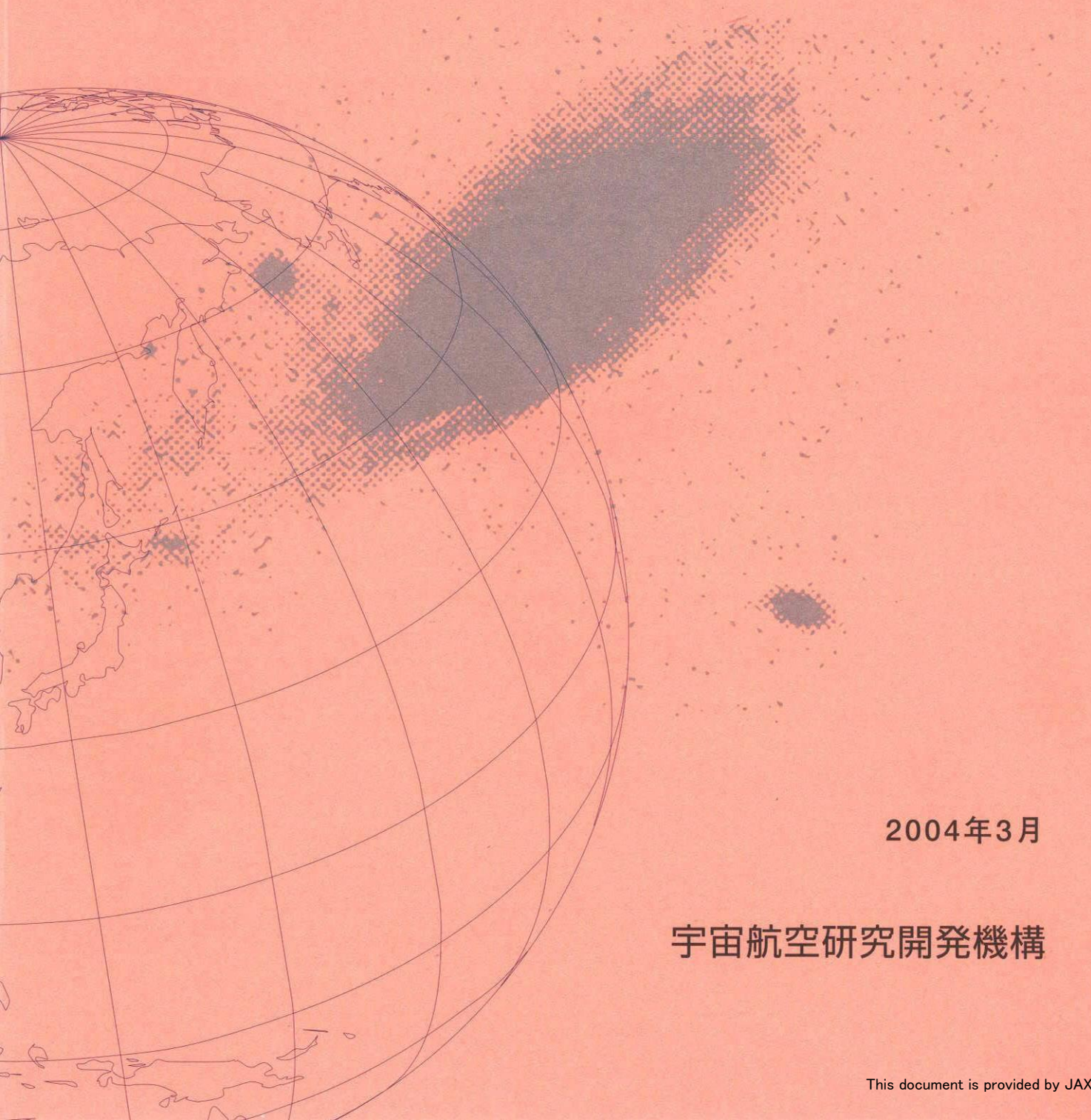


宇宙航空研究開発機構研究開発資料

高速マトリックスソルバSMS-AMG性能評価報告



2004年3月

宇宙航空研究開発機構

宇宙航空研究開発機構研究開発資料
JAXA Research and Development Memorandum

高速マトリックスソルバSMS-AMG性能評価報告

Report on the Performance of the SMS-AMG
(Super Matrix Solver-AMG)

