

# FR 法による高次精度非構造オーバーセット格子法の構築

芳賀 臣紀, 嶋 英志  
(宇宙航空研究開発機構)

## Development of a high-order unstructured overset-grid method based on flux-reconstruction scheme

by  
Takanori HAGA, Eiji SHIMA

### ABSTRACT

The high-order flux reconstruction (FR) method is extended for overset-grid capability aiming for further geometrical flexibility and multiple moving body problems. Compact data dependency of the FR method facilitates inter-grid data communication without using interpolation stencils. The developed overset FR method is applied to solve benchmark problems including 2D inviscid vortex propagation and acoustic scattering around a cylinder. The results are compared with the analytical solutions in order to verify the accuracy of the proposed method. The developed overset FR solver is applied to Large-eddy simulation of supersonic three-nozzle clustered jet and its interaction with the launch pad. By using the overset grids, it is possible to perform analysis by changing the lift amount, the nozzle configuration (3-clustered or single), and the shape of the launch pad without changing the all computational grids.

### 1. はじめに

近年, 複雑形状周りの非定常乱流解析や空力音響解析に適した数値計算手法の開発が進み, 実問題への適用が広がっている. 階層型の直交格子をベースとした手法は非常に複雑な形状に対してほぼ完全な自動格子生成を可能とし, 自動車フルスケールの LES に適用されている.<sup>1)</sup> 物体壁の取り扱いについては埋め込み境界法と境界層壁モデルを組み合わせる手法が提案され, 剥離点の予測などに課題はあるものの改良が続けられている. 本研究ではこれらのアプローチに対し, 汎用ソルバーで標準となっている非構造格子法に再び着目する. 物体壁に合わせて計算格子を配置する(境界適合)ため, 壁乱流のより高精度な予測が可能と期待される. 従来の課題であった低い空間精度(高々2次)に対しては, 不連続ガラーキン法(DG法)<sup>2,3)</sup>をはじめとする高次精度の非構造格子法が提案されてきた. 計算セル内に導入する内部自由度のデータ局所性を活かすことで, 高い並列効率と演算強度(Flop/Byte)を引き出すことができ, 実際, 流束再構築(flux-reconstruction, FR)法<sup>4)</sup>をベースとしたオープンソースコードである PyFR は 18,000 個の GPU (K20X) を使用して, 13.7 PFLOP/s (peak 比 58.0%) という非常に高い演算性能を達成している.<sup>5)</sup>

しかし, これら DG, FR を複雑実機形状へ適用した報告例はまだ少なく, 設計ツールとなるには課題が残っている. そのなかで高次要素の格子生成が大きなハードルとなっている. DG や FR では内部自由度を利用するため従来手法よりも粗い格子で高解像度を達成できるが, 通常の線形要素(セル)では特に曲率を持った形状を忠実に表現できないため高次要素(少なくとも2次要素)の利用が不可欠となる. 単純形状では歪みの少ない高品質な格子を作成できるが, 形状が複雑になると歪みの少ない格子を生成することは難しく, 形状メトリクスの急激な変化や負のヤコビアンなどで計算が破綻することがある. 従来の非構造格子法では複数セル種を組み合わせたハイブリッド格子を用いることが一般的であるが, 本研究では, 歪みが大きくなるような突起や凹部では形状パーツ毎に高品質な格子を作成し, それらを重ね合わせる事が可能なオーバーセット格子法<sup>6)</sup>を採用する. DG や FR では隣接セル情報はセル境界面においてのみ必要なので高次精度構造格子法で必要となるフリンジポイントは不要という利点がある. DG 法のオーバーセット格子への拡張は Galbraith ら<sup>7)</sup>によ

って行われているが, 2次元問題や単純な形状に対する基礎的な検証にとどまっている.

本報告では, FR をオーバーセット格子法に拡張し, その検証例としてベンチマーク問題に適用する. 実用例として, ロケットエンジンノズルのクラスタ化による形態変更及び複雑な射場構造物の影響を評価するために実施した, 超音速クラスタジェットと発射台の干渉解析について報告する.

