

長い定応力部をもつ弾性波による 動的応力集中の解析について

河 田 幸 三・橋 本 彰 三

On Some Analyses of Dynamic Stress Concentrations Due to an Elastic
Wave with a Long Plateau of Constant Stress

By

K. KAWATA and S. HASHIMOTO

Abstract: Dynamic stress concentrations due to elastic waves are analyzed by high speed photoelasticity and some differences between dynamic and static stress distributions are clarified. Specimens such as long struts with shoulders or notches are loaded dynamically by an elastic wave behind the front of which a plateau of constant stress ρcv (ρ : density, c : elastic wave velocity, v : tensile velocity) of long duration exists. Such elastic wave is caused in the strut specimen by pulling its lower end in constant velocity, with a falling weight large enough attached to there. Dynamic isochromatic patterns caused in polyurethane rubber specimens are recorded with a 'HIMAC 16 H' high speed camera (framing speed: 10,000 pictures per second). The distinctions of the patterns are nearly equal to those of ordinary static patterns. It is known that dynamic stress concentration factors, that is, max. fringe order in passage of the wave front and the plateau of ρcv , divided by the fringe order corresponding to the height of the plateau, are about 0.5~0.6 times static ones, for the specimen dimensions of the present work. An approximate theory of dynamic stress concentration factor is derived, considering notches as discontinuities in cross sectional area of strut, as a rough approximation. The above mentioned theoretical consideration may explain the values of dynamic stress concentration factors obtained experimentally.

概 要

弾性波による動的応力集中を高速光弾性で解析し、その静的と異なる挙動を明かにした。光弾性材料としてポリウレタン、弾性波の撮影には1万p/s*の高速コマどりカメラを用い、鮮明な等色線図を得ることができた。試片は切欠、又は段付部をもつ短冊状で、負荷としては、継続時間の短いパルスの使用を避け、試片下端に定速度引張りを加えて得られる、波頭の後に ρcv (ρ : 密度, c : 弾性波速度, v : 引張り速度) の高さの一定応力値が長時間続く弾性波を用いた。この波頭および初期の plateau が切欠を通過するときの集中応力の縞次数を ρcv の縞次数で割って得られる動的応力集中係数は、静的のその約 0.5~0.6 倍であることが知られた。この値は、切欠部をあらい近似として断面積不連

* コマ毎秒 (pictures per second, または frames per sec.)

統部と考え、ここを通過する弾性波の理論を適用した計算結果と比較すると、段付棒についてはそのまま一致し、局部的切欠棒についてはその初期の値と一致する。

§ 1. まえがき (実験計画)

弾性波による動的応力集中については、これまで若干の高速光弾性解析その他の手法 [1~9] による実験 [10~13] が行なわれているが、負荷の種類としては、主として継続時間の短い、しかも割合不整形のパルスの形をとる場合が取扱われており、動的応力集中と静的応力集中との差異について、十分明確な結論が導かれていないように思われる。また弾性論による二、三の研究結果も最近発表されているが、まだわずかの場合に限られており、切欠部を単一の弾性波頭が通過する場合について広汎な明確な結果が得られていないようである。

そこで、比較的単純な動的負荷の形を用いて、より明確な結論に近づくことを目的として次の実験計画を立てた。試片の形としては、一定幅の短冊状試片の両側に同じ深さの諸種の切欠をつけたものと考え、また動的負荷としては、密度 ρ 、弾性波速度 c の棒状試片の一端を時間 $t \geq 0$ において一定の速度 v で引張るとき、弾性波頭の通過した領域の応力値が一定値 ρcv をとることを用いて、試片の一端を固定、他端に定速引張りを加えることとした。この plateau の高さ ρcv を基準として、動的および静的の応力集中係数を比較考察すれば、事柄は比較的簡単であることが期待される。

光弾性材料としては低い弾性波速度を得るため、静的のヤング係数が 0.1 kg/mm^2 の order のポリウレタン・ゴムを用いることとした。この材料の弾性波速度は実測によれば約 50 m/s の order で、1万 p/s のコマどりカメラ (framing camera) でスリット幅を小さくとれば、十分弾性波伝播の様相を記録できる。[29]

動的応力集中係数 k_d の求め方については、無切欠棒中を伝播する弾性波の定応力部の高さ ρcv に当る縞次数 N_0 で、対応する切欠棒の応力集中部の縞次数 $N_{\max}(t)$ を割って求める方法をとることとした。一方、静的応力集中係数 k_s は通常のように、無切欠部の平均応力を基準として求めればよい。

以上の計画により実験を行ない、得られた k_d 、 k_s 両者を比較してみると、弾性波頭およびそれに続く plateau 部が切欠を通過する際の k_d は k_s より低い値をとっていることが見られた。これは一見やや奇妙な結果なので、簡単な理論的検討を試みた。切欠部を一種の界面と見なせば、そこで応力波の反射、伝達がおこり、その界面を通して伝達される応力波の高さ σ_T の入射応力波の高さ σ_I に対する比 σ_T/σ_I が、静的平衡のとき得られる σ_T/σ_I に比し、小さいことから説明できるように思われる。

§ 2. 実験装置と光弾性材料

弾性波の伝播を明瞭に捕捉するためには、一コマの露出時間を小さくする必要がある。光学系ならびに感光材料を含めて 1 mm 当り 40 本の線解像力をもつ場合、有効露出時間中に感光膜上の像の運動が $1/40 = 0.025 \text{ mm}$ をこえないようにおさえればよい。対象と像の間の線縮少率を M とすると、対象の移動速度 $V(\text{mm/s})$ と露出時間 $t(\text{s})$ との関係は

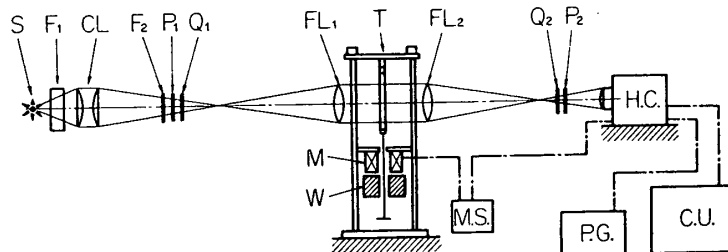
$$t = 0.025 / VM \quad (1)$$

で与えられる。今、 $M = 1/20$ 、 $V = 50(\text{m/s})$ とすると、

$$t = 10 \mu\text{s} \quad (2)$$

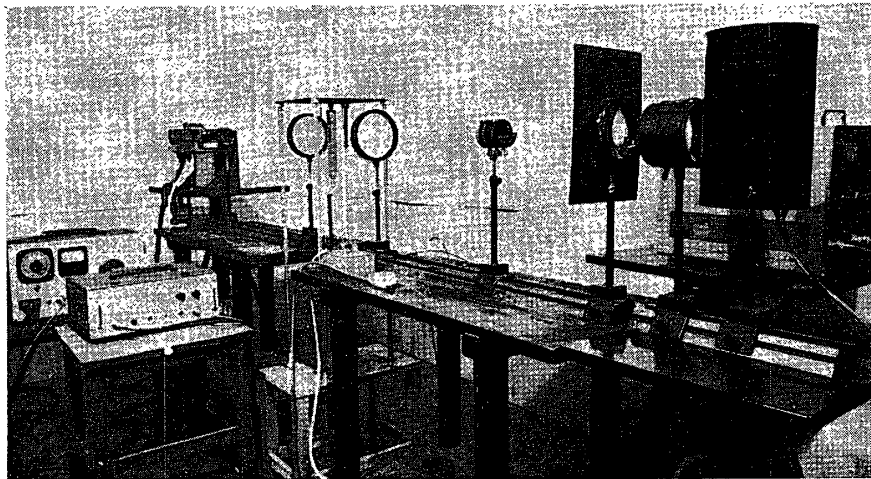
となる。

この観点から、光弾性材料にポリウレタン・ゴムを用いて、弾性波速度を 50 m/s の程度におさえれば、1 万 p/s 程度の撮影速度で十分である。



第 1 図 実験装置の概要

S: 光源, 超高圧水銀灯 (500 W), F₁: 水槽, CL: コンデンサ・レンズ, F₂: 緑フィルタ ($\lambda=5461 \text{ \AA}$), P₁, P₂: 偏光子, 検光子, Q₁, Q₂: $\frac{1}{4}$ 波長板, FL₁, FL₂: フィールド・レンズ, T: 試片, M: 電磁石, W: 重錘, H.C.: 高速度カメラ, C.U.: コントロール・ユニット, P.G.: タイミング・マーク・パルス発生器, M.S.: リレー・スイッチ.



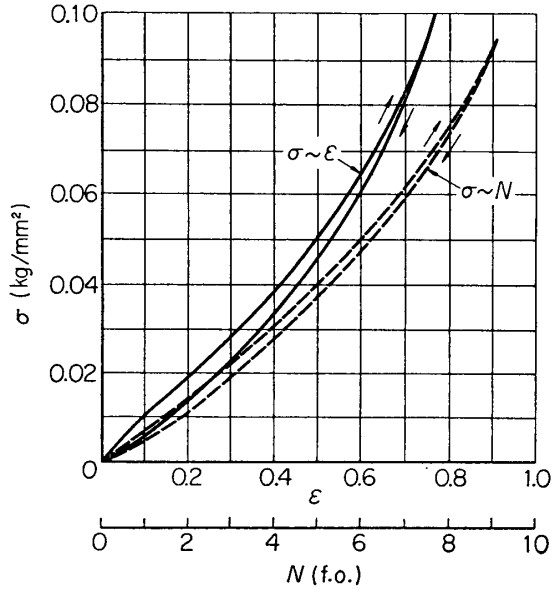
第 2 図 実験装置の概観.

実験装置の概要は第 1, 2 図のようである。光弾性装置のレンズ系, P, Q などについては通常のもので特記すべきことはなく、波長 λ は 5461 \AA を用いている。光源は 500 W 超高圧水銀灯 (Ushio, USH-500) で 61 V, 7.8 A, アーク長さ 4.5 mm である。高速度カメラは HITACHI HIMAC 16 H 型 high speed motion picture analysis camera (H-Topcor, f/1.8, F=58 mm 付) で、スリット幅を 0.57 mm, シャッタ定数* を 13 とし、露出時間 t を 1 万 p/s の速度で $7.7 \mu\text{s}$ となるようにした。フィルムは Eastman Tri-X film, Type 7233, Panchromatic negative film for 16 mm high speed cameras (100 ft) を用いた。これは公称 ASA 300 であるが、現像をおして ASA 600 位で用いた。フィルムには Timing

$$* t = \frac{1}{x} \times \frac{1}{k}$$

ここで, t : 露出時間 (s), x : コマどり速度 (p/s), k : シャッタ定数.

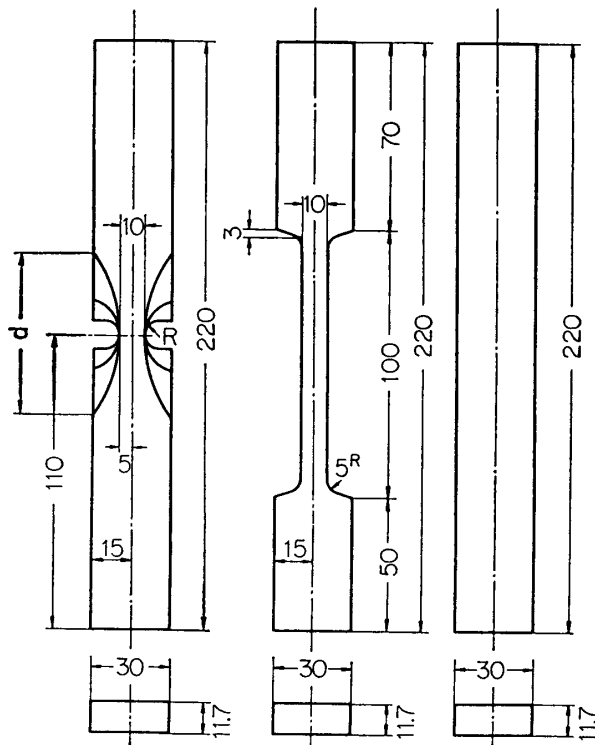
mark pulse generator で 1000 c/s のタイム・マークを入れた。試片を引張るための重錘は重量 5.28 kg, 真鍮製でこれにとりつけた軟鉄片を電磁石で吸付けておき, リレー・スイッチ



第 3 図 ポリウレタン・ゴムの静的真応力-ひずみ関係 ($T=18^{\circ}\text{C}$)

第 4 図 試験片の寸度.
左から A-series, B, C
各試片

試片番号	R (mm)	d (mm)
A-3	5	10
A-2	12.8	25
A-1	50	60

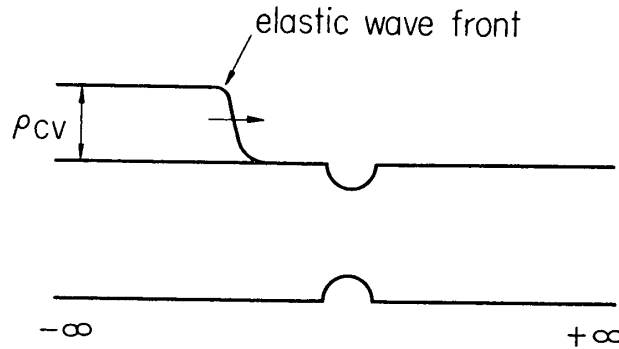


チでこれを切離し, 一方一定の遅延時間をおいて高速度カメラを作動させるようにした。

光弾性材料としては, ポリウレタン・ゴム (帝国火工品 KK 製) の約 12 mm 厚の板を用いた。18°C での $\rho=1.065$, 静的真応力-ひずみ関係 (引張速度 10 mm/min.) は第 3 図, 静的ヤング係数 $E=0.12 \text{ kg/mm}^2$ ($\sigma=0.05 \text{ kg/mm}^2$ までの平均値), 静的光弾性感度 $\alpha=$

9.4 mm/kg ($\lambda=5461 \text{ \AA}$) 程度の値をとり, ゴム弾性特有の S 字状の曲線を示す: 弾性波速度 c は 11.7 mm 厚の板で縞次数 1~3 に対し, 75~53 m/s 程度となることが実測された.

試験片の寸度は第 4 図のようにとった. 第 5 図のように, 無限長試片の一部にある切欠部



第 5 図 無限長帯状試片の一部にある切欠部を一定高さの plateau をもった弾性波が通過する時の動的応力集中.

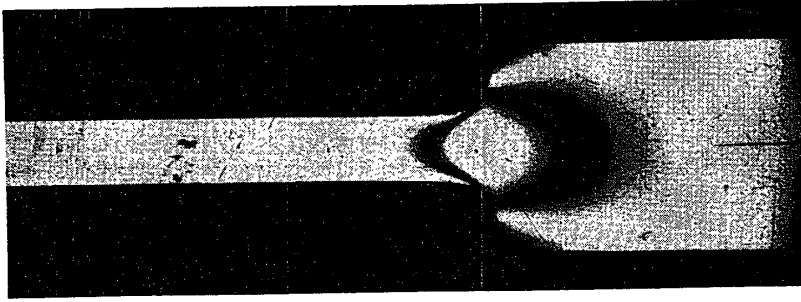
を一定高さ ρcv の plateau をもった弾性波が通過するときの動的応力集中を見ることが本実験の目的であるが, 実際の実験に当っては試片を有限長とせざるを得ないので, 試片寸度を第 4 図のようにとり, 末端で反射してくる波の介入してくるまでの時間範囲にのみ着目することとした. A 系列の切欠試片では切欠深さを一定とし, その先端半径を 3 種類変化させた. B の段付試片も切欠深さは A 系列と同一にしてある. C は基準となる切欠なしの真直試片である. これらの加工は液体窒素で冷却してガラス状態とし, やすりで行なった.

試片の上端は鉄板に二液アラルダイト (エポキシ系接着剤) で接着して固定条件を満たすようにし, 下端には厚さ 4 mm の鉄板を同様に接着し, これを介して落錘の運動を伝えるようにした.