清水 和弥

Kazuya SHIMIZU

総合技術研究本部 システム評価技術グループ
Space Systems Evaluation Engineering Group
Institute of Space Technology and Aeronautics

2004年3月

March 2004

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

和 文 抄 録	株式会社ヴァイナスで開発されたマトリックス演算ソルバ Super Matrix Solver - AMG を実際の数値計算コードに組み込みその性能評価を行った。本資料はその報告書である。
和文キーワード	連立一次方程式、マトリックスソルバ、SMS-AMG、Bi-CGSTAB 法

目 次

1. 評価結果.....	1
2. 解析手法ならびに解析条件.....	6
3. 参考文献.....	7

評価結果

液体金属 MHD 発電機解析用に開発した計算コード [1] を用いて、株式会社ヴァイナスで開発されたマトリックス演算ソルバ Super Matrix Solver-AMG (以下 SMS-AMG) の性能評価を行った。元の解析コードでは連立一次方程式の解法に Bi-CGSTAB 法 [2] を用いておりそれを比較の対象とした。SMS-AMG を組み込む際には連立一次方程式を解くサブルーチンとその係数行列を求める部分のみが変更されており、他は変更されていない。

表 1 に今回比較の対象とした 4 つの条件を示す。セル数が多いほど行列の規模が大きくなり、また外部負荷抵抗値が大きいほどマトリックスソルバへの負担が増大するような条件である。

表 1: 計算条件

	セル数 (nx, ny)	外部負荷抵抗
Case 1	(60, 40)	1.0×10^{-5}
Case 2	(60, 40)	1.0×10^{-3}
Case 3	(120, 60)	1.0×10^{-5}
Case 4	(120, 60)	1.0×10^{-3}

図 1~図 4 に CPU Time の比較を示す。各グラフにおいて 1 が元の Bi-CGSTAB 法を用いた場合、2 が SMS-AMG を用いた場合である。赤が SMAC 法における圧力修正量に関する Poisson 方程式を解く際に Bi-CGSTAB 法あるいは SMS-AMG に要した時間、青が MAC 法におけるスカラーポテンシャルに関する Poisson 方程式を解く際に Bi-CGSTAB 法あるいは SMS-AMG に要した時間、緑がその他の演算に要した時間である。CPU Time の計測は組み込み関数 CPU_TIME を用いて行った。例えば、SMS-AMG に掛かった時間は

```
call CPU_TIME(starttime)
RTC = SMSAMGD(.....)
call CPU_TIME(endtime)
cputime = endtime - starttime
```

により求めた。また、図 5~図 8 に各ステップにおける反復回数を示す。すべての計算において相対残差 $\leq 1.0 \times 10^{-10}$ を収束条件とし、反復回数は 200 回を上限としている。計算は初期分布 (MHD 効果無しで流体だけが流れたときの定常的な分布) からほぼ定常結果が得られるまでの 50000 ステップ行い、50000 ステップ分の計算に要した時間を比較した。その他テストに用いた計算機環境等は表 2 の通りである。

表 2: 計算機環境

計算機	DELL PRECISION WORKSTATION 650
CPU	Intel Xeon 3.06GHz
OS	RedHat Linux 9.0
Compiler	Intel Fortran Compiler 7.1

セル数が少ない条件では、Bi-CGSTAB 法の方が計算時間は少ないもののセル数が多くなると SMS-AMG の方が高速である。また、反復回数は全ての条件で SMS-AMG の方が少なく、安定性に関しては非常に優れている。セル数が少ない条件で SMS-AMG の方が劣っている結果となってしまったのは、SMS-AMG では内部で前処理が行われているが、今回の計算コードでは係数行列は計算中変化せず前処理は毎回は必要としない。その前処理を毎回行っている分だけ条件によっては SMS-AMG の方が遅くなっている。前処理に要する演算時間は、連立一次方程式の元数が増えるほど相対的に少なくなること、また、前処理を毎回しないようにするには前処理結果を保存しておく必要があるが、それでは特に大規模行列になったときにメモリへの負担が大きくなることから現段階で前処理結果を保存しておくようなライブラリは提供していないということであった。全体的には SMS-AMG の方が優れており、特に大規模行列になるほどその特長が現れると考えられる。

