

# 金属のクリープ

故 吉 村 慶 丸

Creep of Metals

By

Yoshimaru YOSHIMURA

**Abstract:** The creep theory presented in this paper is based on the dislocation theory and is concerned with the transient and steady stages in creep, taking into account the rate process and the recovery of metals.

The potential barrier in creep process is given as a function of the work-hardening, in other words, density of dislocation, and then the relation between the creep rate and the applied stress or the temperature is derived as a creep law. On the basis of this creep theory, the three-dimensional stress-strain relation including the plastic deformation is discussed and the special case is shown where the work-hardening characteristics is expressed by the  $n$ 'th power of strain. Furthermore, a general variational principle is discussed for the case subject to creep. Finally, as examples of the application of this variational principle, the practical problems such as creep buckling of columns and steady creep of rotating disks are analysed.

## 概 要

この理論は転位論を基礎として、速度過程論、回復論等の概念を考慮した遷移から定常に至る領域のクリープ理論に関するものである。

ここでは、クリープでのポテンシャル障壁を加工硬化即ち転位密度の関数として導き、クリープ法則即ちクリープ速度と応力、温度などの関係を導いた。このクリープ理論を基礎として、三次元応力状態下での応力-ひずみ関係式を導き、特に加工硬化特性がひずみのべき法則で表わされる場合について示した。更にクリープを伴う場合の一般的な変分原理を論じた。最後にこの変分原理の実際応用として、柱のクリープ座屈、回転円板の定常クリープ等の具体的な問題を極めて厳密かつ簡単に解いた。

## I. 金属のクリープ理論

- 1.1 まえがき
- 1.2 転位のポテンシャル障壁
- 1.3 転位の運動速度とひずみ速度
- 1.4 クリープの機構
- 1.5 遷移クリープ
- 1.6 定常クリープ
- 1.7 加工硬化とクリープ速度の関係

## 1.8 実験結果およびその検討

## 1.9 結語

## II. 三次元応力状態下のクリープ理論

## 2.1 まえがき

## 2.2 クリープのある場合の応力とひずみの関係

## 2.3 加工硬化とクリープとの関係

## 2.4 応力とひずみ関係の逆関係

## 2.5 変分原理

## III. 変分原理による工学問題の解法

## 3.1 まえがき

## 3.2 柱のクリープ座屈

## 3.3 回転円板の定常クリープ

## I. 金属のクリープ理論

## 1.1 まえがき

クリープはある温度において、その材料の塑性変形が時間と共に増加する現象であり、そのひずみの増加は温度と応力とに依存する。ひずみは時間と共に変化し、一般に primary, secondary, tertiary creep の三つの段階 [1] に分けられる。primary creep (遷移クリープ) においては低応力、低温度に対して対数クリープ、一般のものには Andrade の  $t^{1/3}$  法則が実験法則として知られている。secondary creep (定常クリープ) においては Cottrell and Ayrtekin [2] 等が応力の関数であるポテンシャル障壁  $U(\sigma)$  と温度  $T$  の関数として、 $e^{-U(\sigma)/kT}$  に比例するものとして表わした。Orowan [3] は加工硬化率と回復率とが平衡するものとして、後者の前者に対する比で表わしている。Dorn [4] は実験式から、 $\sigma^\alpha e^{-U/kT}$  ( $\alpha$  は常数) になることを提唱した。更に Weertman [5] の空格子点の自己拡散理論等があげられる。

このようにクリープに関しては多数の実験法則が提出されており、これに対して転位論、速度過程論等の立場からいろいろの理論的解釈がなされている。遷移クリープに対しては Mott, Nabarro [6] 等による exhaustion theory がある。各転位は activation stress  $\sigma_a = \sigma_0 - \sigma$  ( $\sigma_0$  は転位が thermal fluctuation の援けなしに動くに必要な応力、 $\sigma$  は作用応力) をもっており、thermal fluctuation が十分大きくなれば  $\sigma_0$  に打勝って転位は動く。exhaustion theory では一度動いた転位は障害により不動となり、変形と共に可動転位が消耗していくと考える。このためにひずみ速度は初め大きく、変形の進行と共に減少する。この理論はクリープの対数法則 (低温度の場合) を与えている。高温の場合は Andrade の法則が成立つが、これを説明するために Cottrell [7] は exhaustion theory を修正した。 $\sigma_a = \infty$  となるのではなく、 $\sigma_a$  と  $\sigma_a + d\sigma_a$  の間の値をもつ確率は  $p(\sigma_a)d\sigma_a$  として遷移クリープを考えた。また Mott は、詳しい転位モデルから  $t^{1/3}$  の法則を導いた。

定常クリープに対しては、Mott [8], Weertman [9] 等による運動転位がある時間後上昇運動して脱出するとする diffusion creep 理論、及び硬化と回復とが平衡すると考えた recovery theory とがある。

これらの理論はいずれもクリープ現象の一側面を捕えてはいるが現象全体としてみれば未

だ不満足なものである。更に最近では変動応力，変動温度，組合わせ応力等ますます複雑な条件下のクリープ特性の知識が要求せられ，実験資料は集積される一方である。このような状況下で要求されるのは信頼すべき統一的理論である。

本理論は変形に伴う転位密度の変化によって転位の障壁が変化することを考慮してひずみ速度を求め，加工硬化特性とクリープとの関係をクリープ法則として導いた。

## 1.2 転位のポテンシャル障壁

剪断応力の理論値 [10] はすべり方向の原子間隔  $b$  の周期関数として

$$\tau = \frac{G}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{b} \quad (2.1)$$

で与えられる。これがポテンシャル  $\phi$  から導かれるものとするれば，一原子あたり

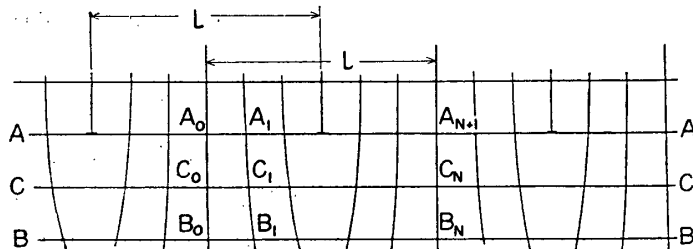
$$\phi = -\frac{Gb^3}{4\pi^2} \cos \frac{2\pi x}{b} \quad (2.2)$$

となる。ここで  $G$ : shear modulus,  $x$ : 上列の下列に対する変位。

転位密度  $\rho$  で与えられる一般の金属は，変形に伴って転位密度が変化することが知られている。したがって転位密度の関数として与えられる転位のポテンシャルは，変形と共に変化する。

転位密度  $\rho$ ，転位間の平均距離を  $l$  とすれば

$$l = \rho^{-1}$$



第1.1図

第1.1図において， $A_0A_{N+1} = B_0B_N$ ， $A_0$  から  $A_{N+1}$  までは  $N+1$  間隔， $B_0$  から  $B_N$  までは  $N$  間隔，したがって  $A_0A_{N+1} = B_0B_N$  の距離は  $(N+1)b$  と  $Nb$  との平均  $(N+1/2)b$  である。したがって

$$l = \left(N + \frac{1}{2}\right)b \quad (2.3)$$

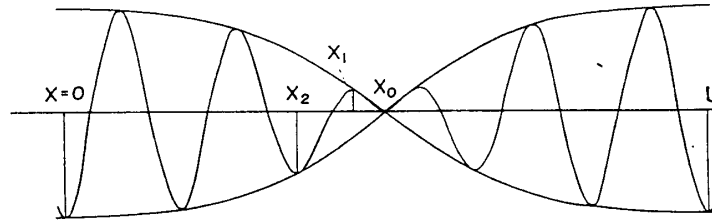
$$\therefore l \doteq Nb$$

$$\therefore N \doteq \frac{l}{b} = \frac{1}{b\rho} \quad (2.4)$$

$AA'$  列， $BB'$  列による  $CC'$  列におけるポテンシャルは，

$$\phi = -\phi_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{b} \frac{N+1}{N+\frac{1}{2}}\right) - \phi_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{b} \frac{N}{N+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -2\phi_0 \cos \frac{2\pi x}{b} \cos \frac{\pi x}{b} \frac{1}{N + \frac{1}{2}} \quad (2.5)$$



第 1.2 図

第 1.2 図における  $x_0, x_1, x_2$  の位置はそれぞれ

$$x_0 = \frac{1}{2} \left( N + \frac{1}{2} \right) b$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( N + \frac{1}{2} \right) b - \frac{1}{4} b = \frac{1}{2} N b$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( N + \frac{1}{2} \right) b - \frac{3}{4} b = \frac{1}{2} (N-1) b$$

$$\therefore \phi_{x=x_1} = -2\phi_0 \cos N\pi \cos \frac{\pi}{2} \frac{N}{N + \frac{1}{2}}$$

$$= 2\phi_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{N}{N + \frac{1}{2}} \right) \quad (N : \text{odd}) \quad (2.6)$$

$$\phi_{x=x_2} = -2\phi_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{N-1}{N + \frac{1}{2}} \right) \quad (N : \text{odd}) \quad (2.7)$$

したがって転位が動くためにとび越えるべきポテンシャル障壁，すなわち空格子の隣りの原子が空格子点に移るのにとび越えるべき障壁は，

$$\begin{aligned} U &= \phi_{x=x_1} - \phi_{x=x_2} = 2\phi_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{N}{N + \frac{1}{2}} \right) + 2\phi_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{N-1}{N + \frac{1}{2}} \right) \\ &= 4\phi_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{N - \frac{1}{2}}{N + \frac{1}{2}} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\frac{1}{2}}{N + \frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

式 (2.2) で  $\phi_0 = Gb^3/4\pi^2$  となることを考慮して

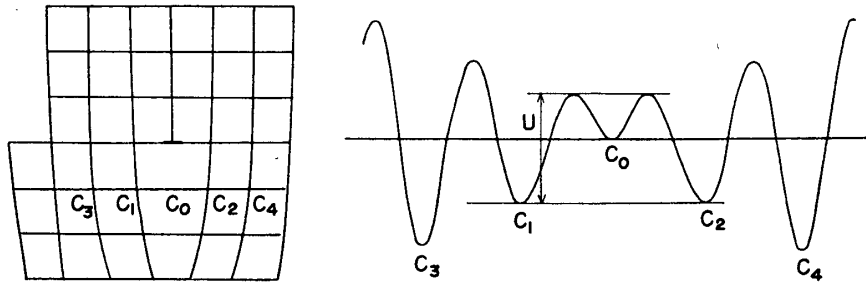
$$U = \frac{Gb^3}{\pi^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{N - \frac{1}{2}}{N + \frac{1}{2}} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\frac{1}{2}}{N + \frac{1}{2}} \right) \quad (2.9)$$

式 (2.4) から  $\rho$  が小さい程  $N$  は大きく，したがって式 (2.9) の  $U$  は小さくなる。

$U$  は  $N$  の大きさによっては完全格子の障壁  $2\phi_0$  の  $10^{-2} \sim 10^{-3}$  という小さい値を示す。これは焼鈍状態の降伏点が完全結晶として計算される降伏点よりはるかに小さいことの一つの原因であろう。

