

短繊維複合材料の成形条件と剛性

福田 博・河田 幸三

Effects of Forming Conditions on the Modulus of Short Fiber Composites

By

Hiroshi FUKUDA and Kozo KAWATA

Abstract: In the present paper, a mechanism of load transfer from matrix to fiber for single short fiber models is described in the first place. Next, applying the above results, a formula for predicting Young's modulus of short fiber-reinforced materials in connection with the forming condition, that is, rules of orientation of the fibers, is derived. Effects of the length of fibers and the orientation of fibers on Young's modulus are discussed. Finally, the numerical results are compared with experimental data. As for the mechanism of load transfer, the interfacial shear stresses of models measured by means of photoelasticity are used. As for Young's modulus, experimental data measured by the present authors and other authors' data are used. The above mentioned formula seems to explain fairly well the experimental results.

概 要

本論では、先ず平面応力・微小変形の弾性論を用いて、マトリックス中に一本の繊維が埋められたモデルを引張ったときに生じる繊維-マトリックス間の力の伝達の問題を論じ、次にその結果を利用して、繊維間に干渉がないとしたときの繊維の長さ、配向という成形条件と複合材料としてのヤング率の関係を求める。

これらの計算結果は各種実験結果と比較され、実験結果をほぼ説明できることが確かめられた。

1. ま え が き

繊維強化複合材料は、基材の組み合わせいかなでは従来の単一材料になかったような大きい比強度、比弾性をもつことができ、現在すでに軽量化の要求の特に厳しい航空宇宙分野をはじめ、広範な分野で活用されている。さらに、現在も続々と新基材が開発されており、軽量構造材料或いは耐熱材料としての潜在力は大きいと思われる。

短繊維強化法は繊維強化法の中でも重要なものの一つであり、自動車部品、日用品を中心に数多く使われている。その際、成形法はフィラメント・ワインディングなどとは異なり、射出成形法などを採用するため、繊維はあまり長くすることができない。繊維の長さで複合

材料としてのヤング率との関係については, Conway ら[1], Chang ら[2] などがあるが, 材料定数のとり方には非現実的なものがある.

また, 一方向に高いヤング率・強度を得たい場合には繊維を一方向に配列すればよく, 特にウイスキー/金属などではそのような努力がなされている. しかし, 短繊維を完全に一方向に並べて成形することは現状ではむづかしく, 繊維の配向には一定のバラツキが認められる[3]. 逆に, 自動車部品などでは, 繊維の配向はランダムであるのが良いとされているが, 成形時に部品の特定部で繊維が一定の方向に並ぶ傾向がある. このように, 繊維の配向によって強度および剛性がどのように変化するかを推定することは重要であるが, 従来この種の研究はあまり多くない[4], [5]. Tock ら[4]の研究は連続繊維からの類推であり, 岸谷ら[5]のものは繊維が完全にランダムに配向されている場合の推定である.

本稿では, 繊維の長さおよび配向によって複合材料としてのヤング率がどう変化するかを計算によって求め, 実験との比較を行なう.

2. 解 析

本章では, まず単一短繊維モデルにおける繊維-マトリックス間の力の伝達の模様を平面応力・微小変形弾性論を用いて解析し, 次にその解析結果を用いて, 繊維間の干渉を無視した場合の複合材料としてのヤング率の近似計算を行なう.

2.1 マトリックスから繊維への力の伝達

図1のように, 長さ $L_f (=2l)$ で, 幅 $W_f (=2w)$ が十分小さい1本の繊維を埋め込んだ

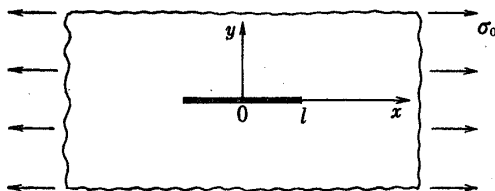


図1 短繊維モデル

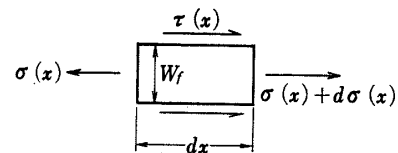


図2 繊維の力の釣合い

無限マトリックス板 (板厚 t) が無限遠点で繊維の軸方向に一樣な引張り応力 σ_0 (x 方向歪は ε_0) を受ける場合の繊維-マトリックス間の力の伝達を調べる. ここでいう“十分小さい”とは, 繊維とマトリックスの界面の作用が x 軸上で記述できるという意味である. この問題は既に林[6], [7]によって解かれており, 本節は林の導いた基礎方程式から出発する. すなわち, 界面剪断応力による繊維の歪と, 界面剪断応力および無限遠点応力によるマトリックスの歪を等しいとおくことによって, 基礎方程式は