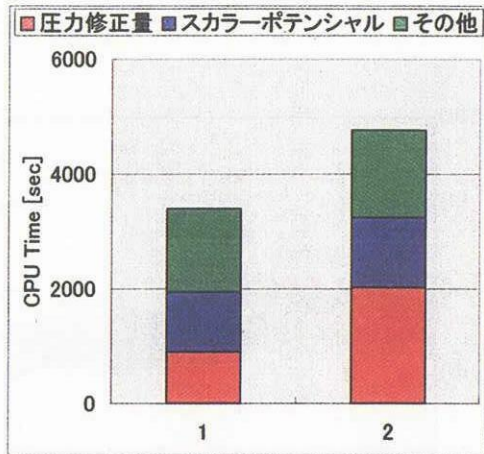


図 1: CPU Time の比較 (Case 1)

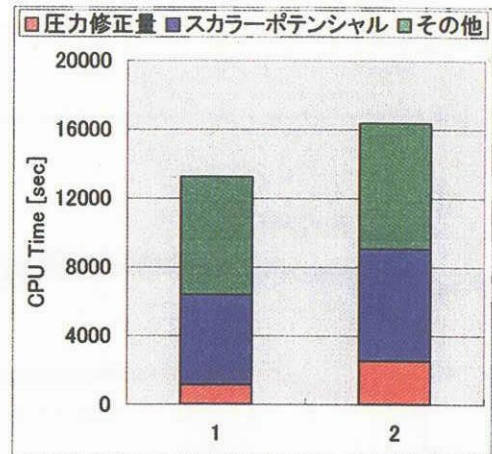


図 2: CPU Time の比較 (Case 2)

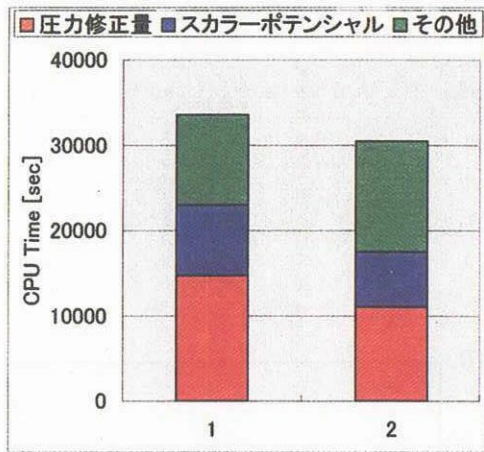


図 3: CPU Time の比較 (Case 3)

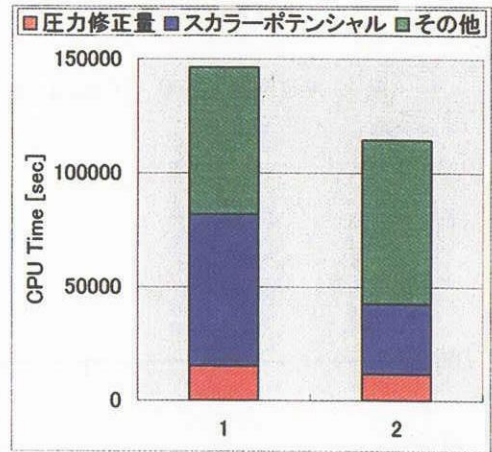


図 4: CPU Time の比較 (Case 4)