### 1.3 転位の運動速度とひずみ速度

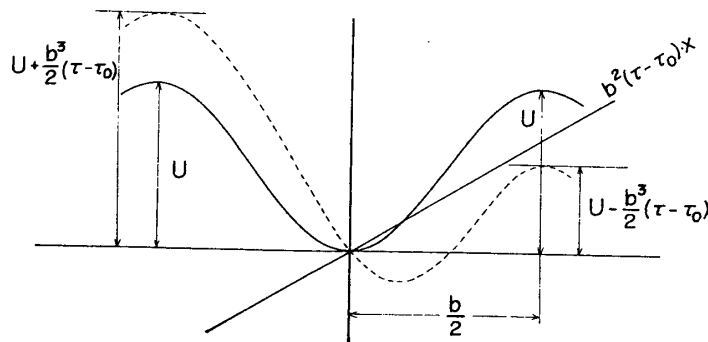
転位には第 1.3 図に示すような結晶固有の（無応力状態における）一定のエネルギー障



第 1.3 図

壁が附属する。これは空格子点の両隣りの原子に対する障壁である。一方結晶内の転位はある密度をもっているから相互に内部応力を及ぼし合うが、外部応力がなければ一転位に対して他の転位から作用している内部応力は全体としてつり合っている。この状態に外部応力  $\tau$  が作用すると、転位の配列が変化して各転位に  $\tau$  とつり合う逆方向の内部応力  $\tau_i$  を生ずるような配列になる。この際の転位の移動は  $\tau = \tau_i$  になって停止するから、著しい塑性変形を生ずるようなものではない。  $\tau$  を増加させればそれに応じて転位の再配列が行なわれ、  $\tau_i$  が増加し、一定の限度までは常に  $\tau - \tau_i = 0$  の関係が保たれる。あるところで  $\tau_i$  は最大となり（この最大値を  $\tau_0$  とする）、これ以上の  $\tau$  を作用させると転位は相互に通過して移動し、著しい塑性変形を生ずる。一定の温度以上ではこの最大内部応力が降伏応力であるが、低温度では必ずしもそうではない。転位の移動はそれによる空格子点の両隣りの原子の移動によって行なわれるが、いまこれを転位そのものの移動として考えると、  $\tau_0$  より大きな外部応力  $\tau$  を作用させたときの転位に作用する 1 原子当りの力  $b^2(\tau - \tau_0)$  ( $b$  は Berger's vector)。したがって転位前後のエネルギー障壁は、

$$U - \frac{1}{2}b^3(\tau - \tau_0), \quad U + \frac{1}{2}b^3(\tau - \tau_0)$$



第 1.4 図

この障壁は第1・4図のごとくになる。

一原子がエネルギー障壁  $\phi$  以上にある確率は  $e^{-\phi/kT}$  であるから、変形の進行方向に障壁を越える確率は

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{U-\frac{1}{2}b^3(\tau-\tau_0)}{kT}} - e^{-\frac{U+\frac{1}{2}b^3(\tau-\tau_0)}{kT}} \\ &= 2e^{-\frac{U}{kT}} \sinh \frac{b^3(\tau-\tau_0)}{2kT} \end{aligned} \quad (3 \cdot 1)$$

したがって転位の移動速度は  $v$  は

$$v = 2b\nu e^{-\frac{U}{kT}} \sinh \frac{b^3(\tau-\tau_0)}{2kT} \quad (3 \cdot 2)$$

$\nu$  格子振動数,  $k$ : ボルツマンの定数  $T$ : 絶対温度.

転位の密度を  $\rho$  とすれば, (剪断) ひずみ速度  $\dot{\gamma}$  は

$$\dot{\gamma} = b\rho v \quad (3 \cdot 3)$$

また最大内部応力は

$$\tau_0 = \alpha G b \rho^{\frac{1}{2}} \quad (\alpha \approx 0.1) \quad (3 \cdot 4)$$

式(3・2), (3・4)を式(3・3)に入れれば,

$$\dot{\gamma} = \frac{2\nu}{\alpha^2 G^2} \tau_0^2 e^{-\frac{U}{kT}} \sinh \frac{b^3(\tau-\tau_0)}{2kT} \quad (3 \cdot 5)$$

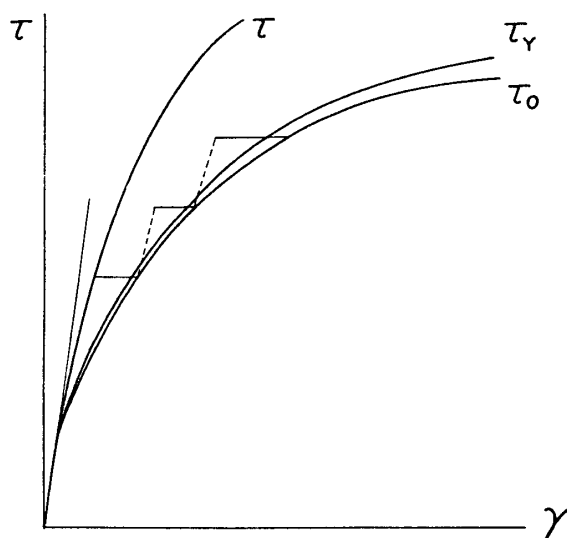
これは  $\tau_0$  より大きな  $\tau$  のすべての値に対して成立するが特に  $\tau - \tau_0$  が大きいときは,

$$\dot{\gamma} = \frac{2\nu}{\alpha^2 G^2} \tau_0^2 e^{-\frac{U-\frac{1}{2}b^3(\tau-\tau_0)}{kT}} \quad (3 \cdot 6)$$

で近似される。

材料の静的な応力, ひずみ曲線を求めるのには, 第1・5図に示すように応力を順次上げてゆき, 各応力  $\tau$  に対してある程度ひずみ速度  $\dot{\gamma}$  が小さくなったところのひずみ  $\gamma$  をとるのが普通である。このようにして求められた応力, ひずみ曲線によって決まる応力  $\tau$  は実用上の降伏応力  $\tau_y$  を与える。したがって  $\tau_y$  は最小のひずみ速度をどのようにとるかによって異なってくるものである。

一般にひずみ速度は式(3・5)で与えられるから, 真の降伏応力  $\tau_0$  とひずみ  $\gamma$  との関係を得るには,  $\tau$  が  $\tau_0$  に等しくなるまで, すなわち  $\dot{\gamma} = 0$  になるまで実験を行なう必要がある。しかしこれには無限の時間を要し, 実際問題としては, それまでに材料は軟化し, クリープを起こすから(応力  $\tau$  が大きいほど,  $T$  が高いほど), 現実に  $\tau_0 - \gamma$  曲線を求めることは, 不可能に近



第1・5図

い。しかし考察上、このような  $\tau_0-\dot{\gamma}$  曲線を考え、それを基礎としてクリープや塑性変形のすべてを論ずる必要がある。

1.4 クリープの機構

式 (3・5) で  $T \neq 0$  とすれば、 $\tau = \tau_0$  で  $\dot{\gamma} = 0$ 、しかし実際の塑性実験でひずみ-応力曲線を求める場合には、 $\dot{\gamma}$  がある程度小さくなったところを降伏点とする。したがって実用上の降伏点は  $\tau_0$  よりやや大きい応力である。

クリープの実験では dead weight を用いるために最初  $\tau_0$  より大きな応力を突然加えることになる。第 1・6 図の応力  $\tau$  による弾性ひずみが  $SE$ 、塑性ひずみ  $EA$ 、結晶の回復がなければその時間的経過は  $E'A''$  となる。回復があれば変形が  $A$  まで進む間に塑性曲線は  $OAB$  から  $OP_1Q$  に下がっているから変形は更に  $P$  まで進む。その時間的経過が  $E'P'$  である。これが遷移クリープであって、それは結局降伏応力以上の dead weight を突然作用させたための現象であって、一般の塑性変形に対して起こるもので、何もクリープ特有の現象ではない。 $P$  においては  $PP_1$  に相当する  $\tau - \tau_0$  の値がある。したがってそれに相当する  $\dot{\gamma}$  は式 (3・5) で求められる。この  $\dot{\gamma}$  によって物質は一定の速度で硬化する。一方高温では回復のために軟化する。クリープはこの硬化と軟化とが平衡するような  $\dot{\gamma}$  が実現される現象である。これが定常クリープである。

したがって定常クリープがクリープとしての本質的な現象であって、遷移クリープは定常クリープが混入してはいるが、それを引き去った純粹の遷移クリープは一種の塑性変形に過ぎないものである。

1.5 遷移クリープ

遷移クリープひずみから定常クリープひずみを引き去った純粹の意味の遷移クリープは一種の塑性変形にすぎないものであって、その場合の  $\dot{\gamma}$  は (3・5) で与えられる。回復はないと考えられるから  $\tau_0$  の時間的減少はない。

加工硬化によって

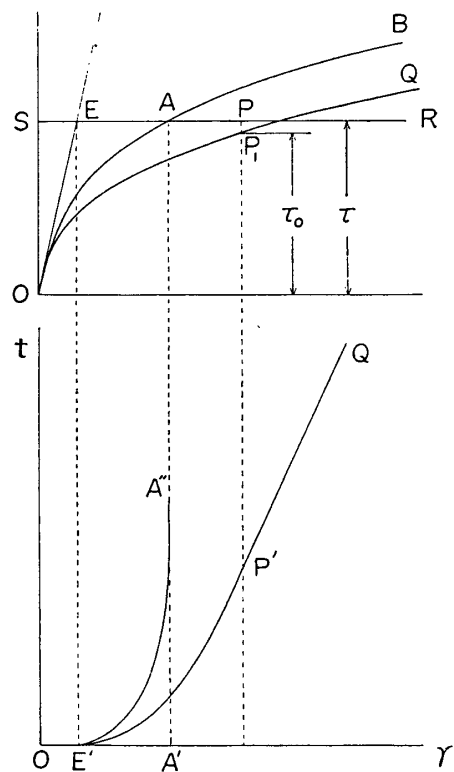
$$\tau_0 = \tau_0(\gamma) \tag{5・1}$$

の変化をする。特に

$$\tau_0 = C\gamma^{\frac{1}{n}} \tag{5・2}$$

を仮定すれば、式 (3・5) は

$$\dot{\gamma} = \frac{2\nu C^2}{\alpha^2 G^2} e^{-\frac{U}{kT}} \frac{2}{\gamma^n} \sinh \frac{b^3(\tau - C\gamma^{\frac{1}{n}})}{2kT} \tag{5・3}$$



第 1・6 図

式(5.3)を $t$ に関して積分すれば $\gamma-t$ 関係が得られるはずである。 $\gamma-\dot{\gamma}$ の関係は第1.7図のようになり、これは実験の結果と大体一致するようである。ただしこの場合 $k$ は理想気体に対する Boltzman 定数より多少小さくとる必要があるように思われる。

### 1.6 定常クリープ

定常クリープは加工硬化と軟化とが平衡するから、

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\dot{\gamma}=0} + \frac{\partial\rho}{\partial\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad (6.1)$$

したがって

$$\dot{\gamma} = -\frac{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\dot{\gamma}=0}}{\frac{\partial\rho}{\partial\gamma}} \quad (6.2)$$

