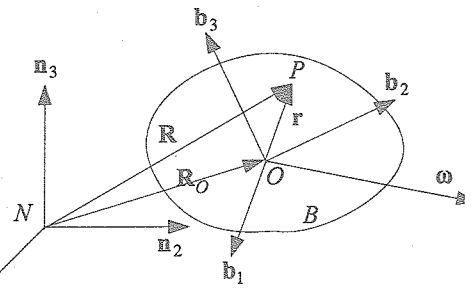


図 3

問題 8

スピン衛星のニューテーション制御について考える。衛星は軸対称剛体と考えることができ、最大慣性主軸をスピン軸とする。

- (1) レートジャイロによってスピン軸と直交する 1 軸まわりの角速度を観測し、これに比例する制御トルクを同軸まわりに加えることで、スピン軸と直交する 2 軸まわりの運動をともに漸近安定にできることを証明せよ。
- (2) スピン衛星には、レートジャイロの代わりに加速度計が搭載されることがある。図 4 に示すように加速度計の位置ベクトルを $r = b_1 r_1$ とし、その感度軸はスピン軸 b_3 と平行であり $\alpha = b_3 \alpha_3$ が観測できるものとする。このとき、加速度計出力と衛星角速度 $\omega = \{b\}^T \omega$ との関係を求めよ。ただし、スピン周期は既知であるものとする。

(ヒント) 角速度に関する解析解を用いる。

- (3) 慣性テンソル $I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ [kgm²], 加速度計取付位置 $r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ [m], 初期角速度 $\omega(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$ [deg/s]

として数値解析を行い、トルクフリーの状態における姿勢角速度、加速度計出力、ニューテーション角の時間変化を求めよ。

- (4) (3) について適当な制御系を設計し、その有効性を確かめよ。

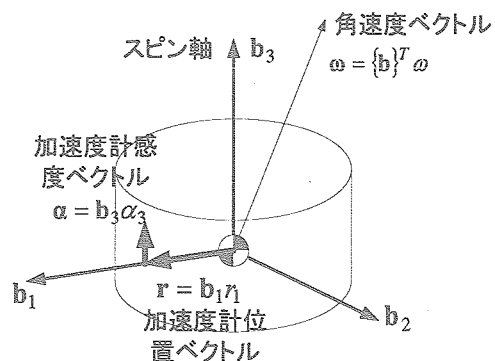


図 4. スピン衛星

問題 9

人工衛星の内部に蓄えられた液体燃料の運動(スロッシング)は、エネルギー消散効果をも

つ. 燃料スロッシングを考慮した衛星ダイナミクスを解析する場合, 燃料を単一剛体球とみなし, 衛星本体との相対角速度に比例する粘性トルクが発生するものと仮定する方法がある (図 5 参照). この仮定のもとで運動方程式を導出せよ.

$$(ヒント) \mathbf{h}^D = \mathbf{h}^B + \mathbf{h}^C = \mathbf{I}^{B/B^*} \cdot \mathbf{N} \boldsymbol{\omega}^B + \mathbf{I}^{C/C^*} \cdot \mathbf{N} \boldsymbol{\omega}^C = \mathbf{I}^{B/B^*} \cdot \mathbf{N} \boldsymbol{\omega}^B + \mathbf{I}^{C/C^*} \cdot (\mathbf{N} \boldsymbol{\omega}^B + {}^B \boldsymbol{\omega}^C)$$

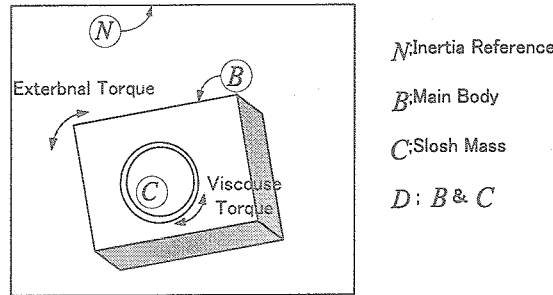


図 5. 燃料スロッシングによるエネルギー消散部をもつ衛星モデル

問題 10

バイアスマーメンタム制御される地球周回衛星が不具合により機能停止した. エネルギー消散過程において予想される姿勢運動について論ぜよ. また, 外力として重力傾度トルクが支配的である場合, エネルギー消散後の姿勢状態について推測せよ.