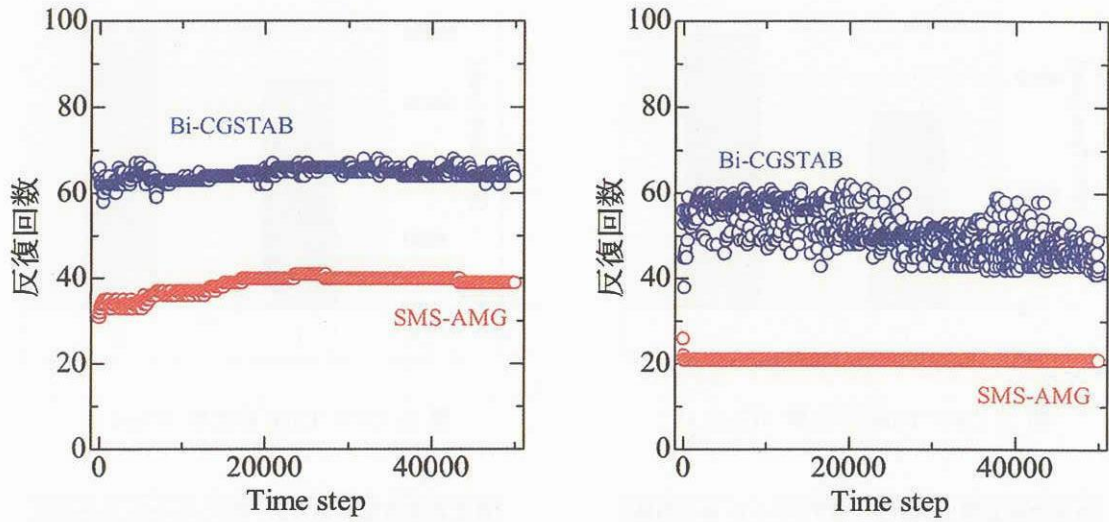


図 5: 反復回数の比較 (Case 1、左: 圧力修正量、右: スカラーポテンシャル)

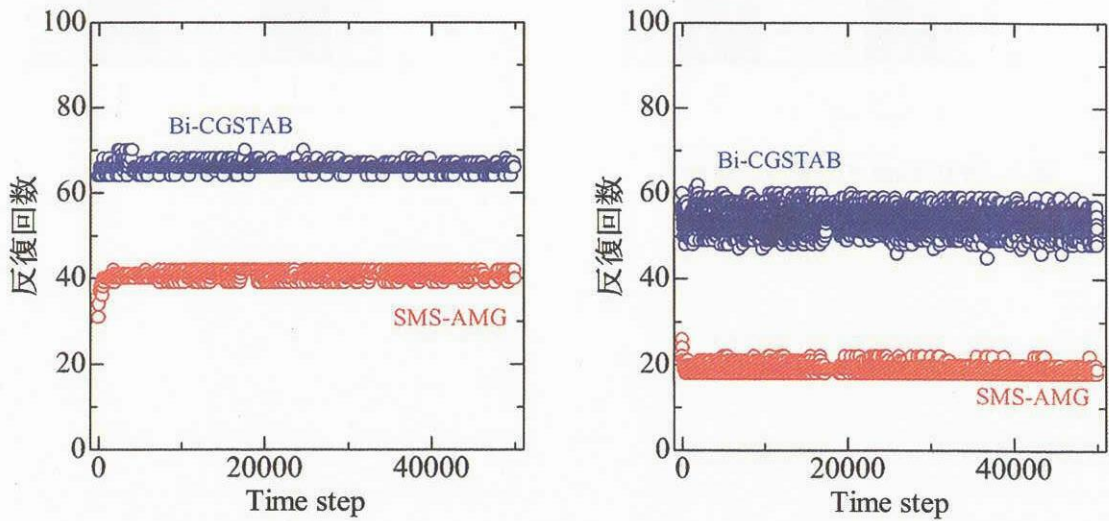


図 6: 反復回数の比較 (Case 2、左: 圧力修正量、右: スカラーポテンシャル)

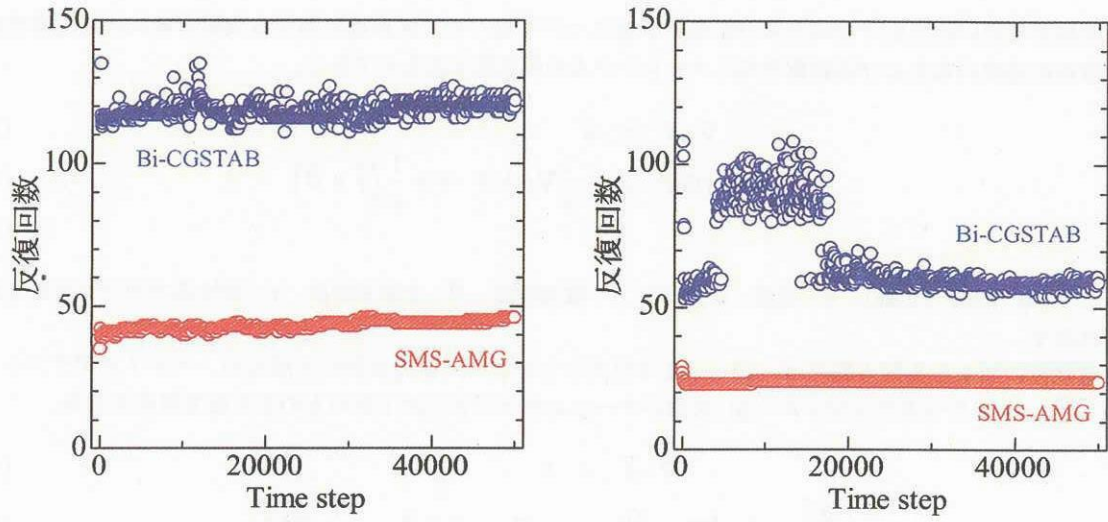


図 7: 反復回数の比較 (Case 3、左: 圧力修正量、右: スカラーポテンシャル)