### 2. 計算手法

#### 2.1 支配方程式の離散化 (Flux Reconstruction 法)

支配方程式は一般座標系における強保存形式の Navier-Stokes 方程式である. 支配方程式の空間離散化には Flux Reconstruction (FR) 法<sup>4)</sup>を用いる. FR 法は非構造格子で一般的なセル形状(テトラ, プリズム, ピラミッド等)に対応するが, 本研究では構築が容易なヘキサ(六面体)セルを用いる. FR 法では, 各セル内に計算点 (Solution point, SP と呼ぶ) を導入して局所解を多項式近似する. SP の選定方には任意性があり, 通常 Gauss 点または Gauss-Lobatto 点<sup>8)</sup>が選ばれる. 本研究では非線形項のエイリアス誤差が小さい Gauss 点を用いる. K-1 次の近似多項式(各方向に K 個の SP)を用いると空間 K 次精度のスキームが得られる. 各セル内の空間項(流束の発散)の離散化には, セル内 SP の状態量から計算した流束多項式の微分を用いるが, それだけでは隣接セルの情報を反映しないので, セル境界面の Flux-point (FP)において共通の流束値を近似リーマン解法などにより数値的に求め, セル内流束分布をより高次の多項式で修正する. ここで導入される解析的な関数は修正関数と呼ばれ, FR 法の精度や安定性を特徴づける. 本研究では線形問題で Nodal DG 法に帰着する  $g\_DG$ , 精度は劣ものの CFL 数の安定限界が緩和される  $g\_Ga$  の両方を用いて比較する. 修正関数  $g\_DG$  および  $g\_Ga$  の詳細についてはオリジナルの文献<sup>4)</sup>を参照されたい. 修正に必要な共通流束については, 非粘性流束は Roe<sup>17)</sup>または SLAU,<sup>18)</sup> 粘性流束は BR2<sup>19)</sup>を用いて評価する. 時間積分には 3 次精度の TVD Runge-Kutta 法<sup>20)</sup>を用いる.

#### 2.2 衝撃波捕獲法

FR 法ではセル内の解の分布を多項式で表現するため, 衝撃波のような不連続があると数値振動が生じる. 数値振動を抑制し, かつ乱流渦を高解像に捉えるため, 衝撃波のサ

ブスケールモデルとして LAD 法<sup>8)</sup>を用いる。FR 法に対する LAD スキーム構築の詳細は文献<sup>9)</sup>を参照されたい。

### 2. 3 オーバーセット格子法

FR 法では DG 法と同様に隣接セルとの情報はセル境界における FP のみを介して行われるため、従来の高次精度差分法などで必要となるステンシル（袖）分のデータ通信が不要である。これにより通信量が削減され、プログラミングや格子作成も簡略化される。図 1 に示すように 2 つの格子（1 次元）が重合する場合を考える。Grid1 の重合境界における FP がレセプターポイント (RP) となり、それを包含する Grid2 のドナーセルにおいてレセプターポイント位置の物理量を内挿計算し、Grid1 へ送信する。内挿係数は計算の前処理で求めておく。同様に Grid2 のレセプターポイントに対して Grid1 のドナーセルから内挿値を送信する。それぞれの格子では、重合境界における FP の物理量がドナーセルから与えられ、それを隣接セルからの補間値と見做せば通常のセル境界と同様に数値流束を計算することができる。非粘性計算では保存量  $Q$  のみを通信すればよく、粘性計算の場合はこれに加えて保存量の勾配  $\nabla Q$  を通信する必要がある。Grid1 と 2 の重合境界における数値流束の不一致により離散的保存性は厳密には満たされないが、解が十分なめらかであれば誤差は小さいと考えられる。本研究では、Grid 間の通信は MPI で実装し、各 Grid に対してプロセスを割り当てる。時間積分には Runge-Kutta 法を用いるので、各段の境界条件処理をする前に重合境界の通信を行う。

複数の格子を重合させる場合、物体内部など計算領域外の不要な格子セルの除去（ホールカット）および重合境界面の決定が必要となる。本稿では複雑形状の非構造格子に対しても自動的に重合境界を探索できる Nakahashi ら<sup>10)</sup>の方法を用いる。ホールカットには多面体の内外判定法<sup>11)</sup>を利用する。重合境界の探索とホールカットは計算格子データ（ノード、セル、フェース）に対して行われるため、総格子セル数が少なく済む FR 法では処理時間は大幅に短縮される（5 次精度のヘキサ格子の場合 1/125 のセル数）。本稿の解析例では重合境界を予め指定し、ホールカットは不要なケースを紹介するが、より複雑な形状への適用例については文献<sup>12)</sup>を参照されたい。

## 3. 計算結果および考察

### 3. 1 渦移流問題

2 次元の非粘性渦の移流を計算し、本手法の計算精度を確認する。初期条件を次式で与える。

$$\begin{aligned} u &= U_\infty - \frac{C(y - y_c)}{R_c^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \\ v &= \frac{C(x - x_c)}{R_c^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \\ p &= p_\infty - \frac{\rho C^2}{2R_c^2} \exp(-r^2), \\ r^2 &= \frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{R_c^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $R_c$  は渦の代表半径であり、主流マッハ数は  $M_\infty = 0.1$ 、渦の強さを  $C/(U_\infty R_c) = 0.02$  とした。渦中心は原点 ( $x_c = y_c = 0$ ) である。密度は一定とした。計算領域は直交格子 ( $-6 \leq x/R_c \leq 18$ )、( $-12 \leq y/R_c \leq 12$ ) をベースに波状格子に変換した。計算格子は上下に分割してオーバーラップさせた。オーバーラップ幅は 0.01 である。Coarse 格子のセル数は上側、下側でそれぞれ (12×3)、(11×3) と異なるサイズのセルが重なるようにした。各方向にそれぞれ 2 倍ずつ細分化して Medium 格子と Fine 格子を作成した。境界条件は、 $x$  方向に周期境界条