問題 11

図 6 において, 物体 B 上の任意の点 O に原点をもつ物体座標系の基底ベクトルを $\{\mathbf{b}\}$, 物体の質量中心を B^* , B の質量を m^B , B の O まわりの慣性ダイアディックを $\mathbf{I}^{B/O} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{I}^{B/O} \{\mathbf{b}\}$, O から B^* への位置ベクトルを $\mathbf{p} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{p}$ とする. また, 外力として作用するトルクベクトルを $\boldsymbol{\tau} = \{\mathbf{b}\}^T \boldsymbol{\tau}$, 点 O に作用する並進力ベクトルを $\mathbf{f} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{f}$ とする.

- (1) 角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega} = \{\mathbf{b}\}^T \boldsymbol{\omega}$, 並進速度ベクトルを $\mathbf{v} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{v}$ とし, 並進 3 自由度, 回転 3 自由度に関する運動方程式を導出せよ.
- (2) 点 O が点 B^* と一致する場合について運動方程式を導出せよ.
- (3) 通常の衛星では, 機体座標系の原点は質量中心ではなくロケット分離面などに設定することが多い. 前者の場合, 衛星設計上および運用上どのような不都合が生じるか, あるいは後者ではどのような利点があるかについて述べよ.

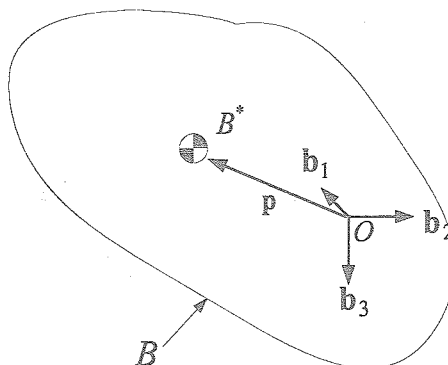


図 6 任意の点に原点をもつ物体座標系

演習問題解答

問題 1

(1) $\{b\} = C\{a\}$, $x = \{a\}^T x = \{b\}^T Cx$, $y = \{b\}^T y = \{a\}^T C^T y$ とする。このとき,

$$x \times y = \{b\}^T (Cx) y$$

$$x \times y = \{a\}^T \tilde{x} C^T y = \{b\}^T C \tilde{x} C^T y$$

したがって

$$(Cx) y = C \tilde{x} C^T y \quad \forall y$$

$$(Cx) = C \tilde{x} C^T$$

(2)

$$(Cx)(Cx) = C \tilde{x} C^T C \tilde{x} C^T = C \tilde{x} \tilde{x} C^T$$

(3)

$$\begin{aligned} \tilde{x} \tilde{y} &= \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x_2 y_2 - x_3 y_3 & x_2 y_1 & x_3 y_1 \\ x_1 y_2 & -x_3 y_3 - x_1 y_1 & x_3 y_2 \\ x_1 y_3 & x_2 y_3 & -x_1 y_1 - x_2 y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} y x^T - x^T y U_3 &= \begin{bmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 & y_1 x_3 \\ y_2 x_1 & y_2 x_2 & y_2 x_3 \\ y_3 x_1 & y_3 x_2 & y_3 x_3 \end{bmatrix} - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) U_3 \\ &= \begin{bmatrix} -x_2 y_2 - x_3 y_3 & x_2 y_1 & x_3 y_1 \\ x_1 y_2 & -x_3 y_3 - x_1 y_1 & x_3 y_2 \\ x_1 y_3 & x_2 y_3 & -x_1 y_1 - x_2 y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$\tilde{x} \tilde{y} = y x^T - x^T y U_3 \tag{C.1}$$

