

直交異方性矩形平面膜の面圧による撓み特性

越智信夫*・植村益次

Deflection of Orthotropic Rectangular Membrane under Uniform Pressure

by

Nobuo OCHI & Masuji UEMURA

Abstract: The mechanical problem of membrane is purely nonlinear since the flexural and compressive rigidities of a membrane are negligible and the normal component of membrane tension due to curvature is a governing factor, different from the plate problem. Deflection patterns observed experimentally are quite different from those of a thin plate analyzed by using a few of trigonometrical functions in energy methods such as Galerkin and Ritz methods. Accordingly, two finite difference methods are used to estimate the deformations in a basic orthotropic membrane in which the principal directions of elasticity are arbitrarily oblique to the rectangular edges with the ultimate purpose of applying the procedure to general membrane structures with arbitrary shapes, pressure distributions and boundary conditions in future. The numerical solutions obtained by the nonlinear relaxation-iteration technique for solving nonlinear, simultaneous, partial differential equations involving three displacement components converged well. The numerically determined deflection patterns and nonlinear relations between the pressure and the central deflection agreed with the experimental results.

概 要

複雑な膜構造の力学解析の基礎として、まず直交異方性補強矩形平面膜が均一分布圧力をうける場合の力学的挙動について各種の解析と実験を行ない、両者を比較検討する。膜材は曲げ剛性を有しないため、従来の薄板の大撓み薄肉構造問題とは異なり、数学的には非線形項のみが支配する非線形連立偏微分方程式の解析に帰着される。矩形膜の弾性主軸は一般的に四辺に対して斜交しているものとするが、実験で得られた撓み波形は、従来のエネルギー法による近似解析解で少数項で仮定している波形とはかなり異なる。そこで本文では任意の膜形状、圧力分布、境界条件の場合にも適用できる差分法を適用する。応力関数と撓み変位に関する連立非線形微分方程式に反復繰返し法を適用する方法と、3変位成分

* 運輸省航空局技術部検査課

に関する連立非線型方程式に非線型緩和法を適用する方法を試みた結果、後者による数値解が収束性が良く、実験で得られる特異な撓み波形と圧力撓みの非線型関係を良く説明することができることを示す。

1. ま え が き

キャンパスなど補強膜材料を用いた膜構造 (Membrane Structure) では、膜材は引張力のみで曲率をもつ形状を保ち、かつ広大な空間を面のみによって容易にしかも経済的に構成することができる点で、今日新しい構造として脚光を浴びつつある。膜構造は大別して二つの系統、すなわち

- (1) 膜を固定縁材間に初期張力を与えて懸吊し、ガウス曲率 (主曲率の積) が負の曲面を形成させることにより内部空間を構成する懸吊膜構造 (Suspension Structure) と、
- (2) 膜に内圧等を加え、内外圧力差による面外荷重を膜面曲率による膜張力の分力と釣合わせ、ガウス曲率が正の曲面を形成させて、内部空間を構成する空気膜構造 (Pneumatic Structure)

に分けられる。膜構造の特色としては、大空間架構の可能性、軽量性、建設・撤収・運搬の容易さ、形状の任意性などが挙げられ、パビリオン・倉庫・仮設構造物として適するが、航空宇宙分野でも航空機・飛行船の格納庫、レーダードーム、気球などに汎く用いられ、宇宙基地の構造物への構想もある。将来は大スパン架構性から見てもスペース・ストラクチャとしての発展が期待される。

膜構造は前述したように膜張力のみで形状を保つが、膜面は圧縮と曲げに対しては耐荷能力はない。本文では、複雑な形態の膜構造の力学的特性を論ずるに先立ち、最も基本的な場合として直交異方形矩形平面膜を取り扱い、内圧、風圧、雪積圧などを想定した均一分布荷重を受ける場合の力学的特性について論じ、膜構造解析の出発点とする。

膜構造では、面外荷重は膜面曲率による膜張力の垂直成分と釣合い、解析としては非線型項が支配的役割を演ずる大撓み問題に帰着されるが、従来の板かくなど薄肉構造とは異なり、非線型項が補正項でない点が特色であり、解析を困難にしている。以前に植村 [1]、近藤ら [2] はエネルギー法によって平面膜問題を解析したが、撓み波形を従来の薄板問題の経験に基づいて近似したため、実際の膜変形を表現していない憾みがあった。そこで本文では異方性特性を考慮した上、任意膜形状、任意外圧分布、任意境界条件、任意の異方性方向の場合へも拡張できる解法であることを意図し、差分法による非線型解析を試み、従来のエネルギー法による解析的近似解法と比較すると共に、補強膜による面圧実験も合せ行ない、本法が実験結果と良く一致することを示す。

2. 解 析

図1に示すように均一分布荷重 p を受ける周辺固定の直交異方性矩形平面膜 ($2a \times 2b$) を考え、弾性主軸 (X, Y 軸) は座標軸 (x, y 軸) と θ の角度をなすものとする。また膜面の自重などによる初期撓みを w_0 、外圧による撓みを w とし、膜寸法に較べて小さいものと考え。

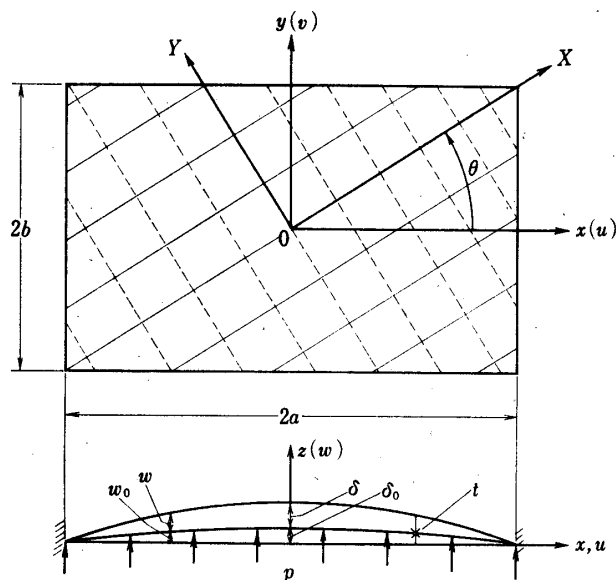


図1 均一分布荷重をうける直交異方性矩形織布膜

2.1 基礎となる関係式

解析に必要な基礎式は、大撓み薄膜理論によって次の諸式で与えられる。

(1) 歪と変位の関係式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= u, x + (1/2)(w, x^2 + 2w_0, xw, x) \\ \varepsilon_y &= v, y + (1/2)(w, y^2 + 2w_0, yw, y) \\ \gamma_{xy} &= u, y + v, x + w, xw, y + w_0, xw, y + w_0, yw, x \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ は面内歪成分, u, v, w は x, y, z 方向の変位成分である。変位成分の添字 “ x ”, “ y ” は x, y に関する偏微分を表わす。