$$\varepsilon_0 + \frac{1}{E_m} \frac{3+2\nu-\nu^2}{\pi} \int_0^l \frac{\xi}{x^2-\xi^2} \tau(\xi) d\xi = \frac{2}{E_f W_f} \int_x^l \tau(\xi) d\xi \quad (1)$$

となる. ただし, E_f : 繊維のヤング率, E_m : マトリックスのヤング率, ν : マトリックスのポアソン比, $\tau(\xi)$: $x=\xi$ 点における繊維とマトリックスの界面剪断応力である. いま, 繊維の微小部分に働く力の釣合いを考えるなら, 図2より

$$\tau(x) = -\frac{W_f}{2} \frac{d\sigma(x)}{dx} \quad (2)$$

となる。ここで、次に示す無次元化量

$$\left. \begin{aligned} p &= x/l, \quad u = \xi/l, \\ C &= \frac{\pi}{3+2\nu-\nu^2} \frac{2l}{W_f} \frac{E_f}{E_m}, \quad \bar{\tau}(u) = \frac{3+2\nu-\nu^2}{\pi E_m \epsilon_0} \tau(lu), \quad \bar{\sigma}(u) = -\frac{W_f}{2l} \frac{3+2\nu-\nu^2}{\pi E_m \epsilon_0} \sigma(lu) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

を用い、さらに繊維端末における力の伝達はない ($\sigma(l)=0$) とすると、(1) 式は

$$\int_0^1 \frac{u}{u^2-p^2} \frac{d\bar{\sigma}(u)}{du} du - C\bar{\sigma}(p) = 1 \quad (4)$$

となる。ここで、

$$u = \sin \alpha, \quad p = \sin \varphi \quad (5)$$

とおき、さらに $\bar{\sigma}(u)$ を

$$\bar{\sigma}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2n-1)\alpha \quad (6)$$

と級数展開すると (4) 式は

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_n = -1 \quad (7)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} J_n &= (2n-1)I_n + C \cos(2n-1)\varphi \\ I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi} \sin(2n-1)\alpha d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。(7) 式により未定係数 A_n を求め、(6)、(3) 式に代入すれば、繊維引張り応力、界面剪断応力が得られるが、(7) 式は無限元の連立方程式であり、事実上解けないため、ここでは n_0 項近似を行ない、Galerkin 法によって A_n を定める。すなわち、

$$\delta(\varphi) = \sum_{n=1}^{n_0} A_n J_n + 1 \quad (9)$$

とおき、

$$\int_0^{\pi/2} \delta(\varphi) \cos(2L-1)\varphi d\varphi = 0 \quad (L=1, 2, \dots, n_0) \quad (10)$$

という条件から A_n を決定する。(8) 式の I_n は、被積分関数を $\sin \alpha$ で展開すると

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{r=0}^{n-1} \left[(-1)^r \frac{2n-1}{(2r+1)!} \left[\prod_{k=1}^r \{(2n-1)^2 - (2k-1)^2\} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[\sum_{i=0}^r \sin^{2i}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^{2(r-i)}\alpha d\alpha + \sin^{2r+2}\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi} \right] \right] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。(11) 式の前半の積分は

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2(r-i)}\alpha d\alpha = \frac{1}{2^{2(r-i)}} \binom{2r-2i}{r-i} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