(4) 定義より

$$C \dot{C}^T = \tilde{\omega}$$

したがって

$$\dot{C} = \tilde{\omega}^T C$$

(5) 定義より

$$C\dot{C}^T = \tilde{\omega}$$

両辺を時間微分して

$$\begin{aligned}\dot{C}\dot{C}^T + C\ddot{C}^T &= \dot{\tilde{\omega}} \\ C\ddot{C}^T &= \dot{\tilde{\omega}} - \dot{C}\dot{C}^T = \dot{\tilde{\omega}} - \tilde{\omega}^T C C^T \tilde{\omega} = \dot{\tilde{\omega}} + \tilde{\omega}\tilde{\omega}\end{aligned}$$

(6) $x = \{b\}^T x, y = \{b\}^T y$ とする。このとき、

$$x \cdot (y \times z) = \{b\}^T x^T \tilde{y} z = \{b\}^T (-y^T \tilde{x}) z = \{b\}^T y^T \tilde{z} x = y \cdot (z \times x)$$

また

$$x \cdot (y \times z) = \{b\}^T x^T \tilde{y} z = z^T \tilde{y}^T x = z^T (-\tilde{y}) x = z^T \tilde{x} y = z \cdot (x \times y)$$

(7) $x = \{b\}^T x, y = \{b\}^T y$ とする。ここで、式 (C.1) の両辺右から z を掛ける。

$$\tilde{x}\tilde{y}z = yx^T z - x^T yz$$

したがって

$$x \times (y \times z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z$$

問題 2

N 系に固定されたベクトル α_1, α_2 を考え、 λ と組で $\{\alpha_1 \alpha_2 \lambda\}$ が正規直交基底をなすものとする。また、 B 系に固定されたベクトル β_1, β_2 を考え、 λ と組で $\{\beta_1 \beta_2 \lambda\}$ が正規直交基底をなすものとする。ただし、 B 系を回転させる前の状態において β_1, β_2 はそれぞれ α_1, α_2 と一致するものとする。すなわち $\theta = 0$ において、あるスカラー量 p_1, p_2, p_3 を用いて

$$a = p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + p_3 \lambda \quad (C.2)$$

$$b = p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2 + p_3 \lambda \quad (C.3)$$

が成り立つ。一方回転後の β_1, β_2 は、 α_1, α_2 の線形結合として

$$\beta_1 = \cos \theta \alpha_1 + \sin \theta \alpha_2 \quad (C.4)$$

$$\beta_2 = -\sin \theta \alpha_1 + \cos \theta \alpha_2 \quad (C.5)$$

として書き表される。したがって

$$b = (p_1 \cos \theta - p_2 \sin \theta) \alpha_1 + (p_1 \sin \theta + p_2 \cos \theta) \alpha_2 + p_3 \lambda \quad (C.6)$$

また、 $a \cdot C$ は次のように展開できる。

$$\begin{aligned}a \cdot C &= a \cos \theta - a \times \lambda \sin \theta + a \cdot \lambda \lambda (1 - \cos \theta) \\ &= p_1 \cos \theta \alpha_1 + p_2 \cos \theta \alpha_2 + p_3 \cos \theta \lambda + p_1 \sin \theta \alpha_2 - p_2 \sin \theta \alpha_1 + p_3 \lambda - p_3 \cos \theta \lambda \\ &= (p_1 \cos \theta - p_2 \sin \theta) \alpha_1 + (p_1 \sin \theta + p_2 \cos \theta) \alpha_2 + p_3 \lambda\end{aligned} \quad (C.7)$$

したがって

$$b = a \cdot C \quad (C.8)$$

問題 3

たとえば, $\theta_1 = \phi, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \psi$ と書き換え, body-two angles 1-2-1 系のオイラー角を用いる場合, ロータ軸と外側ジンバル軸が平行になる状態, すなわち $\theta_2 = 0$ の状態をジンバルロックという. ジンバルロックにおける特異な現象について以下に述べる.