分母が硬化率、分子が軟化率を表わしている。

軟化(回復)の原因はあまり明白ではないが現在は大体転位の上昇によるものと考えられている。転位は熱動揺によって移動し、物体外に逃げたり、中和したりしてその密度を減少してゆく現象と考えられる。上昇運動などに際して転位の飛びこえるべき障壁を $H$ とすれば転位が障壁 $H$ を越えて移動する確率は $e^{-H/kT}$ 、したがって単位体積中の転位の移動する確率は

$$\rho e^{-\frac{H}{kT}} \quad (6.3)$$

これは単位体積中の転位が単位時間内に減少する数 $-\partial\rho/\partial t$ に比例し、

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = B\rho e^{-\frac{H}{kT}} \quad (6.4)$$

である。(B: 定数)

ここで、 $\tau_0 = \alpha G b \rho^{1/2}$ を用いて、

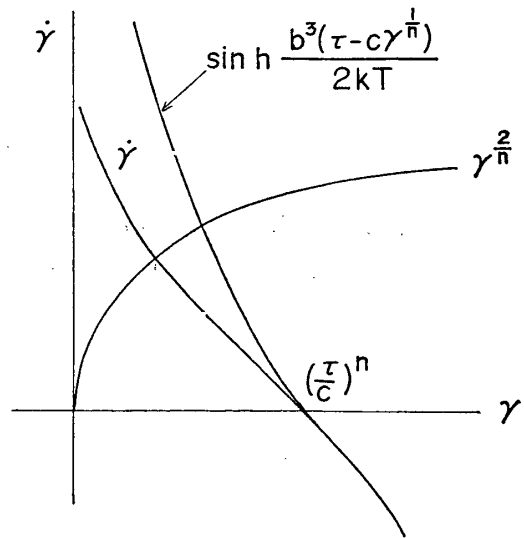
$$-\frac{\partial\tau_0}{\partial t} = \frac{1}{2} B \tau_0 e^{-\frac{H}{kT}} \quad (6.5)$$

式(6.4)を式(6.2)に代入して

$$\dot{\gamma} = B \frac{\rho}{\frac{\partial\rho}{\partial\gamma}} e^{-\frac{H}{kT}} \quad (6.6)$$

式(3.4)より

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} B \frac{\tau_0}{\frac{\partial\tau_0}{\partial\gamma}} e^{-\frac{H}{kT}} \quad (6.7)$$



第1.7図



$\dot{\gamma}$  の可成り小さな定常クリープでは大体  $\tau = \tau_0$  ( $\tau - \tau_0$  は極めて小さいから) と見なされる。したがって

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} B \frac{\tau}{\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma}\right)_{\tau_0 = \tau}} e^{-\frac{H}{kT}} \quad (6 \cdot 8)$$

### 1.7 静的加工硬化とクリープとの関係

多くの材料の塑性の応力～ひずみ曲線は実験的に次式で表わされる。

$$\tau_0 = c \gamma^n \quad (n=3 \sim 10, c: \text{定数}) \quad (7 \cdot 1)$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma} &= \frac{1}{n} c \gamma^{n-1} = \frac{c^n}{n} \tau_0^{1-n} \\ \therefore \frac{\tau_0}{\frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma}} &= n \left(\frac{\tau_0}{c}\right)^n \end{aligned} \quad (7 \cdot 2)$$

式 (7.2) を式 (6.7) に代入すれば

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} B n \left(\frac{\tau_0}{c}\right)^n e^{-\frac{H}{kT}} \quad (7 \cdot 3)$$

ここで  $\tau \doteq \tau_0$  を考慮すれば,

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} B n \left(\frac{\tau}{c}\right)^n e^{-\frac{H}{kT}} \quad (7 \cdot 4)$$

応力の大きい場合の塑性の応力～ひずみ曲線は,

$$\tau_0 = c_1 \log(1 + c_2 \gamma), \quad 1 + c_2 \gamma = e^{\frac{\tau_0}{c_1}} \quad (7 \cdot 5)$$

で近似される。この場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma} &= c_1 \frac{c_2}{1 + c_2 \gamma} = c_1 c_2 e^{-\frac{\tau_0}{c_1}} \\ \therefore \dot{\gamma} &= \frac{1}{2} B \frac{1}{c_1 c_2} \tau_0 e^{\frac{\tau_0}{c_1}} e^{-\frac{H}{kT}} \end{aligned} \quad (7 \cdot 6)$$

$\tau \doteq \tau_0$  を考えれば,

$$\dot{\gamma} = \frac{B}{2 c_1 c_2} \tau e^{\frac{\tau}{c_1}} e^{-\frac{H}{kT}} \quad (7 \cdot 7)$$

これは従来の実験的クリープ法則に一致する。

Dorn [II] は応力の小さい場合

$$\dot{\epsilon} = S'' \sigma^n e^{-\frac{H}{kT}} \quad (7 \cdot 8)$$

$S''$  は材料定数, 応力の大きい場合

$$\dot{\epsilon} = S' e^{B' \sigma} e^{-\frac{H}{kT}} \quad (7 \cdot 9)$$

$S', B'$  は材料定数, 式 (7・4), (7・8) はよく一致しているが, 式 (7・7), (7・9) とを比較した場合応力  $\tau$  の因子が異なる. しかしこの因子は  $e^{\tau/\sigma_1}$  に比べて無視できる程度である.

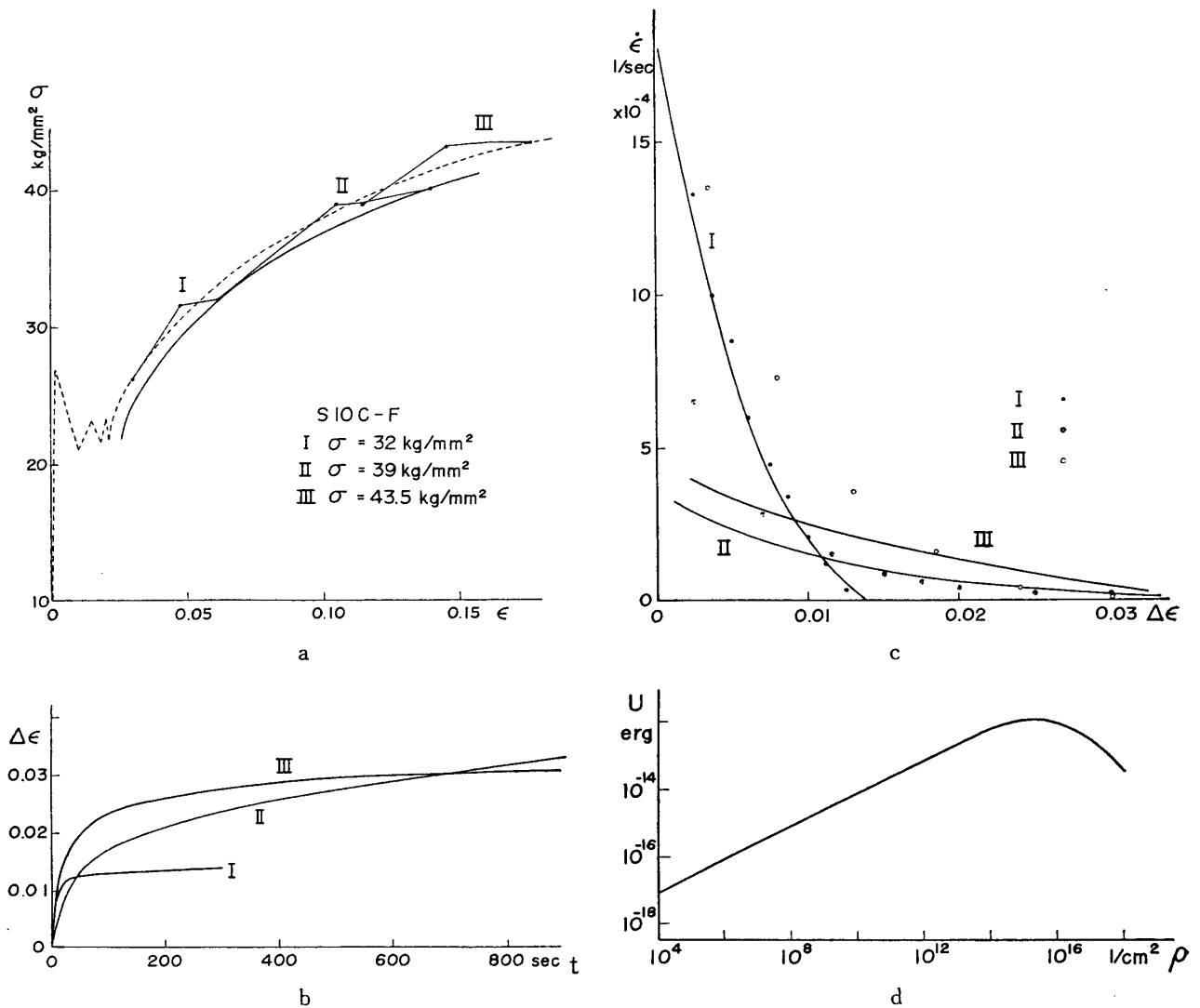
1.8 実験結果およびその検討

定常クリープは加工硬化と軟化とが平衡した状態であるから, 加工硬化則と密接な関係がある.

ここでは静的引張の加工硬化則を定常クリープ法則のそれと同一のものとして考えている.

したがって両者の応力依存性を定める  $n$  の相互関係を考えるために, まず静的引張試験におけるすべり機構, 即ち常温において一定応力を作用させた際のひずみの時間的変化, 次に静的引張試験における  $n$  の温度および引張速度による変化, そして, 定常クリープにおける  $n$  の温度変化を調べた.

急激応力負荷によるひずみの時間的変化, これは  $Fe(S10C)$  の常温における静的引張り試



第 1・8 図

験において、3種の急激な応力 I( $\sigma_1=32 \text{ kg/mm}^2$ ), II( $\sigma=39 \text{ kg/mm}^2$ ), III( $\sigma=43.5 \text{ kg/mm}^2$ ) を作用させた場合のひずみの時間的变化を調べたもので、第 1・8 図 a はその応力-ひずみの関係を、そして第 1・8 図 b は各応力におけるひずみと時間との関係を示している。

一方ひずみ速度の一般式 (第 1 章式 3・5) で  $\tau_0=\sigma_0/2$  とすれば、

$$\dot{\epsilon} = \frac{\nu}{2\alpha^2 G^2} \sigma_0^2 e^{-\frac{U}{kT}} \sinh \frac{b^3(\sigma - \sigma_0)}{4kT}$$

および転位密度で与えられるポテンシャル障壁 (式 2・9)

$$U = \frac{Gb^3}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{N - \frac{1}{2}}{N + \frac{1}{2}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\frac{1}{2}}{N + \frac{1}{2}}\right)$$

とから  $\dot{\epsilon}$  の数値計算をほどこし、実験値と比較して、第 1・8 図 c に示す。なお、第 1・8 図 d は式 (2・9) の障壁  $U$  と転位密度  $\rho$  との関係を示す。

静的引張試験における  $n$  の温度および引張速度による実験結果は第 1 表に示す。そして第 2 表は定常クリープにおける  $n$  と温度の関係である。

第 1・8 図 c はかなり理論値と近いことがうかがえる。なお第 1・7 図ともほぼ等しい曲線となっている。

引張試験における応力依存性をきめる  $n$  と定常クリープにおける  $n$  とを比較した場合、前者では温度や引張速度の影響も含まれているのに対し、後者では温度による項は  $\exp(-U/kT)$  に含まれるのみで  $n$  には関与しない。