(2) 平衡方程式

$$\left. \begin{aligned} (\partial T_x / \partial x) + (\partial T_{xy} / \partial y) &= 0 \\ (\partial T_{xy} / \partial x) + (\partial T_y / \partial y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$T_x(w, xx + w_0, xx) + 2T_{xy}(w, xy + w_0, xy) + T_y(w, yy + w_0, yy) + p = 0 \quad (3)$$

ここで T_x, T_y, T_{xy} は単位幅当りの膜面内力の成分である。

(3) 歪と面内力成分との関係式

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{t} \right) \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで t は膜厚, a_{ij} および C_{ij} はそれぞれ直交異方性弾性係数およびコンプライアンス係数である。各係数は直交異方性膜の主軸方向のヤング係数 E_x, E_y , 剪断剛性率 G_{xy} , ポアソン比 ν_x, ν_y および

$$l = \cos \theta, \quad m = \sin \theta \quad (6)$$

を用いて次式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= l^4 E_X' + m^4 E_Y' + 2l^2 m^2 E_X' \nu_Y + 4l^2 m^2 G_{XY} \\ a_{22} &= m^4 E_X' + l^4 E_Y' + 2l^2 m^2 E_X' \nu_Y + 4l^2 m^2 G_{XY} \\ a_{33} &= l^2 m^2 E_X' (1 - \nu_Y) + l^2 m^2 E_Y' (1 - \nu_X) + (l^2 - m^2)^2 G_{XY} \\ a_{12} &= l^2 (m^2 + l^2 \nu_Y) E_X' + m^2 (l^2 + m^2 \nu_X) E_Y' - 4l^2 m^2 G_{XY} \\ a_{13} &= l^3 m E_X' (1 - \nu_Y) - l m^3 E_Y' (1 - \nu_X) - 2l m (l^2 - m^2) G_{XY} \\ a_{23} &= l m^3 E_X' (1 - \nu_Y) - l^3 m E_Y' (1 - \nu_X) + 2l m (l^2 - m^2) G_{XY} \end{aligned} \right\} (7)$$

ただし $E_X' = E_X / (1 - \nu_X \nu_Y)$, $E_Y' = E_Y / (1 - \nu_X \nu_Y)$

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \frac{l^4}{E_X} + \frac{m^4}{E_Y} + l^2 m^2 \left(\frac{1}{G_{XY}} - 2 \frac{\nu_X}{E_X} \right) \\ C_{22} &= \frac{m^4}{E_X} + \frac{l^4}{E_Y} + l^2 m^2 \left(\frac{1}{G_{XY}} - 2 \frac{\nu_X}{E_X} \right) \\ C_{33} &= \frac{1}{G_{XY}} + 4l^2 m^2 \left(\frac{1}{E_X} + \frac{1}{E_Y} + 2 \frac{\nu_X}{E_X} - \frac{1}{G_{XY}} \right) \\ C_{12} &= -\frac{\nu_X}{E_X} + l^2 m^2 \left(\frac{1}{E_X} + \frac{1}{E_Y} + 2 \frac{\nu_X}{E_X} - \frac{1}{G_{XY}} \right) \\ C_{13} &= 2l^3 m \frac{1 + \nu_X}{E_X} - 2l m^3 \frac{1 + \nu_Y}{E_Y} - l m (l^2 - m^2) \frac{1}{G_{XY}} \\ C_{23} &= 2l m^3 \frac{1 + \nu_X}{E_X} - 2l^3 m \frac{1 + \nu_Y}{E_Y} + l m (l^2 - m^2) \frac{1}{G_{XY}} \end{aligned} \right\} (8)$$

なお弾性係数間には相反定理により次の関係式が成立している.

$$\nu_X / E_X = \nu_Y / E_Y \quad (9)$$

(4) 境界条件

周辺固定の膜を考えると, 境界上の変位はすべて0となる. すなわち

$$x = \pm a; \quad u = 0 \quad (10)$$

$$v = 0 \quad (11)$$

$$w = 0 \quad (12)$$

$$y = \pm b; \quad u = 0 \quad (13)$$

$$v = 0 \quad (14)$$

$$w = 0 \quad (15)$$

2.2 解析の基礎となる非線型微分方程式

(1) Airy の応力関数 F を用いる場合の非線型微分方程式

次式で定義され, (2) 式を恒等的に満足する Airy の応力関数 $F(x, y)$ を導入すると,

$$T_x / t = F, \nu_Y, \quad T_y / t = F, \nu_X, \quad T_{xy} / t = -F, \nu_{XY} \quad (16)$$

(1) 式から u, v を消去して得られる適合条件式と z 方向平衡方程式 (3) 式はそれぞれ次式で示され, 解析に必要な連立非線型偏微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} & C_{22} F, xxx - 2C_{23} F, xxxy + (2C_{12} + C_{33}) F, xxyy - 2C_{13} F, xyyy + C_{11} F, yyy \\ & = w, xy^2 - w, xxw, yy + 2w_0, xyw, xy - w_0, xxw, yy - w_0, yyw, xx \end{aligned} \quad (17)$$

$$F_{,yy}(w_0, xx+w, xx) - 2F_{,xy}(w_0, xy+w, xy) + F_{,xx}(w_0, yy+w, yy) + (p/t) = 0 \quad (18)$$