となり、後半の積分は特異積分であるが、Cauchy の主値を用いるならば 0 となる。

従って (10) 式は

$$\sum_{n=1}^{n_0} A_n \left[(2n-1)^2 \sum_{r=0}^{n-1} \left\{ \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} T_1 \cdot \sum_{i=0}^r T_2 S_3 \right\} + C S_2 \right] + S_1 = 0 \quad (13)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned}
 T_1 &= \prod_{k=1}^r \{(2n-1)^2 - (2K-1)^2\} \\
 T_2 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^{2(r-i)}} \binom{2r-2i}{r-i} \\
 S_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos(2L-1)\varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2L-1} & : L = \text{奇数} \\ -\frac{1}{2L-1} & : L = \text{偶数} \end{cases} \\
 S_2 &= \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)\varphi \cos(2L-1)\varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & : L = n \\ 0 & : L \neq n \end{cases} \\
 S_3 &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2i}\varphi \cos(2L-1)\varphi d\varphi = \frac{1}{2^{2i}} \left[\sum_{p=0}^{i-1} (-1)^{i+p} \binom{2i}{p} S_4 + \frac{1}{2} \binom{2i}{i} S_1 \right] \\
 S_4 &= \int_0^{\pi/2} \cos(2i-2p)\varphi \cos(2L-1)\varphi d\varphi \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2i-2p+2L-1} - \frac{1}{2i-2p-2L+1} \right) & : 2i-2p+2L-1=4 \text{ の倍数} \\ & +1 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2i-2p+2L-1} - \frac{1}{2i-2p-2L+1} \right) & : 2i-2p+2L-1=4 \text{ の倍数} \\ & +3 \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

となる。(14) 式は数値計算ができる。

以上の解法により、繊維の軸応力、界面剪断応力を求めた。まず、 $n_0=5, 10, 15$ の三つの近似について二、三例の計算を行なったが、大きな差は認められなかった。本節の結果は10項近似の計算結果である。

(4) 式によると、繊維のアスペクト比 (L_f/W_f)、繊維とマトリックスのヤング率比 (E_f/E_m)、マトリックスのポアソン比 (ν) など、材料に関するすべての情報は C の中に一まとめにして入っており、 C の値のみを変化させて(4)式を解けば十分であるが、後に述べる複合材料としての弾性率を推定する際に、ポアソン比とそれ以外の材料定数は分離させなければならない。従ってここで V_s (Specific Value, 特性値) と名付けられる量を

$$V_s = \frac{L_f/E_f}{W_f/E_m} \quad (15)$$

と定義する。この量は、界面の作用を繊維の中心軸で記述してもかまわないという立場をとる限り、いつも一体のものとして働らく量であり、短繊維強化複合材料の一つの指標になるものと思われる。

上の考えにもとづき、繊維の軸応力、界面剪断応力を V_s によって整理したのが図3, 4である。縦軸にはそれぞれの無次元化量をとっているが、実際の応力は(3)式より容易に計算できる。図4には Bürgel ら[8]の計算結果の一部を併記したが、本節の計算は彼らの計算結果と良い一致を示している。