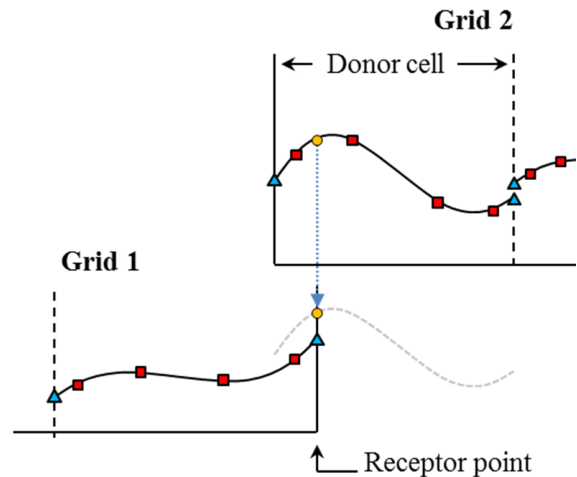


図 1 重合境界における物理量の内挿(1 次元). 図中、四角は SP, 三角は FP, 丸はドナーセルにおける RP (補間点) を表す。

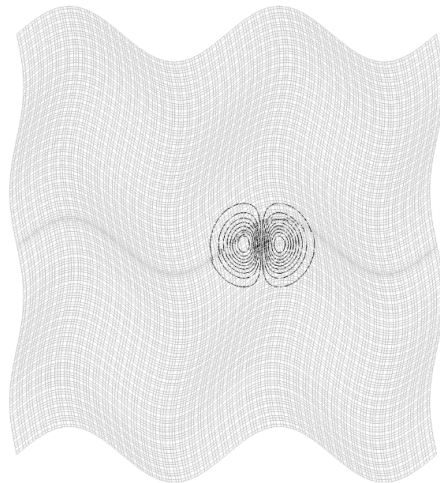


図 2 渦移流問題における  $y$  方向速度分布 (Fine 格子).

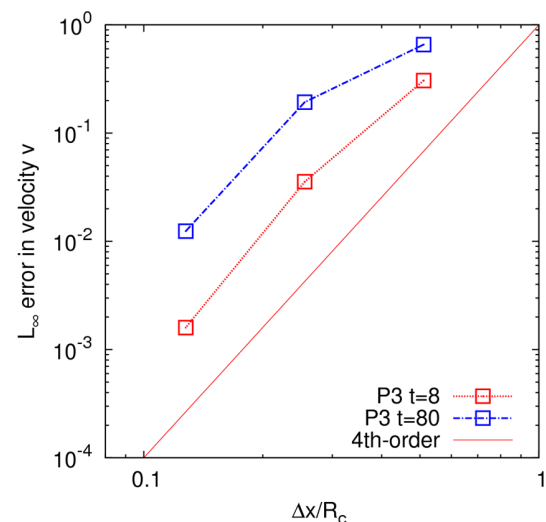


図 3 渦移流問題における誤差の収束 ( $y$  方向速度).

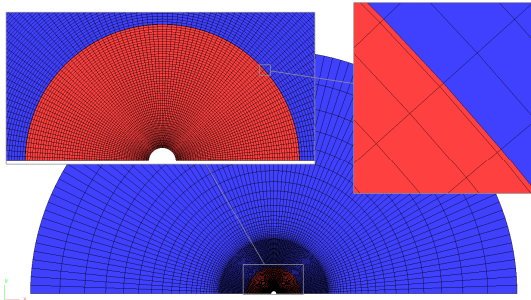


図 4 円柱周りのオーバーセット計算格子. 近傍格子 (赤) と遠方格子 (青) .