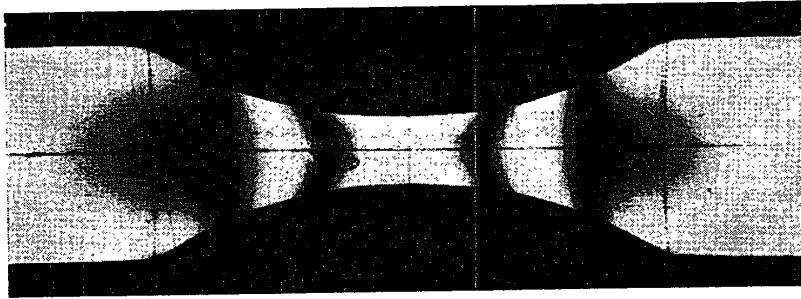
§ 3. 実験結果

まず静的引張りでの光弾性等色線図を第 6 図に示す. 集中部の縞次数の端数は Tardy 法で決定し, 無切欠部分の平均応力を基準応力とした静的応力集中係数 k_s を求めた. また動的引張り (重錘の落下高さ $h=130 \text{ mm}$, 引張り速度 $v=\sqrt{2gh}=1.6 \text{ m/s}$) での, 長い ρcv の定応力部をもつ弾性波による高速光弾性等色線写真 (撮影速度 9700~11000 p/s) を第 7~11 図に示す. § 2 に述べた定数の装置により, 通常の二次元光弾性等色線写真と同程度の尖鋭さで弾性波の伝播が記録されていることが知られる. この写真から縞次数をよみとるのは容易である. 動的応力分布の一特徴として, 波頭の通過時, 切欠部には非対称の応力分布が生じているが, その絶対値は後の対称分布より小さいこと, 弾性波の plateau 部にさしかかると, 対称の静的のそれに似た分布形となることなどが観察される. 各試片についての最大集中応力 (ただし, 段付試片 B, 真直試片 C については, 試片の中央, つまり下端よりの距離 $l=110 \text{ mm}$ の個所の値) 縞次数の時間変化を附録第 1 表に示す. この表中の動的応力集中係数 k_d は基準縞次数 $N_0=1.8$ に対するものである.

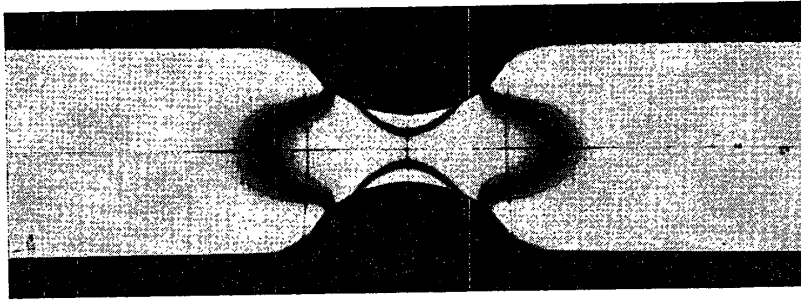
k_d を計算する基準応力 ρcv を求めるための真直試片 C について, 引張端附近で等色線が引張端面に平行とならず歪曲されることは, 主引張り応力 σ_1 に対し, これに垂直の σ_2 が重



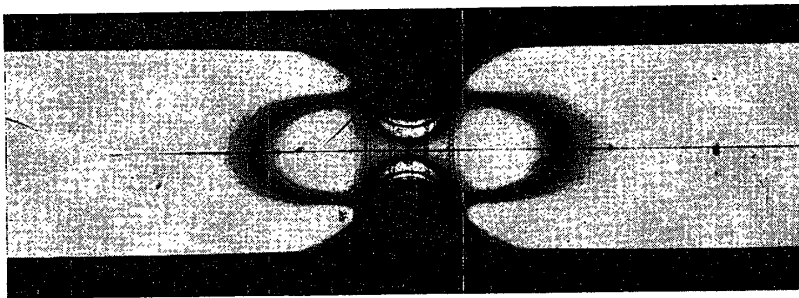
shouldered
2 kg
3.0



50
2 kg
4.2



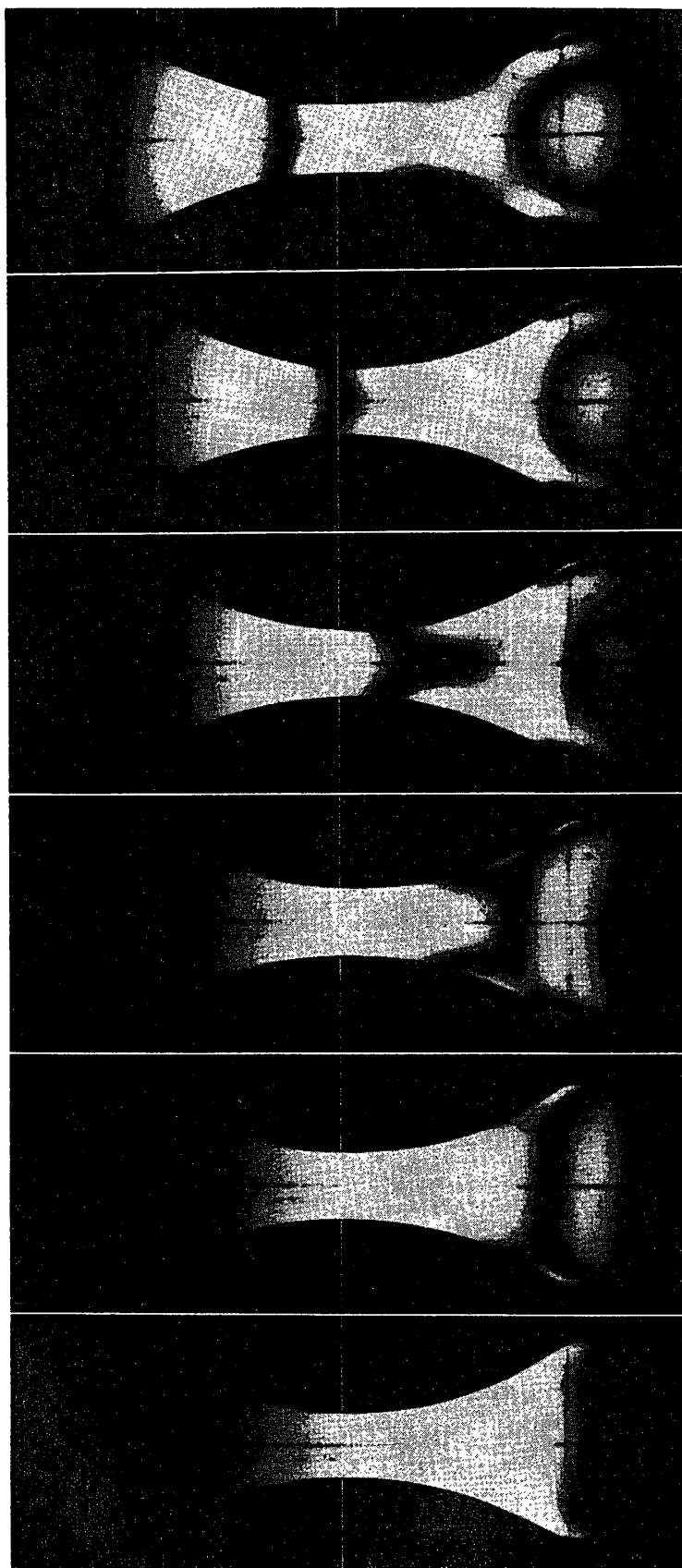
12.8
2 kg
4.9



R = 5 mm
P = 2 kg
Ks = 6.3

第6図 静的引張りでの光弾性等色線図の例.

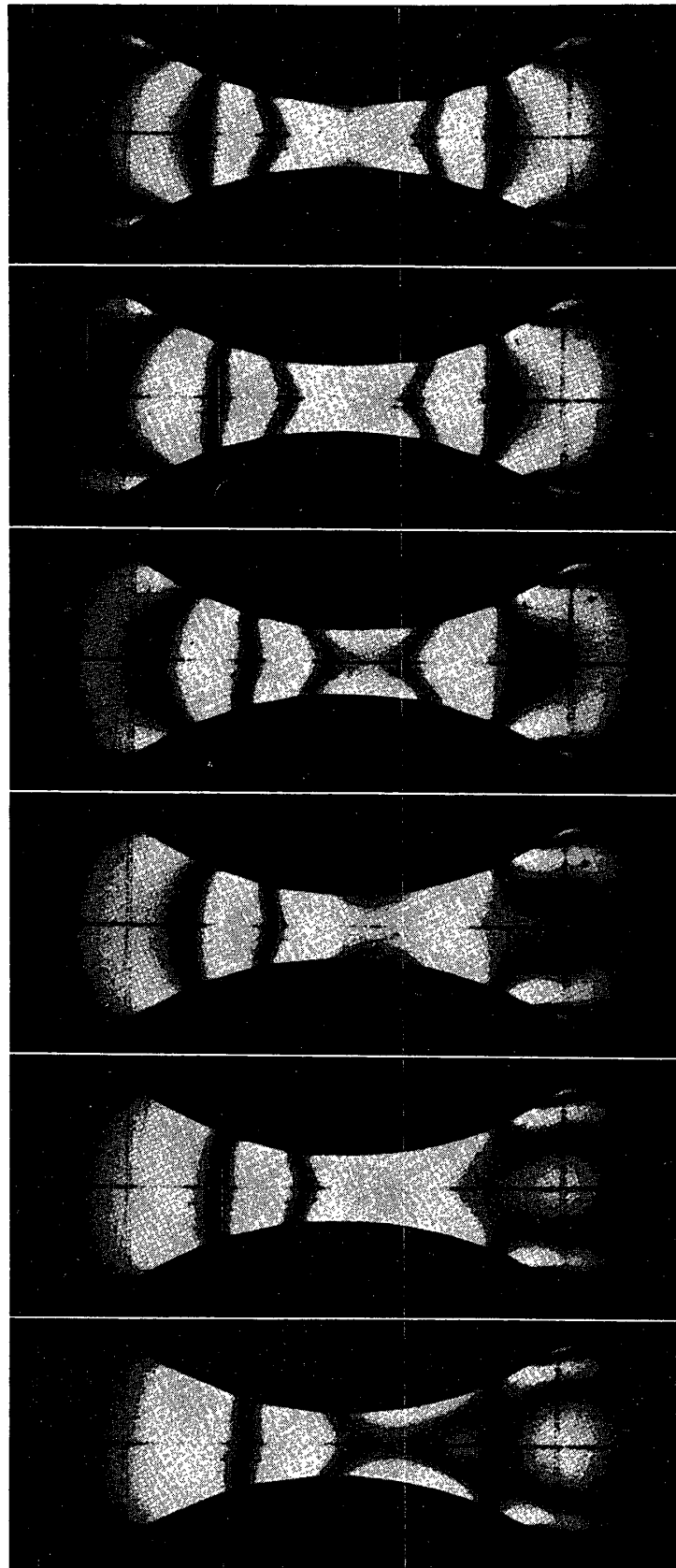
R = 50-1



Frame No. 1 2 3 4 5 6
Time 0 ms 0.10 ms 0.20 ms 0.30 ms 0.40 ms 0.50 ms
10,000 frames/sec.

第 7 図 (a) 試片 A-1 の動的引張りでの高速光弾性等色線写真.

R=50-2



12
1.10 ms

11
1.00 ms

10
0.90 ms

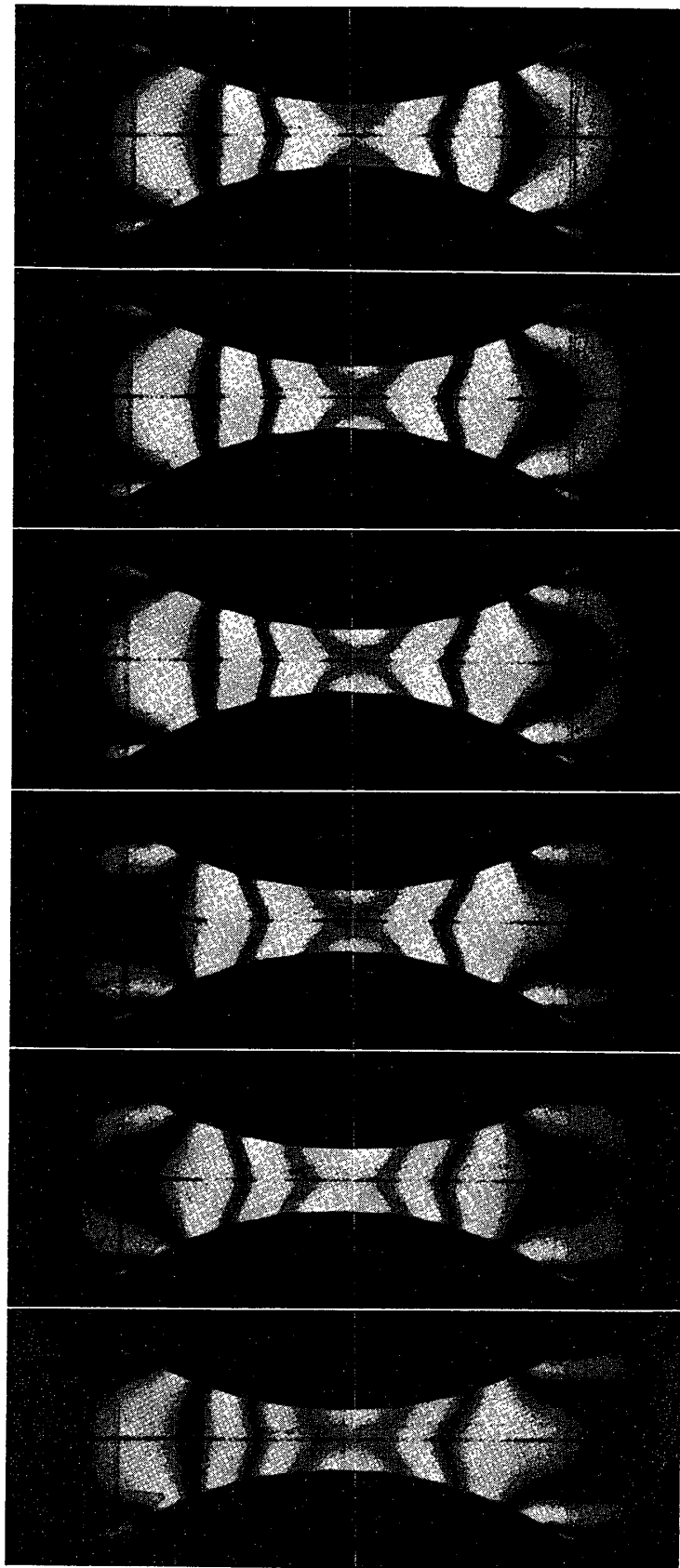
9
0.80 ms

8
0.70 ms

No. 7
0.60 ms

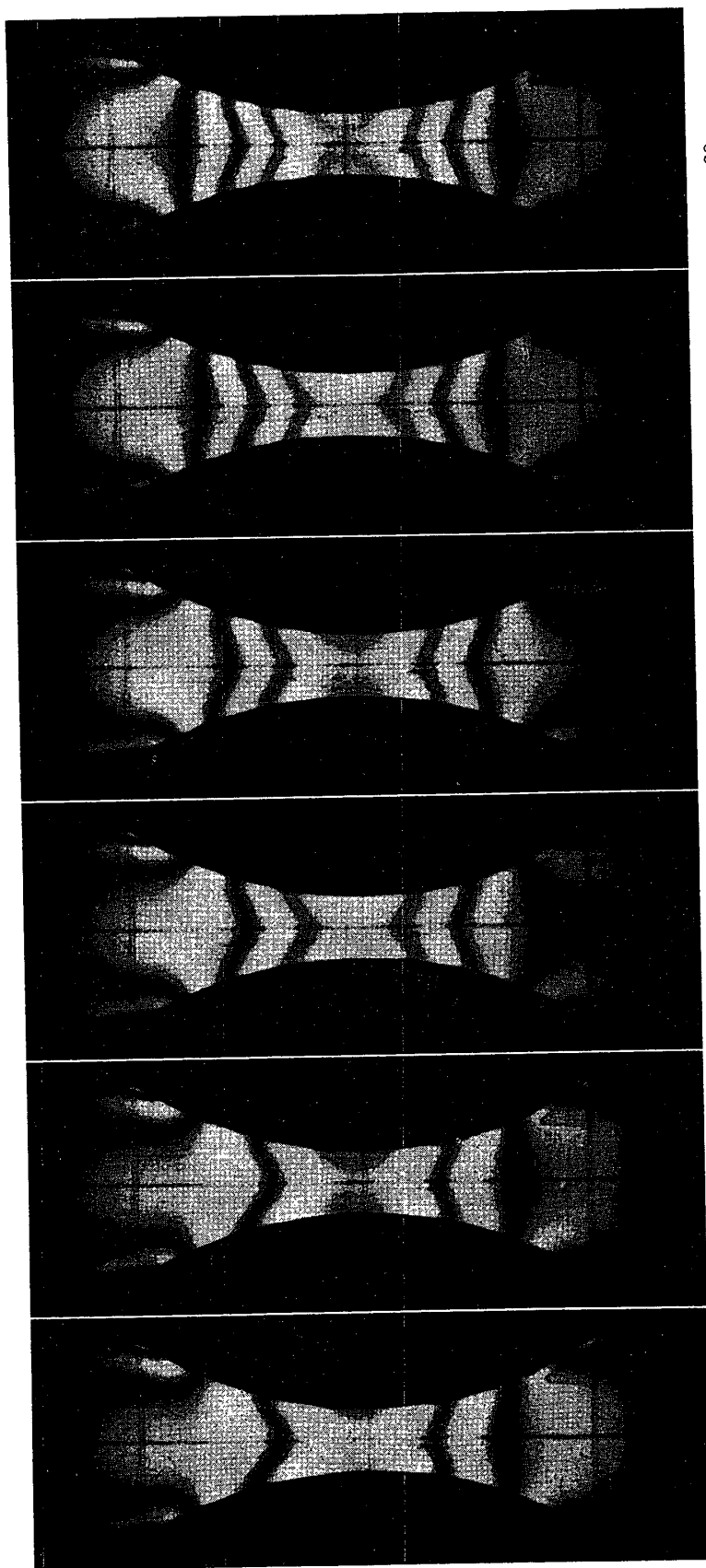
第7図 (b)