(2) 変位表示による非線型微分方程式

いま簡単のために初期撓み $w_0=0$ とし, (1), (4) 式を (2), (3) 式に代入して整理すると, x, y, z 方向の変位表示による非線型平衡方程式が得られる. すなわち

x 方向;

$$\begin{aligned} & a_{11}u_{,xx} + 2a_{13}u_{,xy} + a_{33}u_{,yy} + a_{13}v_{,xx} + (a_{12} + a_{33})v_{,xy} + a_{23}v_{,yy} \\ & + (a_{12} + a_{33})w_{,xy} + a_{11}w_{,xx} + a_{33}w_{,yy} \\ & + 2a_{13}w_{,xy} + a_{23}w_{,yy} + a_{13}w_{,yy} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

y 方向;

$$\begin{aligned} & a_{13}u_{,xx} + (a_{12} + a_{33})u_{,xy} + a_{23}u_{,yy} + a_{33}v_{,xx} + 2a_{23}v_{,xy} + a_{22}v_{,yy} \\ & + (a_{12} + a_{33})w_{,xy} + a_{22}w_{,yy} + a_{33}w_{,yy} \\ & + 2a_{23}w_{,xy} + a_{13}w_{,xx} + a_{23}w_{,xx} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

z 方向;

$$\begin{aligned} & w_{,xx} [3a_{11}w_{,x^2} + (a_{12} + 2a_{33})w_{,y^2} + 6a_{13}w_{,xy} + 2a_{11}u_{,x} + 2a_{12}v_{,y} + 2a_{13}(u_{,y} + v_{,x})] \\ & + w_{,yy} [(a_{12} + 2a_{33})w_{,x^2} + 3a_{22}w_{,y^2} + 6a_{23}w_{,xy} + 2a_{12}u_{,x} + 2a_{22}v_{,y} + 2a_{23}(u_{,y} + v_{,x})] \\ & + 2w_{,xy} [3a_{13}w_{,x^2} + 3a_{23}w_{,y^2} + 2(a_{12} + 2a_{33})w_{,xy} + 2a_{13}u_{,x} + 2a_{23}v_{,y} + 2a_{33}(u_{,y} + v_{,x})] \\ & + 2w_{,x} [a_{11}u_{,xx} + 2a_{13}u_{,xy} + a_{33}u_{,yy} + a_{13}v_{,xx} + (a_{12} + a_{33})v_{,xy} + a_{23}v_{,yy}] \\ & + 2w_{,y} [a_{13}u_{,xx} + (a_{12} + a_{33})u_{,xy} + a_{23}u_{,yy} + a_{33}v_{,xx} + 2a_{23}v_{,xy} + a_{22}v_{,yy}] + \frac{2p}{t} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

2.3 非線型微分方程式の解法

(1) 解析的近似解法

本文の主題である差分法による数値計算結果を従来のエネルギー法による近似解析と比較するため, まずエネルギー法による解析的近似解法について簡単に述べておく.

① Galerkin 法 ($\theta=0^\circ$ の場合)

$\theta=0^\circ$ の場合については, (12), (15) 式の境界条件を満足する w_0, w の波形を仮定すると, (17) 式から F を解析的に解くことができる. 植村 [1] は薄板の大撓み曲げ撓みの場合から類推し, 撓み波形を一項の余弦半波波形で表わし解析したが, ここではさらに高次波形を考え, w については次のように 2 項表示式で仮定する.

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= w_{10} \cos(\pi x/2a) \cos(\pi y/2b) \\ w &= w_{11} \cos(\pi x/2a) \cos(\pi y/2b) + w_{33} \cos(3\pi x/2a) \cos(3\pi y/2b) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(22) 式を (17) 式に代入した後積分して F を求め, (10) および (14) 式の境界条件を満足するように積分常数を決めると F および u, v を得る. 最後に (18) 式に次のように Galerkin 法を適用して, w_{11} および w_{33} と p との非線型代数方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-a}^a \int_{-b}^b [(18) \text{ 式の左辺}] \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} dx dy = 0 \\ & \int_{-a}^a \int_{-b}^b [(18) \text{ 式の左辺}] \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b} dx dy = 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

計算結果によると, 後述のように膜構造では 2 項表示によっても 1 項表示の近似度を修正

する効果は少なく、実験で得られた波形を説明できなかった。

② Ritz の方法 ($\theta \neq 0^\circ$ の場合)

近藤・植村[2]は初期撓み $w_0=0$ の場合について、 $\theta \neq 0^\circ$ による撓みの中央点に対する逆対称性も考慮し、次の波形を仮定し、Ritz の方法により解析を行なっている。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \sin \frac{\pi x}{a} + u_2 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \sin \frac{\pi y}{b} \\ v &= v_1 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \sin \frac{\pi y}{b} + v_2 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \sin \frac{\pi x}{a} \\ w &= w_1 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} + w_2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここで u_i, v_i, w_i ($i=1, 2$) は未定係数である。

この変位成分を ポテンシャル・エネルギー

$$\begin{aligned} \Pi &= (t/2) \int_{-a}^a \int_{-b}^b (a_{11}\epsilon_x^2 + a_{22}\epsilon_y^2 + a_{33}\gamma_{xy}^2 + 2a_{12}\epsilon_x\epsilon_y \\ &\quad + 2a_{13}\epsilon_x\gamma_{xy} + 2a_{23}\epsilon_y\gamma_{xy}) dx dy - p \int_{-a}^a \int_{-b}^b w dx dy \end{aligned} \quad (25)$$

に代入し、エネルギー停留の原理

$$\partial \Pi / \partial u_k = 0, \quad \partial \Pi / \partial v_k = 0, \quad \partial \Pi / \partial w_k = 0 \quad (k=1, 2) \quad (26)$$

を用いると、非線型連立代数方程式を解いて、次式のように変位成分と圧力 $p \sim$ 変位との関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_k &= u_k(a_{ij}, \lambda, \alpha) \\ v_k &= v_k(a_{ij}, \lambda, \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2) \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} p a / E_x t &= (\pi^3 / 16 E_x) (A_1 + B_1 \alpha + C_1 \alpha^2 + D_1 \alpha^3) (\pi w_1 / a)^3 \\ A_2 + B_2 \alpha + C_2 \alpha^2 + D_2 \alpha^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここで $\lambda = b/a$, $\alpha = w_2/w_1$, および A_k, B_k, C_k, D_k ($k=1, 2$) は a_{ij} と λ の関数である。

