

# バブル型渦崩壊現象の軌道構造とテンソル不変量に関する考察

山田 健翔, 鈴木 宏二郎  
(東京大学)

## Topological Structure of Streamlines and Tensor Invariants in Bubble-Type Vortex Breakdown

by  
Kento YAMADA, and Kojiro SUZUKI

### ABSTRACT

A bubble-type vortex breakdown is known as a topological change of streamlines. Topological approaches from the aspect of the dynamical system theory are promising to elucidate the fundamental structure of the vortex breakdown and classify the geometrical features into various classes. In this paper, in order to clarify a relation between a bifurcation process of the topology of streamlines and tensor invariants of the velocity gradient tensor, a bubble-type vortex breakdown was numerically simulated and the invariants of the velocity gradient tensor were examined. Our result showed that the structure of a longitudinal vortex was highlighted by the negative discriminant of the velocity gradient tensor and a minimum velocity inside the bubble-type vortex breakdown was on a surface where its determinant was zero.

### 1. はじめに

渦崩壊現象は縦渦における剥離のような現象であり、この現象の発生はデルタ翼機の揚力低下や機首上げモーメントの増加などを誘起して機体の航行の安全性を低下させることが知られている<sup>1)</sup>。実験による流跡線の可視化から、この現象は数種類に分類されており、主にバブル型とスパイラル型の二種類が観測される<sup>2)</sup>。中でもバブル型は、実験などの観測例の多さから最も基本的なタイプとして認識されている。

バブル型渦崩壊現象の発生は、幾何学的な観点からは流線のトポロジーの分岐として定義できる。軸対称非圧縮性流体では、バブル型の分岐を表す流れ関数 $\varphi$ 及び速度ベクトル $(u, w)$ の標準形（最もシンプルな形）は1つの分岐パラメータ $\mu$ を持つ多項式で以下のように書けると知られている<sup>3)</sup>。

$$\varphi = -\frac{\mu}{2}r^2 + \frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{4}r^2z^2 \quad (1)$$

$$u \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}rz \quad (2)$$

$$w \equiv -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \mu - r^2 - \frac{1}{2}z^2 \quad (3)$$

この分岐パターンは図1のように示され、バブル型渦崩壊の発生に伴うトポロジーの変化の様子が簡潔に描かれている。

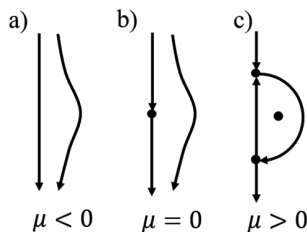


図1 バブル型渦崩壊発生時の幾何学的なパターン

上述のモデルはバブル型渦崩壊の発生パターンを示しているが、軸対称という非常に限られた範囲でしか成り立たないという問題がある。より一般的な状況に応用するには、上述のモデルを座標に依存しない量で捉える必要があるが、

その候補として、速度ベクトルの空間ベクトル微分である速度勾配テンソルのテンソル不変量が挙げられる。これらの不変量は座標に依存しないため、三次元流れにおける旋渦点周りの流れ場を分類するために用いられている<sup>4)</sup>。これまでに円筒容器内の渦崩壊現象についてテンソル不変量を用いた特徴量抽出が試みられているが<sup>5)</sup>、各不変量の空間的構造については触れられておらず、また円筒容器内の渦崩壊現象では境界壁に形成される強いシアによって渦崩壊部分のみの性質を調べることは難しい。

流線の軌道構造と各テンソル不変量の関係が明らかになれば、上述の分岐モデルを任意の座標系に対して適用することができるようになり、バブル型渦崩壊の発生箇所の探索などへの応用が期待される。

よって本稿では、バブル型渦崩壊の流線の幾何学的構造と速度勾配テンソルのテンソル不変量との関係を明らかにすることを目的として、縦渦のみのシンプルな流れ場を対象としてバブル型渦崩壊の数値計算を行い、その結果に基づいて速度勾配テンソルの不変量について考察を行う。本稿では、縦渦の運動の数値計算及び不変量の解析に円筒座標を用いる。一つの縦渦を考えて、半径方向、周方向、軸方向をそれぞれ $(r, \theta, z)$ とする。数値計算は軸対称で行うため、計算領域は周方向を除いた $rz$ 平面となる。解析や考察についてもこの平面において行われる。これらの設定を図2に示す。