(15) 式によると、 V_s が大ということは繊維のアスペクト比が大、あるいは繊維とマトリ

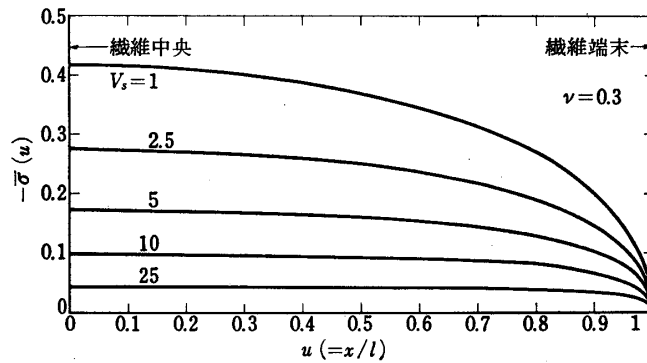


図 3 (a) 繊維の軸応力分布

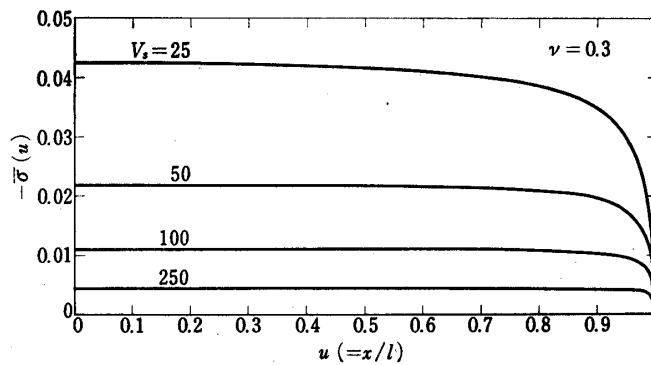


図 3 (b) 繊維の軸応力分布

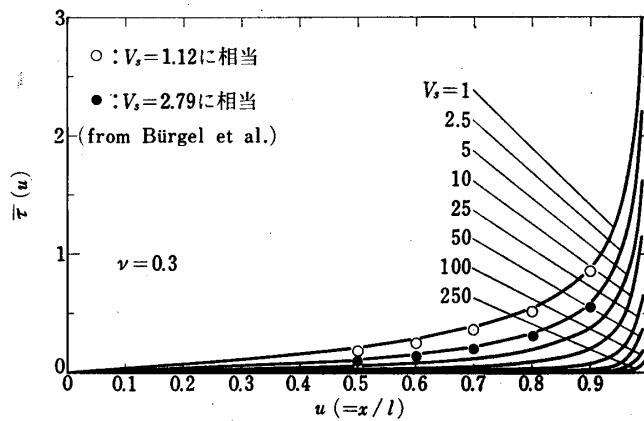


図 4 界面剪断応力分布

ックスのヤング率の比が小ということに相当する。 L_f/W_f が大きければ、繊維の中心付近の応力はほぼ飽和状態に達しており、応力の乱れは繊維の端末付近に特に強くあらわれ、逆に L_f/W_f が小さければ、応力の乱れは繊維の中心付近にまで及ぶであろう。また、 E_f/E_m が小さければ、繊維とマトリックスはなじみやすく、繊維端末の近傍だけで力の伝達を終え、 E_f/E_m が大きければその逆になるであろう。つまり、 V_s が大のときには繊維の端末付近に

応力の乱れが集中することが予想されるが、図 3, 4 にはその現象がはっきりあらわれている。同様のことは Bürgel ら[8], Owen[9] の計算結果にも出てくるが、Bürgel らは界面剪断応力についてのみ述べており、また、Owen の報告も界面剪断応力については本節と同様の結果を得ているが、解析の出発点に、“繊維の軸応力は繊維の全長の 50~75% にわたって一定である” という仮定をおいているため[10]、繊維の軸応力については、 V_s が小のときには軸応力はだらだらと小さくなり、 V_s が大のときには繊維端末付近で急速に落ちるといふことは説明できない。

2.2 複合材料のヤング率

本節では、前節の結果を利用して複合材料としてのヤング率の近似計算を行ない、ヤング率の推定に必要なチャートを作る。

(1) 基本方針

まず、図 5 のように引張方向と θ の角をなして単一短繊維がおかれた場合を考える。このモデルは、図 5 の x' , y' 軸に関して無限遠点で

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\sigma_0}{E_m} (\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta), \quad \varepsilon_{y'} = \frac{\sigma_0}{E_m} (\sin^2 \theta - \nu \cos^2 \theta), \quad \nu_{x'y'} = -\frac{2(1+\nu)\sigma_0}{E} \sin \theta \cos \theta \quad (16)$$

なる歪を加えたことに等しい。従ってこのモデルの繊維-マトリックス間の力の伝達に関する基礎方程式は、(3) 式の $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ を

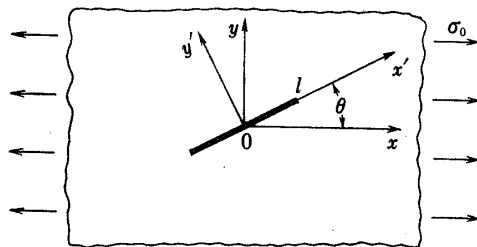


図 5 斜め配向モデル

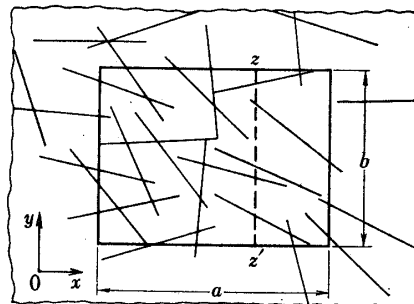


図 6 短繊維強化板

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}(u) &= \frac{3+2\nu-\nu^2}{\pi E_m \varepsilon_0'} \tau(lu) \\ \bar{\sigma}(u) &= -\frac{W_f}{2l} \frac{3+2\nu-\nu^2}{\pi E_m \varepsilon_0'} \sigma(lu) \\ \varepsilon_0' &= f(\theta) \varepsilon_0 = (\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta) \varepsilon_0 \end{aligned} \right\} (17)$$