この解法は $\theta \neq 0^\circ$ の場合にも適用できるが、エネルギー法では撓み変形を仮定する必要があるが、従来の薄板大撓み問題の場合のように2項程度の表示では後述の実験に見られるような膜変形を表現できない憾みがある。

(2) 差分法による解法

差分法による場合の解析としては、2.2節で述べた2種の基礎的非線型微分方程式に基づき、それぞれ次のような解析を試みた。ここでは初期撓み $w_0=0$ とする。

① 応力関数を用いる差分法 (F) ($\theta=0^\circ$ の場合)

$\theta=0^\circ$ の場合の変位の対称性を考慮し、全膜面の $1/4$ 片について、図2に示すように一辺を N 等分して格子点を設け、 w については $(N+1)^2$ 個の未知数 w_{ij} ($i, j=0, \dots, N$)、 F については境界外にも一外分割点を設け、 $[(N+2)^2-1]$ 個の未知数 F_{ij} ($i, j=0, \dots, N+1$ ただし $F_{N+1, N+1}$ は用いない) をとる。

一方(17), (18)式の非線型微分方程式の微係数を差分表示し、 w_{ij} と F_{ij} についての連立代数方程式を導びく。計算の手順としては、まず w_{ij} の第1近似値を仮定して(17)式の

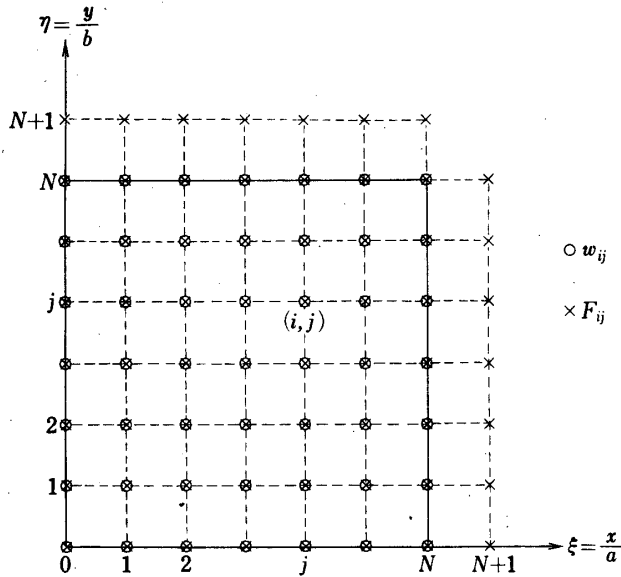


図2 差分法(F)における格子点への分割

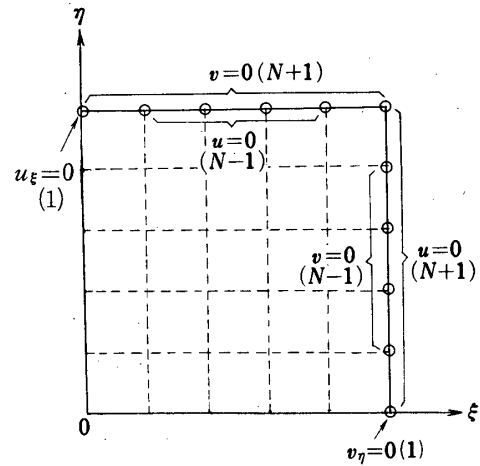


図3 差分法(F)における面内境界条件(条件式の数)

適合条件式に代入して F_{ij} を解き、次にこれを (18) 式の平衡方程式に代入して w_{ij} の第2次近似値を求め、この操作を繰り返して各格子点での F と w の収束値を求める。

条件式の数、(18) 式で w_{ij} を求めるときは、(18) 式を $i, j=0, \dots, N+1$ の格子点に適用して N^2 個と周辺で $w_{ij}=0$ ($i=N, j=N$) から $(2N+1)$ 個の条件式があり、 $(N+1)^2$ 個の未知数 w_{ij} が求められる。また (17) 式で F_{ij} を求めるときは、(17) 式を $i, j=0, \dots, N-1$ の格子点に適用して N^2 、周辺で図3に示すように u, v についての条件式が $2(2N+1)$ 個、さらに基準値 $F_{NN}=0$ として (N^2+4N+3) の条件式があり、 $(N+2)^2-1$ 個の未知数 F_{ij} が求められる。面内変位 u, v は

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^x [(F_{,yy}/E_x) - (\nu_y/E_y)F_{,xx} - (w_{,x^2} + 2w_{0,x}w_{,x})/2] dx \\ v &= \int_0^y [-(\nu_x/E_x)F_{,yy} + (F_{,xx}/E_y) - (w_{,y^2} + 2w_{0,y}w_{,y})/2] dy \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

で与えられ、数値積分形で用いた。ただし格子点 ($i=N, j=0$) および ($i=0, j=N$) においては (29) 式を用いられないので、それぞれ $v_y=0, u_x=0$ を用いた。

実際の計算では、1, 2回の繰り返し後に、実験で得られた鍋底形の撓み波形が得られたが、繰り返し数を増すと収束性が悪くなった。これは誤差の累積と境界条件の導入に問題があるようで、この改良は将来に譲り、次に述べる非線型緩和法の方が収束性が良好で、有効であった。

② 非線型緩和法を用いる差分法 (N. R. M) ($\theta \neq 0^\circ$ の場合)

変位成分を変数とする非線型平衡方程式 (19)~(21) 式を差分表示し、非線型緩和法 (Non-linear Relaxation Method) を適用して u, v, w の数値解を求める。

計算手順について説明する。 $\theta \neq 0^\circ$ の場合への適用を考え、原点に対し u, v は逆対称、 w は対称であることをから図4に示すように全膜の $1/2$ について格子点に分割する。なお3方