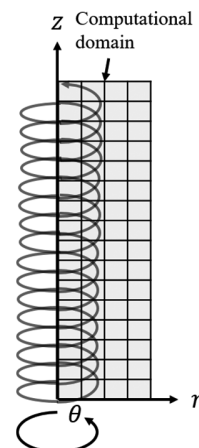


図2 座標系と計算領域の設定

## 2. 解法

速度勾配テンソルは円筒座標において以下のように書かれる。

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

この 3x3 テンソルの各成分は、式(4)に見られる通り座標系に依存するが、3x3 テンソルには座標系に依存しない3つの不変量が存在する。

第一不変量 $P$ は3x3 テンソルの対角成分の和（トレース）である。

$$P \equiv \text{tr}(A_{ij}) \quad (5)$$

速度勾配テンソルのトレースは以下のように速度の発散であるため、非圧縮性流体においては恒等的に零となる。

$$\text{tr}(A_{ij}) = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}(\mathbf{u}) = 0$$

第二不変量 $Q$ は以下のような量である。

$$Q \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(A_{ij})^2 - \frac{1}{2} \text{tr}(A_{ij}^2) \quad (6)$$

この値は  $Q$  値として知られ、その等値面が渦構造の判別にしばしば用いられる。第一不変量の場合と同様の理由で、非圧縮性流体では式(6)右辺第1項が零になる。最後に、第三不変量 $R$ は行列式である。

$$R \equiv \det(A_{ij}) \quad (7)$$

これら3つの不変量を用いると、Cayley-Hamilton の定理から、非圧縮性流体の速度勾配テンソルには以下のような恒等式が成り立つ。

$$A_{ij}^3 + Q A_{ij} - R = 0 \quad (8)$$

固有多項式も同様にして書くことが出来るため、速度勾配テンソルの固有値は以下の方程式の解となる。

$$\lambda^3 + Q\lambda - R = 0 \quad (9)$$

この3次方程式の解は $Q \neq 0$ の場合三角関数の3倍角の公式を通じて以下のように書けることが知られている<sup>6)</sup>。

$$\lambda = 2 \sqrt{-\frac{Q}{3}} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{3R}{2Q} \sqrt{-\frac{Q}{3}} \right) - \frac{2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2 \quad (10)$$

これら3つの不変量とこれらを組み合わせた多項式は座標系に依存しない。式(9)の判別式は不変量を組み合わせて以下のように書ける。

$$D = -4Q^3 - 27R^2 \quad (11)$$

式(11)より、式(10)で表される固有値は判別式が負のとき、1つの実固有値と1対の共役複素固有値を持ち、それ以外では3つの実固有値を持つことがわかる。

以上のように速度勾配テンソルのテンソル不変量は、速度勾配テンソルの固有値の構造を決定することがわかる。以下では、数値計算を用いてバブル型渦崩壊の不変量の空間的構造について考察を行う。

## 3. 計算手法

本稿では軸対称非圧縮ナビエ・ストークス方程式を用いて数値計算を行う。支配方程式は以下に示す通りである。

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

計算手法には SMAC 法を用いた<sup>7)</sup>。時間積分法について、予測速度を算出する段階では3次精度 Adams-Bashforth 法と粘性項を用いた2次精度 Crank-Nicolson 法とをハイブリッドしたものを適用している。ポテンシャルの修正段階では、1次精度の陽解法を用いている。離散化手法については、対流項に2次精度補間型中心差分法を適用することで数値的なチェッカーボード不安定を排除し<sup>8)</sup>、その他の項には2次精度中心差分法を用いている。

本計算では、初期条件として Grabowski 分布を与える<sup>9)</sup>。この分布は Euler 方程式の解であり、渦崩壊を計算するための縦渦のモデルとして用いられている<sup>10)</sup>。具体的な形を以下に示す。

$$u = 0 \quad (16)$$

$$v = \begin{cases} Sr(2-r^2)r \leq 1 \\ S/r & r > 1 \end{cases} \quad (17)$$

$$w = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)r^2(6-8r+3r^2) & r \leq 1 \\ 1 & r > 1 \end{cases} \quad (18)$$