座標変換行列 C は次式のようになる.

$$C = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 s_3 & s_2 c_3 \\ s_1 s_2 & -s_1 c_2 s_3 + c_3 c_1 & -s_1 c_2 c_3 - s_3 c_1 \\ -c_1 s_2 & c_1 c_2 s_3 + c_3 s_1 & c_1 c_2 c_3 - s_3 s_1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

ただし, $s_i = \sin \theta_i, c_i = \cos \theta_i$ ($i = 1, 2, 3$). ここで, $\theta_2 = 0$ とすると, C は次のように書き換えられる.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 s_3 + c_3 c_1 & -s_1 c_3 - s_3 c_1 \\ 0 & c_1 s_3 + c_3 s_1 & c_1 c_3 - s_3 s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_3) \\ 0 & \sin(\theta_1 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_3) \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

したがって, C から θ_1, θ_3 は不定である.

また, オイラー角の導関数と角速度行列は次の関係にある.

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix} M^{-1} \quad (\text{C.12})$$

ここで

$$M = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 s_3 & s_2 c_3 \\ 0 & c_3 & -s_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$M^{-1} = \frac{1}{s_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_2 \\ s_3 & s_2 c_3 & -c_2 s_3 \\ c_3 & -s_2 s_3 & -c_2 c_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

したがって, 角速度からオイラー角導関数を計算しようとする場合, $\theta_2 = 0$ で発散する.

同様な問題は, 他のオイラー角を用いても生じうる.

問題 4

任意のベクトル v は

$$v = \alpha p + \beta q + \gamma r \quad (\text{C.15})$$

のように書き表される. 両辺右から $(q \times r)$ を内積させる.

$$\begin{aligned} v \cdot (q \times r) &= \alpha p \cdot (q \times r) + \beta q \cdot (q \times r) + \gamma r \cdot (q \times r) \\ &= \alpha p \cdot (q \times r) = \alpha (p \times q) \cdot r \\ &= \alpha r \cdot r \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

したがって

$$\alpha = \frac{v \cdot (q \times r)}{r \cdot r} \quad (\text{C.17})$$

同様に

$$\beta = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{C.18})$$

$$\gamma = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{C.19})$$

これらを式(C.15)に代入して

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{r})\mathbf{p} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p})\mathbf{q} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})\mathbf{r}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

したがって

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{b}_j \\ &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}_j \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

問題5

$\theta = 0\text{deg}$ のとき C^* から全系質量中心 D^* への位置ベクトルの座標系 $\{\mathbf{c}\}^T$ での行列表現

$$\begin{aligned} p^{C^*D^*} &= \frac{m_B}{m_C + m_B} (p^{C^*Q} + {}^C H^B p^{QB^*}) \\ &= \begin{bmatrix} 0.0329 & -0.5219 & -0.0288 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

座標系 $\{\mathbf{c}\}^T$ での慣性行列

$$\begin{aligned} I^{D/D^*} &= I^{B/D^*} + I^{C/D^*} \\ &= I^{C/C^*} + m_C \tilde{p}^{D^*C^*T} \tilde{p}^{D^*C^*} + I^{B/B^*} + m_B \tilde{p}^{D^*B^*T} \tilde{p}^{D^*B^*} \\ &= \begin{bmatrix} 49970 & 2261 & 981 \\ 2261 & 18613 & -959 \\ 981 & -959 & 54791 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

座標系 $\{\mathbf{c}\}$ から慣性主軸への座標変換行列

$$\begin{bmatrix} 0.9800 & 0.0763 & -0.1838 \\ -0.0723 & 0.9970 & 0.0282 \\ 0.1854 & -0.0144 & 0.9826 \end{bmatrix}$$

このオイラー角 (Body-three123) で表現すると $\theta_1 = -1.6457, \theta_2 = -10.5927, \theta_3 = -4.4527$ [deg] となる。

$\theta = 90\text{deg}$ のとき C^* から全系質量中心 D^* への位置ベクトルの座標系 $\{\mathbf{c}\}^T$ での行列表現

$$\begin{aligned} p^{C^*D^*} &= \frac{m_B}{m_C + m_B} (p^{C^*Q} + {}^C H^B p^{QB^*}) \\ &= \begin{bmatrix} 0.0288 & -0.5219 & -0.0329 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