R=50-3



第 7 図 (c)

R=50-4



60
5.90 ms

55
5.40 ms

50
4.90 ms

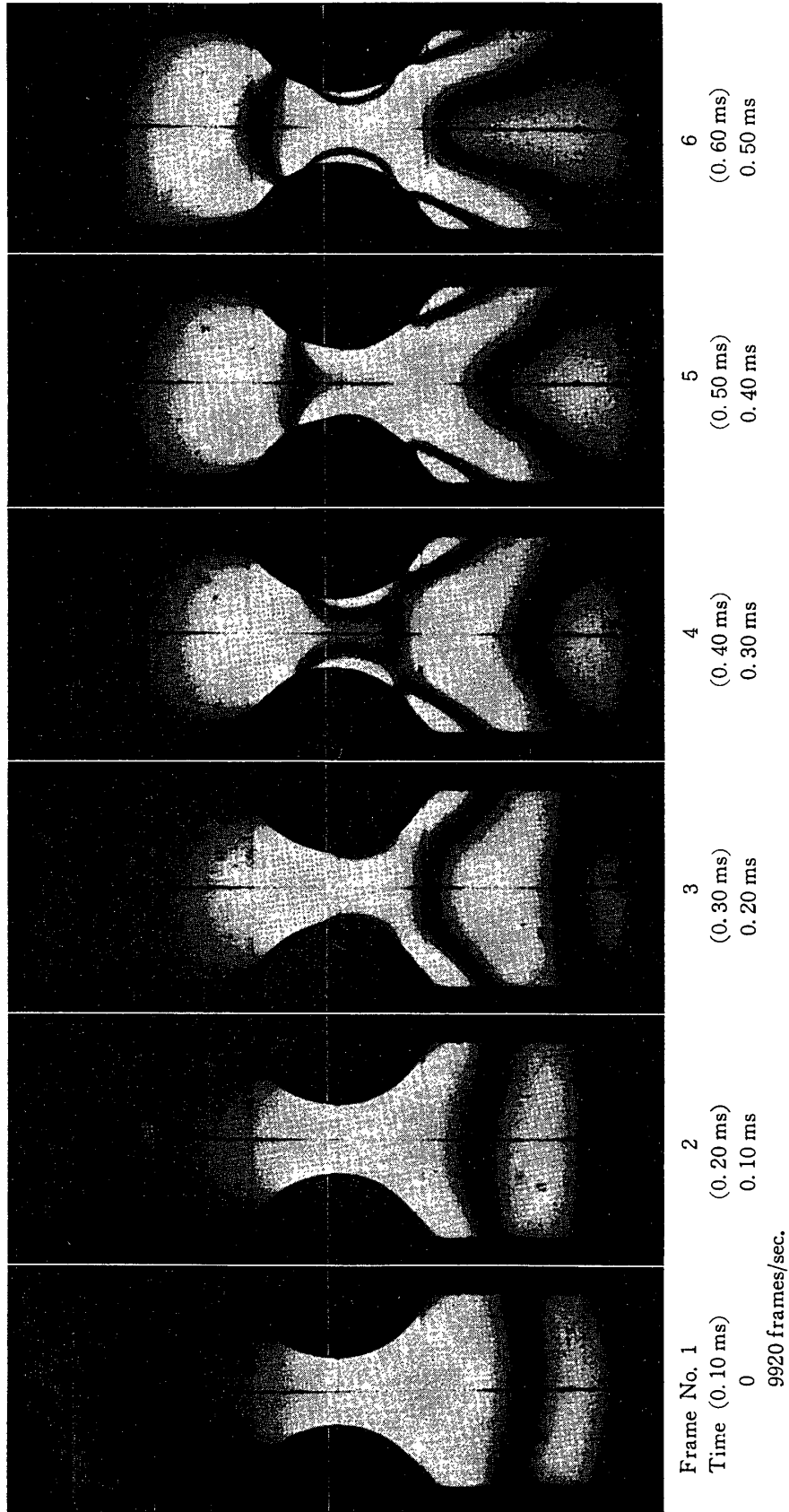
45
4.40 ms

40
3.90 ms

No. 35
3.40 ms

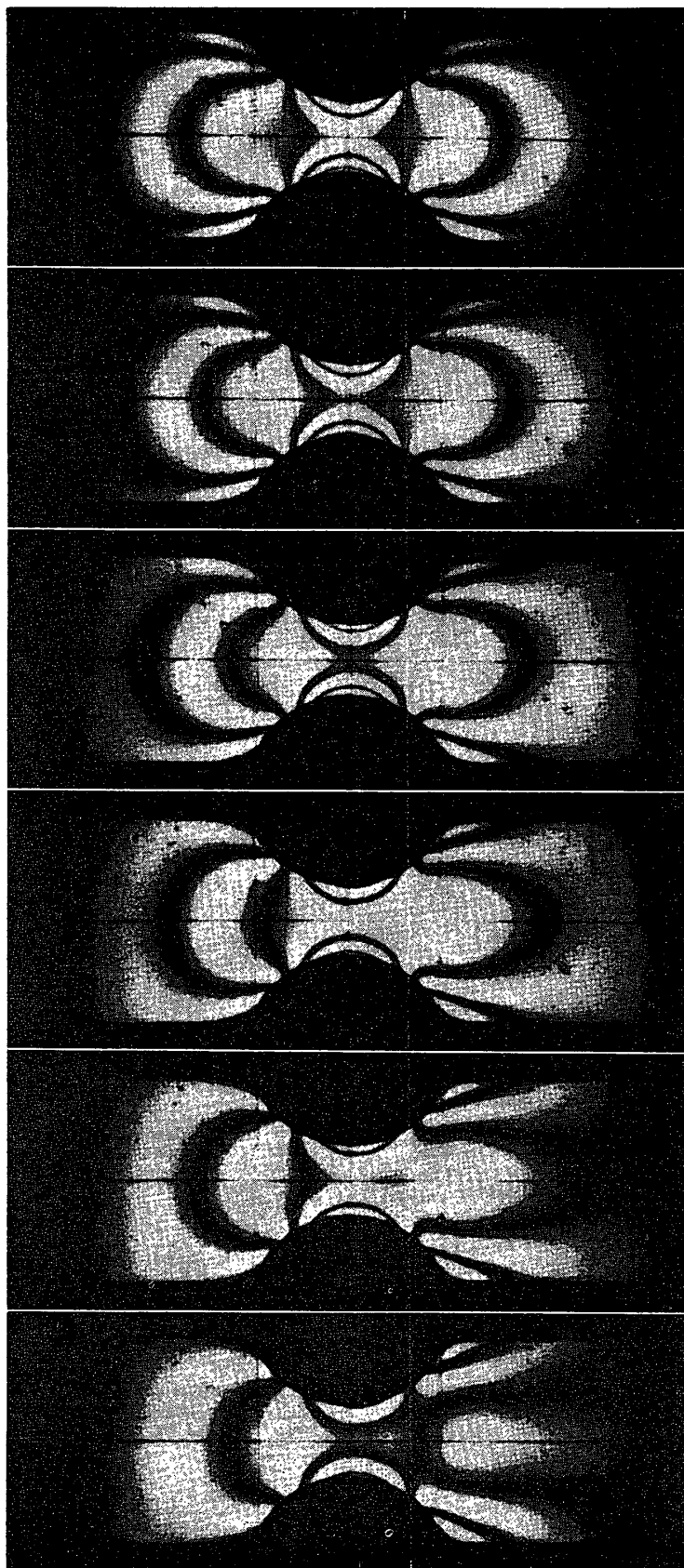
第7図 (d)

R=12.8-1



第 8 図 (a) 試片 A-2 の動的引張りでの高速光弾性等色線写真.

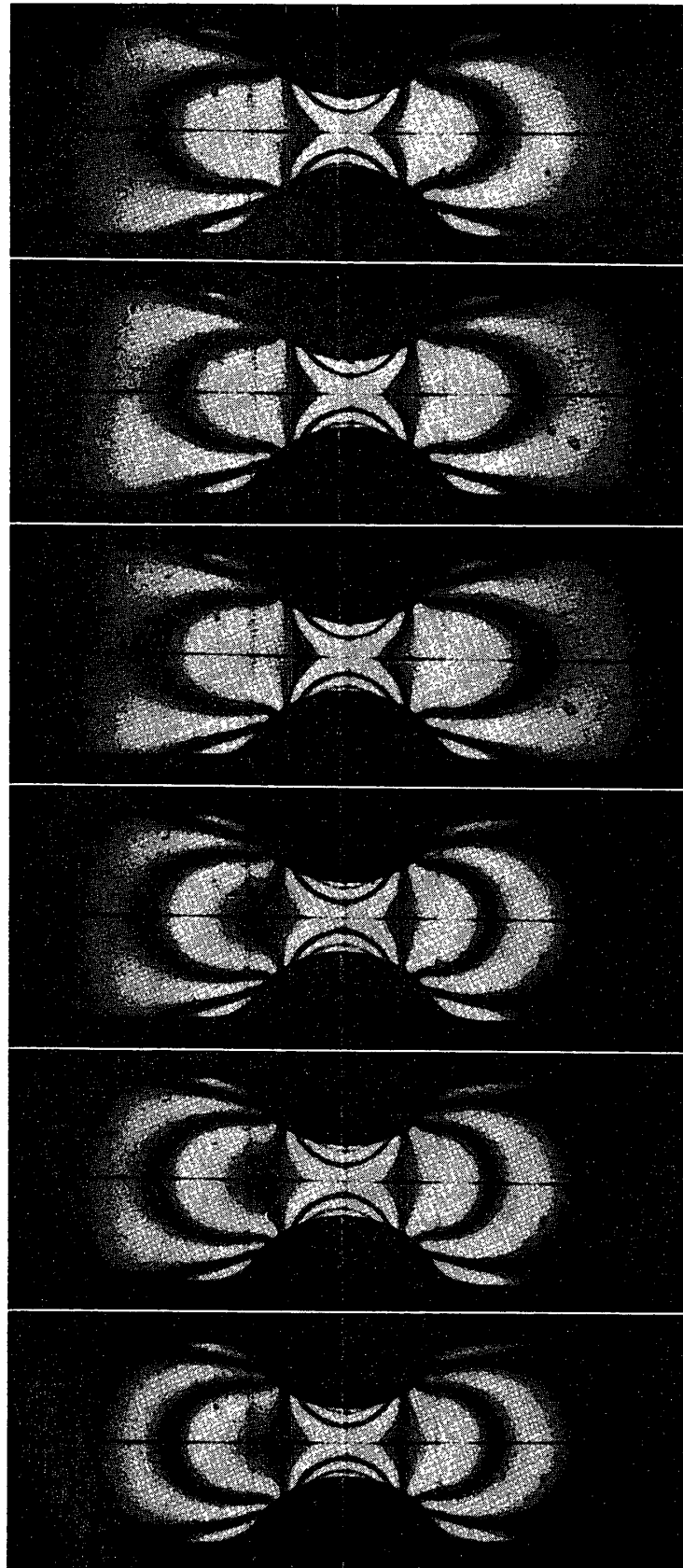
R=12.8-2



Frame No. 7	12
Time (0.70 ms)	(1.21 ms)
0.60 ms	1.11 ms
	11
	(1.11 ms)
	1.01 ms
	10
	(1.01 ms)
	0.91 ms
	9
	(0.91 ms)
	0.81 ms
	8
	(0.81 ms)
	0.71 ms

第8図(b)

R=12.8-3



Frame No. 13
Time (1.31)ms
1.21 ms

14
(1.41 ms)
1.31 ms

15
(1.51 ms)
1.41 ms

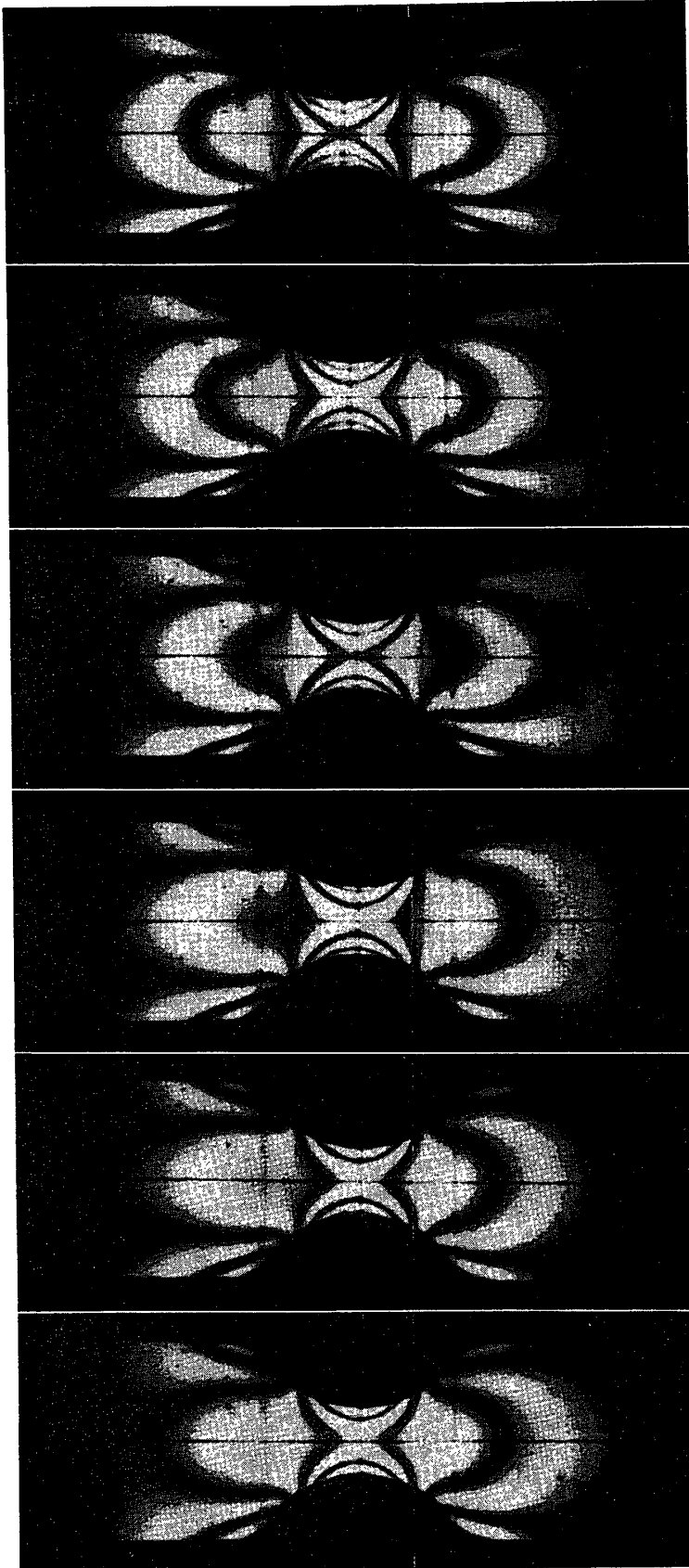
20
(2.02 ms)
1.92 ms

25
(2.52 ms)
2.42 ms

50
(3.02 ms)
2.92 ms

第 8 図 (c)