とおきかえるならば (4) 式に等しくなり、前節で論じたことはすべて適用できる。(17) 式より、繊維の引張り応力が 0 となる配向 (θ_0) は、 $\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta = 0$ すなわち

$$\theta_0 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{1+\nu}} \quad (18)$$

である。

ここで本節の解析方針について述べる。

まず、図6の任意断面 $x-z'$ を横切る繊維の数を計算する。次にそれらの繊維がどの位置で、 x 軸とどういう角をなして $x-z'$ 軸を横切っているかを考慮しつつ、各繊維が $x-z'$ 断面で x 方向に受け持つ力を算出する。最後にマトリックスが x 方向に受け持つ力を計算し、この材料が $x-z'$ 断面でうけもつ力をもとめ、それから引張り方向のヤング率を算出する。なお、マトリックスがうける応力は一様ではないが、平均歪 (ϵ_0) を受けるものとする。

はじめに繊維の長さ、配向のバラツキについて一般的に論じ、のちに特殊な場合について数値計算する。

(2) 計算手法

(a) 任意断面を横切る繊維数

繊維の長さの半分が $l \sim l+dl$ の間にある繊維の割合を $h(l)dl$ とする。言いかえれば、 $h(l)$ は長さに関する確率密度である。 $h(l)$ に関する制約条件は

$$\int_0^{\infty} h(l)dl = 1 \quad (19)$$

であり、繊維の平均長さ (\bar{l}) は

$$\bar{l} = \int_0^{\infty} 2lh(l)dl \quad (20)$$

である。

図6の矩形領域 ab の中にある繊維の数 n は、繊維の体積含有率 (V_f) の定義

$$V_f = \frac{n\bar{l}W_f t}{abt} \quad (21)$$

より、

$$n = \frac{ab}{\bar{l}W_f} V_f \quad (22)$$

となる。一方、繊維の配向が x 軸方向 (引張り方向) から測って $\theta \sim \theta+d\theta$ の間にある繊維の割合を $g(\theta)d\theta$ とする。 $g(\theta)$ は繊維の配向に関する確率密度であり、制約条件は

$$\int_0^{\pi/2} g(\theta)d\theta = 1 \quad (23)$$

である。この $g(\theta)$ を用いると、 x 軸上に射影した繊維の平均長さ \bar{l} は

$$\bar{l} = \int_0^{\pi/2} \bar{l} \cos \theta g(\theta)d\theta \quad (24)$$

となる。任意断面 $x-z'$ を横切る繊維の数 n_b は、この射影の平均長さ \bar{l} を n 本並べ、考えている領域の長さ a で割った値になる。すなわち、(22)、(24) 式より、

$$n_b = \frac{n\bar{l}}{a} = \frac{bV_f}{W_f a} \int_0^{\pi/2} g(\theta) \cos \theta d\theta \quad (25)$$

(b) 任意の繊維が $x-z'$ 断面でうけもつ x 方向の力

長さ $2l$ の一本の繊維がマトリックス中に埋められ、その繊維の方向に無限遠点で σ_0 の応力 (ϵ_0 の歪) で引張られたとき、その繊維が中心から ξ の位置でうけもつ応力を $\sigma_i(\xi)$ とする。 $\sigma_i(\xi)$ は 2.1 節の $\sigma(\xi)$ と同じものであり、その無次元化量 $\bar{\sigma}_i(u)$ も前節と同じよ

うに定義するならば,

$$\sigma_i(\xi) = -\frac{2l}{W_f} \frac{\pi E_m \varepsilon_0}{3+2\nu-\nu^2} \bar{\sigma}_i(u) \quad (26)$$

となる.

長さの半分が $l \sim l+dl$ の間にあり, 配向が $\theta \sim \theta+d\theta$ の間にあり, しかも繊維の中心から $\xi \sim \xi+d\xi$ の間に $z-z'$ 断面を横切る一本の繊維が $z-z'$ 断面上で x 方向にうけもつ力は, 繊維の断面積を $A_f (=W_f t)$ とすると, (17) 式および幾何学的条件を考慮に入れて

$$A_f \sigma_i(\xi) f(\theta) \cos \theta$$

となる.