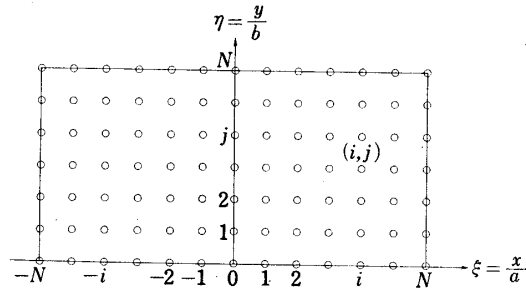


図4 差分法 (N. R. M.) における格子点への分割

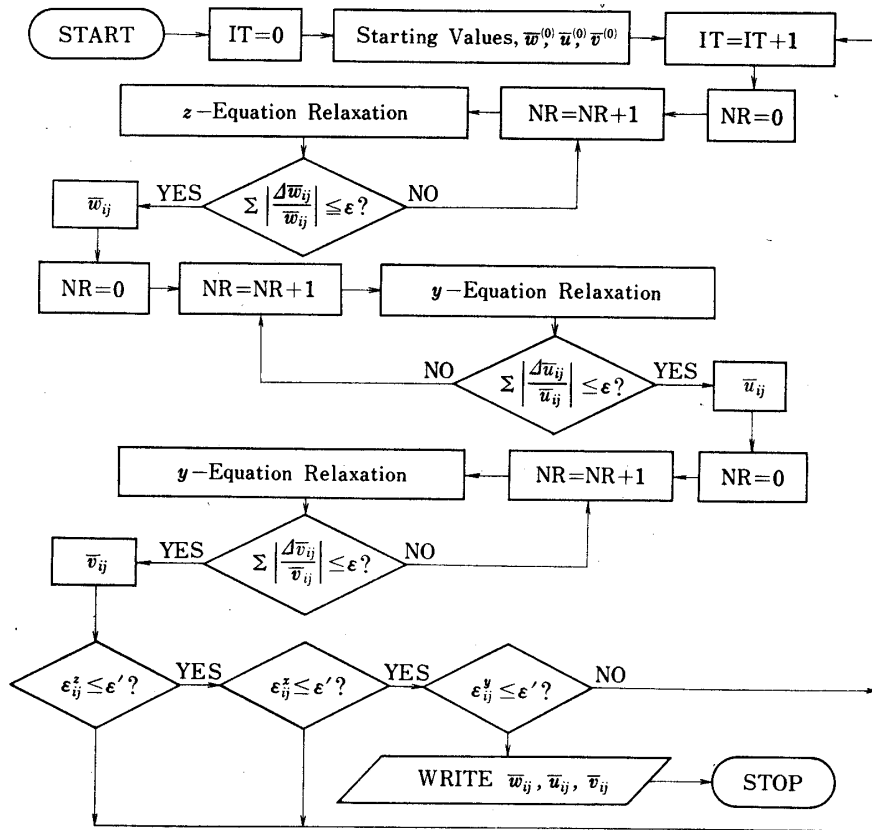


図5 非線型緩和法による数値計算のフローチャート

向平衡方程式は、次の無次元数を導入し

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{u} &= u/(aK^{2/3}), \quad \bar{v} = v/(aK^{2/3}), \quad \bar{w} = w/(aK^{1/3}) \\
 K &= \rho a / (E \lambda t) \\
 \xi &= x/a, \quad \eta = y/b, \quad \lambda = b/a
 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

無次元化した上で、差分表示する。実際の計算手順を図5にフローチャートにして示す。

i) u, v, w の出発値として1項近似の Galerkin 法の解 [1] を利用し、第1次近似値として次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^{(0)} &= (\pi/32) \sin \pi \xi [1 - (\nu_Y/\lambda^2) + \cos \pi \eta] \\ \bar{v}^{(0)} &= (\pi/32\lambda) \sin \pi \eta [1 - \lambda^2 \nu_X + \cos \pi \xi] \\ \bar{w}^{(0)} &= \cos \pi \xi \cos \pi \eta \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ii) \bar{w} は \bar{u} , \bar{v} に較べて大きいので, まず (21) 式の z 方向平衡方程式から出発することにし, そのときは u , v は既知で一定とし, w のみの関数を見なす. (21) 式の右辺の零を Residual operator R_{ij} で置換え, R_{ij} の値を十分に小さくする w_{ij} の値を (i, j) 格子点での近似解とする.

iii) それには $\partial R_{ij}/\partial w_{ij}$ を計算し, R_{ij} をなるべく零とする w_{ij} の修正量 Δw_{ij} を次式で与える.

$$\Delta w_{ij} = -\omega R_{ij} / (\partial R_{ij} / \partial w_{ij}) \quad (32)$$

ここで ω は収束を早めるための over-relaxation factor であり, $1 < \omega < 2$ の値をとる.

iv) w_{ij} の第 $(k+1)$ 次近似値 $w_{ij}^{(k+1)}$ は, 第 k 次近似値 $w_{ij}^{(k)}$ を次式で修正することにより得られる.

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} + \Delta w_{ij} \quad (33)$$

v) この計算を次の格子点にも進め, 境界点を除く全格子点についてこの緩和法を適用する. 境界点では $w=0$ である.

vi) そして次の収束条件が満足されるまで (ii) ~ (v) の操作を繰返す.

$$\sum_{i,j} |\Delta w_{ij} / w_{ij}| \leq \varepsilon \quad (34)$$

ここで $\sum_{i,j}$ は境界点を除く全格子点での総和を示し, ε は収束限界値である.

vii) 次に (19) 式に移り, ここでは v , w は既知で u のみの関数とみなして上述の操作を行ない, u の収束値を求める. さらに (20) 式に移り, ここでは v のみの関数と見なし, 同じ操作を行なう.

viii) 最後に u , v , w の第 n 次近似において, それぞれのある格子点 (i, j) における第 $(n-1)$ 次近似との誤差が一定値 ε' 以下に収束するまで, すなわち同時に次の収束条件が満たされるまで上述の操作を繰返す.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij}^x &= |(\bar{u}_{ij}^{(n)} - \bar{u}_{ij}^{(n-1)}) / \bar{u}_{ij}^{(n)}| \leq \varepsilon' \\ \varepsilon_{ij}^y &= |(\bar{v}_{ij}^{(n)} - \bar{v}_{ij}^{(n-1)}) / \bar{v}_{ij}^{(n)}| \leq \varepsilon' \\ \varepsilon_{ij}^z &= |(\bar{w}_{ij}^{(n)} - \bar{w}_{ij}^{(n-1)}) / \bar{w}_{ij}^{(n)}| \leq \varepsilon' \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