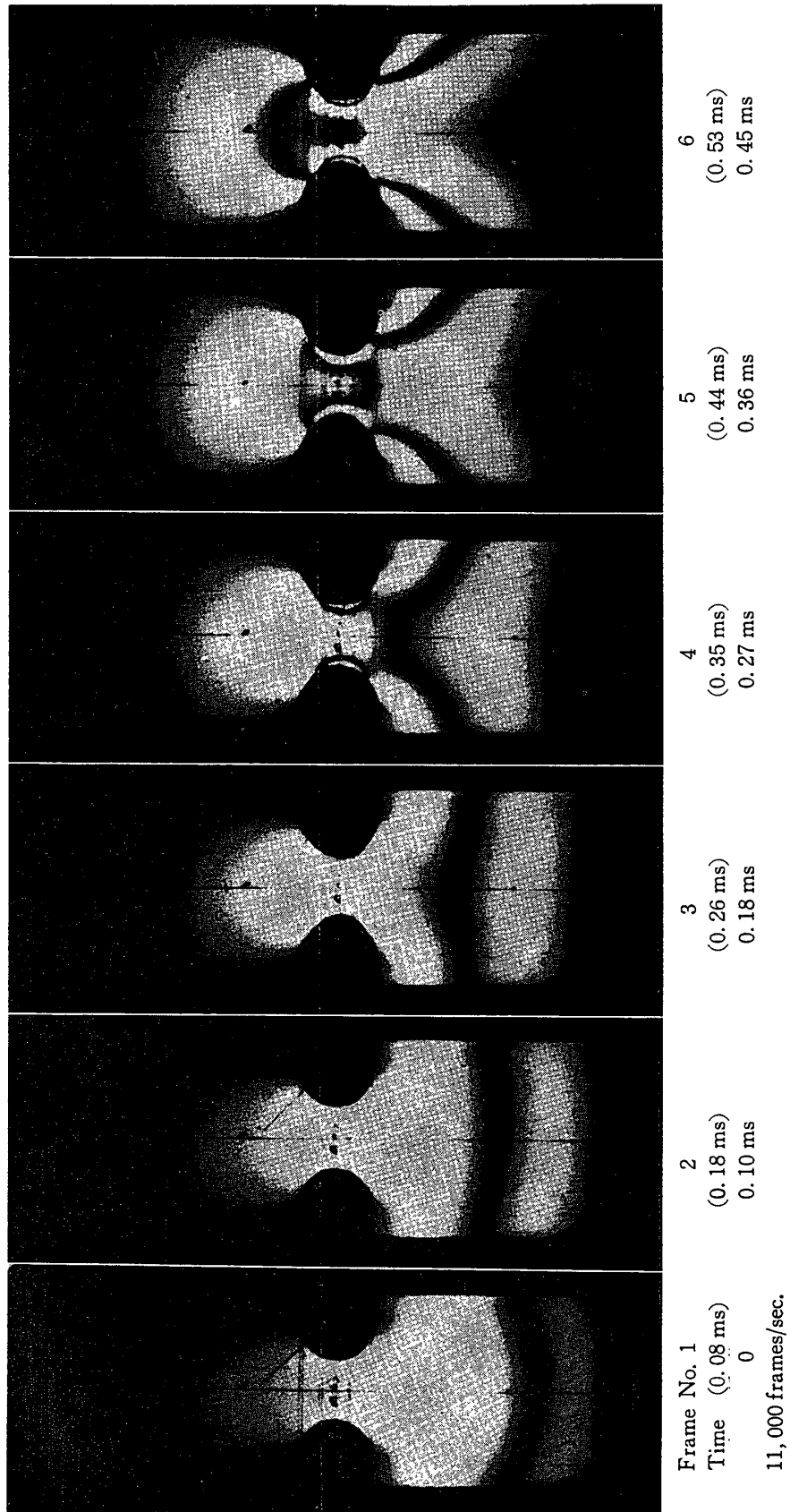
R=12.8-4



Frame No. 35	40	50	55	60
Time (3.53 ms)	(4.03 ms)	(5.04 ms)	(5.54 ms)	(6.05 ms)
3.43 ms	3.93 ms	4.44 ms	4.94 ms	5.95 ms

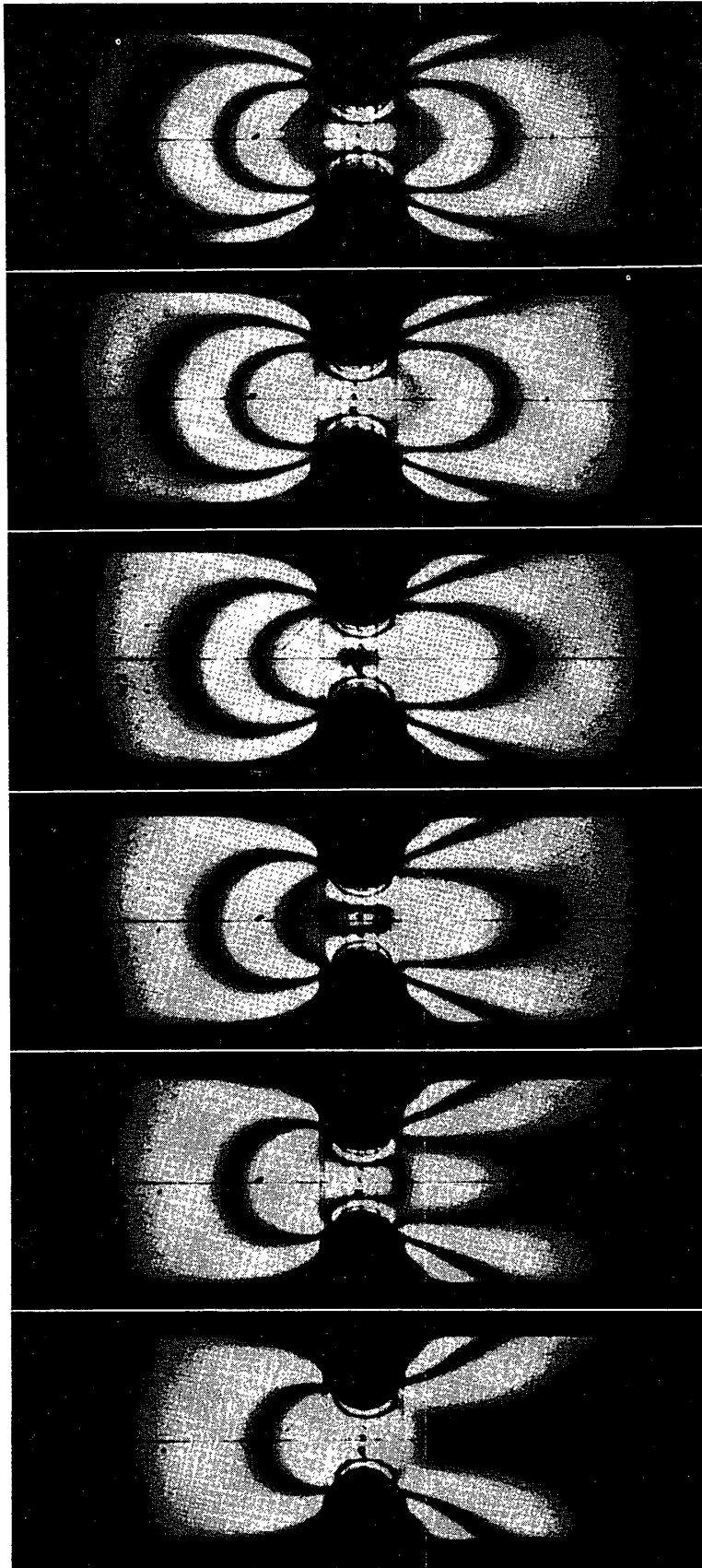
第 8 図 (d)

R=5-1



第 9 図 (a) 試片 A-3 の動的引張りでの高速光弾性等色線写真.

R=5-2



12
 (1.08 ms)
 1.00 ms

11
 (0.99 ms)
 0.91 ms

10
 (0.90 ms)
 0.82 ms

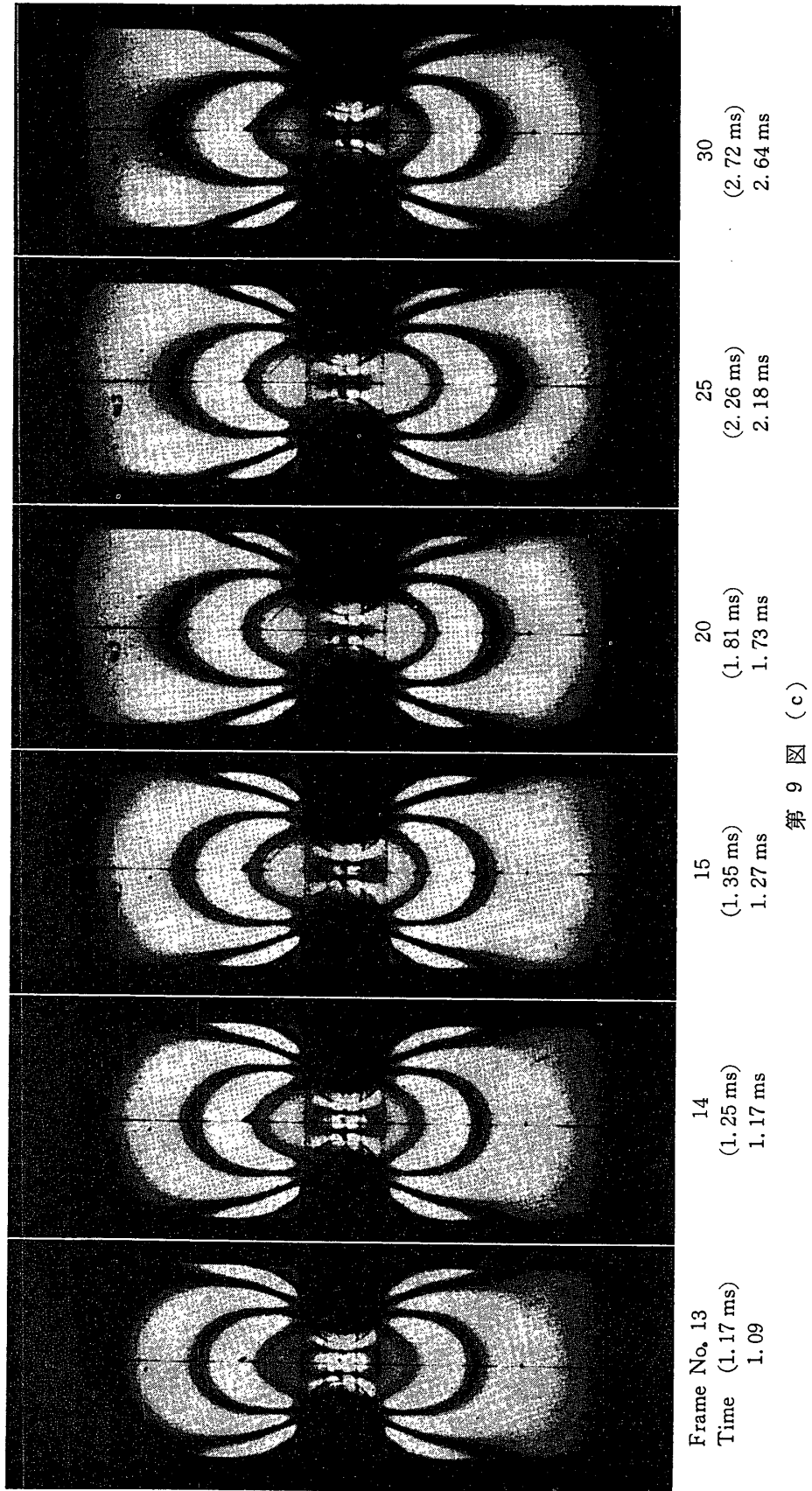
9
 (0.81 ms)
 0.73 ms

8
 (0.72 ms)
 0.64 ms

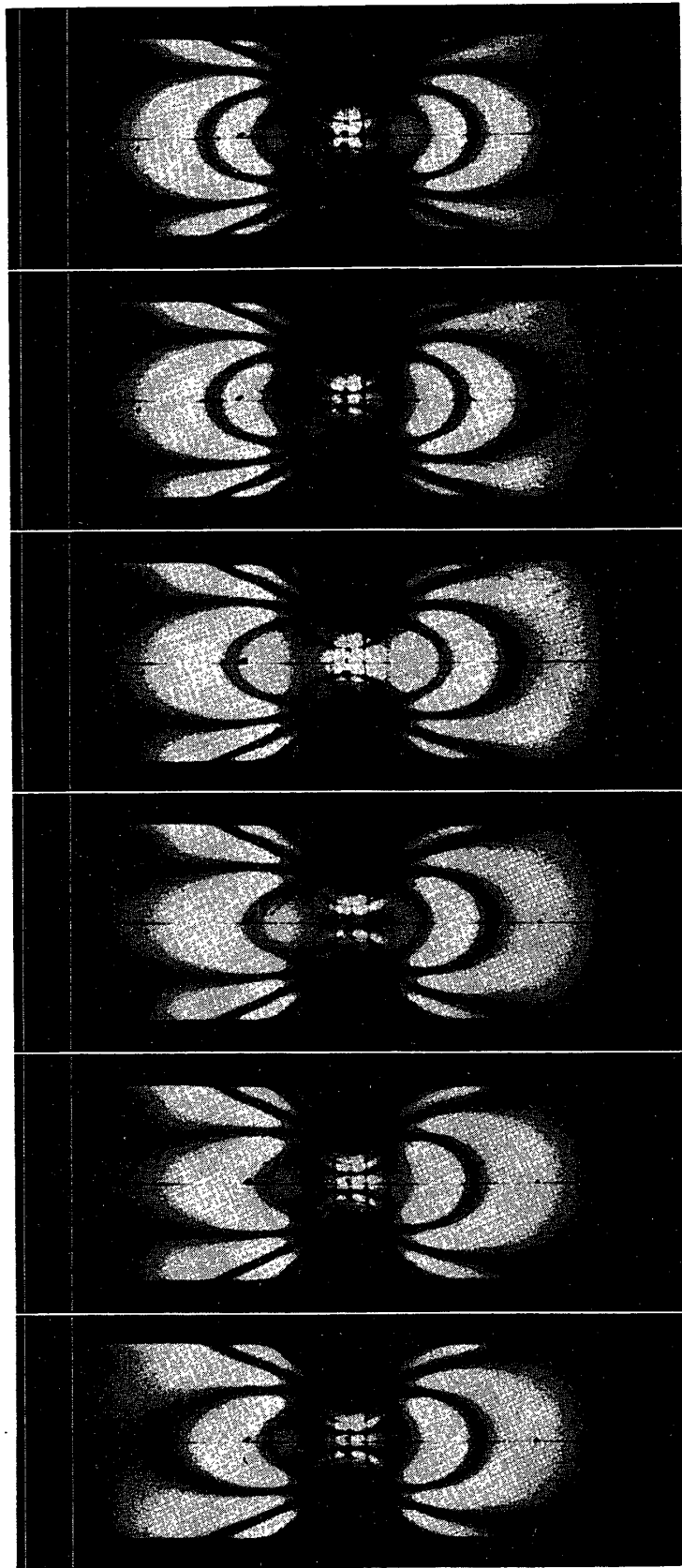
Frame No. 7
 Time (0.63 ms)
 0.55 ms

第9図 (b)