したがって式 (7・1) のどのような状態における  $n$  が定常クリープの式 (7・4) における  $n$  に相当するかが問題である。

しかし第 1・6 図にて説明したように、ある応力  $\tau$  を作用させた場合のひずみ速度は次第に減少し、 $PP_1$  に相当する  $\tau - \tau_0$  の応力によって  $\dot{\gamma}$  (式 3・5) は一定となる。したがってこの定常クリープの状態が、求める式 (7・1) の状態である。これは第 1・8 図 b で定常クリープに達する時間が一定応力に放置する時間である。即ち引張り速度にあたる。ただしこれは応力の大きさによって異なることも考慮せねばならない。

第 1, 第 2 表から  $200^\circ\text{C}$ ,  $5 \times 10^{-3} \text{ mm/min} \sim 1 \times 10^{-3} \text{ mm/min}$  のものが定常クリープのそれに相当するよううかがえる。いずれにしてもこの関係を求めるには更に多くのデータを要し今後の問題でもある。

第 1 表 静的引張試験における  $n$  の温度及び引張速度による変化 (75S-T6)

	10.8°C	100°C	200°C	300°C
$10 \times 10^{-3} \text{ mm/min}$			1.87	
$5 \times 10^{-3}$	2.0	2.25	2.35	5.72
$1 \times 10^{-3}$			4.22	

第 2 表 定常クリープにおける  $n$  の温度変化 (75S-T6)

	160°C	200°C	220°C
$n$	2.66	3.57	4.55

## 1.9 結 語

遷移, 定常にかかわらず, 一般にクリープは一定応力のもとで塑性変形が進行する現象で

あり、これは金属結晶においては転位が作用応力  $\tau$  の下に、最大内部応力  $\tau_0$  (真の降伏応力) に打勝って、エネルギー障壁  $U$  を越えて移動することに帰せられる。この場合の変形速度は一般に

$$\dot{\gamma} = \frac{2\nu}{\alpha^2 G^2} \tau_0^2 e^{-\frac{U}{kT}} \sinh \frac{b^3(\tau - \tau_0)}{2kT}$$

で与えられる。ここで  $\alpha \approx 0.1$ ,  $\nu$  は転位の振動数,  $T$  は絶対温度,  $b$  は berger's vector,  $U$  は転位の移動のエネルギー障壁で、完全結晶のその  $10^{-2} \sim 10^{-3}$  の程度である。この式は一般に遷移, 定常クリープの両者に対して成立する関係である。遷移クリープは作用応力  $\tau$  が最大内部応力  $\tau_0$  より大きい状態における塑性変形で、変形と共に加工硬化によって後者が前者に近づくことによって変形が次第に減速される過程である。実際には  $\tau_0$  の増加は加工硬化率よりも軟化率だけ小さいから、それだけ定常クリープが遷移クリープに混入することになる。しかし真の遷移クリープは  $\tau_0$  の加工硬化による増加のみによるものである。

定常クリープの状態では一定の作用応力  $\tau$  に対して、加工硬化と軟化の平衡する結果  $\tau_0$  が一定に保たれる。その結果ひずみ速度  $\dot{\gamma}$  が一定となる。 $\tau_0$  したがって転位密度  $\rho$  が一定であるという条件と軟化率とから、特に定常クリープに対して

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} B \frac{\tau_0}{\frac{\partial \tau_0}{\partial \dot{\gamma}}} e^{-\frac{H}{kT}}$$

が成立つ。 $H$  は上昇の活性化エネルギーで、完全結晶のエネルギー障壁に近い値である。

特に加工硬化則が

$$\tau_0 = c \dot{\gamma}^n$$

で与えられる場合のひずみ速度は

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \frac{B}{c^n} \tau_0^n e^{-\frac{H}{kT}}$$

となる。定常状態では、与えられた  $\tau$  に対して

$$\frac{2\nu}{\alpha^2 G^2} \tau_0^2 e^{-\frac{U}{kT}} \sinh \frac{b^3(\tau - \tau_0)}{2kT} = \frac{1}{2} \frac{B}{c^n} \tau_0^n e^{-\frac{H}{kT}}$$

が成立するような  $\tau_0$  が実現されてクリープが行なわれる。その場合  $\tau \approx \tau_0$  であるから  $\tau_0$  は  $\tau$  で置きかえて差支えない。なおこれらの関係は変動応力, 変動温度に対してもそのまま成立つ。

## II. 三次元応力状態下のクリープ理論

### 2.1 まえがき

クリープが存在する場合には、降伏応力  $\tau$  が加工硬化によって増大すると同時に軟化によって減少する点が通常の塑性変形と異なる。しかし一次元から三次元すべりへの拡張に際してのすべり機構においては、塑性変形と全く同一である。したがってクリープの場合にも、塑性変形の場合 [12] と同様に principle of minimum slip したがって principle of maximum work が成立する。

加工硬化を受ける場合の stress rate による minimum principle は Hodge and Prager [13] によって始められ, Greenberg [14] によって改良された. 加工硬化と完全塑性変形の場合の strain rate による minimum principle は, Greenberg [15] によってなされ, Koiter [16] によって一般化された. 塑性における minimum principle は最近あらゆる観点から再び検討され, 特殊なものとして, inelastic solid に対する Hill, Drucker, Frenthenthal and Geiringer, Hodge の理論があげられる. resulting stress 分布に対する minimum principle は Colonnetti [17] により始められ, 後に Reissner [18] によって発展された. これは永久塑性変形によって説明される弾性体への Castigliano's principle の一般化である. 又 complementary minimum theory は Greenberg [19] が導いている.

ここでは yield function  $f$  を, 転位密度  $\rho$  のもつ内部応力(臨界剪断応力)を三次元に拡張したものによって表わし, 前章の軟化の法則を考慮して偏差応力とひずみ速度の関係を求めた. 更に加工硬化特性が effective stress, effective strain のべき法則で表わされる場合の同様の関係を求め, 最後にこの関係を用いて Hill [12] の塑性変形の場合の変分原理と同様の方法でクリープのある場合の変分原理を導いた.

## 2.2 クリープのある場合の応力とひずみの関係

一般の三次元応力状態下でクリープが行なわれる場合の応力～ひずみの関係(状態方程式)を導くには, 上記の単純剪断の場合の一次元理論を多くのすべり系が共存する場合の三次元理論に拡張すればよい. この場合各々のすべり系に対しては一次元理論がそのまま成立つものとする.

クリープが存在する場合には降伏応力が加工硬化によって増大すると同時に軟化によって減少する点, 通常の塑性変形と異なるだけであって, 一次元から三次元への拡張に際してのすべり機構においては, 塑性変形と全く同一である. したがってクリープの場合にも塑性変形の場合と同様に, principle of maximum work が成立し, yield function  $f(\sigma^{ij})$  は, 同時に flow potential である. ただし  $\sigma^{ij}$  は一次元の場合の  $\tau_0$  に対する三次元応力と考えるべきであり,  $\sigma_0^{ij}$  と記すべきものである. したがって塑性ひずみ速度  ${}^p\dot{\epsilon}_{ij}$  とクリープひずみ速度  ${}^c\dot{\epsilon}_{ij}$  との和を流動ひずみ速度

$${}^f\dot{\epsilon}_{ij} = {}^p\dot{\epsilon}_{ij} + {}^c\dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.1)$$

とすれば, 降伏関数を  $f$ , スカラーの比例定数を  $\lambda$  として

$${}^f\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} \lambda \quad (2.2)$$

が成立する. クリープの場合もすべり機構は塑性変形の場合と同じであるから, 異方性等の効果省略すれば,  $f$  も塑性変形の場合と同じ Mises function

$$f = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (2.3)$$

で与えられるのが通常である. 特に式 (2.3) に対して式 (2.2) は

$${}^f\dot{\epsilon}_{ij} = \sigma'_{ij} \lambda \quad (2.4)$$

と書かれる. ( $\sigma'_{ij}$  は偏差応力).

またクリープと加工硬化とが共存する場合には,

$$f(\sigma^{ij}) = F(W, t) \quad (2 \cdot 5)$$

が成立つ。ここに  $t$  は時間で

$$W = \int_0^t \sigma^{ij} f \dot{\epsilon}_{ij} dt \quad (2 \cdot 6)$$

式 (2.2) より

$$\dot{W} = \sigma^{ij} f \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma^{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} \dot{\lambda} = 2f\dot{\lambda} \quad (2 \cdot 7)$$

したがって

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{W}}{2f} \quad (2 \cdot 8)$$

式 (2.5) より

$$\dot{f} = F' \dot{W} + F_t \quad (2 \cdot 9)$$

ここに

$$F' = \frac{\partial F}{\partial \dot{W}}, \quad F_t = \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2 \cdot 10)$$

式 (2.9) の  $\dot{W}$  を式 (2.7) に入れれば

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{f} - F_t}{2fF'} \quad (2 \cdot 11)$$

したがって式 (2.2) は

$$f \dot{\epsilon}_{ij} = h \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} (\dot{f} - F_t) \quad (2 \cdot 12)$$

ただし

$$h = \frac{1}{2fF'} \quad (2 \cdot 13)$$

式 (2.12) 右辺第1項が塑性ひずみ速度, 第2項がクリープひずみ速度である.

$${}^p \dot{\epsilon}_{ij} = h \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} \dot{f}, \quad {}^c \dot{\epsilon}_{ij} = -h \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} F_t \quad (2 \cdot 14)$$

結局弾性変形をも考慮に入れたひずみ～応力関係は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}^{ij} &= \frac{\dot{\sigma}^{ij}}{2G} + h \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} (\dot{f} - F_t) \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma} \left( = \frac{1}{3K} \dot{\sigma} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 15)$$

ここに

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{3} g^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \dot{\sigma} = \frac{1}{3} g_{ij} \dot{\sigma}^{ij} \quad (2 \cdot 16)$$

これは一般の形の yield function  $f$  に対して成立する.