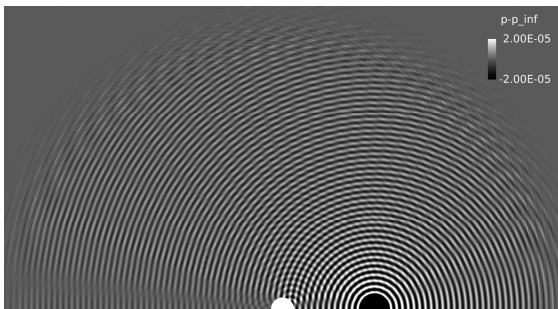


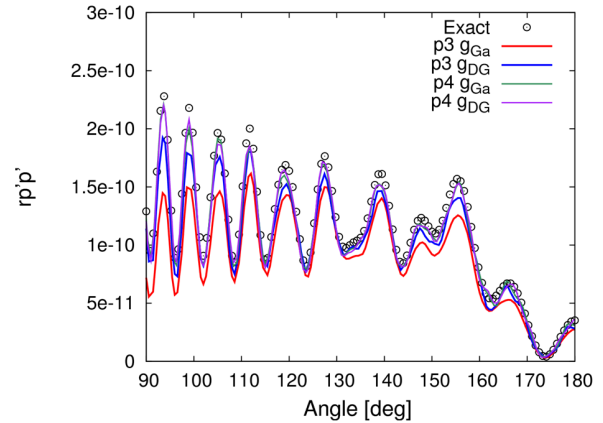
図 5 円柱周りの瞬時の圧力変動分布 (FR-p4) .

件, 上下の境界は一樣流条件を与えた. 計算スキームには空間 4 次精度 (p3) の FR 法を用いた. 図 2 に Fine 格子で計算した, 無次元時間  $tU_\infty/R_c = 80$  における  $y$  方向速度分布を示す. 渦は計算領域を 3 周し  $x/R_c = 8$  の位置に到達している. 等高線に若干のずれがあるがほぼ初期条件の分布を維持している. 無次元時間 8 および 80 における  $y$  方向速度の厳密解との誤差を格子セルサイズに対してプロットした結果を図 3 に示す. Coarse 格子では十分に渦を解像できず格子収束のトレンドに乗っていないが, 細かい格子 2 点の傾きから空間 4 次精度を達成している.

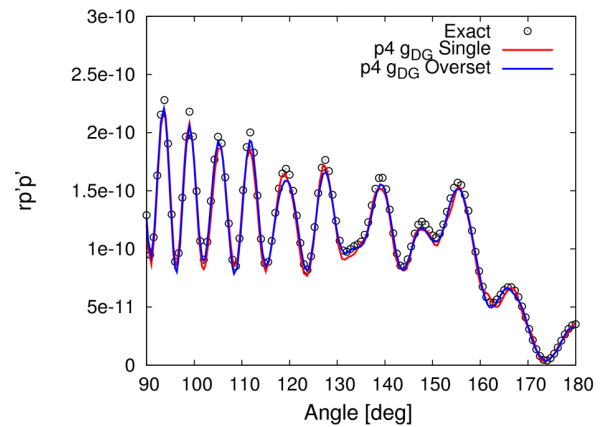
### 3. 2 円柱周りの放射音解析

オーバーセット格子を利用する FR 法の空力音響解析への適用性を調べるため, CAA Workshop<sup>13)</sup> の課題の一つに適用する. 曲率を持つ円柱による反射波の正確な計算に加えて, 音源からの波と反射波の干渉が捉えられるか検証した. 単極子音源の与え方については, 今村ら<sup>14)</sup> を参考にした. 図 4 に計算に用いたオーバーセット格子を示す. 半径 1 の円柱の中心 (0,0) から半径 10 の領域を音波を解像するターゲット領域とした. 円柱近傍 ( $r \leq 5$ ) の格子 (図中赤色) と遠方 ( $r \geq 4.99$ ) の格子 (図中青色) の 2 つの格子を重合させた. 格子幅は, 6 次精度コンパクトスキームの計算例<sup>14)</sup> を参考に, 1 波長に約 10 点 (10 points per wave, ppw) となるよう, 法線方向を 100 セル, 周方向を 90 セルで分割した. 差分法の格子と比べると, 4 次精度の FR 法の内点 (各方向に 4 SP) を考慮し, 各方向に 4 倍粗い格子となっている. 外部境界からの反射を抑えるため, ターゲット領域の周囲 ( $r > 10$ ) は sponge region とし, 法線方向に 1.18 倍ずつストレッチさせ, 26 セルを配置した. 空間 4 次 (p3) 及び 5 次精度 (p4) の FR 法について, 非粘性の共通流束に Roe 法を用いて計算した. 時間ステップ幅は, FR-p3 と FR-p4 でそれぞれ  $\Delta t = 0.002, 0.001$  として, 無次元時間で 30 まで計算した.

図 5 に FR-p4 で計算した瞬時の圧力変動分布を示す. 重合境界付近での不自然な反射などは見られない. 図 6 a) に検証用に単一格子を用いて計算した近傍場 ( $r = 5$ ) における放射音の指向性分布を示す. 横軸は円柱を中心に  $x > 0$  から反時計回



a) 単一格子における各スキームの比較.



b) 単一格子とオーバーセット格子の比較.