Grabowski 分布には二つのパラメータ $(\alpha, S)$ が存在する。それらの値による速度分布の違いは図3及び図4に示されている。レイノルズ数と Grabowski 分布のパラメータの合計3つが計算で設定されるパラメータである。本稿では、パラメータをバブル型渦崩壊の定常解が存在する $(Re, \alpha, S) = (200, 1, 0.9)$ に固定して計算を行った。

境界条件については、図5に示すように、流入部を Grabowski 分布、側面境界を滑り壁条件、流出部を以下に示す対流流出条件として計算を行った。

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (19)$$

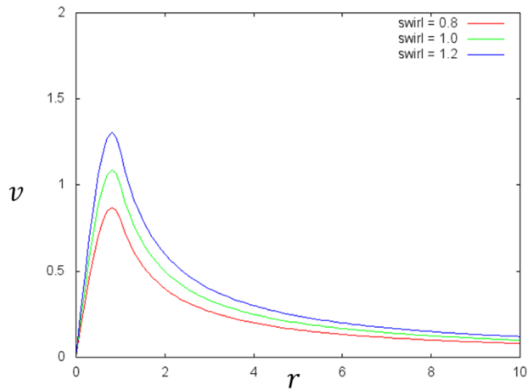


図 3 周方向速度の Grabowski 分布

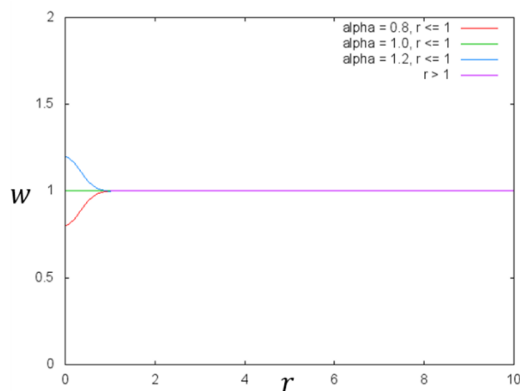


図 4 軸方向速度の Grabowski 分布

この対流流出条件では、流出速度 $C$ は定数である。非圧縮性流体では、この値を定数とすることでソレノイダル条件が式の上で満たされ、流出速度 $C$ の値の選択は解の形にほとんど影響を及ぼさないことが知られている<sup>11)</sup>。本計算では $C = 1$ として計算を行った。

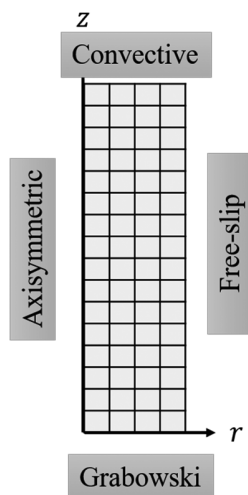


図 5 境界条件

計算領域は縦渦のコア半径（その半径以降は自由渦となる境界の値）を基準長さとして、半径方向 10、軸方向 20 の長方形領域となっている。また、計算格子はスタガード格子で、半径方向に 128 点の不等間隔格子、軸方向に 384 点

の等間隔格子で構成されており、渦コア半径内に約 20 点集められている。

#### 4. 結果および考察

まず定常解の流線と不変量の一つである速さの等高線図のプロットを図 6 に示す。バブル型渦崩壊は、 $rz$  平面に 3 つの不動点（軸上に 2 つと軸を離れて 1 つ）と、軸上の 2 つの不動点をつなぐヘテロクリニック軌道によってあらわされている。また、速さからはバブル型渦崩壊に伴う死水域が見て取れる。