この手法は Shaw, Perrone [3], [4] らが用いたもので, 本文で直交異方性膜の解析に拡

表1 非線型緩和法における計算繰返し数の一例

$b/a = \lambda$	E_Y/E_X	$N=5 (\omega=1.3)$		$N=10 (\omega=1.4)$	
		$\varepsilon' = 1.0 \times 10^{-8}$	$\varepsilon' = 1.0 \times 10^{-6}$	$\varepsilon' = 1.0 \times 10^{-6}$	$\varepsilon' = 1.0 \times 10^{-8}$
1.0	0.5	82	41	152	
	1.0	69	29	111	
0.5	0.5	81	43	154	
	1.0	85	81	172	

張したものである。この非線形緩和法は、応力関数を用いた差分法 (F) に比較して、電子計算機の記憶容量は遙かに少なくすみ、収束性も良く、主として本法による計算結果を実験値と比較するが、後述のように実験値との合致は良好であった。

なお参考のために本法における繰返し数を $\theta=0$ の場合について表1に示すが、収束限界 $\varepsilon=5 \times 10^{-4}$ とし、 $\varepsilon'=10^{-8}$ と 10^{-6} のように極めて小さい値をとった場合である。

3. 実 験

3.1 膜材料の面内弾性特性試験

面圧試験に用いた膜材料の主軸方向ヤング係数 E_x, E_y , 剪断剛性率 G_{xy} , ポアソン比 ν_x, ν_y を求めるために短冊型試験片を用いて引張試験を行なった。

(1) 膜材料

ナイロン繊維の撚り糸を経糸、緯糸として平織りにした基布を塩化ビニールでコーティングしたナイロン・ターポリン TV #2400 (東レ製) で、膜厚 $t \approx 0.8 \text{ mm}$ である。

(2) 試験片

420 mm \times 60 mm, 760 mm \times 100 mm のクーポン型引張試験片で、両端両面にアルミ板を接着し、オートグラフ引張試験機のチャックで把んで引張負荷した。

(3) 伸び・歪測定と弾性係数の算出

ヤング係数 E_x, E_y はノギス, スケール, カセドメータによる標点間伸びと歪ゲージによる歪測定により求めた。ポアソン比 ν_x, ν_y は膜面に描いた基準円径の写真撮映による伸び縮みの測定と歪ゲージによる歪測定により求めた。また剪断剛性率 G_{xy} は、弾性主軸と 45° 方向の試験片により E_{45} を測定し、次式により算出した。

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{4}{E_{45}} - \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{2\nu_x}{E_x} \right) \quad (36)$$

実際の測定には、織り工合の不均等, 糸の波行, 切断工合などにより試験片がゆがみ, そりが発生したり, 歪ゲージの変形への追従性の問題があり, 信頼性のある弾性係数を求められなかった。相反定理式 (9) は必ずしも成立しなかったが, 結局測定値としては次に示す値を得た。これに基づいて数値計算を行なっている。

$$\left. \begin{aligned} E_{xt} &= 800 \text{ kg/cm}, & E_{yt} &= 90 \text{ kg/cm}, & G_{xyt} &= 8 \text{ kg/cm} \\ \nu_x &= 1.5, & \nu_y &= \nu_x(E_y/E_x) = 0.17 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

3.2 矩形平面膜の面圧による撓み試験

(1) 面圧負荷装置

図6に示すように, 矩形膜を負荷タンクに取り付け, 真空ポンプを作動させて膜面の表裏面の圧力差による均一分布荷重を負荷し, 触針付ラックピニオン式スケールを用いて撓みを測定した。

(2) 試験膜の種類

試験用膜の形状, 寸法, 弾性主軸と長辺軸となす角 θ などの種類を表2に示す。

(3) 撓み波形

正方形膜 ($\theta=0^\circ$ の場合), 矩形膜 ($\theta=45^\circ$ の場合) の面圧 $p=0.02 \text{ kg/cm}^2$ による撓み

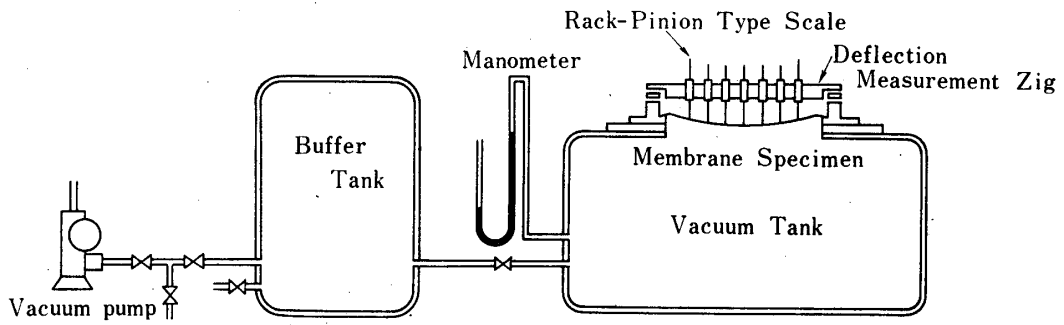


図6 膜の面圧負荷装置

表 2

膜形状	寸法 (mm)	θ (deg)
正方形 SQR-	700×700	0, 22.5°, 45° の3種
矩形 REC-	920×700	0, 22.5°, 45°, 67.5°, 90° の5種