R=5-3

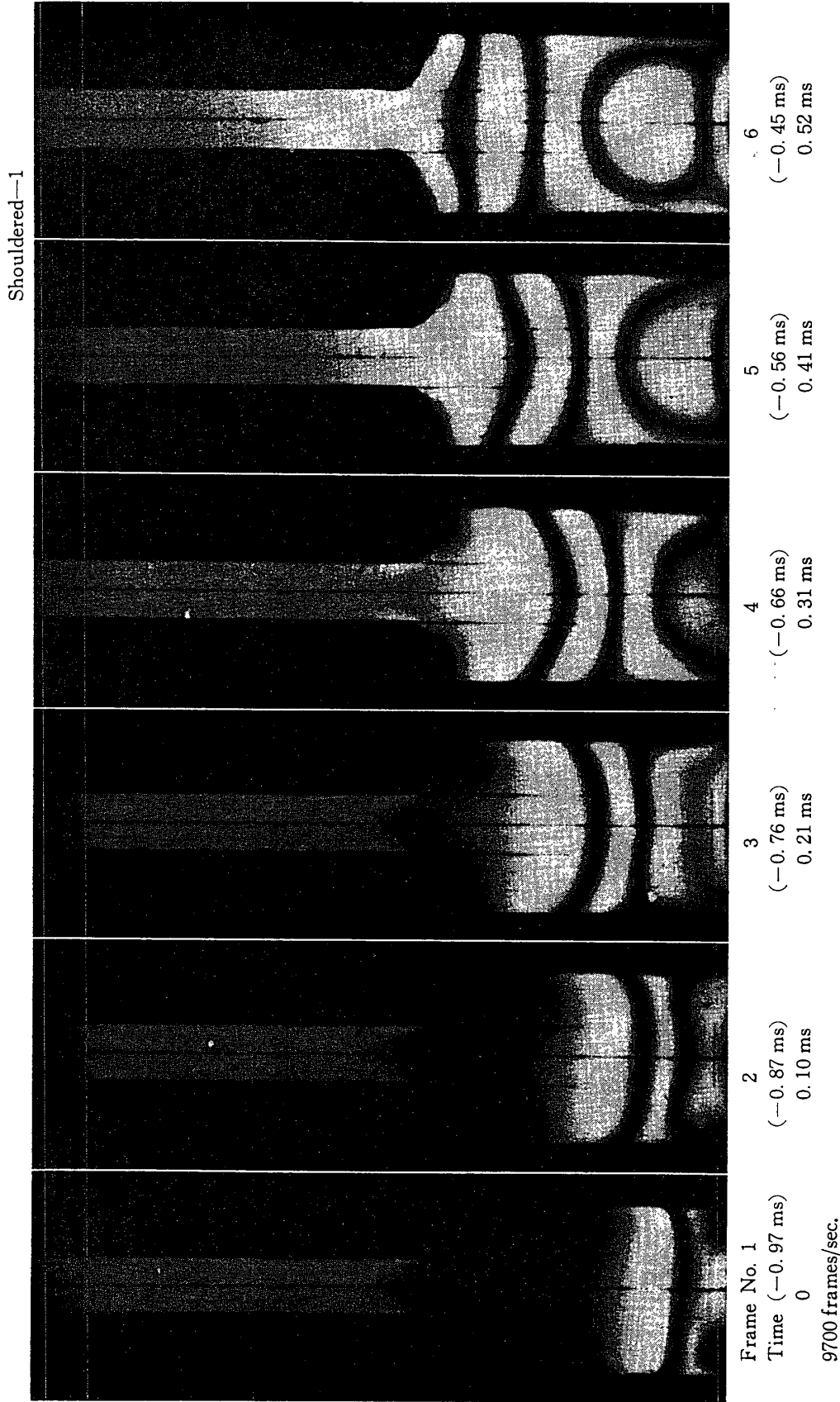


R=5-4



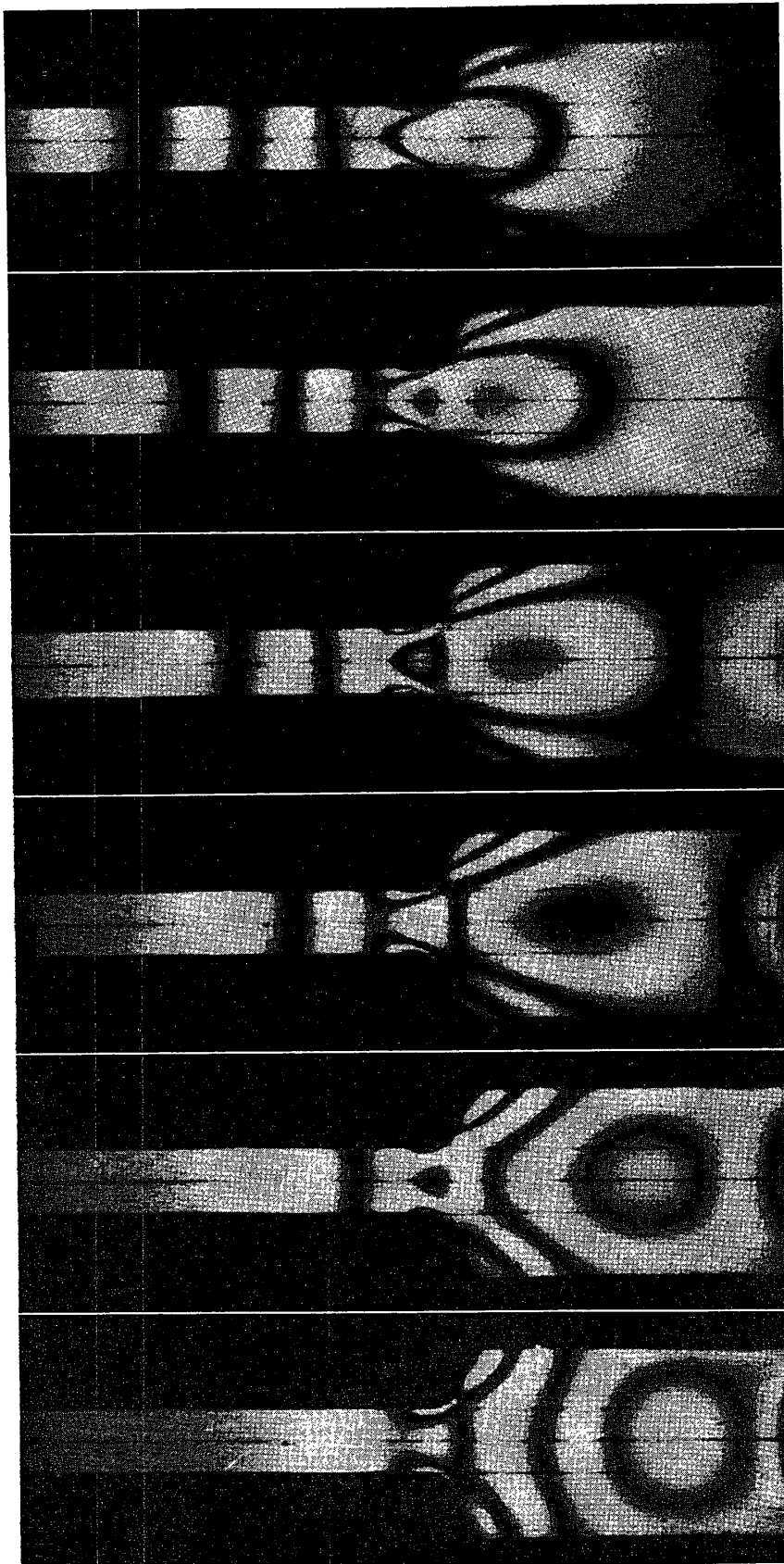
Frame No. 35	40	50	55	60
Time (3.17 ms)	(4.08 ms)	(4.53 ms)	(4.99 ms)	(5.44 ms)
3.09 ms	4.00 ms	4.45 ms	4.91 ms	5.36 ms

第9図 (d)



第 10 図 (a) 試片 B の動的引張りでの高速光弾性等色線写真.

Shouldered—2



12
(0.16 ms)
1.13 ms

11
(0.06 ms)
1.03 ms

10
(-0.04 ms)
0.93 ms

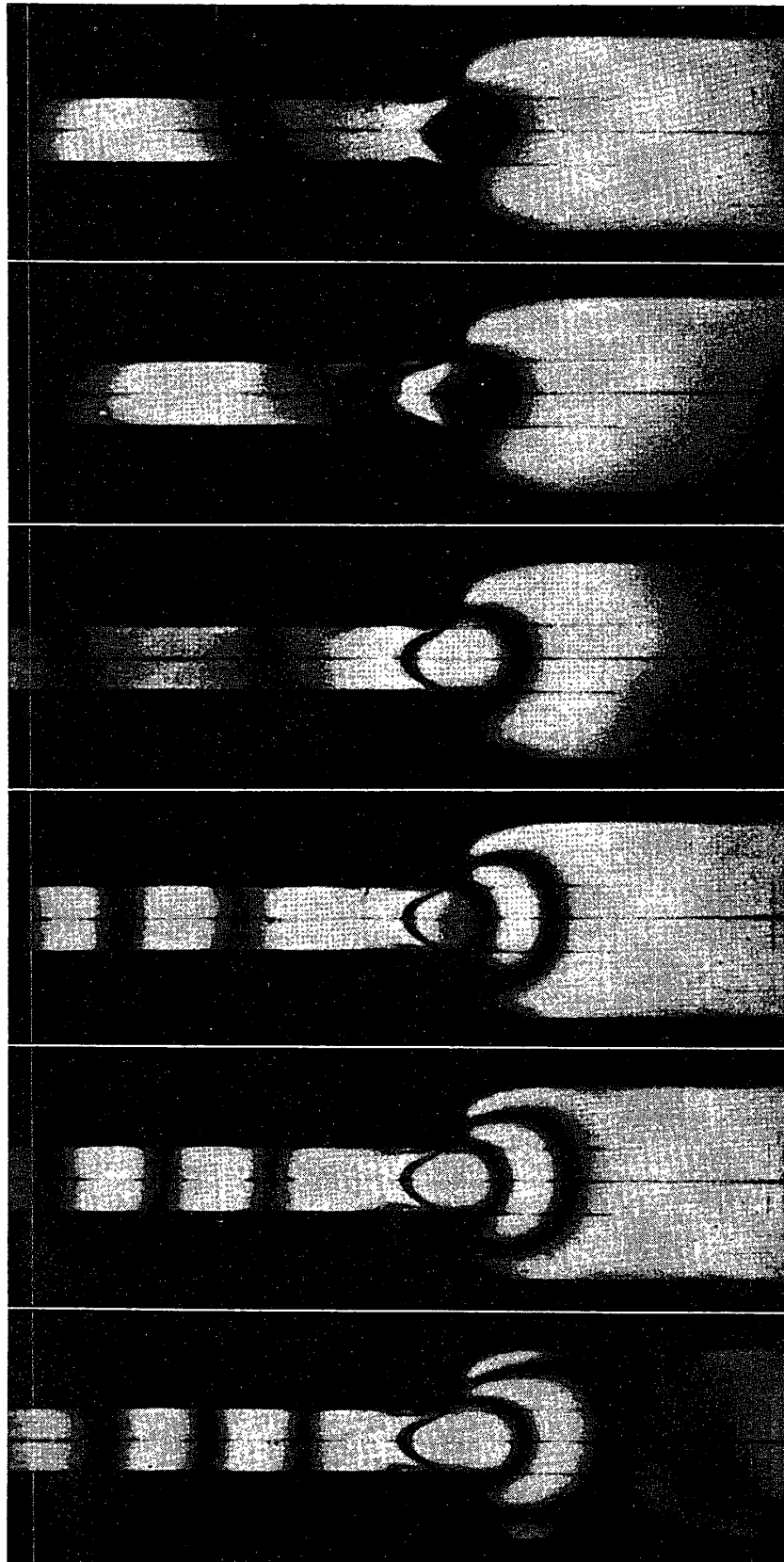
9
(-0.15 ms)
0.82 ms

8
(-0.25 ms)
0.72 ms

Frame No. 7
Time (-0.35 ms)
0.62 ms

第10図 (b)

Shouldered—3



Frame No. 13
Time (0.27 ms) 1.24 ms

14
(0.37 ms) 1.34 ms

15
(0.47 ms) 1.44 ms

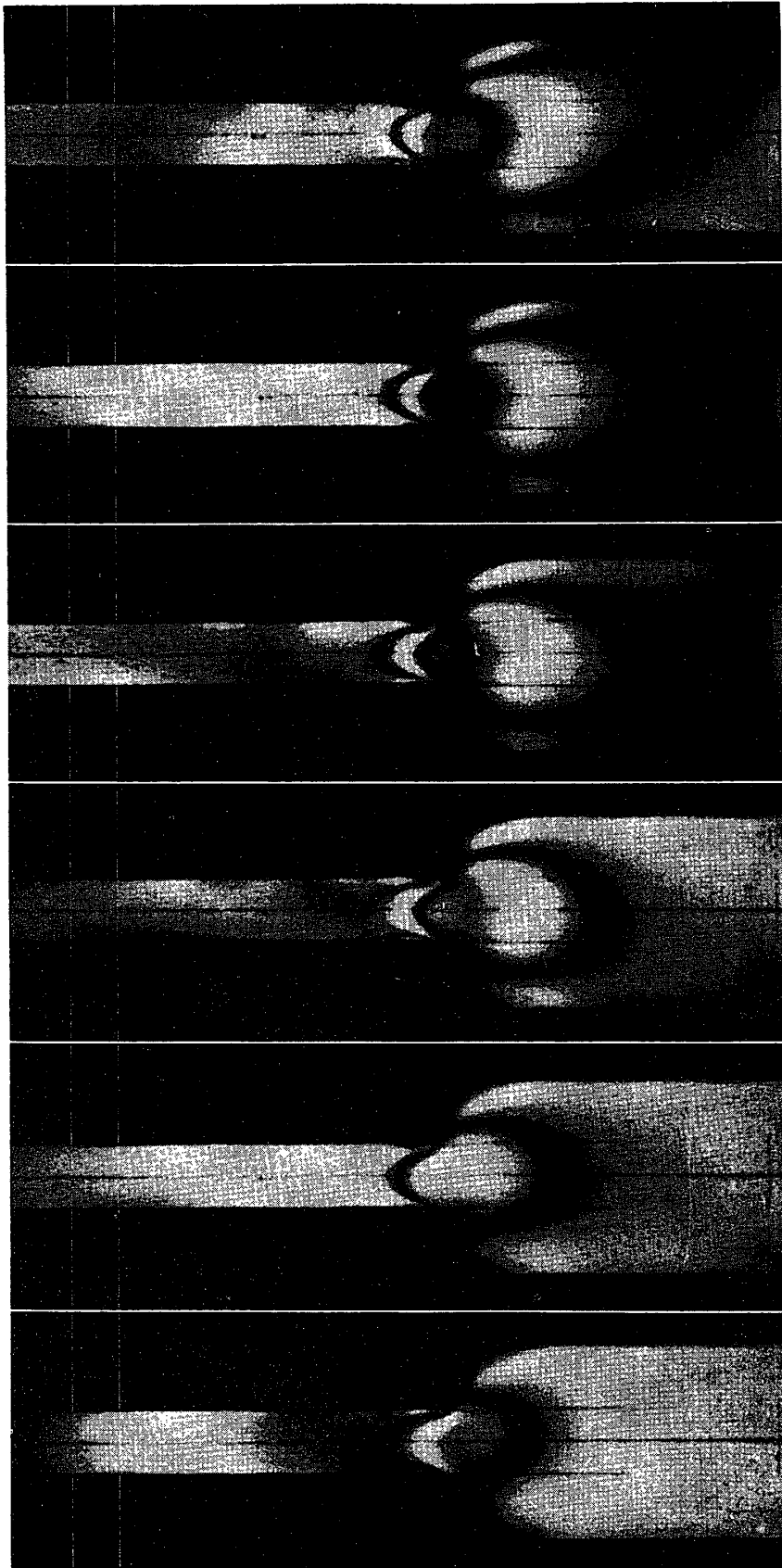
20
(0.99 ms) 1.96 ms

25
(1.50 ms) 2.47 ms

30
(2.02 ms) 2.99 ms

第 10 図 (c)