次に転位論の結果

$$\tau_0 = \alpha G b \rho^{\frac{1}{2}} \quad (2 \cdot 17)$$

これを三次元の場合に拡張すれば

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ij} G b \rho^{\frac{1}{2}} \quad (2 \cdot 18)$$

したがって、特に  $f$  が Mises の yield function である場合には、

$$f = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \alpha'^2 G^2 b^2 \rho \quad (2 \cdot 19)$$

$$\alpha'^2 = \frac{1}{2} \alpha^{ij} \alpha_{ij} \quad (2 \cdot 20)$$

したがって、式 (2・5) より

$$\alpha'^2 G^2 b^2 \rho = F(W, t) \quad (2 \cdot 21)$$

故に

$$F_t = \alpha'^2 G^2 b^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2 \cdot 22)$$

前章の軟化法則

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = B \rho e^{-\frac{H}{kT}} \quad (2 \cdot 23)$$

を用いれば

$$F_t = -B \alpha'^2 G^2 b^2 \rho e^{-\frac{H}{kT}} \quad (2 \cdot 24)$$

したがって式 (2・19) により

$$F_t = -B f e^{-\frac{H}{kT}} \quad (2 \cdot 25)$$

このような  $F(W, t)$ 、したがって  $F_t$  は Mises の yield function、すなわち式 (2・3) の仮定のもとに成立するのであるから、状態方程式 (2・15) は (2・25) および  $\partial f / \partial \sigma^{ij} = \sigma'_{ij}$  により

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}'_{ij} &= \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} + \frac{\dot{f}}{2fF'} \sigma'_{ij} + B \frac{1}{2F'} \sigma'_{ij} e^{-\frac{H}{kT}} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 26)$$

と書かれる。

### 2.3 加工硬化とクリープとの関係

加工硬化則とクリープとの関係は式 (2・26) を見れば明らかであるが、これを加工硬化曲線がひずみのべき法則で表わされた場合に適用してみる。

真の降伏応力  $\sigma^{ij}$  の effective stress を  $\bar{\sigma}$ 、effective strain を  $\bar{\epsilon}$  とすると、加工硬化則は実験的に

$$\bar{\sigma} = c (\bar{\epsilon})^{\frac{1}{n}} \quad (n=3 \sim 10) \quad (3 \cdot 1)$$

で近似される。ここに

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'^{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij}} \quad (3 \cdot 2)$$

$c, n$  は物質の種類によるが、温度にはよらないものと考えられる。式 (3・1) より

$$W = \int \bar{\sigma}^n \dot{\epsilon} dt = \int \bar{\sigma} D^n \bar{\epsilon} = c \frac{n}{n+1} (\bar{\epsilon})^{\frac{n+1}{n}} \quad (3.3)$$

したがって

$$\bar{\epsilon} = \left( \frac{n+1}{cn} W \right)^{\frac{n}{n+1}} \quad (3.4)$$

したがって

$$f = \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{3} c^2 (\bar{\epsilon})^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{3} c^2 \left( \frac{n+1}{cn} W \right)^{\frac{2}{n+1}} \quad (3.5)$$

すなわち,

$$F(W) = \frac{1}{3} c^2 \left( \frac{n+1}{cn} W \right)^{\frac{2}{n+1}} \quad (3.6)$$

これから  $F' = \partial F / \partial W$  を計算し, その結果に式 (3.3), 次に式 (3.1) を用いれば

$$F' = \frac{2c^{n+1}}{3(n+1)} (\bar{\sigma})^{1-n} \quad (3.7)$$

式 (3.7) と  $f = (1/3)\bar{\sigma}^2$  を式 (2.26) に入れば

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}'_{ij} &= \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} + \frac{3(n+1)}{2c^{n+1}} \bar{\sigma} (\bar{\sigma})^{n-2} \sigma'_{ij} + \frac{3(n+1)}{4c^{n+1}} B e^{-\frac{H}{kT}} (\bar{\sigma})^{n-1} \sigma'_{ij} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

あるいは, 第2, 第3項の係数をそれぞれ  $C_1, C_2$  とおけば

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}'_{ij} &= \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} + C_1 \bar{\sigma} (\bar{\sigma})^{n-2} \sigma'_{ij} + C_2 e^{-\frac{H}{kT}} (\bar{\sigma})^{n-1} \sigma'_{ij} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

右辺第1, 第2, 第3項がそれぞれ弾性, 塑性, クリープひずみ速度を表わす.

#### 2.4 応力とひずみ関係の逆関係

状態方程式 (2.15) は  $\dot{\epsilon}_{ij}$  を  $\dot{\sigma}_{ij}$  で表わすものであるが, 場合によっては  $\dot{\sigma}_{ij}$  を  $\dot{\epsilon}_{ij}$  で表わす必要がある. そのために,  $(\partial f / \partial \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}^{ij}$  を式 (2.15) を用いて計算し

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\epsilon}^{ij} = 0 \quad (4.1)$$

を考慮すれば

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\epsilon}^{ij} = \left( \frac{1}{2G} + h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) \dot{\sigma} - h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} F_t \quad (4.2)$$

したがって

$$\dot{\sigma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\epsilon}^{ij} + h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} F_t}{\frac{1}{2G} + h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (4.3)$$

を得る. これを式 (2.15) に代入すれば



$$\frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} = \dot{\epsilon}'_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{1}{2G} F_t}{\frac{1}{2Gh} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (4.4)$$

特に Mises' condition の場合には

$$\frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} = \dot{\epsilon}'_{ij} - \sigma'_{ij} \frac{\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{F_t}{2G}}{\frac{fF'}{G} + 2f} \quad (4.5)$$

この関係は  $F_t=0$  の場合には塑性変形の場合の関係と全く同一のものとなる。

この逆関係を用いて  $\dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$  の  $\dot{\epsilon}_{ij}$  による表現を次のように求めることができる。即ち

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} &= \dot{\sigma}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} + 3\dot{\sigma} \dot{\epsilon} \\ &= 2G \left[ G \dot{\epsilon}'^{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} - \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\epsilon}^{ij} \right)^2 - \frac{1}{2G} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} F_t}{\frac{1}{2Gh} + \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}} \right] + 9K \dot{\epsilon}^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

特に Mises' condition の場合には

$$\dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 2G \left[ \frac{\dot{\epsilon}'^{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} - (\sigma'^{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^2 - \frac{1}{2G} \dot{\sigma}'^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} F_t}{\frac{fF'}{G} + 2f} \right] + 9K \dot{\epsilon}^2 \quad (4.7)$$

また  $\dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$  が positive definite であることは次のようにして分る。

$$\dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\sigma}'^{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} + 3\dot{\sigma} \dot{\epsilon} = 2G \dot{\epsilon}'^{ij} (\dot{\epsilon}'_{ij} + \dot{\sigma} \dot{\epsilon}_{ij}) + 9K \dot{\epsilon}^2$$

ここで

$$\dot{\sigma}'^{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} \geq 0, \quad \dot{\sigma}'^{ij} \dot{\sigma} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0$$

したがって

$$\dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (4.8)$$

## 2.5 変分原理

極値定理には  $\dot{u}_i$  の変分によるもの、 $\dot{\sigma}^{ij}$  の変分によるものが考えられる。

(1)  $\dot{u}_i$  の変分による極値定理

塑性変形の場合の変分原理は Hill の与えている通りであるが、筆者は前にそれを自然な形で誘導した。この方法によってクリープのある場合の変分原理を導く。

状態  $(\sigma^{ij}, \epsilon_{ij})$  から状態  $(\sigma^{ij} + \dot{\sigma}_{ij} dt, \epsilon_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij} dt)$  への移行を考える。その場合境界条件として

$$\left. \begin{array}{l} S_u \text{ 上では } \dot{u}_i \\ S_F \text{ 上では } \dot{F}^i \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

( $F^i$  は表面力) が与えられており、また物体内部では平衡方程式

$$\sigma^{ij}_{;j} + X^i = 0 \quad (5.2)$$

$$\dot{\sigma}^{ij}_{;j} + \dot{X}^i = 0 \quad (5.3)$$

が成立つ。( ; は偏微分を意味する)

いま,  $(1/2)\delta^{ij}\dot{\epsilon}_{ij}$  なる量の積分

$$I = \int \frac{1}{2} \delta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (5.4)$$

の  $\dot{u}_i$  すなわち  $\dot{\epsilon}_{ij}$  に関する変分  $\delta I$  を考える. すなわち式 (4.7) を  $\dot{\epsilon}_{ij}$  について変分し, 然る後式 (4.4) を用いれば

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{1}{2} \delta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right) &= 2G \left[ \dot{\epsilon}^{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{1}{4G} F_t}{2Gh + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \right] \delta \dot{\epsilon}'_{ij} + 9K \dot{\epsilon} \delta \dot{\epsilon} \\ &= \delta^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} F_t}{\frac{1}{2Gh} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \delta \dot{\epsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (5.5)$$

したがって

$$\delta \int \frac{1}{2} \delta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int \delta^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} F_t}{\frac{1}{2Gh} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (5.6)$$

右辺第1項の積分は

$$\delta \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\delta \dot{u}_{i;j} + \delta \dot{u}_{j;i}) \quad (5.7)$$

および式 (5.3) 並びに Gauss の定理, 更に境界条件 (5.1) より

$$\int \delta^{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_F} \dot{F}^i \delta \dot{u}_i dS + \int \dot{X}^i \delta \dot{u}_i dV \quad (5.8)$$

これを式 (5.6) に入れれば

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \int \frac{1}{2} \delta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{S_F} \dot{F}^i \dot{u}_i dS - \int \dot{X}^i \dot{u}_i dV \right\} \\ + \int \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} F_t}{\frac{1}{2Gh} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

ここに

$$F_t = -Bfe^{-\frac{H}{kT}} \quad (5.10)$$

で  $(1/2)\delta^{ij}\dot{\epsilon}_{ij}$  としては式 (4.6) の表示を用いる. これが  $\dot{u}_i$  を変分した場合の変分原理で,  $\delta$  を operate する前の表示が極値をとることを示す. なお

$$\delta^2 I = \int \delta^2 \left( \frac{1}{2} \delta^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right) dV > 0 \quad (5.11)$$

であるから, この極限值は極小値である.

特に Mises' condition が成立つときは

$$\delta \left\{ \int \frac{1}{2} \dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{S_F} \dot{F}^i \dot{u}_i dS - \int \dot{X}^i \dot{u}_i dV \right\} + \int \frac{1}{2} \frac{\sigma'^{ij} F_t}{\frac{f F'}{G} + 2f} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = 0 \quad (5 \cdot 12)$$

$$F_t = -\frac{1}{2} B \dot{\sigma}'^{ij} \sigma'_{ij} e^{-\frac{H}{kT}} \quad (5 \cdot 13)$$

(2)  $\dot{\sigma}^{ij}$  の変分による極値定理

結果を記せば

$$\delta \left\{ \left( \int \frac{1}{2} \dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{S_u} \dot{F}^i \dot{u}_i dS \right) + \int \frac{1}{2} {}^c \dot{\epsilon}_{ij} \delta \dot{\sigma}_{ij} dV \right\} = 0 \quad (5 \cdot 14)$$

この極値が極小値であることは

$$\delta^2 I \geq 0 \quad (5 \cdot 15)$$

より分る. ここに  $(1/2) \dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$  は

$$\dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'^{ij} \dot{\sigma}'_{ij}}{2G} + \frac{\dot{\sigma}^2}{K} + h f^2 - h f F_t \quad (5 \cdot 16)$$

で与えられる. また

$${}^c \dot{\epsilon}_{ij} = B \frac{1}{2F'} e^{-\frac{H}{kT}} \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} \quad (5 \cdot 17)$$

### III. 変分原理による工学問題の解法

#### 3.1 ま え が き

最近クリープの力学的解析が必要とされてきた. これに対しては種々の方法があるが, エネルギー原理による解法は有効な方法の一つである.

Hoff [20] は一次元エネルギー原理をトラスのクリープ解法に用いた. Wang and Prager [21] は三次元エネルギー原理を提出し, それを J. Lyell Sanders, Jr., Harvey G. McComb, Jr., and Floyd R. Schlechte [22] が Beam や円板の問題に適用している.

ここでは前章の変分原理を用いて柱のクリープ座屈, 回転円板の定常クリープについて解析した.