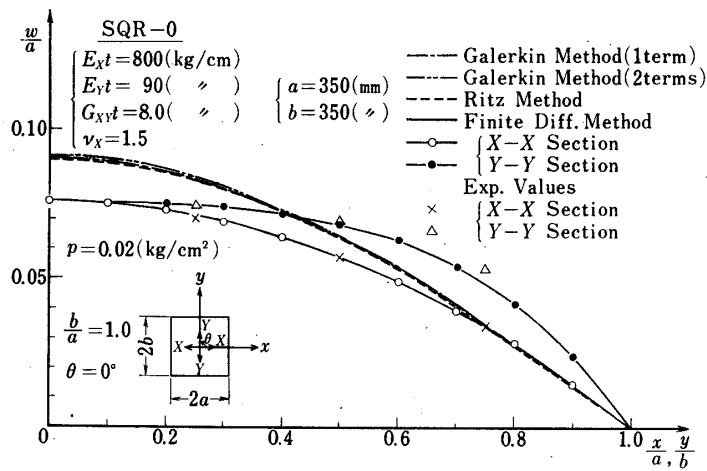


図7 撓み波形 (正方形膜 $\theta=0^\circ$)

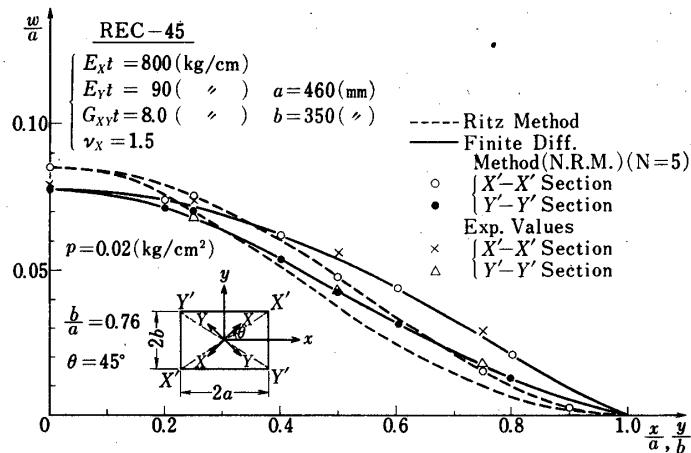


図8 撓み波形 (矩形膜 $\theta=45^\circ$)

波形をそれぞれ図7, 図8に示す. これから従来直観的に予想された正弦波形とはかなり異なる波形を呈することがわかる. 図7では, 剛性の強い X 方向と弱い Y 方向の波形の相異は対照的である. すなわち $\theta=0^\circ$ (あるいは 90°) の場合には Y 方向の撓み波形は, X 方向に較べて極めて偏平で鍋底形を呈する. また図8からわかるように, 弾性主軸が座標軸に一

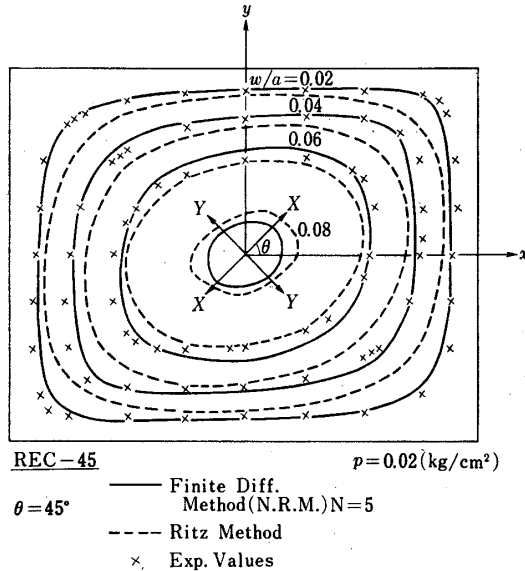


図9 撓み等高線図 (矩形膜 $\theta=45^\circ$)

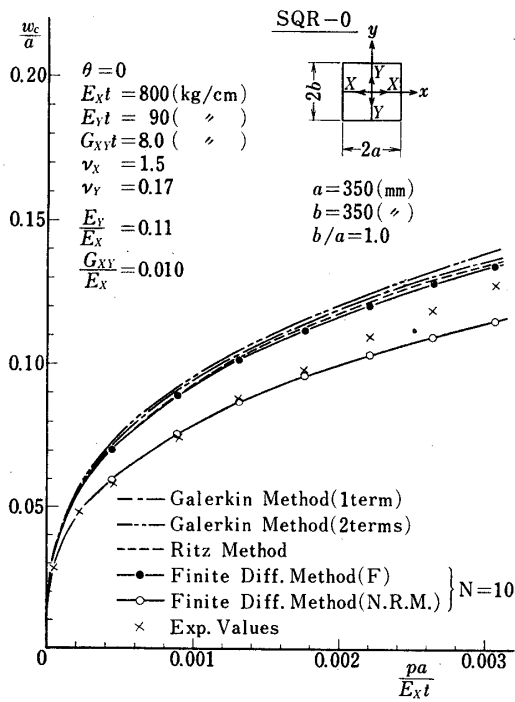


図10 中央点の撓み (w_c)~分布荷重 (p) (正方形膜 $\theta=0^\circ$)

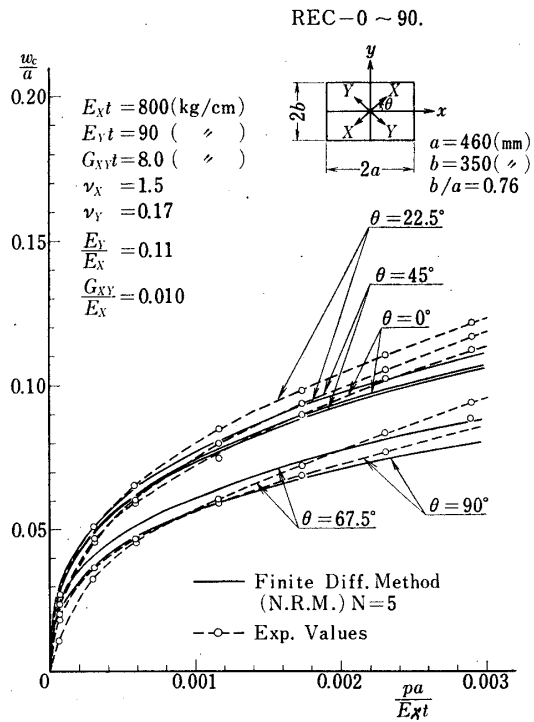


図11 中央点の撓み (w_c)~分布荷重 (p) (矩形膜 $\theta=0\sim 90^\circ$)