図 6  $r=5$  における放射音の指向性分布

りに測った角度である. 縦軸は圧力変動の自乗平均に原点からの距離を掛けたものを表す. FR-p3 の結果を比較すると, 修正関数の違いにより差がみられる.  $g_{DG}$  の方がより解析解に近い結果となっているが, 高角度側で若干減衰がみられる. FR-p4 の結果は解析解によく一致し, 修正関数による差はほとんど見られない. 図 6 b) にオーバーセット格子と単一格子の結果の比較を示す. わずかに差がみられるがオーバーセット格子を用いても解析解とよく一致する結果が得られた.

### 3. 3 超音速クラスタジェット - 発射台干渉の解析

オーバーセット FR 法の実問題の適用例として, H3 ロケットの第一段ロケットエンジンを 3 基クラスタ化した形態における, 発射台との干渉解析について報告する. サブスケールの試験では供試体サイズの制約等により複数のノズルを等価な出口面積を有する単一ノズルで代替することが多い. クラスタ効果のメカニズムについては不明な点が多く十分に検証されたモデルがないため, 数値解析によりクラスタ効果を評価する.

先立って実施した小型コールドフロー試験の条件に合わせ, ノズル出口のマッハ数は 2, 圧力比は 0.5 (過膨張) とした. レイノルズ数はノズル直径 ( $D=10\text{mm}$ ) を基準とし  $Re = 5.1 \times 10^5$  である. 比較のため, ノズル 3 基と等価な出口面積を持つように直径を  $\sqrt{3}$  倍した  $D_L=17.3\text{mm}$  のシングルノズルについても解析を行った. 乱流のモデリングには, 計算スキームの数値粘性がサブグリッドスケールの乱流渦粘性効果を補うと考える陰的 Large Eddy Simulation (LES)

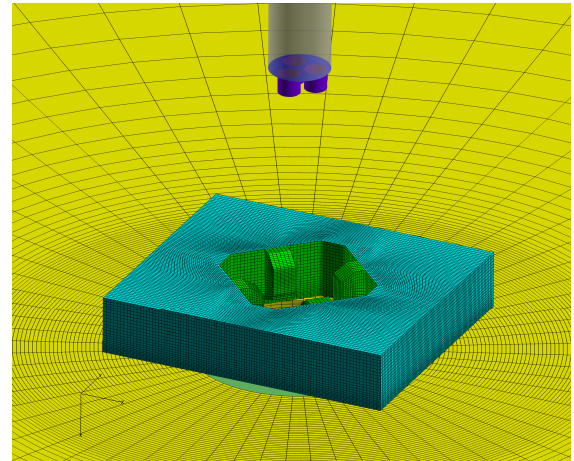
を利用し、陽的な乱流モデルは用いてない。本ケースでは、通常の移流項を発散型で離散化する方法では数値的な不安定が表れたため、新規に提案された分割型移流項を用いる運動エネルギー保存スキーム<sup>15)</sup>を利用した。共通流束に風上法である SLAU を用いたため、厳密には運動エネルギーを保存しないが、数値不安定の抑制に有効であることが確認された。

計算格子は、1) ロケットノズル、2) 発射台、および 3) 地面を模擬した円孔平板の3つに領域を分割して格子を作成し、所望のリフト位置で重合させた。本解析では発射台上面からの音響波の反射に焦点を絞り、発射台下の火炎偏向板および煙道等はモデル化していない。図7に計算格子の概要を示す。作成した各計算格子のセル数を表1に示す。空間4次精度のFR法を用いると総自由度数は約274.4Mである。オーバーセット格子を利用することで、リフト量を変えた解析や、ノズル形態(3基クラスタ or シングル)、発射台形状などを変えた解析を必要最小限の格子変更により効率的に実行することが可能である。

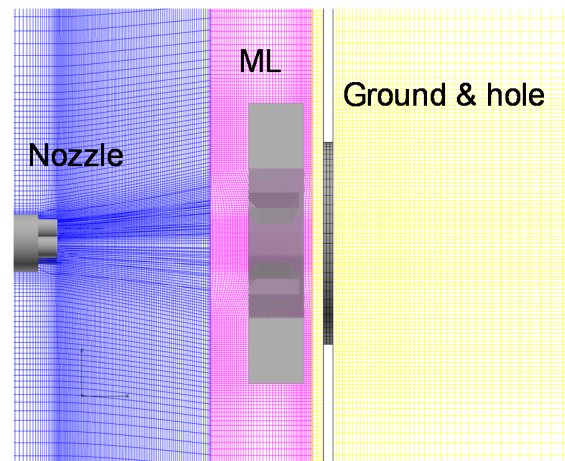
図8に地面からのリフト量を10Dとした場合の3基クラスタ及びシングルノズルの流れ場(瞬時場)を示す。重合境界における非物理的な数値振動などは見られず、明瞭なショックセル構造が発達するシングルノズルのケースでも安定に計算が可能である。クラスタノズルのケースでもノズル径に比例して小さなショックセルが見られるが、複数ジェットの影響により発射台の上部で十分乱れが発達していることがわかる。このケースでは上流側に指向性を持ったスクリーチが発生しており、大きな圧力変動がみられる。一方、シングルノズルではジェット間の乱れは小さく、圧力変動も小さい。クラスタノズルの自由噴流解析では、ジェット間の相互干渉により混合が促進され、ポテンシャルコアが短くなることが確認された。<sup>16)</sup> 超音速ジェットの主要な音源であるマッハ波はポテンシャルコアが発達した領域から強く発生することが知られており、コア長さが異なるクラスタノズルとシングルノズルでは、最大音圧となるリフト量も異なると予想される。複数ノズルを単一のノズルでモデル化する場合はこの点に注意が必要である。