(c) 複合材料の弾性率

任意断面を横切る繊維について考察する. このうち, 長さの半分が $l \sim l+dl$ の間にあるものの割合は $h(l)dl$ であり, そのうち, 繊維の中心から $\xi \sim \xi+d\xi$ の間に $z-z'$ を横切るものの割合は $d\xi/l$ である. さらに, 上の条件を満たす繊維のうち, 配向角が $\theta \sim \theta+d\theta$ の間にあるものの割合は $g(\theta)d\theta$ である. したがって, もし圧縮をうける繊維 ($\theta > \theta_0$ となる配向の繊維) が x 方向に及ぼす効果を無視するならば, $z-z'$ 断面を横切る n_b 本の繊維が x 方向にうけもつ力 P_f は,

$$\begin{aligned} P_f &= n_b \int_0^\infty \left\{ \int_0^l \int_0^{\theta_0} A_f \sigma_i(\xi) f(\theta) \cos \theta \frac{d\xi}{l} g(\theta) d\theta \right\} h(l) dl \\ &= -bt\sigma_0 \frac{2}{W_f} \frac{\pi}{3+2\nu-\nu^2} V_f \int_0^{\pi/2} g(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^{\theta_0} f(\theta) g(\theta) \cos \theta d\theta \\ &\quad \times \int_0^\infty \left\{ l \int_0^1 \bar{\sigma}_i(u) du \right\} h(l) dl \end{aligned} \quad (27)$$

となる. 一方, マトリックスは平均歪を受けるとすると, $z-z'$ 断面を横切るマトリックスが x 方向に受け持つ力 P_m は,

$$P_m = bt\sigma_0(1-V_f) \quad (28)$$

となる.

上の両者の合計 $P = P_f + P_m$ が $z-z'$ 断面でこの材料がうけもつ力であり, これを断面積で割れば平均応力が得られる. さらに, その平均応力をマトリックスのみの時の応力 σ_0 で割った値を K_c とすると,

$$K_c = \frac{E_f}{E_m} R_0 C_a V_f + (1-V_f) \quad (29)$$

となる. ただし,

$$R_0 = -\frac{2}{W_f} \frac{\pi}{3+2\nu-\nu^2} \int_0^\infty \left\{ l \int_0^1 \bar{\sigma}_i(u) du \right\} h(l) dl \frac{E_f}{E_m} \quad (30)$$

$$C_a = \int_0^{\pi/2} g(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^{\theta_0} f(\theta) \cos \theta g(\theta) d\theta \quad (31)$$

である. まず C_a について考察する. この値は, 繊維の配向が x 軸方向に一方向強化されている場合, すなわち, $g(\theta)$ が $\theta=0$ で特異性をもつ δ 関数の場合, $C_a=1$ となり, 繊維が一方向配向でない場合には1より小さい値を示す. また, R_0 の方には繊維の配向に関する

項すなわち、 θ の入った項はない。従って C_a は配向のバラつきによる補強度の低下を示す係数ということができ、ここで配向係数 (Coefficient of Alignment) と名付ける。

次に R_0 であるが、一方向配向、つまり $C_a=1$ を (29) 式に代入すると

$$K_c = \frac{E_f}{E_m} R_0 V_f + (1 - V_f) \quad (32)$$

となる。一方、連続繊維一方向強化材の複合則を (32) 式と同じ形式で書くと、

$$K_c = \frac{E_f}{E_m} V_f + (1 - V_f) \quad (33)$$

となる。両者を比較すれば、 R_0 は短繊維であるために起る剛性の低下率ということになり、ここで一方向強化補強率 (Reinforcement Ratio of Zero Dispersion) と名付ける。短繊維任意方向強化材料の弾性率をもっと厳密に考察するならば、繊維アスペクト比、繊維とマトリックスのヤング率比など、材料に関する項と繊維の配向に関する項とは連成することも考えられるが、本論文程度の仮定、近似が許されるならば、(30)、(31) 式にみられるごとく両者は分離でき、後の議論が簡単になる。

(29) 式を E_m 倍したのが複合材料としてのヤング率であり、 $R_0=C_a=1$ とおけば、通常の連続繊維一方向強化材の複合則になる。 R_0 、 C_a の具体的な値は、 $h(l)$ 、 $g(\theta)$ を指定してやれば求められる。