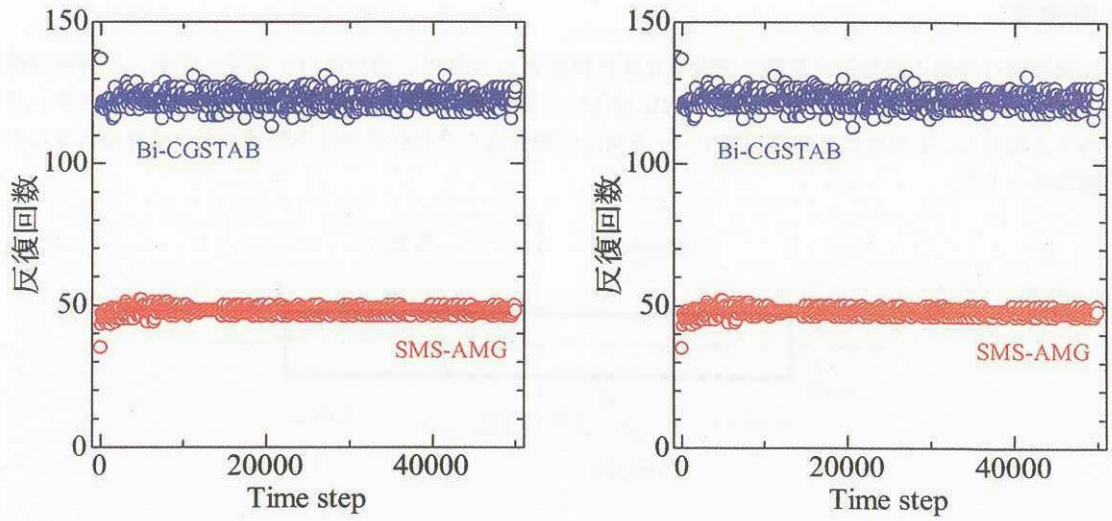


図 8: 反復回数の比較 (Case 4、左: 圧力修正量、右: スカラーポテンシャル)

解析手法ならびに解析条件

支配方程式

本解析に用いた支配方程式ならびに解析手法について述べる。流れ場に関する支配方程式は非圧縮性粘性流体の連続の式および運動量の式にローレンツ力の項を加えたものである。

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\rho} (\vec{j} \times \vec{B}) \quad (2)$$

$$(3)$$

ここで、 ρ : 密度 (定数)、 \vec{u} : 流速、 p : 圧力、 \vec{j} : 電流密度、 \vec{B} : 全磁束密度、 $\boldsymbol{\tau}$: 粘性応力テンソルをそれぞれ表す。

電磁界に関する支配方程式は、Maxwell 方程式ならびにオームの法則から成るが、ベクトルポテンシャル (\vec{A})、スカラーポテンシャル (ϕ) を用いクーロンゲージとした下記のを支配方程式とする。

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \phi + \vec{u} \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \vec{A} \quad (5)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

なお、 \vec{B}_0 : 外部印加磁束密度、 σ : 電気伝導度 (定数)、 μ_0 : 真空中の透磁率 (定数)、 \vec{E} : 電界、 \vec{B}_1 : 誘導磁束密度をそれぞれ表す。

計算領域

計算領域は流路中央付近に電極を設置した矩形流路とし (図9)、流体は $+x$ 方向に流れ、外部印加磁界は $+z$ 方向に加えられているとする。計算には MAC 法系統の解析に一般的に用いられているスタッガード格子を採用し、 x 方向には発電領域で、 y 方向には壁面近くでそれぞれ格子間隔が小さくなるような不等間隔格子とした。