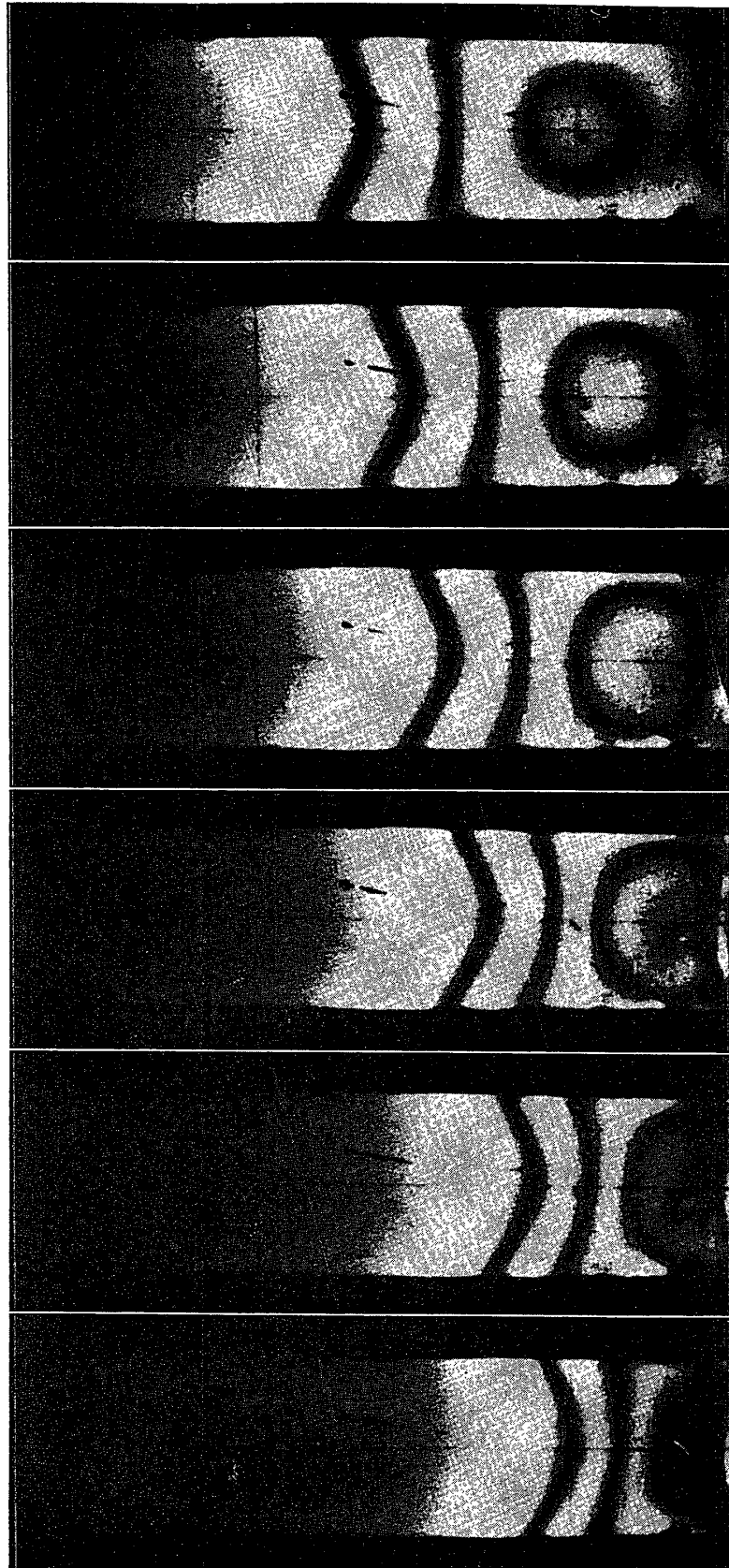
Shouldered-4



Frame No. 35	40	45	50	55	60
(2.54 ms)	(3.05 ms)	(3.57 ms)	(4.08 ms)	(4.60 ms)	(5.11 ms)
3.51 ms	4.02 ms	4.54 ms	5.05 ms	5.57 ms	6.08 ms

第10図 (d)

Straight-1



Frame No. 1
 Time (-0.82 ms)
 0
 9900 frames/sec.

2 (-0.72 ms) 0.10 ms

3 (-0.62 ms) 0.20 ms

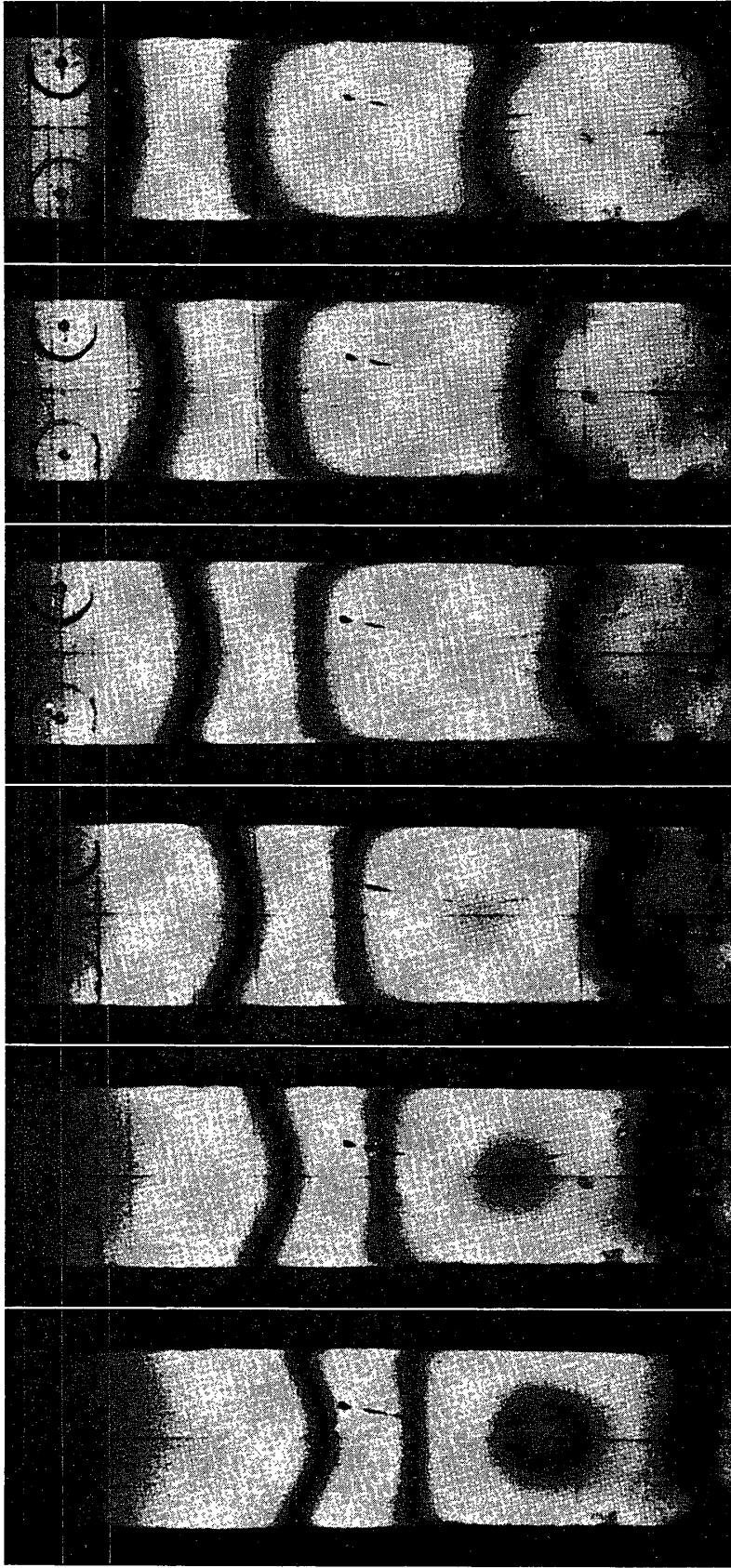
4 (-0.52 ms) 0.30 ms

5 (-0.42 ms) 0.40 ms

6 (-0.31 ms) 0.51 ms

第 11 図 (a) 試片 C の動的引張りでの高速光弾性等色線写真.

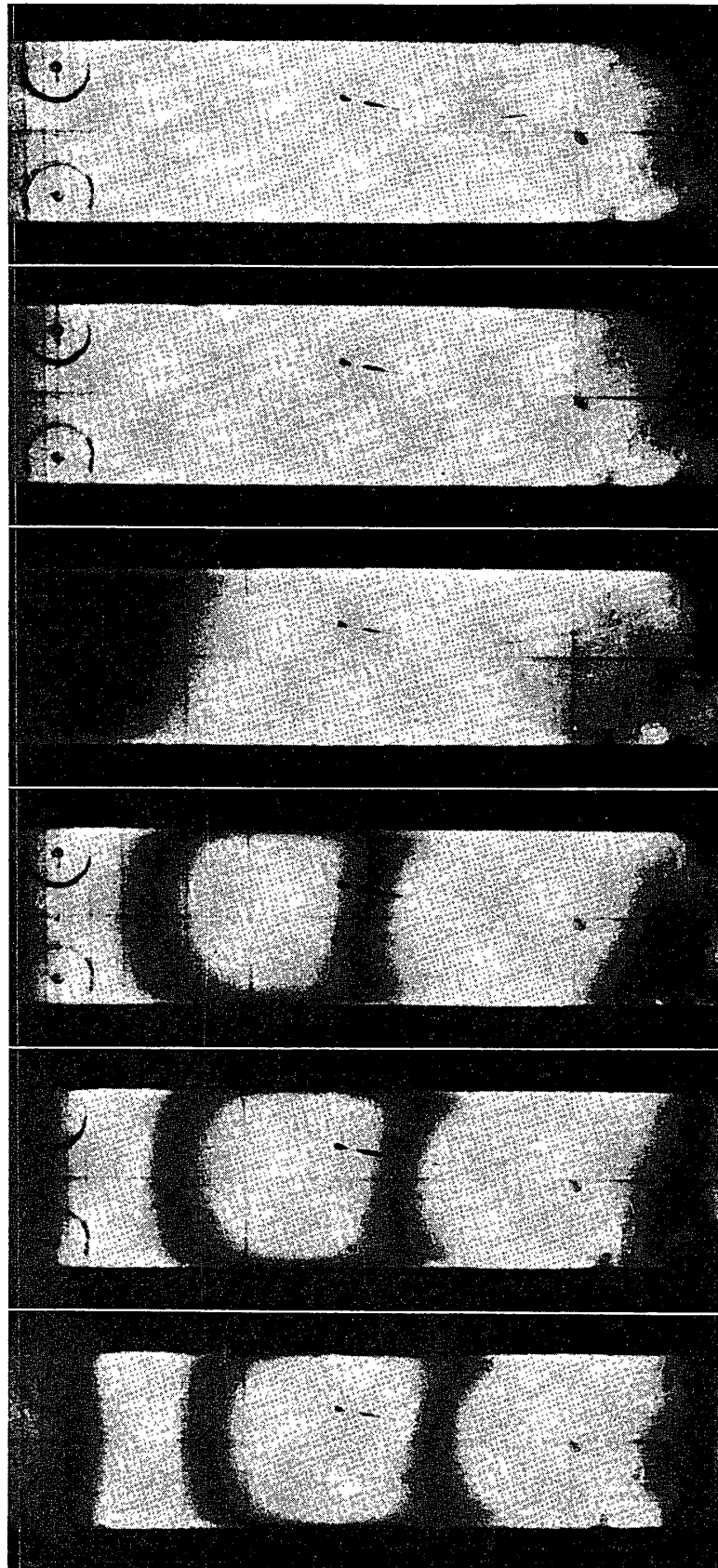
Straight-2



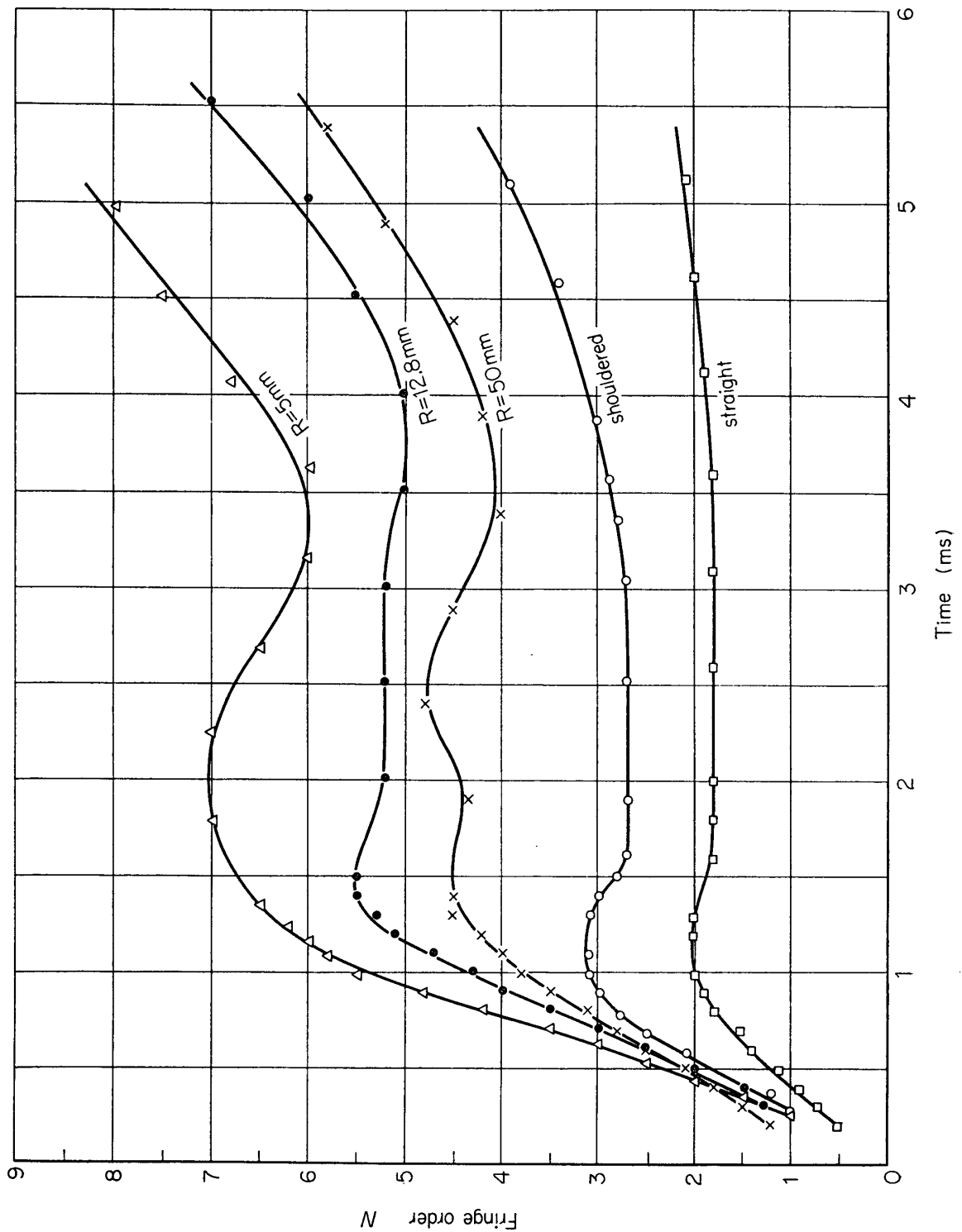
Frame No. 7	8	9	10	11	12
Time (-0.21 ms)	(-0.11 ms)	(-0.01 ms)	(0.09 ms)	(0.19 ms)	(0.29 ms)
0.61 ms	0.71 ms	0.81 ms	0.91 ms	1.01 ms	1.11 ms