座標系 $\{\mathbf{c}\}^T$ での慣性行列

$$I^{D/D^*} = I^{B/D^*} + I^{C/D^*}$$

$$\begin{aligned}
&= I^{C/C^*} + m_C \tilde{p}^{D^*C^*T} \tilde{p}^{D^*C^*} + I^{B/B^*} + m_B \tilde{p}^{D^*B^*T} \tilde{p}^{D^*B^*} \\
&= \begin{bmatrix} 44991 & 2159 & 981 \\ 2159 & 18613 & -1061 \\ 981 & -1061 & 59770 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

座標系 {c} から慣性主軸への座標変換行列

$$\begin{bmatrix} 0.9947 & 0.0819 & -0.0626 \\ -0.0834 & 0.9963 & 0.0224 \\ 0.0605 & -0.0275 & 0.9978 \end{bmatrix}$$

このオイラー角 (Body-three123) で表現すると $\theta_1 = -1.5790, \theta_2 = -3.4685, \theta_3 = -4.7956$ [deg] と
なる。

問題6

(1)

$$\left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_A = \left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_B + \omega \times p \quad (C.22)$$

$$\left\{ \frac{dq}{dt} \right\}_A = \left\{ \frac{dq}{dt} \right\}_B + \omega \times q \quad (C.23)$$

したがって

$$\begin{aligned}
\left(\left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_B \right) \times \left(\left\{ \frac{dq}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{dq}{dt} \right\}_B \right) &= \left(\left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_B \right) \times (\omega \times q) \\
&= \left(\left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_B \right) \cdot q \omega - (\omega \times p) \cdot \omega q \\
&= \left(\left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_B \right) \cdot q \omega \quad (C.24)
\end{aligned}$$

したがって

$$\omega = \frac{\left(\left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_B \right) \times \left(\left\{ \frac{dq}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{dq}{dt} \right\}_B \right)}{\left(\left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_A - \left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_B \right) \cdot q} \quad (C.25)$$

(2)

カメラの視線ベクトル, すなわち恒星の観測される方向は

$$p = \{b\}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$q = \{b\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

また, 視線方向にある恒星の速度は

$$\left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_B = \{b\}^T \begin{bmatrix} -0.0188 & 0 & -0.0119 \end{bmatrix}^T$$

$$\left\{ \frac{dq}{dt} \right\}_B = \{b\}^T \begin{bmatrix} -0.0163 & -0.0044 & 0 \end{bmatrix}^T$$

また、恒星は慣性座標系に固定されているので

$$\begin{aligned}\left\{\frac{dp}{dt}\right\}_B &= 0 \\ \left\{\frac{dq}{dt}\right\}_B &= 0\end{aligned}$$

以上を式 (C.25) に代入すると

$$\omega = \{b\}^T \begin{bmatrix} -0.0044 & 0.0163 & 0.0070 \end{bmatrix}^T [\text{rad/s}] = \begin{bmatrix} -0.2521 & 0.9339 & 0.3983 \end{bmatrix}^T [\text{deg/s}]$$

が得られる。

問題 7

$$R = R_o + r \quad (\text{C.26})$$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{dR}{dt}\right\}_N &= \left\{\frac{dR_o}{dt}\right\}_N + \left\{\frac{dr}{dt}\right\}_N \\ &= \left\{\frac{dR_o}{dt}\right\}_N + \left\{\frac{dr}{dt}\right\}_B + \omega \times r\end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\left\{\frac{d^2R}{dt^2}\right\}_N = \left\{\frac{d^2R_o}{dt^2}\right\}_N + \left\{\frac{d}{dt}\left\{\frac{dr}{dt}\right\}_B\right\}_N + \left\{\frac{d}{dt}(\omega \times r)\right\}_N \quad (\text{C.28})$$

ここで

$$\left\{\frac{d}{dt}\left\{\frac{dr}{dt}\right\}_B\right\}_N = \left\{\frac{d^2r}{dt^2}\right\}_B + \omega \times \left\{\frac{dr}{dt}\right\}_B \quad (\text{C.29})$$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d}{dt}(\omega \times r)\right\}_N &= \left\{\frac{d\omega}{dt}\right\}_N \times r + \omega \times \left\{\frac{dr}{dt}\right\}_N \\ &= \left[\left\{\frac{d\omega}{dt}\right\}_B + \omega \times \omega\right] \times r + \omega \times \left[\left\{\frac{dr}{dt}\right\}_B + \omega \times r\right] \\ &= \left\{\frac{d\omega}{dt}\right\}_B \times r + \omega \times \left\{\frac{dr}{dt}\right\}_B + \omega \times (\omega \times r)\end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