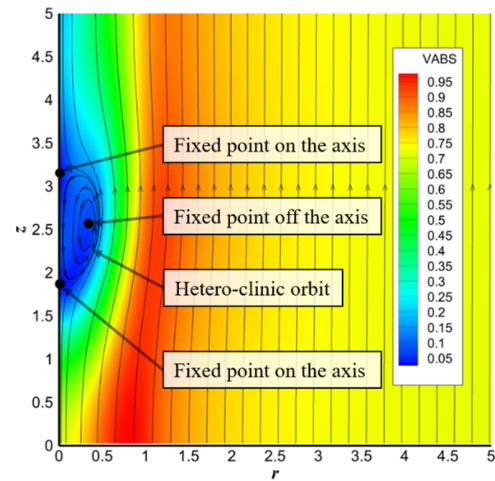


図 6 定常解の流線図と速さの等高線図

以下では、バブル型渦崩壊の速度勾配テンソルの不変量の空間的な構造を調べる。図 7 には判別式の等高線図が流線と共に示されている。判別式の値は軸周りで負の値を取っており、軸を離れて $r \sim 1$ あたりからは正となっている。これは軸付近の流れの速度勾配テンソルが共役複素固有値を持っており、縦渦の存在を示唆している。また、渦崩壊の存在する部分では判別式が負値とはいえ絶対値は小さいことから、この部分では渦の強さが弱まっていることがわかる。

図 8 には第三不変量である行列式の等高線図が流線と共に示されている。これに関しては、バブルの上流で正の値、バブル下流で負の値を取っており、 $R = 0$ となる線がバブル内部を横切っている様子が見て取れる。第三不変量が零となると、速度勾配テンソルは行列式のランクが落ちており、少なくとも 1 つの方向には加速も減速もしておらず、2 次元流れとして考えられる。特に軸上では、連続の式が退化して以下のように書き直せることから、

$$2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (20)$$

一方向の速度勾配が零であればもう一方の速度勾配も零となる。これは速度の極値の存在を示唆しており、今回のケースでは式(1)及び式(3)に見られるバブル型渦崩壊の分岐パラメータである軸方向速度の極小値（分岐モデルでは極大値）に対応している。

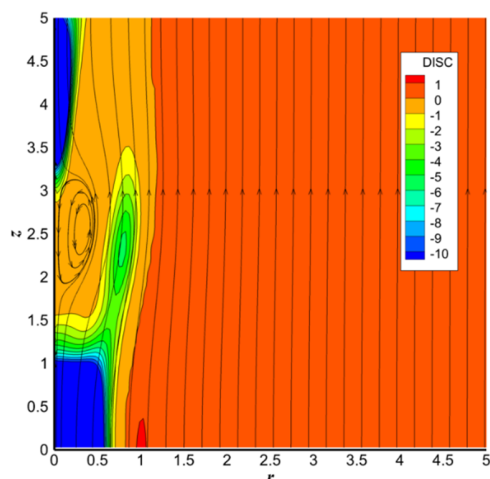
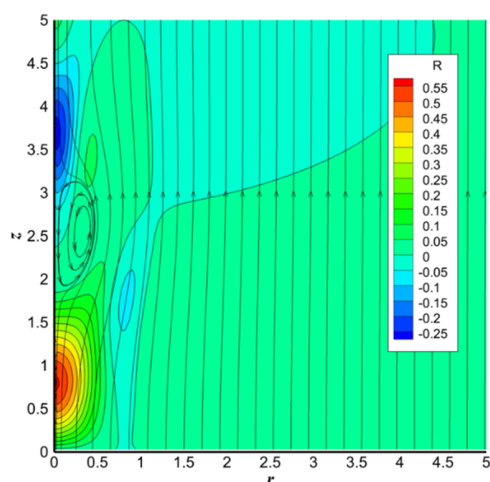
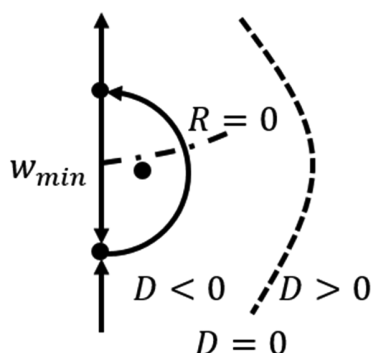
図7 判別式 $D$ の等高線図図8 第三不変量 $R$ の等高線図

図9 バブル型渦崩壊周辺の不変量の構造

以上の結果から、バブル型渦崩壊に特徴的な不変量の構造を見ることが出来る。第一に、この現象は縦渦内で起こることから、速度勾配テンソルの判別式が負となる。また、バブル型渦崩壊は逆流（又は再循環）領域の形成に伴い速度の極値を領域内部に持つ。極値では速度の勾配が存在しないため、第三不変量である行列式のランクが落ちる。このことから、 $R=0$ はバブル内部、軸方向速