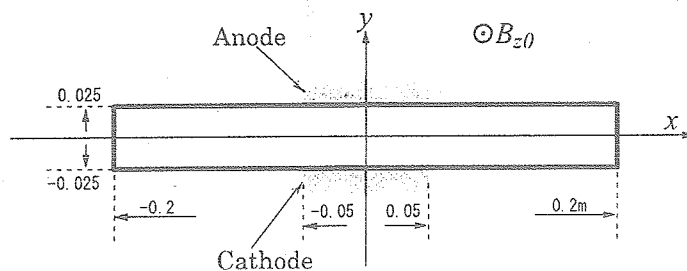


図9: 計算領域

解析手法

本解析は x - y 二次元解析とし ($u_z = A_z = \frac{\partial}{\partial z} = 0$)、流れ場については式 (1)(2) を SMAC 法 [3] により解く。電磁界については式 (4)(5) を MAC 法 [4] により解き進め、各時刻における \vec{j} 、 \vec{B}_1 等を更新する。また、スカラーポテンシャルの境界条件に必要となる Anode-Cathode 間の電位差 (V_{output}) は外部負荷抵抗との整合条件から決定される。

連立一次方程式は、1 ステップあたりに、流れ場を SMAC 法で解き進める際に圧力修正量を求めるために 1 回、電磁界を MAC 法で解き進める際にスカラーポテンシャルを求めるために最低 1 回解く (電磁界の計算の際には、外部負荷抵抗値との整合条件から反復計算を要するためにスカラーポテンシャルに関する Poisson 方程式は 1 ステップあたり 1 回以上解く必要がある)。

圧力修正量 (p') に関する Poisson 方程式の境界条件は出口で $p' = 0$ の Dirichlet 条件、その他は $\frac{\partial p'}{\partial n} = 0$ の Neuman 条件とし (図 10)、スカラーポテンシャルの境界条件は Anode 上で $\phi = 0$ 、Cathode 上で $\phi = V_{output}$ の Dirichlet 条件、その他は $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ の Neuman 条件 (図 11) となっている。係数行列はどちらも二次元 5 点差分で得られる対称行列である。

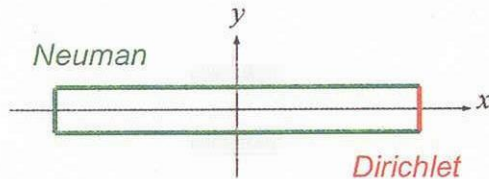


図 10: 圧力修正量を求める際の境界条件

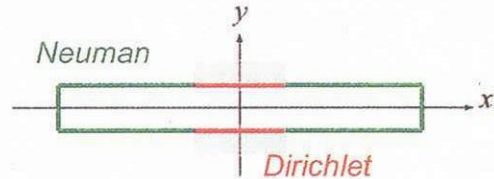


図 11: スカラーポテンシャルを求める際の境界条件

参考文献

- [1] K. Shimizu, et al.: "Numerical Study of Magnetohydrodynamic Flow in a Liquid Metal MHD Generator", *Symposium on Advanced Research of Energy Technology 2003*, (2003).
- [2] Van der Vorst, H. A.: "Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat Comp.*, vol.13, No.2, pp.631-644 (1992).
- [3] Anthony A. Amsden et al.: "A Simplified MAC Technique for Incompressible Fluid Flow Calculations", *Journal of Computational Physics*, vol.6, pp.322-325 (1970)
- [4] Francis H. Harlow et al.: "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", *The Physics of Fluids*, vol.8, No.12, pp.2182-2189 (1965)

宇宙航空研究開発機構研究開発資料 JAXA-RM-03-009

発行日 2004年3月25日
編集・発行 独立行政法人 宇宙航空研究開発機構
〒182-8522
東京都調布市深大寺東町七丁目4番地1
TEL 0422-40-3000 (代表)
印刷所 株式会社 ビー・シー・シー・
東京都港区浜松町2-4-1

©2004 JAXA

※本書(誌)の一部または全部を著作権法の定める範囲を超え、無断で複写、複製、転載、テープ化およびファイル化することを禁じます。

※本書(誌)からの複写、転載等を希望される場合は、下記にご連絡ください。

※本書(誌)中、本文については再生紙を使用しております。

<本資料に関するお問い合わせ先>

独立行政法人 宇宙航空研究開発機構 情報化推進部 宇宙航空文献資料センター



宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