したがって

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d^2R}{dt^2}\right\}_N &= \left\{\frac{d^2R_o}{dt^2}\right\}_N + \left\{\frac{d^2r}{dt^2}\right\}_B + \omega \times \left\{\frac{dr}{dt}\right\}_B \\ &\quad + \left\{\frac{d\omega}{dt}\right\}_B \times r + \omega \times \left\{\frac{dr}{dt}\right\}_B + \omega \times (\omega \times r) \\ &= \left\{\frac{d^2R_o}{dt^2}\right\}_N + \left\{\frac{d^2r}{dt^2}\right\}_B + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times \left\{\frac{dr}{dt}\right\}_B\end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

問題 8

(1)

$$I\dot{\omega} + \tilde{\omega}I\omega = \tau \quad (\text{C.32})$$

軸対称剛体であるから、慣性行列を

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

とする。ただし、題意より $I_3 > I_1$ である。また、 b_1 軸まわりに制御トルク

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

を入力するものとする。したがって、式 (C.32) は次のように書き換えられる。

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 = \tau_1 \quad (\text{C.33})$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = 0 \quad (\text{C.34})$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad (\text{C.35})$$

したがって、式 (C.35) より

$$\omega_3 = \bar{\omega}_3 = \text{const.} \quad (\text{C.36})$$

ここで、 $(I_3 - I_1)/I_1 = \lambda$ とおく。また、制御入力を

$$\tau_1 = -I_1 k \omega_1 \quad (\text{C.37})$$

とする。このとき、式 (C.33),(C.34) は次のように書き換えられる。

$$\dot{\omega}_1 + \lambda \omega_2 = -k \omega_1 \quad (\text{C.38})$$

$$\dot{\omega}_2 - \lambda \omega_1 = 0 \quad (\text{C.39})$$

初期条件をすべて 0 として、式 (C.38),(C.39) をラプラス変換すると、次のようになる。

$$s \omega_1(s) + \lambda \omega_2(s) = -k \omega_1(s) \quad (\text{C.40})$$

$$s \omega_2(s) - \lambda \omega_1(s) = 0 \quad (\text{C.41})$$

式 (C.40),(C.41) 整理すると、次式が得られる。

$$s^2 + k s + \lambda^2 = 0 \quad (\text{C.42})$$

したがって、 $k > 0$ のとき、 ω_1, ω_2 は漸近安定となる。

- (2) 加速度計取り付け位置を $r = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ 、その位置における加速度を $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}^T$ とする。このとき、位置ベクトル r の慣性座標系での 2 階微分が加速度ベクトル α と一致することから、次の関係式が得られる。

$$\alpha = \dot{\omega} r + \tilde{\omega} \tilde{\omega} r \quad (\text{C.43})$$

ここで、 $r = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ に注意して、 α の第 3 成分 α_3 を取り出すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= -\dot{\omega}_2 r_1 + \bar{\omega}_3 \omega_1 r_1 = -\lambda \omega_1 r_1 + \bar{\omega}_3 \omega_1 r_1 \\ &= (\bar{\omega}_3 - \lambda) r_1 \omega_1 \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

したがって

$$\omega_1(t) = \frac{1}{(\bar{\omega}_3 - \lambda) r_1} \alpha_3(t) \quad (\text{C.45})$$

次に、 ω_2 と加速度系出力との関係を求める。式 (C.38),(C.39) の解析解は

$$\omega_1(t) = \omega_1(0) \cos \lambda t + \omega_2(0) \sin \lambda t \quad (\text{C.46})$$

$$\omega_2(t) = \omega_2(0) \cos \lambda t - \omega_1(0) \sin \lambda t \quad (\text{C.47})$$