#### 3.2 柱のクリープ座屈

$u_i$  の変分による極値定理は  $D\sigma^{ij}$ ,  $D\epsilon_{ij}$  の代りに  $\dot{\sigma}^{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  を用いれば

$$\delta \left\{ \int \frac{1}{2} \dot{\sigma}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{S_F} \dot{F}^i \dot{u}_i dS - \int \dot{X}^i \dot{u}_i dV \right\} + \int \frac{1}{2} \frac{\sigma'^{ij} \dot{F}}{\frac{f F'}{G} + 2f} \delta \dot{\epsilon}^{ij} dV = 0 \quad (2 \cdot 1)$$

ここに  $f$  は yield function,  $F$  は work-hardening 及び softening function で

$$f(\sigma^{ij}) \equiv \frac{1}{2} \sigma'^{ij} \sigma'_{ij} = F(W, t) \quad (2 \cdot 2)$$

$$W = \int \sigma^{ij} D \epsilon_{ij} \quad (2.3)$$

$$F'_i = \frac{\partial F}{\partial W}, \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} = -B f e^{-\frac{H}{kT}} \quad (2.4)$$

柱の両端に一定の荷重  $F_i = \text{const}$  が作用し、かつ body force は作用していないものと仮定すれば

$$\dot{F}^i = 0 \quad \dot{X}^i = 0 \quad (2.5)$$

であるから、式(2.1)は

$$\delta \int \frac{1}{2} \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \frac{1}{2} \int \frac{\sigma^{ij} \dot{F}}{\frac{f F'}{G} + 2f} \delta \epsilon_{ij} dV = 0 \quad (2.6)$$

と書かれる。ここに  $(1/2) \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$  は  $\dot{\epsilon}_{ij}$  の関数として表わされていることが必要であり、クリープの応力、ひずみ関係の inversion の項により次式で与えられる。

$$\frac{1}{2} \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = G \left[ \dot{\epsilon}'^{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} - \frac{(\sigma'^{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^2 - \frac{1}{2G} \sigma'^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{F}}{\frac{f F'}{2G} + 2f} \right] + 9 K \dot{\Delta}^2 \quad (2.7)$$

ただし、従来の notation  $\dot{\epsilon} = (1/3) g^{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$  の代りに、ここでは

$$\dot{\Delta} = \frac{1}{3} g^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.8)$$

を用いた。また

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.9)$$

式(2.4)により  $\dot{F}$  は  $\sigma^{ij}$  と温度  $T$  の関数で、 $\dot{\epsilon}_{ij}$  を含まないから  $\dot{\epsilon}_{ij}$  の変分を行なう場合には無関係であり、したがって、式(2.6)の第1項は式(2.7)を用いて

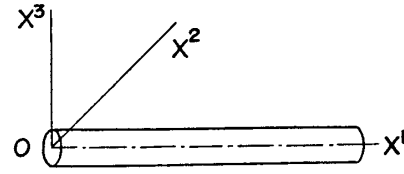
$$\begin{aligned} \delta \int \frac{1}{2} \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV &= \delta \int \left\{ G \left[ \dot{\epsilon}'^{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} - \frac{(\sigma'^{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^2 - \frac{1}{2G} \sigma'^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{F}}{\frac{f F'}{G} + 2f} \right] + 9 K \dot{\Delta}^2 \right\} dV \\ &= \delta \int \left\{ G \left[ \dot{\epsilon}'^{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} - \frac{(\sigma'^{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^2}{\frac{f F'}{G} + 2f} \right] + 9 K \dot{\Delta}^2 \right\} dV + \int \frac{\frac{1}{2} \sigma'^{ij} \dot{F} \delta \dot{\epsilon}_{ij}}{\frac{f F'}{G} + 2f} dV \quad (2.10) \end{aligned}$$

この右辺の第2項の積分は式(2.6)の左辺第2項の積分と等しく、式(2.10)を式(2.6)に入れれば、結局

$$\delta \int \left\{ G \left[ \dot{\epsilon}'^{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} - \frac{(\sigma'^{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^2}{\frac{f F'}{G} + 2f} \right] + 9 K \dot{\Delta}^2 \right\} dV + \int \frac{\sigma'^{ij} \dot{F}}{\frac{f F'}{G} + 2f} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = 0 \quad (2.11)$$

第3.1図のように軸  $x^1, x^2, x^3$  をとり(柱の軸を  $x^1$  方向にとる)。  $x^1$  方向の圧縮ひずみを  $\epsilon$  とする。この中の  $\alpha$  部分が弾性ひずみ、 $(1-\alpha)$  部分が塑性 (creep) ひずみとすれば、

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= -\varepsilon = -\alpha\varepsilon - (1-\alpha)\varepsilon \\ \varepsilon_{22} &= \nu\alpha\varepsilon + \frac{1}{2}(1-\alpha)\varepsilon = \frac{1}{2}[1 - (1-2\nu)\alpha]\varepsilon \\ \varepsilon_{33} &= \nu\alpha\varepsilon + \frac{1}{2}(1-\alpha)\varepsilon = \frac{1}{2}[1 - (1-2\nu)\alpha]\varepsilon \\ \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} &= -(1-2\nu)\alpha\varepsilon\end{aligned}$$



第 3.1 図

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = -\frac{1}{3}(1-2\nu)\alpha\varepsilon \\ \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} - \Delta = -\left[1 - \frac{1}{3}(1-2\nu)\alpha\right]\varepsilon \\ \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{22} - \Delta = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}(1-2\nu)\alpha\right]\varepsilon \\ \varepsilon'_{33} &= \varepsilon_{33} - \Delta = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}(1-2\nu)\alpha\right]\varepsilon\end{aligned}$$

このような compressible の弾性ひずみを考えると、 $\alpha$  を決定する方法がないので、以下では弾性ひずみも incompressible, 即ち  $\nu=1/2$  と仮定すると

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}'_{11} = -\dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}'_{22} = \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}'_{33} = \frac{1}{2}\dot{\varepsilon} \quad (2.12)$$

$$\Delta = 0 \quad (2.13)$$

また応力は軸方向の圧縮応力を  $q$  とすれば

$$\sigma^{11} = \sigma_{11} = -q, \quad \sigma^{22} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma^{33} = \sigma_{33} = 0 \quad (2.14)$$

$$\therefore \sigma'^{11} = \sigma'_{11} = -\frac{2}{3}q, \quad \sigma'^{22} = \sigma'_{22} = \frac{1}{3}q, \quad \sigma'^{33} = \sigma'_{33} = \frac{1}{3}q \quad (2.14)'$$

したがって

$$\dot{\varepsilon}^{ij}\dot{\varepsilon}'_{ij} = \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{4}\dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{4}\dot{\varepsilon}^2 = \frac{3}{2}\dot{\varepsilon}^2 \quad (2.15)$$

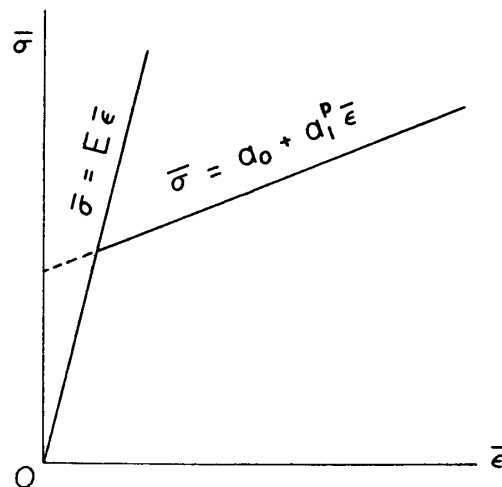
$$\sigma'^{ij}\dot{\varepsilon}'_{ij} = (\sigma^{ij} - Sg^{ij})\dot{\varepsilon}'_{ij} = \sigma^{ij}\dot{\varepsilon}'_{ij} = q\dot{\varepsilon} \quad (2.16)$$

ただし、ここでは hydrostatic tension を  $\sigma$  の代りに  $S$  で表わした。

$$\begin{aligned}f &= \frac{1}{2}\sigma'^{ij}\dot{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma^{ij} - Sg^{ij})(\dot{\varepsilon}'_{ij} - Sg_{ij}\dot{\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}'_{ij} - 3S^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(q^2 - \frac{1}{3}q^2\right) = \frac{1}{3}q^2 \quad (2.17)\end{aligned}$$

またここでは、簡単のために linear の加工硬化則を仮定する。すなわち、第 3.2 図のように弾性限以上では

$$\bar{\sigma} = a_0 + a_1^p \bar{\varepsilon} \quad (2.18)$$



第 3.2 図

と仮定すると

$$W = \int \bar{\sigma} D^p \bar{\epsilon} = \int (a_0 + a_1 \bar{\epsilon}) D^p \bar{\epsilon} = a_0 \bar{\epsilon} + \frac{1}{2} a_1 (\bar{\epsilon})^2 \quad (2 \cdot 19)$$

したがって

$$f = \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{3} (a_0 + a_1 \bar{\epsilon})^2 = \frac{1}{3} (a_0^2 + 2 a_1 W) \quad (2 \cdot 20)$$

したがって

$$F(W) = \frac{1}{3} (a_0^2 + 2 a_1 W) \quad (2 \cdot 21)$$

$$\therefore F' = \frac{\partial F}{\partial W} = \frac{2}{3} a_1 = \text{const} \quad (2 \cdot 22)$$

いま

$$\frac{F'}{G} = \frac{2}{3} \frac{a_1}{G} = m (= \text{const}) \quad (2 \cdot 23)$$

とおく。式 (2・13), (2・15), (2・16), (2・17), (2・23), (2・4) を式 (2・11) に入れれば

$$\delta \int G \left[ \frac{3}{2} \dot{\epsilon}^2 - \frac{q^2 \dot{\epsilon}^2}{2+m} \right] dV - \int \frac{B e^{-\frac{H}{kT}} \frac{1}{3} q^2 q \delta \epsilon}{\frac{2+m}{3} q^2} dV = 0 \quad (2 \cdot 24)$$

$$\therefore \delta \int G \frac{3m}{2(2+m)} \dot{\epsilon}^2 dV - \int \frac{B}{2+m} e^{-\frac{H}{kT}} q \delta \dot{\epsilon} dV = 0 \quad (2 \cdot 25)$$

変形は incompressible, 即ち  $\nu = 1/2$  と仮定しているから

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{3} \quad (2 \cdot 26)$$

また温度分布は一様とすれば,  $e^{-H/kT}$  は積分の外に出すことができるから,

$$C = B e^{-\frac{H}{kT}} \quad (2 \cdot 27)$$

とおけば, 式 (2・25) は

$$\delta \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} b E \frac{m}{2(2+m)} \dot{\epsilon}^2 dz dx - \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \frac{bC}{2+m} q \delta \dot{\epsilon} dz dx = 0 \quad (2 \cdot 28)$$

ここに  $x(x^1)$  は柱の軸方向,  $z(x^3)$  は厚さ方向にとる。  $b$  は柱の方向の幅, いま中央軸の圧縮ひずみを  $\epsilon$ , 曲率変化を  $\kappa_1$  とすれば

$$\epsilon = \epsilon + z\kappa \quad (2 \cdot 29)$$

$$-\epsilon = u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \quad \kappa = w_{xx} \quad (2 \cdot 30)$$