図9にリフト量を変えて計算したOASPL分布を示す。3基クラスタノズルではリフト量14Dと17Dを比較している。シングルノズルではリフト量をシングルノズル直径 $D_L=17.3\text{ mm}$ で整理し、 $14D_L$ と $17D_L$ の結果を示す。本稿では割愛するが、リフト量20D及び $20D_L$ の計算も行い、クラスタノズル及びシングルノズルともにリフト量17Dまたは $17D_L$ でロケット段間部に相当する位置での音圧が最大になることがわかった。クラスタノズルのOASPL分布を見ると、ジェットの上方側に指向性を持ったスクリーチの影響がみられる。実機の環境条件で重要となる、スクリーチよりも低い周波数帯域の音圧を比較すると、シングルノズルはクラスタノズルより騒音レベルは高いことがわかった。OASPLの図からもシングルノズルの方がジェット側方の遠方領域で明るい青の範囲が広がっていることが定性的に確認できる。本ケースでは、ノズル出口条件が不確定であることに加え、アンビリアルマストや他の地上構造物の影響により圧力波のフィードバック構造が変わることも予想され、スクリーチの定量的な予測は容易ではない。しかし、実機環境ではジェットのマッハ数は本ケースより高く、高温の燃焼ガスとなるためスクリーチは発生しにくくなることが知られており、設計評価の視点でとらえるべき物理現象を見極めることが肝要である。

最後に本ケースの計算コストについて報告する。計算の実行に当たっては宇宙航空研究開発機構のスーパーコンピュータ『JSS2』を用いた。圧力履歴のFFT処理に十分な時間を確保するため無次元時間で120まで計算を行い、1ケース当たりの計算時間は、JSS2の64ノード(2048コア、256プロセス(MPI)×8スレッド(OpenMP))を用いて2週間であった。



a) クラスタジェット-発射台干渉解析に用いたモデル形状。



b) 3つの領域に分けて作成した計算格子 ( $z=0$ 断面)。青) ノズルと上流部、紫) 発射台部、黄) 円孔平板と下流部。

図7 3基クラスタノズル-発射台干渉の計算格子。

表1 3基クラスタジェット-発射台干渉解析のオーバーセット格子セル数

ID	Part	Cell #
Grid1	Nozzle	1,976,724
Grid2	Launch Pad	1,619,600
Grid3	Ground & hole	691,712
TOTAL		4,288,036

#### 4. 結論

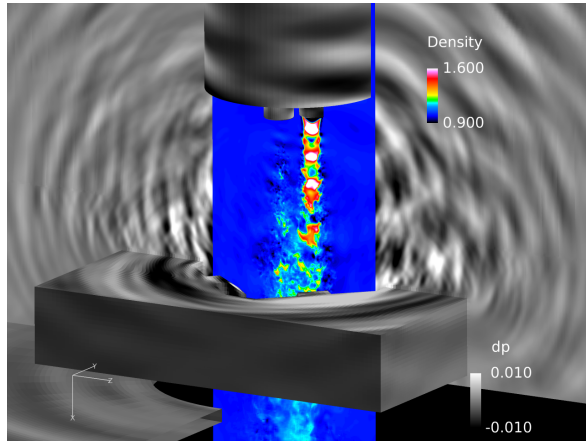
複雑形状を有するロケット射場周りの高精度なLESおよび空力音響解析を目的として、高次精度FR法に基づくオーバーセット格子法を構築した。渦移流による精度検証の結果、所期の高次精度を達成できることを確認した。またCAA Workshopベンチマーク問題を解き、解析解と定量的に一致する結果が得られた。実用計算例として超音速クラスタジェット-発射台の干渉解析に適用し、複雑形状の周りに衝撃波と乱流が干渉する複雑流れ場にも適用できることを示した。オーバーセット格子を利用することで、リフト量を変えた解析や、ノズル形態(3基クラスタ or シングル)、発射台形状などを変えた解析を必要最小限の格子変更により実行できることは本手法の大きな利点である。本