で与えられる。したがって、 $\omega_2(t)$ は $\omega_1(t)$ の位相をずらした波形となる、すなわち

$$\begin{aligned}\omega_2(t) &= -\omega_1\left(t - \frac{\pi}{2\lambda}\right) \\ &= -\frac{1}{(\bar{\omega}_3 - \lambda)r_1} \alpha_3\left(t - \frac{\pi}{2\lambda}\right)\end{aligned}\quad (\text{C.48})$$

問題 9

B に固定された基底ベクトルを $\{\mathbf{b}\}$, C に固定された基底ベクトルを $\{\mathbf{c}\}$ とし、慣性ダイアディックおよび角速度ベクトルとそれらの行列表現との対応は次のように与えられるものとする。

$$\mathbf{I}^{B/B^*} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{I}^{B/B^*} \{\mathbf{b}\} \quad (\text{C.49})$$

$$\mathbf{I}^{C/C^*} = \{\mathbf{c}\}^T \mathbf{I}^{C/C^*} \{\mathbf{c}\} \quad (\text{C.50})$$

$$\mathbf{N}_{\omega^B} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{N}_{\omega^B} \quad (\text{C.51})$$

$$\mathbf{N}_{\omega^C} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{N}_{\omega^C} \quad (\text{C.52})$$

C を一様な剛体球と仮定する場合

$$\mathbf{I}^{C/C^*} = \{\mathbf{c}\}^T \mathbf{I}^{C/C^*} \{\mathbf{c}\} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{I}^{C/C^*} \{\mathbf{b}\} \quad (\text{C.53})$$

のようになる。このとき、角運動量ベクトルは次式のようにになる。

$$\mathbf{h}^B = \mathbf{I}^{B/B^*} \cdot \mathbf{N}_{\omega^B} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{I}^{B/B^*} \mathbf{N}_{\omega^B} \quad (\text{C.54})$$

$$\mathbf{h}^C = \mathbf{I}^{C/C^*} \cdot \mathbf{N}_{\omega^C} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{I}^{C/C^*} \mathbf{N}_{\omega^C} \quad (\text{C.55})$$

また、剛体球と本体の相対角速度ベクトルは

$$\mathbf{B}_{\omega^C} = \mathbf{N}_{\omega^C} - \mathbf{N}_{\omega^B} = \{\mathbf{b}\}^T \mathbf{B}_{\omega^C} \quad (\text{C.56})$$

であるから粘性抵抗係数を Γ とすれば、粘性抵抗によるトルクベクトルは

$$\boldsymbol{\tau}_{slosh} = \{\mathbf{b}\}^T \boldsymbol{\tau}_{slosh} = \{\mathbf{b}\}^T \Gamma \mathbf{B}_{\omega^C} \quad (\text{C.57})$$

で書き表される。

次に、運動方程式をベクトル表記すると次のようになる。

$$\left\{ \frac{d\mathbf{h}^B}{dt} \right\}_N = \left\{ \frac{d\mathbf{h}^B}{dt} \right\}_B + \mathbf{N}_{\omega^B} \times \mathbf{h}^B = \boldsymbol{\tau}_{slosh} \quad (\text{C.58})$$

$$\left\{ \frac{d\mathbf{h}^C}{dt} \right\}_N = \left\{ \frac{d\mathbf{h}^C}{dt} \right\}_B + \mathbf{N}_{\omega^B} \times \mathbf{h}^C = -\boldsymbol{\tau}_{slosh} \quad (\text{C.59})$$

運動方程式を基底ベクトル $\{\mathbf{b}\}$ に対する成分表記に書き換えると、次のようになる。

$$\mathbf{I}^{B/B^*} \dot{\omega}^B + \mathbf{N}_{\omega^B} \mathbf{I}^{B/B^*} \mathbf{N}_{\omega^B} = \Gamma \mathbf{B}_{\omega^C} \quad (\text{C.60})$$

$$\mathbf{I}^{C/C^*} \dot{\omega}^C + \mathbf{N}_{\omega^B} \mathbf{I}^{C/C^*} \mathbf{N}_{\omega^C} = -\Gamma \mathbf{B}_{\omega^C} \quad (\text{C.61})$$