致しないときも、剛性の強い対角線方向の波形は比較的正弦波に近いのに対し、剛性の弱い対角線方向の波形は中央部で撓みが急増する形状を呈することが特徴的である。

なお矩形膜で $\theta=45^\circ$ の場合の撓み等高線図を図9に示す。

(4) 中央撓み～圧力関係

膜中央点での最大撓み w_c と圧力 p との非線型関係を、正方形膜 ($\theta=0^\circ$ の場合)、矩形膜 ($\theta=45^\circ$ の場合) についてそれぞれ図10, 図11に示す。大体 $p \sim w_c^3$ が比例するような3乗曲線に近い非線型性を示す。

4. 計算結果と実験結果との比較検討

HITAC 5020 電子計算機による数値計算結果および矩形膜の弾性域内での負荷実験結果との比較検討を行なう。

4.1 撓み波形

(1) 正方形膜 ($\theta=0^\circ$ の場合)

数値計算としては Galerkin 法, Ritz 法による解析結果および差分法 (N. R. M) による数値計算結果を図7にそれぞれ鎖線, 点線, 実線で示す。エネルギー法による撓み波形は予め三角関数で与えており, X, Y 両主軸方向の波形の相異はなく, 実験で得られた鍋底形と波形とは合致しない。一方差分法 (N. R. M) による解では, 剛性の弱い y 方向波形は, 剛性の強い x 方向波形に対しより偏平となり, 実験結果と良く合致する。偏平化の傾向は正方形膜において殊に顕著である。

(2) 矩形膜 ($\theta=45^\circ$ の場合)

Ritz 法による解析結果および差分法 (N. R. M) による数値計算結果を図8にそれぞれ点線, 実線で示す。実験結果によると, 剛性の強い対角線方向の波形は余弦波に近いのに対し, 剛性の弱い対角線方向の波形は中央部で撓みが急増する波形が見られる。Ritz 法では2項表示しているが, それでも実験値を異なるのに反し, 差分法 (N. R. M) による解は実験値と良く一致している。エネルギー法での撓み波形の与え方は慎重でなければならない。

図9の撓み等高線図についても差分法 (N. R. M) による解は, Ritz 法よりも遙かに良く実験値と合致している。

4.2 中央点の撓み w_c ～面圧力 p の関係

理論解によると, 初期撓み w_0 のない場合には $p \propto w_c^3$ の関係が成立する。

(1) 正方形膜 ($\theta=0^\circ$ の場合)

Galerkin 法, Ritz 法による解析結果および差分法による数値計算結果をそれぞれ鎖線, 点線, 実線で図10に示す。差分法 (N. R. M) による $p \sim w_c$ の3次曲線のみが実験値と良く一致するが, 他の方法による解はいずれも中央部最大撓み w_c が大き過ぎる。差分法 (N. R. M) による計算結果も $pa/E_{xt} > 2 \times 10^{-3}$ になると, 実験値の方が w_c が大きい, これは試験用膜が弾性域を越して非線型材料特性域に入るからと思われる。

(2) 矩形膜 ($\theta=0 \sim 90^\circ$ の場合)

矩形膜の場合, a, E_x を一定にして考えると, アスペクト比 b/a の減少, E_y/E_x の増大と共に w_c/a はもちろん減少する。Ritz 法による解析結果は図10と同様に w_c の値は実験

値より大きくなる。そこで図11には差分法 (N. R. M) による計算結果のみを示し、実験値を比較して示す。この場合も $pa/E_{xt} > 2 \times 10^{-3}$ になると、実験値の方が計算値より大きくなる。

主軸方向角度 θ の影響について、計算値では θ が $90^\circ, 67.5^\circ, 45^\circ, 0^\circ, 22.5^\circ$ の順に w_c は大きいが、実験値では 45° と 0° との順序が逆である以外は計算値と合致している。しかしこの傾向は、 $E_y/E_x, b/a$, 初期撓みなどに依存するので一律的に述べることはできない。

5. む す び

(1) 直交異方性補強膜の面圧試験の結果、膜面の撓み波形は曲げ剛性をもつ板とは異なる興味ある波形を呈することが明らかとなり、面圧～撓みの非線型関係が得られた。

(2) 一方理論解法としては、非線型緩和法に基ずく差分法による数値計算解は、実験波形に極めて良く一致し、膜の非線型力学問題の有力な解法となろう。本法は任意膜形状、任意圧力分布、任意境界条件下での曲面膜の力学的挙動の解析に拡張することができるし、初期撓みのある場合にも適用可能である。

(3) Galerkin 法, Ritz 法などエネルギー法は撓み波形を仮定する必要があるが、項数を多くとらない限り、実験結果と良く説明できないようである。また応力関数 F と撓み w との非線型連立微分方程式の差分法による数値計算を試みたが、収束性の点で良い結果を得られなかったので将来改良の余地がある。また補強膜の弾性特性の実験的測定法も難しく、今後その測定方法や織布の力学的特性についてさらに考察の必要がある。

最後に実験装置の製作に関して協力して下さった井山向史助手および試験用膜材を提供して下さった東レ株式会社に厚く感謝の意を表します。

1974年5月30日 航空力学部

参 考 文 献

- [1] 植村益次: 長方形膜の分布荷重による膜張力, “複合材料工学” (林編) 第10章, 日科技連(1971), 721
- [2] K. Kondo & M. Uemura: Deformations and Stresses of Orthotropic Rectangular Membrane under Uniform Lateral Pressure, Proc. IASS Pacific Symposium, Part, II, Tokyo (1971. 10) 211
- [3] F. S. Shaw & N. Perrone: A Numerical Solution for the Nonlinear Deflection of Membranes, Jour. Appl. Mech. **20** (Trans. ASME. **70**) (1954. 6) 117
- [4] N. Perrone & R. Kao: A General Nonlinear Relaxation Iteration Technique for Solving Nonlinear Problems in Mechanics, Jour, Appl, Mech., **38**, 2 (Trans. ASME. E.) (1971. 6) 371