第11図 (b)

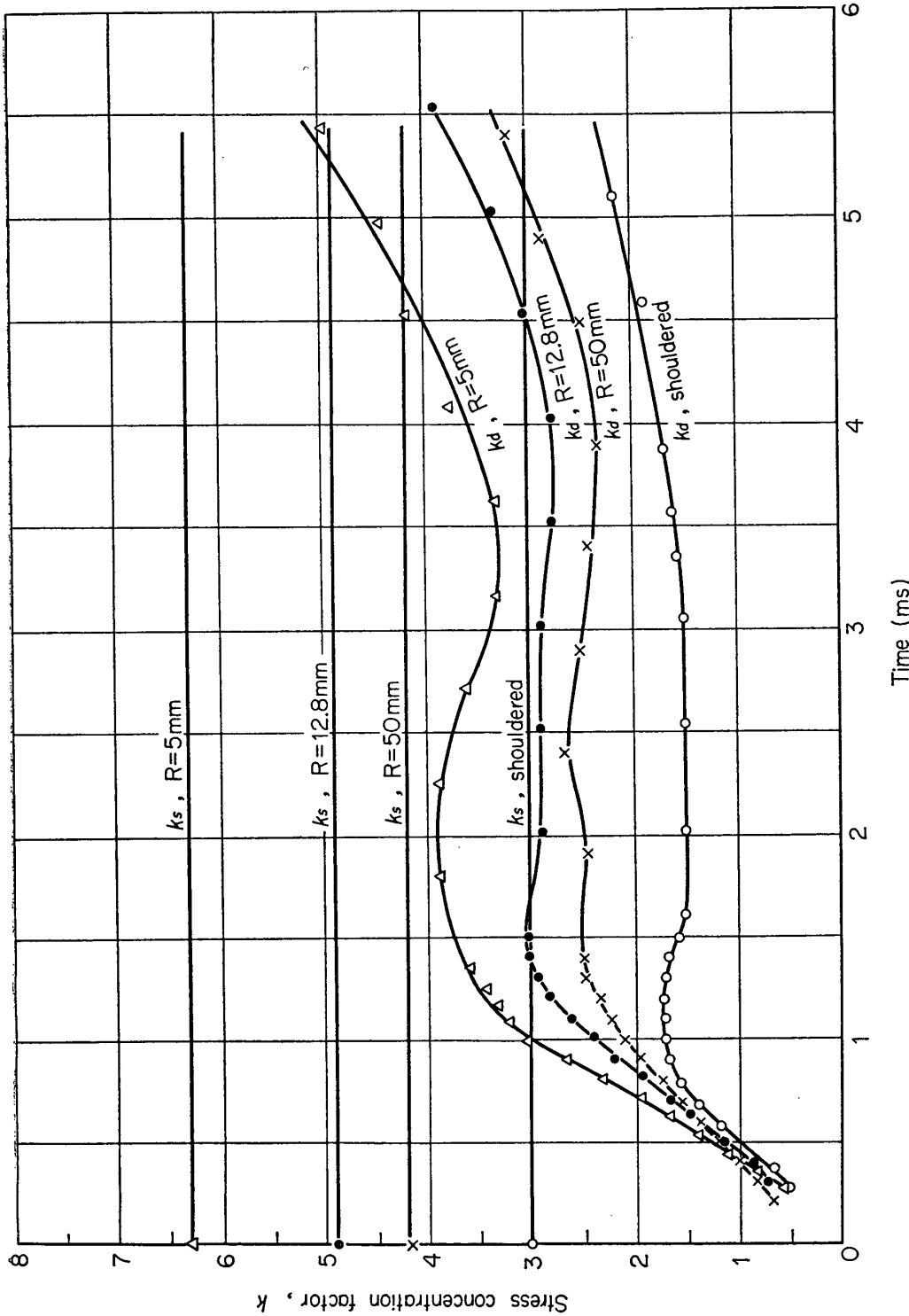
Straight-3



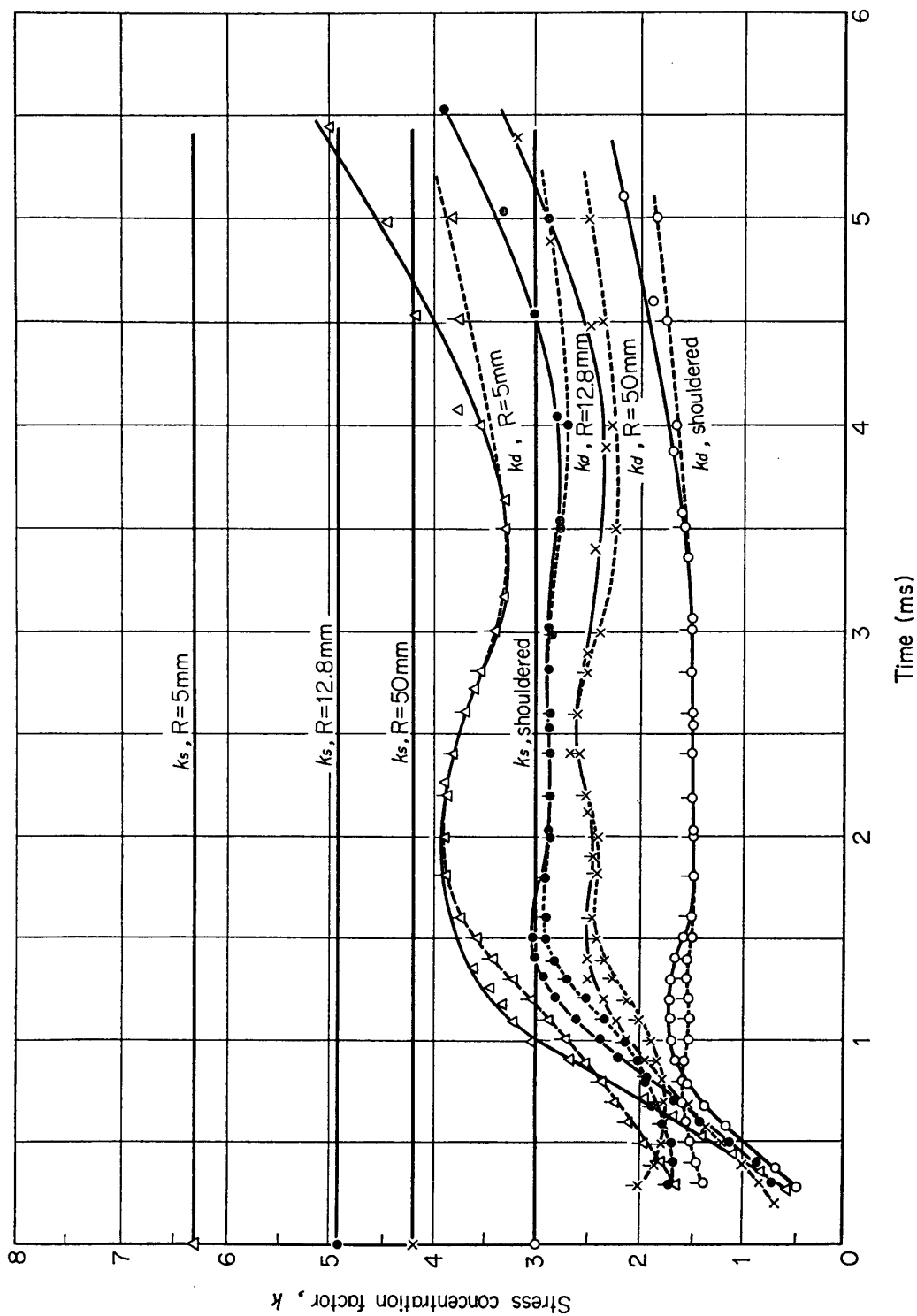
第11図(c)



第 12 図 動的引張りでの縞次数の時間変化. (A-1, 2, 3 については N_{max} , B, C については下端より $l=110$ mm での N を示す.)



第13図 $k_d(N_0=1.8)$ の時間変化と k_s .



第 14 図 $k_d(N_0=1.8)$ および $N_{\max}(t)/N_0(t)$ の時間変化.

置されるためと考えられ、論文 [11] でも指摘されている。従って、基準応力としてこの引張端近傍の縞次数を使うことは若干問題を含み得ると考えられるので、 σ_2 の効果が小さいと考えられる下端より $l=110\text{ mm}$ の切欠を設ける位置での値を基準値 $N_0(t)$ ととることとした。

附録第1表のプロットが第12図であるが、真直試片では多少の振動はあるが、かなり長い時間々隔にわたっての plateau 部のあることが見られる。この高さは完全に均一ではなく、ほぼ 1.8~2.0 にわたるので、上、下限 1.8 と 2.0 とを基準縞次数にとることとした。基準 $N_0=1.8$ に対する試片 A-1, A-2, A-3, B の k_d を k_s と比較しつつ示したのが第13図である。余分の反射波が介入してくるまでの 3~3.5 ms までの範囲を考えると、 k_d がそれぞれ対応する k_s より低いことが見られる。第14図には基準縞次数を plateau 部の 1.8 に限定せず、対応する時刻 t での $N_0(t)$ をとって求めた $N_{\max}(t)/N_0(t)$ のプロットを破線で附記してあるが、 $N_0(t)$ の plateau 部に対してはほとんど変りはない。

第1表 動的小よび静的応力集中係数の比較

試片番号	R(mm)	静的集中係数		動的集中係数	$\frac{k_d}{k_s}$	$\frac{k_d}{k'_s}$
		$k_s = N_{\max}/N_0$	$k'_s = 1/3 k_s = N_{\max}/N'_0$	$k_d = N_{\max}/N_0 (=1.8)$		
A-3	5	6.3	2.1	3.64	0.58	1.73
A-2	12.8	4.9	1.63	2.93	0.60	1.79
A-1	50	4.2	1.4	2.47	0.59	1.77
B	($R=\infty$) (段付)	3.0	1.0	1.60	0.53	1.60

試片番号	動的集中係数	$\frac{k_d}{k_s}$	$\frac{k_d}{k'_s}$
	$k_d = N_{\max}/N_0 (=2.0)$		
A-3	3.28	0.52	1.56
A-2	2.63	0.54	1.61
A-1	2.22	0.53	1.59
B	1.44	0.48	1.44

注： k_s ： N_{\max} ：切欠部の最大縞次数。

N_0 ：無切欠部平均応力の縞次数。

N'_0 ：切欠部最狭断面平均応力の縞次数。

k_d ： N_{\max} ：弾性波 plateau 部 (3 ms までの) 通過中の切欠部の最大縞次数の平均値。

N_0 ：無切欠真直試片の $l=110\text{ mm}$ 位置を通過する弾性波 plateau 部の高さ縞次数で、実測のバラツキの上、下限 1.8 と 2.0 をとった。

動的小よび静的応力集中係数の結果を整理すると、第1表のようになる。 k_d の値は本来一般に時刻 t の関数であるが、ここでは弾性波頭が切欠を通過し、弾性波の plateau 部にさしかかっており、しかも弾性波頭がその先に存在する界面で反射されて、着目している $l=110\text{ mm}$ の位置まで戻ってこない間ではほぼ一定に近い値をとるので、その平均値を示している。

§ 4. 討議, 若干の理論的考察

通常, 動的応力集中が静的の 2 倍であるとして設計に使われることもあるようであるが, これはたとえば, 固定端から下向きにつるされた弾性棒の下端に重錘 W (落下高 $h=0$) で衝撃負荷を加える時, 静応力の 2 倍の衝撃応力を生じることなどからの類推によるものでないかと思われるが, 一般の弾性波による動的応力集中の全過程に対しては, このように簡単ではないであろう. 最近若干の理論計算結果 [14~26] が発表されはじめています.

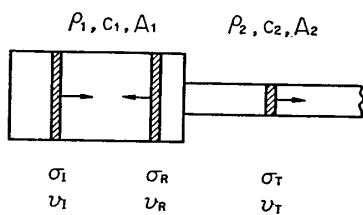
第 1 表において, 試片 A-1, A-2, A-3, B のいずれについても $k_d \cong (0.5 \sim 0.6)k_s$ 程度の値で, k_d が k_s より低く出ている. 考えている時間範囲内では, 実験誤差範囲内で多少のバラツキは認められるものの, 互に近い値といってよく, ある系統性が認められるようである.

次に, 弾性棒中の切欠部を弾性波頭が通過するときの挙動の簡単な近似理論を取扱ってみよう. 今, 著者らがはじめて指摘したように, 切欠部又は肩部をごくあらゐり近似として, 棒の断面積の不連続と考えることとしよう [30] [31]. 弾性棒中の弾性波伝播の一次元理論で, 面積と材料の不連続部での挙動は, 不連続断面上での力および物質速度の連続の条件:

$$A_1(\sigma_I + \sigma_R) = A_2\sigma_T \tag{3}$$

$$v_I - v_R = v_T \tag{4}$$

から, 次の形に導かれている [27][28] ので, これを利用することとする.



$$\sigma_T = \frac{2A_1\rho_2c_2}{A_1\rho_1c_1 + A_2\rho_2c_2} \cdot \sigma_I \tag{5}$$

$$\sigma_R = \frac{A_2\rho_2c_2 - A_1\rho_1c_1}{A_1\rho_1c_1 + A_2\rho_2c_2} \cdot \sigma_I \tag{6}$$

ここで, 添字 I, R, T は入射, 反射, および伝達の各波に対応し, A_1, A_2 は二つの断面の断面積を示す. なお, ここで注意すべきことは, 式 (3), (4) は, はじめ平面の波についてさえも, 棒の中央面上についてしか成立しないので近似式に過ぎないことである.

切欠部又は肩部を考察するとき, 不連続部の前後は同一材料と見てよいから,

$$\rho_1c_1 = \rho_2c_2 \tag{7}$$

従って,

$$\sigma_T = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \cdot \sigma_I \tag{8}$$

であって, σ_T は決して $\frac{A_1}{A_2}\sigma_I$ そのものではない. この切欠部又は肩部を通過する平均応力 σ_T が切欠部又は肩部に応力集中を生じる仕方は静的とほぼ同じと仮定すれば [30] [31],

$$k_d = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_I} = \frac{\sigma_T}{\sigma_I} \cdot \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_T} = \beta \cdot \gamma k_s' \tag{9}$$

ここで, k_d : 入射応力波の高さを基準とした動的応力集中係数,

k_s' : 切欠最狭部断面上の平均応力を基準とした静的応力集中係数,

$\beta = \sigma_T / \sigma_I$ (ただし, 切欠最狭部断面積を A_2 にとった (8) 式の値)

γ : 補正係数でほぼ 1 に近いと考えられる.

第 15 図 弾性棒の断面不連続部での弾性波の入射, 反射, 伝達.
 ρ : 密度, c : 弾性波速度, A : 断面積, σ : 応力, v : 物質速度
添字 1, 2 はそれぞれの断面を示す.