問題 10

まず、モーメントムホイールが停止することにより、そのもつ角運動量が衛星本体へ遷移するため、衛星が不規則な回転運動（タンプリング運動）をはじめ、次に、エネルギー散逸効果により最大慣性主軸と直交する2軸まわりの角速度が減衰し、最大慣性主軸まわりに安定して回転するようになる（フラットスピン）。やがて、最大慣性主軸まわりの角速度も減衰すると、重力傾度トルクの影響により、最小慣性主軸が地心方向に安定するようになる（重力傾度トルク安定）。

問題 11

(1) 並進運動をともなう物体の回転運動に関する運動方程式は

$$\left\{ \frac{dh^{B/O}}{dt} \right\}_N + mv \times \left\{ \frac{dp}{dt} \right\}_N = \tau \quad (\text{C.62})$$

並進運動に関する運動方程式は

$$\left\{ \frac{d(mv^{B^*})}{dt} \right\}_N = f \quad (\text{C.63})$$

で与えられる。ただし、 $h^{B/O}$ は慣性系 N からみた任意の点 O まわりの物体 B の角運動量ベクトルであり

$$h^{B/O} = I^{B/O} \cdot \omega + mp \times v \quad (\text{C.64})$$

の関係が成り立つ。また v^{B^*} は慣性系 N からみた質量中心 B^* の速度ベクトルであり

$$v^{B^*} = v^O + p \times \omega \quad (\text{C.65})$$

の関係が成り立つ。式 (C.64), (C.65) を式 (C.62), (C.63) に代入し、 $\{b\}$ 基底の成分を取り出すと、次の運動方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} I^{B/O} & -m\tilde{p}^T \\ -m\tilde{p} & mU_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega} I^{B/O} \omega - m\tilde{p}^T \tilde{\omega} v \\ m\tilde{\omega}(v + \tilde{\omega} p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{C.66})$$

ただし、 U_3 は3次の正方行列である。

(2) 点 O が質量中心 B^* と一致するとき、 $p = 0, I^{B/O} = I^{B/B^*}, v = v^{B^*}$ となるから、これらを式 (C.66) に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} I^{B/B^*} & O \\ O & mU_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v}^{B^*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega} I^{B/B^*} \omega \\ m\tilde{\omega} v^{B^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{C.67})$$

(3) 質量中心の位置は、衛星を構成する機器類の質量、配置に依存するため、設計途中では暫定的な値しかわからない。また、運用期間中においても、推進剤の消費や機器類の運動によって変動する。以上の理由で、基準座標系の原点とするには不適當である。

関連図書

- [1] Thomas R. Kane: Dynamics : theory and applications, McGraw-Hill, Inc., New York (1985).
- [2] Thomas R. Kane. Peter W. Likins, David A. Levinson: Spacecraft Dynamics, McGraw-Hill, Inc., New York (1985).
- [3] Bong Wie: Space Vehicle Dynamics and Control, AIAA Inc., Alexander (1998).
- [4] ランダウ・リフシッツ: 力学, 東京図書, 1974.
- [5] 木田 隆: スペースクラフトの制御, コロナ社, 1999.
- [6] 茂原正道: 宇宙工学入門, 倍風館, 1994.

宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-03-016

発行日 2004年3月25日
編集・発行 独立行政法人 宇宙航空研究開発機構
〒182-8522
東京都調布市深大寺東町七丁目44番地1
TEL 0422-40-3000 (代表)
印刷所 株式会社 ビー・シー・シー・
東京都港区浜松町2-4-1

©2004 JAXA

※本書(誌)の一部または全部を著作権法の定める範囲を超え、無断で複写、複製、転載、テープ化およびファイル化することを禁じます。

※本書(誌)からの複写、転載等を希望される場合は、下記にご連絡ください。

※本書(誌)中、本文については再生紙を使用しております。

<本資料に関するお問い合わせ先>

独立行政法人 宇宙航空研究開発機構 情報化推進部 宇宙航空文献資料センター



宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