度の停留点の（逆流速度が最大値を取る）座標に存在することがわかる。以上の結果からバブル型渦崩壊の構造を不変量の性質によって絞ることが出来る。その模式図を図9に示す。

本稿で得られた構造の特徴は、膨大なデータの集合である流れ場の幾何学的情報からバブル型渦崩壊の構造を抽出することが出来ると考えられる。これらに加え、速さなどの不変量を更に調べることで、座標系に依存しない渦崩壊の発生検知方法の構築に繋がることが期待される。

## 5. 結論

本稿でバブル型渦崩壊の流線の幾何学的構造と速度勾配テンソルのテンソル不変量の関係性を明らかにするために、シンプルな縦渦のみの数値計算を行い、得られたバブル型渦崩壊の幾何学的不変量について考察を行った。

第一に、バブル型渦崩壊は速度勾配テンソルの判別式が負の領域で起きていることが示された。これはバブル型渦崩壊が縦渦内で起こる現象であるために、回転成分の存在が判別式の負値として現れていた結果であると考えられる。また、渦崩壊の部分は負値ではあるが他の部分に比べてその絶対値は小さいことも示された。これは渦崩壊によって渦の強さが弱められたことに対応している。

第二に、第三不変量である行列式は、その値が零となるところがバブル内部を横切っており、特に軸上では軸方向速度の停留点に一致することが示された。これは軸上では連続の式が変化し、一方の速度勾配が零になると他方も零になることから導かれる。

以上の性質によって、バブル型渦崩壊に特徴的な構造を一般の流れ場から絞り込むことができると考えられる。今後はこれらの性質を組み合わせ、バブル型渦崩壊の発生検知などに応用されることが期待される。

## 謝辞

本研究は日本学術振興会科学研究費 18J14054 の助成を受けたものである。ここに謝辞を申し上げる。

## 参考文献

- 1) Hall, M. G. "Vortex Breakdown," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1972, Vol. 4, No. 1, pp. 195-218.
- 2) Sarpkaya, T., "On stationary and travelling vortex breakdowns," *J. Fluid Mech.*, 1971, Vol. 45, Part 3, pp. 545-559.
- 3) Brørs, M., Voigt, L. K., and Sørensen, J. N., "Streamline topology of steady axisymmetric vortex breakdown in a cylinder with co- and counter-rotating endcovers," *J. Fluid Mech.*, 1999, Vol. 401, pp. 275-292.
- 4) Chong, M. S., Perry, A. E., and Cantwell, B. J., "A general classification of three-dimensional flow fields," *Phys. Fluids*, 1990, Vol. 2, Issue 5, pp. 765-777.
- 5) Rütten, M., and Chong, M. S., "Analyzing Vortex Breakdown Flow Structures by Assignment of Colors to Tensor Invariants," *IEEE T. V. C. G.*, 2006, Vol. 12, No. 5, pp. 1189-1196.
- 6) Selby, S. M., "CRC Standard Mathematical Tables (21<sup>st</sup> ed.)," *CRC Press*, 1973, p 104.
- 7) Chorin, A. J., "A numerical method for solving incompressible flow problems," *J. C. Phys.*, 1967, pp. 12-26.
- 8) 梶島岳夫, "乱流の数値シミュレーション", 養賢堂, 1999, 第3章.
- 9) Grabowski, W. J., and Berger, S. A., "Solutions of Navier-Stokes equations for vortex breakdown," *J. Fluid Mech.*,

- 1976, Vol. 75, Part 3, pp. 525-544.
- 10) Ruith, M. R., Chen, P., Meiburg, E., and Maxworthy, T., “Three-dimensional vortex breakdown in swirling jets and wakes,” *J. Fluid Mech.*, 2003, Vol. 486 pp. 331-378.
  - 11) Ruith, M. R., Chen, P., and Meiburg, E., “Development of boundary conditions for direct numerical simulations of three-dimensional vortex breakdown phenomena in semi-infinite domains,” *Comp. Fluids*, 2003, Vol. 33, Issue 9, pp. 1225-1250.