したがって

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} + z\dot{\kappa} \quad (2 \cdot 31)$$

$$-\dot{\epsilon} = \dot{u}_x + w_x \dot{w}_x \quad \dot{\kappa}_1 = w_{xx} \quad (2 \cdot 32)$$

ある状態における変分は  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  について考える。  $u$ ,  $v$ ,  $w$  は与えられた量であるから

$$\delta\dot{\epsilon} = \delta\dot{\epsilon} + z\delta\dot{\kappa} \quad (2 \cdot 33)$$

$$-\delta\dot{\epsilon} = \delta\dot{u}_x + w_x\delta\dot{w}_x \quad \delta\dot{\kappa} = \delta\dot{w}_{xx} \quad (2 \cdot 34)$$

式(2・31), (2・33) を式(2・28) に入れれば

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^l \left[ Ebh \frac{m}{2(2+m)} \dot{\epsilon}^2 + E \frac{bh^3}{12} \frac{m}{2(2+m)} \dot{\kappa}^2 \right] dx \\ & - \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C}{2+m} bq (\delta\dot{\epsilon} + z\delta\dot{\kappa}) dz dx = 0 \end{aligned} \quad (2 \cdot 35)$$

したがって, 軸圧縮力, 曲げモーメント

$$P = b \int_{-h/2}^{h/2} q dz, \quad M = b \int_{-h/2}^{h/2} qz dz \quad (2 \cdot 36)$$

を導入すれば

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^l \left[ EA \frac{m}{2(2+m)} (\dot{u}_x + w_x \dot{w}_x)^2 + EI \frac{m}{2(2+m)} (\dot{w}_{xx})^2 \right] dx \\ & - \int_0^l \left\{ \frac{C}{2+m} [P(-\delta\dot{u}_x - w_x \delta\dot{w}_x) + M \delta\dot{w}_{xx}] \right\} dx = 0 \end{aligned} \quad (2 \cdot 37)$$

$A$  は断面積,  $I$  は慣性能率で

$$A = bh, \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad (2 \cdot 38)$$

式(2・37)の変分 $\delta$ を行なう場合には, 前述のように $w$ については行なわない. 式(2・37)より Euler の diff. eq. は

$$\frac{d}{dx} (-EAm\dot{\epsilon} + CP) = 0 \quad (2 \cdot 39)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI m \dot{\kappa} - CM) - \frac{d}{dx} [(-EAm\dot{\epsilon} + CP) w_x] = 0 \quad (2 \cdot 40)$$

式(2・39)の積分常数は零となるから式(2・39)より

$$\dot{\epsilon} = \frac{C}{EAm} P \quad (2 \cdot 41)$$

あるいは式(2・27)より

$$\dot{\epsilon} = \frac{B}{EAm} e^{-\frac{H}{kT}} P \quad (2 \cdot 42)$$

式(2・40)は(2・41)により

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI m \dot{\kappa} - CM) = 0 \quad (2 \cdot 43)$$

式(2・43)を積分すれば, 一次微分となる左辺は常数となる. 然るに柱の中央では $(d/dx) \dot{\kappa} = 0, dM/dx = 0$ . したがって

$$\frac{d}{dx} (EI m \dot{\kappa} - CM) = 0$$

したがって積分して

$$EI m \dot{\kappa} - CM = \text{const}$$

柱の両端を simple support とすれば、両端で  $M=0$ ,  $\kappa=0$ . したがって、この常数は零であって

$$EI\dot{m}\dot{\kappa} - CM = 0 \quad (2 \cdot 44)$$

これに式 (2.32) および

$$M = -Pw \quad (2 \cdot 45)$$

を用いれば

$$EI\dot{m}\dot{w}_{xx} + CPw = 0 \quad (2 \cdot 46)$$

いま、この解として

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2 \cdot 47)$$

を仮定すれば (両端支持として)、式 (2.46) は

$$EI\dot{m}\frac{\pi^2}{l^2}f - CPf = 0 \quad (2 \cdot 48)$$

となる.  $\pi^2 EI/l^2$  は、両端単純支持柱の Euler の buckling load であるから、それを

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2 \cdot 49)$$

とおけば、式 (2.48) は

$$mP_{cr}\frac{df}{dt} - CPf = 0 \quad (2 \cdot 50)$$

積分すれば

$$\begin{aligned} \log f &= \frac{CP}{mP_{cr}}t + \text{const} \\ f &= A \exp\left(\frac{CP}{mP_{cr}}t\right) \quad (A: \text{const.}) \end{aligned} \quad (2 \cdot 51)$$

initial deflection を  $f_0$  とすると

$$t=0 \quad f=f_0 \quad (2 \cdot 52)$$

したがって、式 (2.51) において

$$A = f_0 \quad (2 \cdot 53)$$

$$\therefore f = f_0 e^{\frac{CP}{mP_{cr}}t} \quad (2 \cdot 54)$$

式 (2.27) により

$$f = f_0 \exp\left\{\frac{BP}{mP_{cr}}te^{-\frac{H}{kT}}\right\} \quad (2 \cdot 55)$$

線型法則 ( $n=1$ ) でない場合、柱の creep buckling の式 (2.11) はそのまま成立つ.

$$\delta \int \left\{ G \left[ \dot{\epsilon}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{(\sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^2}{\frac{fF'}{G} + 2f} \right] + 9K\dot{\Delta}^2 \right\} dV + \int \frac{\sigma^{ij} \dot{F}}{\frac{fF'}{G} + 2f} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = 0 \quad (2 \cdot 56)$$

加工硬化と creep との関係の式 第2章 (3.7) により



$$F' = \frac{2}{3} \frac{C^{n+1}}{(n+1)} (\bar{\sigma})^{1-n} \quad (2.57)$$

ただし,  $C, n$  は

$$\bar{\sigma} = C (\bar{\rho})^{\frac{1}{n}} \quad (2.58)$$

における  $C, n$  である. また  $f = (1/3)\bar{\sigma}^2$ , 式 (2.57) より

$$fF' = \frac{2C^{n+1}}{9(n+1)} (\bar{\sigma})^{3-n} \quad (2.59)$$

$$\therefore \frac{fF'}{G} + 2f = \frac{C}{G} \frac{1}{(\bar{\sigma})^{n-3}} + \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \quad (2.60)$$

ここに

$$C = \frac{2C^{n+1}}{9(n+1)} \quad (2.61)$$

また  $\dot{\epsilon}_{ij}$  は非圧縮として  $(\dot{\epsilon}, -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}, -\frac{1}{2}\dot{\epsilon})$  であるから

$$\dot{\epsilon}^{ij}\dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{4}\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{4}\dot{\epsilon}^2 = \frac{3}{2}\dot{\epsilon}^2 \quad (2.62)$$

$$\sigma'^{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = (\sigma^{ij} - \sigma g^{ij})\dot{\epsilon}_{ij} = \sigma^{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \sigma\dot{\epsilon} \quad (2.63)$$

$$\dot{A} = 0 \quad (2.64)$$

次に

$$\dot{F} = -Bfe^{-\frac{H}{kT}} = -\frac{1}{3}B\bar{\sigma}^2 e^{-\frac{H}{kT}} \quad (2.65)$$

により

$$\begin{aligned} \sigma'^{ij}\dot{F}\delta\dot{\epsilon}_{ij} &= -\frac{1}{3}Be^{-\frac{H}{kT}}\bar{\sigma}^2\sigma\delta\dot{\epsilon} \\ &= -C'\bar{\sigma}^2\sigma\delta\dot{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.66)$$

式 (2.60), (2.62), (2.63), (2.64), (2.65) を式 (2.56) に入れれば

$$\begin{aligned} \delta\int G \left[ \frac{3}{2}\dot{\epsilon}^2 - \frac{\sigma^2\dot{\epsilon}^2}{\frac{C}{G} \frac{1}{(\bar{\sigma})^{n-3}} + \frac{2}{3}\bar{\sigma}^2} \right] dV \\ - \int \frac{C'\bar{\sigma}^2\sigma\delta\dot{\epsilon}}{\frac{C}{G} \frac{1}{(\bar{\sigma})^{n-3}} + \frac{2}{3}\bar{\sigma}^2} dV = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

一軸圧縮であるから,  $\bar{\sigma} = \sigma$ , したがって上式は

$$\delta\int G \left[ \frac{3}{2}\dot{\epsilon}^2 - \frac{\dot{\epsilon}^2}{\frac{C}{G} \frac{1}{\sigma^{n-1}} + \frac{2}{3}} \right] dV - \int \frac{C'\sigma\delta\dot{\epsilon}}{\frac{C}{G} \frac{1}{\sigma^{n-1}} + \frac{2}{3}} dV = 0 \quad (2.68)$$

ここで  $\sigma$  は current state に対して与えられている. 変分は  $\dot{\epsilon}$  について行なえばよい.

### 3.3 回転円板の定常クリープ

cylindrical coordinate  $(r, \theta)$  をとり, それに関する応力成分を  $S^{\lambda\mu}$ , したがって stress

tensor density を  $\tau^{\lambda\mu} = \sqrt{g} S^{\lambda\mu}$  ( $\sqrt{g} = r$ ) とする.

すると  $r$  方向の平衡方程式は

$$\tau_{;r}^{rr} + \tau_{;\theta}^{r\theta} + \sqrt{g} \rho \omega^2 r = 0 \quad (3 \cdot 1)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \tau_{;r}^{rr} &= \tau_{;r}^{rr} + \tau^{rr} \Gamma_{rr}^r + \tau^{r\theta} \Gamma_{r\theta}^r = \tau_{;r}^{rr} \\ \tau_{;\theta}^{r\theta} &= \tau_{;\theta}^{r\theta} + \tau^{\theta r} \Gamma_{\theta r}^r + \tau^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^r = \tau_{;\theta}^{r\theta} - \tau^{\theta\theta} r = -\tau^{\theta\theta} r \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 2)$$

したがって、式 (3・1) は

$$\tau_{;r}^{rr} - \tau^{\theta\theta} r + r \rho \omega^2 r = 0 \quad (3 \cdot 3)$$

$$\therefore (r S^{rr})_{;r} - r S^{\theta\theta} r + r \rho \omega^2 r = 0$$

$$\therefore r \frac{\partial S^{rr}}{\partial r} + S^{rr} - S^{\theta\theta} r^2 + \rho \omega^2 r^2 = 0 \quad (3 \cdot 4)$$

cylindrical coordinate ( $r, \theta$ ) に関する base vector を  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ ,  $r, \theta$  方向の unit vector を  $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta$  とすれば

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{e}_\theta = r \mathbf{a}_\theta \quad (3 \cdot 5)$$

$\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta$  に関する stress tensor の components を  $\sigma_r, \sigma_\theta$  (この場合は co-contra-variant の区別はなくなる) とすれば

$$S^{rr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + S^{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta = S^{rr} \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r + S^{\theta\theta} r^2 \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_\theta = \sigma_r \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r + \sigma_\theta \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_\theta$$

したがって

$$\sigma_r = S^{rr}, \quad \sigma_\theta = S^{\theta\theta} r^2 \quad (3 \cdot 6)$$

したがって、式 (3・4) は

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta + \rho \omega^2 r^2 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad (3 \cdot 7)$$