稿では重合境界の自動決定及びホールカットが必要なケースは割愛したが、重合境界におけるFRINGEポイントが不要というFR法の特長を活かし、今後より複雑で大規模な問題に適用していきたい。

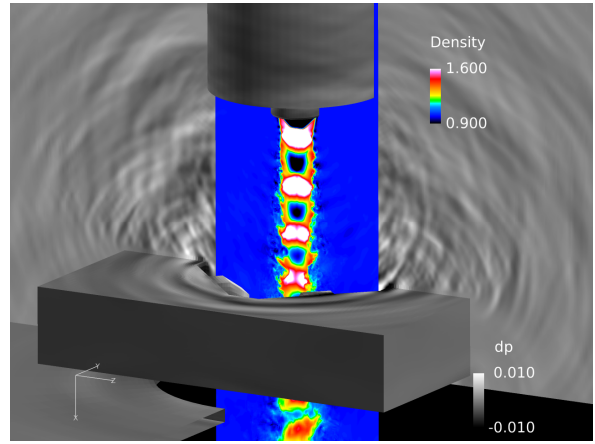
**謝辞**

本研究の一部は JSPS 科研費 JP17K18427 による助成を受けた。超音速クラスタジェット - 発射台干渉の計算には宇

宙航空研究開発機構のスーパーコンピュータ『JSS2』を用いた。格子生成ソフト MEGG3D の使用に関し JAXA の伊藤靖博士からご支援を頂いた。格子変換ツール QuickMesh の使用にあたり QuickMesh (株) の雨宮孝氏からご支援を頂いた。ホールカット機能の実装についてはアドバンスソフト (株) の桐原亮平氏のご支援を頂いた。ここに記して謝意を表する。

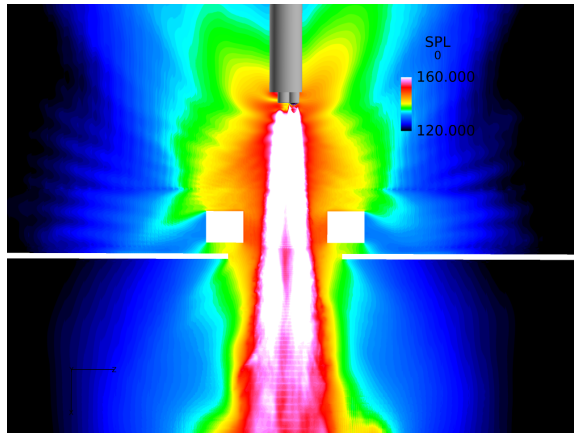


a) 三基クラスタノズル

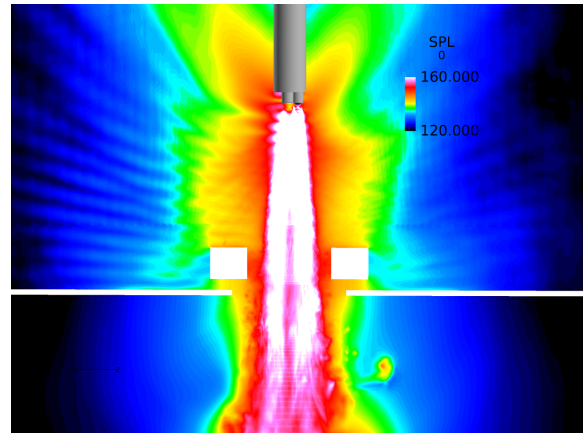


b) シングルノズル

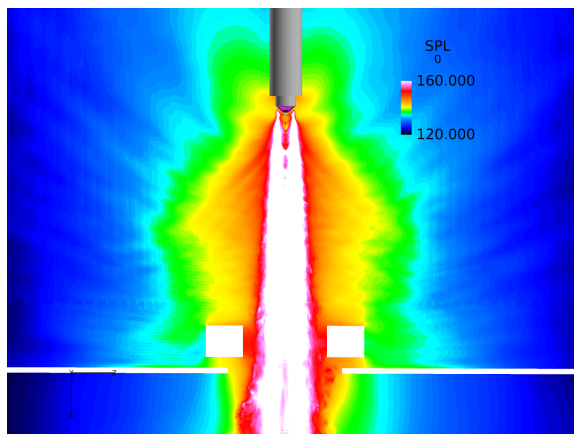
図 8 超音速ジェット - 発射台干渉の流れ場 (瞬時場) . 密度分布 (カラー) 及び圧力分布 (グレー) .