以上の結果に本実験の数値をあてはめてみよう。

$$A_2 = \frac{1}{3} A_1 \quad (10)$$

$$\beta = \sigma_T / \sigma_I = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} = \frac{2}{1 + 1/3} = 1.5 \quad (11)$$

つまり静的ならば $\sigma_T = 3\sigma_I$ となるが、動的ではその $1/2$ しか伝達されないことになる。 $\gamma = 1$ とかりにおいてみると、

$$k_d / k_s' = \beta = 1.5 \quad (12)$$

B 試片は断面不連続部そのものの試片と見てよいので、この実測結果の検討により、断面不連続部での弾性波伝播および反射の一次元理論の精度を知り得る。第1表の実測値と肩部モデル(第15図)理論値(12)とを比較してみると、 $N_0 = 1.8$ で 6.7%、 $N_0 = 2.0$ で -4.0% の誤差で一致する。上記の実測においてこの高速変形時のポリウレタンの繰回数～応力 σ 関係を比例的と仮定して計算を進めているが、上述の理論値、実測値の一致の程度から、この仮定がほぼさしつかえないであろうことも推測される。B 試片では肩部モデルがよく実験結果 $k_d \cong 0.5k_s$ を説明するといえよう。

次に、切欠部をもつ試片 A-1, 2, 3 について検討してみると、三者を通じ、実測値と理論値(12)は、 $N_0 = 1.8$ で 19%、 $N_0 = 2.0$ で 7.3% 以内の差で合う。A-系列については、B 試片よりも一致の度がよくない。A-系列のような局部的切欠試片に対しては、第15図の左方、広い断面積 A_1 の部分(断面“1”)から弾性波が入射するとき、切欠部への入射初期には第15図のモデルでよいが、更に後の時期まで考えると狭い断面積 A_2 の部分(断面“2” — 長さ l) の先(右方)に更に、広い断面積 A_1 の部分(断面“3”)が存在する局部的切欠モデルとして、“2”と“3”の界面(界面2—3)での反射、伝達も考慮に入れる必要があらう。一次元理論で計算すると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_T \text{ が界面 2—3 で反射して生じる応力, } \sigma_{R_1} &= \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \sigma_T \\ \sigma_{R_1} \text{ が界面 1—2 で反射して生じる応力, } \sigma_{R_2} &= \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \right)^2 \cdot \sigma_T \\ \sigma_{R_2} \text{ が界面 2—3 で反射して生じる応力, } \sigma_{R_3} &= \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \right)^3 \cdot \sigma_T \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

したがって、 σ_T がはじめて界面 1—2 を通過して右方へ伝達されるときから計算した t の各段階では、“2”の中央部での応力 σ_2 は、

$$l/2c < t < 3l/2c : \sigma_T \quad (14-1)$$

$$3l/2c < t < 5l/2c : \sigma_T \left(1 + \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \right) \quad (14-2)$$

$$5l/2c < t < 7l/2c : \sigma_T \left(1 + \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} + \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \right)^2 \right) \quad (14-3)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$t \rightarrow \infty : \sigma_T \left(1 + \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} + \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \right)^2 + \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \right)^3 + \dots \right)$$

$$= \frac{A_1 + A_2}{2A_2} \sigma_T = \frac{A_1}{A_2} \sigma_I \quad (14-\infty)$$

つまり $t \rightarrow \infty$ で, $\sigma_2 \rightarrow \frac{A_1}{A_2} \sigma_I$ (静的の値) となる. $A_2 = \frac{1}{3} A_1$ とすれば, $\sigma_2 \rightarrow 3\sigma_I$ となる.

“1” と “3” の応力, σ_1, σ_3 の $t \rightarrow \infty$ での値は σ_I となる.

この局部的切欠モデルでは, (9) 式の σ_T に (14) 式の σ_2 を代入した k_d となる. つまり,

$$k_d = \frac{\sigma_2 \cdot \sigma_{\max}}{\sigma_I \sigma_2} = \beta \cdot \gamma k_s' \quad (15)$$

初期の $\sigma_2 = \sigma_T$ (14-1) のときは (9) と一致する. A-series 試片についての本実験の結果は, σ_2 の初期の値 σ_T を入れた段階にはほぼ対応するものと見られる. t が増大するにつれ, (14-2), (14-3) を経て (14- ∞) を代入したものとなる. $t \rightarrow \infty$ では,

$$k_d = \frac{A_1}{A_2} \cdot \gamma k_s' = \gamma k_s \quad (16)$$

$\gamma \cong 1$ とすれば, $k_d \cong k_s$ となる. この段階については更に長い試片で, 長い時間間隔にわたって実験してみる必要がある. 以上から, 上述のあらい近似理論も少くとも本実験の試片形状については, 動的応力集中係数の概略を記述し得るものと考えられる.

§ 5. 結 論

(1) 光弾性材料にポリウレタン・ゴムを用い, 1万 p/s の高速度コマどりカメラ (スリット幅 0.57 mm, 露出時間: 1万 p/s で 7.7 μ s) で, 弾性波が切欠部を通過する状況を, 通常の静的二次元光弾性と大差ない鮮明さで撮影した.

(2) 試片は各種曲率半径の両側切欠をもつ短冊状および段付のもので, この下端に定速度 v の引張りを与えることにより ρcv の応力値の plateau をもつ弾性波を入射させた. この波頭が切欠を通過するときの集中応力の縞次数を入射弾性波の plateau の縞次数で割って得られる動的応力集中係数 k_d は, 0~3 ms の時間領域で, 静的のそれ k_s の約 0.5~0.6 倍であることが知られた.

(3) 切欠や段付部を, あらい近似として断面積の不連続部と考え, 不連続部を通過する弾性波の一次元理論を用いて, k_d と k_s の関係を示す近似理論式を導いた. この近似式は少くとも本実験の形状では, 実測結果をよく説明する.

最後に, 懇切な御指導と御討議を頂いた福井伸二教授, 御協力頂いた福井, 河田研究室員諸氏及びポリウレタン試料を提供された帝国火工品 KK の諸氏に厚く御礼申し上げる.

材料部 1965 年 4 月 10 日

文 献

高速光弾性の実験はわりあい古くからあるが, 動的応力集中を取扱ったものは比較的少い. 高速光弾性の手法は, 流し写真, 多スパーク法による数コマの瞬間写真 (Cranz-Schardin 方式), コマどり高速度カメラ (“かたい” 光弾性材料, “やわらかい” 光弾性材料) に分れる. 代表的なものをあげてみると, 次の通り:

流し写真:

- [1] 辻二郎: 理研彙報, **12** (1933), 57 および 909.
辻二郎, 西田正孝: 理研彙報, **13** (1934), 148. 梁および円輪の振動, 一定断面の σ の時間変化.
- [2] M. M. Frocht, P. D. Flynn, D. Landsberg: Proc. SESA, **14-2** (1957), 81. 露出 $1/150$ 万秒の流し写真での棒中の弾性波の伝播, 反射の記録.

多スパーク法瞬間写真:

- [3] A. A. Wells, D. Post: Proc. SESA, **16-1** (1958), 69. 進行しつつある割れのまわりの動的応力の解析.

コマどり高速度カメラ (“かたい” 材料):

- [4] J. C. Feder, R. A. Gibbons, J. T. Gilbert, E. L. Offenbacher: Proc. SESA, **14-1** (1956), 109. Beckman-Whitley camera の使用.
- [5] M. L. Williams, M. E. Jessey, R. R. Parmerter: Proc. SESA, **17-2** (1960), 121. 露出 $0.1 \mu\text{s}$ (継続 2 ms の時間間隔中) の高速度カメラ.

コマどり高速度カメラ (“やわらかい” 材料):

- [6] H. C. Perkins: J. Appl. Mech., **20** (1953), 140. photoelastic rubber の使用.
- [7] A. J. Durelli, W. F. Riley: J. Appl. Mech., **24** (1957), 69. 変成エポキシ樹脂の使用.
- [8] J. W. Dally, W. F. Riley, A. J. Durelli: J. Appl. Mech., **26** (1959), 613. ウレタン・ゴムの使用.

その他:

- [9] A. B. J. Clark: Proc. SESA, **14-1** (1957), 195. PM 管で電気量にかえての記録.
動的応力集中の実験:
- [10] D. A. Senior, A. A. Wells: Phil. Mag., **37-7** (1946), 463. 円孔をもつ長方形板の一端を弾丸で衝撃. 瞬間写真で $k_d=1.8$ を得た.
- [11] A. J. Durelli, J. W. Dally: J. Mech. Eng. Sci., **1-1** (1959), 1. 円孔をもつ長方形板で, k_d は k_s とほぼ同一としている.
- [12] A. J. Durelli, W. F. Riley: Trans. ASME, Ser. E, **28-2** (1961), 245. Hysol 8705 の幅広い板中の偏心円孔まわりの $k_d=4.1$.
- [13] R. Shears: Exp. Mech., **4-1** (1964), 20. 円孔をもつ長方形板の爆薬による衝撃. 円孔の $k_d \cong 1.1 \sim 1.8$ 程度の値を得ている. 抵抗線ひずみ計による.

円孔および球孔による動的応力集中の弾性論:

- [14] K. Kato: Memoirs Inst. Sci. Ind. Res., Osaka, **9** (1952), 16.
- [15] Y. H. Pao: Trans. ASME, Ser. E, **29-2** (1962), 299.
- [16] C. C. Mow, L. J. Mente, ibid. **30-4** (1963), 598.
- [17] Y. H. Pao, C. C. Mow: Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. (1962), 335.
- [18] D. V. Sivukhirr: Soviet Phys. Acoust., **1-1/2** (1955), 82.
- [19] G. Nishimura, Y. Gimbo: J. Engng., Tokyo, **24** (1955), 101.
- [20] C. F. Ying, R. Truelle: J. Appl. Phys., **27-9** (1956), 1086.
- [21] M. L. Baron: J. Appl. Mech., **24-4** (1957), 501.
- [22] Y. H. Pao, C. C. Mow: J. Appl. Phys., **34-3** (1963), 493.
- [23] M. L. Baron, R. Parnes: Trans. ASME, Ser. E, **29-2** (1962), 385.
- [24] G. C. K. Yeh: Z. AMP, **15-3** (1964), 237.
- [25] R. P. Shaw, M. B. Friedman: Proc. U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. (1962), 371.
- [26] R. P. Banaugh, W. Goldsmith: Trans. ASME, Ser. E, **30-4** (1963), 589.

弾性棒中の界面での弾性波反射及び伝達の一次元理論:

- [27] S. Laban: Proc. 9th Internat. Congr. of Appl. Mech., Brussels (1956).
- [28] E. A. Ripperger, H. N. Abramson: Proc. 3rd Midwestern Conf. on Solid Mech. (1957), 135.
最近の実験と動的応力集中係数の近似理論:

- [29] 河田幸三, 橋本彰三: 第25回応用物理学学会講演予稿集 (1964—11), 283.
- [30] 河田幸三: 高速変形力学の諸問題, 機械学会衝撃破損研究分科会資料 (1965年2月11日), 10.
- [31] 河田幸三, 橋本彰三: 第12回応用物理学連合講演会予稿集 I (1965年4月6日), 373.

附録 第1表 動的引張りでの繰りかえりの時間変化実測値

Film No.	H 6427				H 6425				H 6426				H 6507				H 6429			
撮影速度	11000 コマ/sec				9920 コマ/sec				10000 コマ/sec				9700 コマ/sec				9900 コマ/sec			
試片 No.	A-3				A-2				A-1				B				C			
Frame No.	(ms) time	修正した time	N_m	k	(ms) time	修正した time	N_m	k	(ms) time	修正した time	N_m	k	(ms) time	修正した time	N	k	(ms) time	修正した time	N	k
1	0	0.08	0.5	0.28	0	0.10	0.5	0.28	0	0	0.5	0.28	0	-0.97			0	-0.82		
2	0.10	0.18	0.5	0.28	0.10	0.20	0.5	0.28	0.10	0.10	1.0	0.56	0.10	-0.87			0.10	-0.72		
3	0.18	0.26	1.0	0.56	0.20	0.30	1.3	0.72	0.20	0.20	1.2	0.67	0.21	-0.76			0.20	-0.62		
4	0.27	0.35	1.5	0.83	0.30	0.40	1.5	0.83	0.30	0.30	1.5	0.83	0.31	-0.66			0.30	-0.52		
5	0.36	0.44	2.0	1.11	0.40	0.50	2.0	1.11	0.40	0.40	1.8	1.00	0.41	-0.56			0.40	-0.42		
6	0.45	0.53	2.5	1.39	0.50	0.60	2.5	1.39	0.50	0.50	2.1	1.17	0.52	-0.45			0.51	-0.31		
7	0.55	0.63	3.0	1.67	0.60	0.70	3.0	1.67	0.60	0.60	2.5	1.39	0.62	-0.35			0.61	-0.21		
8	0.64	0.72	3.5	1.94	0.71	0.81	3.5	1.94	0.70	0.70	2.8	1.56	0.72	-0.25			0.71	-0.11		
9	0.73	0.81	4.2	2.33	0.81	0.91	4.0	2.22	0.80	0.80	3.1	1.72	0.82	-0.15			0.81	-0.01		
10	0.82	0.90	4.8	2.67	0.91	1.01	4.3	2.39	0.90	0.90	3.5	1.95	0.93	-0.04	0.4		0.91	0.09	0.2	
11	0.91	0.99	5.5	3.05	1.01	1.11	4.7	2.61	1.00	1.00	3.8	2.11	1.03	0.06	0.5	0.28	1.01	0.19	0.5	
12	1.00	1.08	5.8	3.22	1.11	1.21	5.1	2.83	1.10	1.10	4.0	2.22	1.13	0.16	0.5	0.28	1.11	0.29	0.7	
13	1.09	1.17	6.0	3.33	1.21	1.31	5.3	2.94	1.20	1.20	4.2	2.33	1.24	0.27	0.9	0.50	1.21	0.39	0.9	
14	1.18	1.25	6.2	3.45	1.31	1.41	5.5	3.06	1.30	1.30	4.5	2.50	1.34	0.37	1.2	0.67	1.31	0.49	1.1	
15	1.27	1.35	6.5	3.61	1.41	1.51	5.5	3.06	1.40	1.40	4.5	2.50	1.44	0.47	1.8	1.00	1.41	0.59	1.4	
16													1.55	0.58	2.1	1.17	1.52	0.70	1.5	
17													1.65	0.68	2.5	1.39	1.62	0.80	1.8	
18													1.75	0.78	2.8	1.55	1.72	0.90	1.9	
20	1.73	1.81	7.0	3.89	1.92	2.02	5.2	2.89	1.90	1.90	4.4	2.44	1.96	0.99	3.1	1.72	1.92	1.10	2.0	
25	2.18	2.26	7.0	3.89	2.42	2.52	5.2	2.89	2.40	2.40	4.8	2.67	2.47	1.50	2.8	1.56	2.42	1.60	1.8	
30	2.64	2.72	6.5	3.61	2.92	3.02	5.2	2.89	2.90	2.90	4.5	2.50	2.99	2.02	2.7	1.50	2.93	2.11	1.8	
35	3.09	3.17	6.0	3.33	3.43	3.53	5.0	2.78	3.40	3.40	4.0	2.22	3.51	2.54	2.7	1.50	3.43	2.61	1.8	
40	3.55	3.63	6.0	3.33	3.93	4.03	5.0	2.78	3.90	3.90	4.2	2.33	4.02	3.05	2.7	1.50	3.94	3.12	1.8	
45	4.00	4.08	6.8	3.78	4.44	4.54	5.5	3.06	4.40	4.40	4.5	2.50	4.54	3.57	2.9	1.61	4.44	3.62	1.8	
50	4.45	4.53	7.5	4.17	4.94	5.04	6.0	3.33	4.90	4.90	5.2	2.89	5.05	4.08			4.95	4.13	1.9	
55	4.91	4.99	8.0	4.45	5.44	5.54	7.0	3.89	5.40	5.40	5.8	3.22	5.57	4.60	3.4	1.89	5.45	4.63	2.0	
60	5.36	5.44	9.0	5.00	5.95	6.05	8.0	4.45	5.90	5.90	6.5	3.61	6.08	5.11	3.9	2.17	5.96	5.14	2.1	
static				6.3				4.9				4.2				3				1

$k = N_{max}/N_0$ で $N_0 = 1.8$ としてある。

time 修正の内容。

Frame No. 1 ($t=0$) から1筋が中心に達する時間 t_1 を求め、 $R=50$ を基準としてきめる。 ($v_1=65$ m/s)

A-3	$R=5$	$(30/65)=0.46$ ms	Frame No. 1 の時間	0.08 ms
A-2	$R=12.8$	$(28.5/65)=0.44$ ms		0.10 ms
A-1	$R=50$	$(35/65)=0.56$ ms		0
B	$R=\infty$	1.51 ms		-0.97 ms
C	真直試片	1.36 ms		-0.82 ms