一方温度が一樣な場合の定常クリープでは、 $S_{ii}$  の表面がない場合に

$$\int (\bar{\sigma})^{n-1} dV = \min \quad (3 \cdot 8)$$

が成立つ。定常クリープにおいて、実際に実現される応力状態は平衡条件 (3・7) と極値定理 (3・8) とを満足するようなものである。

回転円板の弾性の場合の解に類似であるとして

$$\sigma_r = \sigma_0 (1 - x^2) \quad (3 \cdot 9)$$

ここに

$$x = \frac{r}{a} \quad (3 \cdot 10)$$

( $a$ : 円板の半径) を仮定する。これは  $x=0$  で、 $\sigma_r = \tau_0$  であり、かつ

$$x=1 \text{ (円周) で } \sigma_r = 0 \quad (3 \cdot 11)$$

を満足している。式 (3・9) を平衡方程式 (3・7) に入れば

$$\sigma_\theta = \sigma_0 (1 - 3x^2) + a^2 \rho \omega^2 x^2 \quad (3 \cdot 12)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \quad (3 \cdot 13)$$

より

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_0^2(1 - 4x^2 + 7x^4) + \sigma_0 a^2 \rho \omega^2 x^2(1 - 5x^2) + a^4 \rho^2 \omega^4 x^4 \quad (3 \cdot 14)$$

$n=1$  の場合には, 式 (3・8) は板厚を  $h$  として

$$\begin{aligned} \int_0^a \bar{\sigma}^2 2\pi r h dr &= \int_0^1 \bar{\sigma}^2 a^2 2\pi x h dx = 2\pi a^2 h \int_0^1 \bar{\sigma}^2 x dx \\ &= 2\pi h a^2 \left[ \frac{2}{3} \sigma_0^2 - \frac{7}{12} a^2 \rho \omega^2 \sigma_0 + \frac{1}{6} a^4 \rho^2 \omega^2 \right] = \min \end{aligned} \quad (3 \cdot 15)$$

これが  $\min$  になるような  $\sigma_0$  を求めればよい.

式 (3・15) を  $\sigma_0$  について微分して

$$\frac{4}{3} \sigma_0 - \frac{7}{12} a^2 \rho \omega^2 = 0 \quad (3 \cdot 16)$$

$$\therefore \sigma_0 = \frac{7}{16} a^2 \rho \omega^2 \quad (3 \cdot 17)$$

これを式 (3・9), (3・12) に入れれば,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{7}{16} a^2 \rho \omega^2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) = \frac{7}{16} \rho \omega^2 (a^2 - r^2) \\ \sigma_\theta &= \frac{7}{16} \rho \omega^2 \left( a^2 - \frac{5}{7} r^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 18)$$

弾性の場合の解は [23]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (a^2 - r^2) \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left( a^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 19)$$

であり, これは  $\nu=0.5$  の場合に (3・18) と一致する.

ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C e^{-\frac{H}{kT} \sigma'_{ij}} \quad (n=1) \quad (3 \cdot 20)$$

すなわち

$$\dot{\epsilon}_r = C e^{-\frac{H}{kT} \sigma'_r}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = C e^{-\frac{H}{kT} \sigma'_\theta} \quad (3 \cdot 21)$$

式 (3・18) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_r &= \frac{1}{3} (2\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{7}{48} \rho \omega^2 \left( a^2 - \frac{9}{7} r^2 \right) \\ \sigma'_\theta &= \frac{1}{3} (2\sigma_\theta - \sigma_r) = \frac{7}{48} \rho \omega^2 \left( a^2 - \frac{3}{7} r^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 22)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= C e^{-\frac{H}{kT} \frac{7}{48} \rho \omega^2 \left( a^2 - \frac{9}{7} r^2 \right)} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= C e^{-\frac{H}{kT} \frac{7}{48} \rho \omega^2 \left( a^2 - \frac{3}{7} r^2 \right)} \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 23)$$

$n=3$  の場合, 式 (3・14) より

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}^4 &= \sigma_0^4(1-4x^2+7x^4)^2 + 2\sigma_0^3 a^2 \rho \omega^2 x^2(1-4x^2+7x^4)(1-5x^2) \\
 &\quad + \sigma_0^2 a^4 \rho^2 \omega^4 x^4(1-5x^2)^2 + 2\sigma_0 a^4 \rho^2 \omega^4 x^4(1-4x^2+7x^4) \\
 &\quad + 2\sigma_0 a^6 \rho^3 \omega^6 x^6(1-5x^2) + a^8 \rho^4 \omega^8 x^8 \\
 &= \sigma_0^4(1-8x^2+30x^4-56x^6+49x^8) \\
 &\quad + 2\sigma_0^3 a^2 \rho \omega^2 x^2(1-9x^2+27x^4-35x^6) \\
 &\quad + \sigma_0^2 a^4 \rho^2 \omega^4 x^4(3-18x^2+39x^4) + 2\sigma_0 a^6 \rho^3 \omega^6 x^6(1-5x^2) \\
 &\quad + a^8 \rho^4 \omega^8 x^8
 \end{aligned} \tag{3・24}$$

これより

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \bar{\sigma}^4 2\pi r h dr &= 2\pi a^2 h \int_0^1 \bar{\sigma}^4 x dx \\
 &= 2\pi h a^2 \{1.4\sigma_0^4 - 2.75\rho\omega^2 a^2 \sigma_0^3 + 2.15\rho^2 \omega^4 a^4 \sigma_0^2 \\
 &\quad - 0.75\rho^3 \omega^6 a^6 \sigma_0 + 0.1\rho^4 \omega^8 a^8\} = \min.
 \end{aligned} \tag{3・25}$$

$$\zeta = \frac{\sigma_0}{\rho\omega^2 a^2} \tag{3・26}$$

とおけば上式は

$$1.4\zeta^4 - 2.75\zeta^3 + 2.15\zeta^2 - 0.75\zeta + 0.1 = \min. \tag{3・27}$$

これを満足する値は  $\zeta=0.38$

$$\therefore \sigma_0 = 0.38\rho\omega^2 a^2 \tag{3・28}$$

したがって  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  は式 (3・9), (3・12) によって

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= 0.38\rho\omega^2(a^2 - r^2) \\
 \sigma_\theta &= 0.38\rho\omega^2(a^2 - 0.37r^2)
 \end{aligned} \right\} \tag{3・29}$$

式 (3・28) を (3・14) に入れて  $\bar{\sigma}^2$  を計算すれば

$$\bar{\sigma}^2 = \rho^2 \omega^4 (0.1484a^4 - 0.2136a^2 r^2 + 0.1388r^4) \tag{3・30}$$

また式 (3・29) より

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma'_r &= \frac{1}{3}(2\sigma_r - \sigma_\theta) = 0.1267\rho\omega^2(a^2 - 1.63r^2) \\
 \sigma'_\theta &= \frac{1}{3}(2\sigma_\theta - \sigma_r) = 0.1267\rho\omega^2(a^2 + 0.26r^2)
 \end{aligned} \right\} \tag{3・31}$$

ひずみ速度は

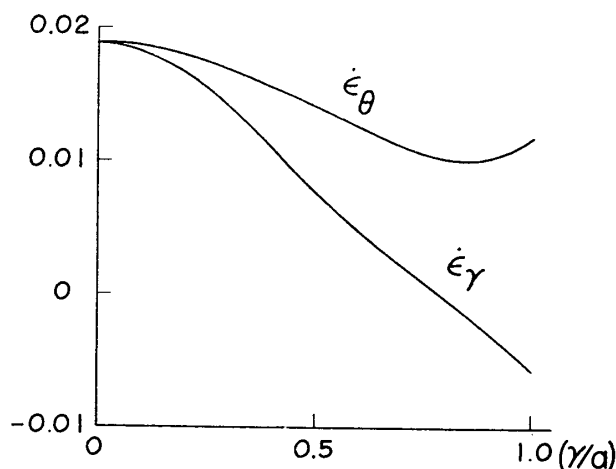
$$\dot{\epsilon}_{ij} = C e^{-\frac{H}{kT}} \bar{\sigma}^2 \sigma'_{ij} \quad (n=3) \tag{3・32}$$

よって

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_r &= C e^{-\frac{H}{kT}} 0.1267\rho^3 \omega^6 (0.1484a^4 - 0.2136a^2 r^2 + 0.1388r^4) (a^2 - 1.63r^2) \\
 \dot{\epsilon}_\theta &= C e^{-\frac{H}{kT}} 0.1267\rho^3 \omega^6 (0.1484a^4 - 0.2136a^2 r^2 + 0.1388r^4) (a^2 + 0.26r^2)
 \end{aligned} \right\} \tag{3・33}$$

となる。

第3・3図はひずみ速度の数値計算の結果を示す。



第3・3図

【編者後記】

本遺稿は、金属のクリープに関する3編のご研究を合わせたもので、主として理論的考察・解析から成っている。報告形式に充分整備されていなかったものを、できるだけ先生のご意向を推察し、編者らがまとめたものであり、あるいは十分に意の通じないところがあるとすれば、編者らの責任である。

第2, 第3章が基礎をおく第1章の金属のクリープ理論においては、静的加工硬化則とクリープ法則での硬化率を関連づけ、実験を行なってその考察の根拠を裏付けようと意図されていたが、完全に成果が得られないまま中途にして病床につかれ、逝去されたことは、先生として心残りだったと存じ上げますが、本分野に関心をもつ我々にも残念至極に存ずるところです。実験結果については、単にそれらの結果を記すことに止めたことを諒とされたく存じます。

【編者 植村益次, 岩田今朝男記】

文 献

- [1] Rotherham, L. A., Creep of Metals, 1951
- [2] Cottrell, A. H. and Aytakin, V. J., J. Inst. Metals, 77 (1950) 389
- [3] Orowan, E., J. West Scot. Iron and Steel Inst., 54 (February, 1947). 45
- [4] Dorn, J. E., J. Meek. Phys. Solids, 3 (1954)
- [5] Weertman, J., J. App. Phys., 26 (1955) 1213
- [6] Mott, N. F. and Nabarro, F. R. N., Phys. Soc. London, 1 (1948)
- [7] Cottrell, A. H., Dislocations and Plastic Flow in Crystals (1953)
- [8] Mott, N. F., Phil. Mag. 44 (1953) 742
- [9] Weertman, J., loc. cit., 5
- [10] Cottrell, A. H., loc. ct., 7
- [11] Dorn, J. E., loc. cit., 4
- [12] Hill, R., Mathematical Theory of Plasticity (1951)

- [13] Hodge, P. G. and Prager, W., J. Math. and Phys. 27 (1948), 1
- [14] Greenberg, H. J., Quart. Appl. Math. 7 (1949) 85
- [15] Greenberg, H. J., loc. cit., 14
- [16] Koiter, W. T., Quart. Appl. Math. 11 (1953) 350
- [17] Colonnetti, G., Quart. Appl. Math. 7 (1950) 353
- [18] Reissner, H., Z. A. M. M. 11 (1931) 1
- [19] Greenberg, H. J., loc. cit., 14
- [20] Hoff, N. J., Quart. Appl. Math. 12; 49 (1954)
- [21] Wang, A. J., and Prager, W., J. Aeronaut. Sci., 21 : 343 (1954)
- [22] Sanders, J. L. Jr., McComb, H. G. Jr., and Schlechte, F. R., NACA Technical Note 4003 (1957)
- [23] Timoshenko, S., Theory of Elasticity (1951) 69