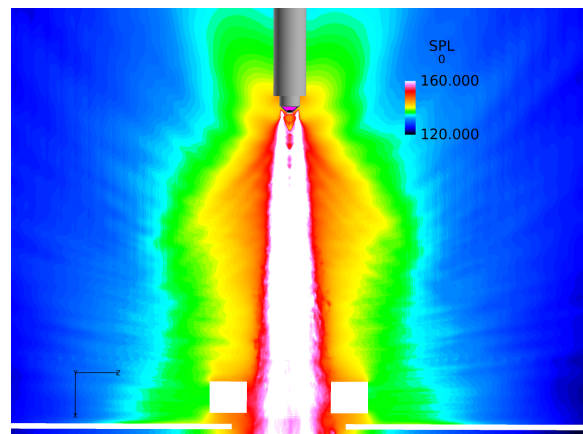
3 基クラスタノズル Lift 14D



3 基クラスタノズル Lift 17D



シングルノズル Lift 14D<sub>L</sub>



シングルノズル Lift 17D<sub>L</sub>

図 9 超音速ジェット - 発射台干渉解析の OASPL 分布.

## 参考文献

- 1) 坪倉 誠, “京からポスト京へ 大規模 CFD が拓く新たな応用空力シミュレーション,” *ながれ* 35 (2016) 77–85
- 2) B. Cockburn, C.-W. Shu, “The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems,” *J. Comput. Phys.* 141 (1998), pp. 199–224.
- 3) F. Bassi, S. Rebay, “A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations,” *J. Comput. Phys.* 131 (1) (1997), pp. 267–279.
- 4) H.T. Huynh, “A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin methods,” *AIAA Paper 2007-4079*, 2007.
- 5) P. Vincent, F. Witherden, B. Vermeire, J. S. Park, A. Iyer, “Towards green aviation with python at petascale,” in *Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis, SC ’16*, IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, 2016.
- 6) S. E. Sherer, J. N. Scott, “High-order compact finite-difference methods on general overset grids,” *J. Comput. Phys.* vol. 210 (2005), pp. 459–496.
- 7) M.C. Galbraith, J.A. Benek, P.D. Orkwis, M.G. Turner, “A discontinuous Galerkin chimera scheme,” *Comput. Fluids* 98 (2014), pp. 27–53.
- 8) S. Kawai, S.K. Lele, “Localized artificial diffusivity scheme for discontinuity capturing on curvilinear meshes,” *J. Comput. Phys.* vol. 227 (2008), pp. 9498-9526.
- 9) T. Haga, S. Kawai, “On a robust and accurate localized artificial diffusivity scheme for the high-order flux-reconstruction method,” *J. Comput. Phys.* vol. 376 (2019), pp. 534-563.
- 10) K. Nakahashi, F. Togashi, D. Sharov, “Intergrid -boundary definition method for overset unstructured grid approach,” *AIAA J.* vol. 38 No. 11 (2000).
- 11) 長島 忍, 球面投影による多面体の内外判定方法, *情報処理学会論文誌* (1986), vol. 27.
- 12) 芳賀, “高次精度非構造オーバーセット格子法の航空宇宙問題への適用,” *日本航空宇宙学会北部支部 2018 年講演会/第 19 回再使用型宇宙推進系シンポジウム*, 2018.
- 13) C. K. W. Tam, J. C. Hardin (eds.), “Second computational aeroacoustics (CAA) workshop on benchmark problems,” *NASA Conference Publication 3352*, 1997.
- 14) 今村, 雨宮, 榎本, 山本, “線形オイラー方程式解析コードの構築と複雑形状への適用,” *日本航空宇宙学会論文集*, Vol. 53, No. 621, pp. 452-460, 2005.
- 15) Y. Abe, I. Morinaka, T. Haga, T. Nonomura, H. Shibata, K. Miyaji, “Stable, non-dissipative, and conservative flux-reconstruction schemes in split forms,” *J. Comput. Phys.* 353 (2018), pp. 193–227.
- 16) T. Haga, S. Tsutumi, W. Sarac, K. Terashima, T. Ishii, T. Hiraiwa, “Large-eddy Simulation of the Aeroacoustics of Clustered Supersonic jets using a High-order Unstructured Method,” *AIAA Paper 2017-3211*.
- 17) P.L. Roe, “Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes,” *J. Comput. Phys.* 43 (1981), pp. 357–372.
- 18) E. Shima, K. Kitamura, “Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds,” *AIAA J.* vol. 49 (2011) no. 8, pp. 1693-1709
- 19) F. Bassi, S. Rebay, “GMRES discontinuous Galerkin solution of the compressible Navier–Stokes equations,” in: B. Cockburn, G.E. Karniadakis, C.-W. Shu (Eds.), *Lecture Note in Computational Science and Engineering*, vol.11, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
- 20) S. Gottlieb, C.-W. Shu, “Total variation diminishing Runge–Kutta schemes,” *Math. Comput.* 67 (1998), pp. 73–85.