(3) 具体例

(30) 式を見ると、 u に関する積分と l に関する積分は二重積分になっており、 $\bar{\sigma}_i(u)$ が l の関数であるため二つの積分は分離できない。従って繊維の長さが一様でない時には、 l に関する積分は数値計算に頼らざるを得ないであろう。 $h(l)$ を色々に仮定して R_0 を求めてもあまり実用的でないので、ここでは、繊維の長さが一様な場合についてのみ考察する。すべての繊維の長さが L_f のとき、 $h(l)$ は、 $l=L_f/2$ に特異性をもつ δ 関数となり、また (30) 式中の $\bar{\sigma}_i(u)$ は 2.1 節の $\bar{\sigma}(u)$ そのものになる。結局 (30) 式は

$$R_0 = -\frac{\pi}{3+2\nu-\nu^2} \frac{L_f}{W_f} \frac{E_f}{E_m} \int_0^1 \bar{\sigma}(u) du \quad (34)$$

となる。式中の積分の部分は前節との関連で求めることができる。

前節によると、 $\bar{\sigma}(u)$ は ν と V_s に関する量であった。従って R_0 も ν と V_s に依存す

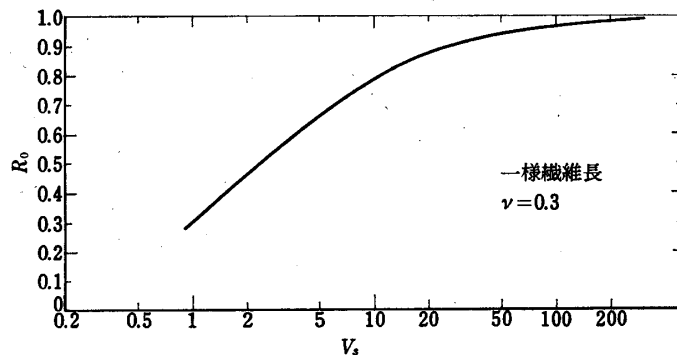


図7 一方向強化補強率 (R_0) と特性値 (V_s) の関係

る量であり、 V_s の成分である L_f/W_f と E_f/E_m がバラバラの形では関係しない。図7に、 R_0 と V_s の関係を $\nu=0.3$ の場合について示した。 V_s が大になるに従って長繊維強化の場合 ($R_0=1$) に漸近することがわかる。いま、ガラス/エポキシを想定し、 V_f を 30% とすると (33) 式より連続繊維強化の場合、 $K_c=6.7$ となる。短繊維強化で連続繊維強化の 95% のヤング率を得るためには、(32) 式より $R_0=0.944$ となり、これは図7によると $V_s \approx 50$ である。いま、 $E_f/E_m=20$ を想定しているから、(15) 式より $L_f/W_f=1,000$ となる。直径 9μ のガラスファイバーを用いたとすれば、長さは 9 mm となる。即ち、現在の場合、 9 mm 程度の長さがあれば、ヤング率に関する限り、連続繊維に近い値を得ることがわかる。また、図7によると、繊維の長さを2倍にしてもそれほど大きなヤング率の上昇は望めないことがわかる。

次に C_a について考える。 $g(\theta)$ が一般的な形をしていけば、(31) 式以上に議論が進められないので、ここでは図8の略図に示すように、(a) 矩形分布、(b) cosine 曲線分布、(c) 三角形分布の三つの場合について考える。

まず、(a) の場合について考える。(23) 式を考慮に入れると $g(\theta)$ は

$$g(\theta) = \begin{cases} 1/\alpha_0 & (0 \leq \theta \leq \alpha_0) \\ 0 & (\theta > \alpha_0) \end{cases} \quad (53)$$

となり、(31) 式は $\alpha_0 < \theta_0$ の範囲で

$$C_a = \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \left\{ \frac{3-\nu \sin \alpha_0}{4} + \frac{1+\nu \sin 3\alpha_0}{4} \right\} \quad (36)$$

となる。(b)、(c) の場合も同様に計算でき、 $\alpha_0 < \theta_0$ で、

$$(b): \quad C_a = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \alpha_0} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \alpha_0} \right) \cos \alpha_0 \left\{ \frac{3-\nu}{4} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \alpha_0} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \alpha_0} \right) \cos \alpha_0 \right. \\ \left. + \frac{1+\nu}{4} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 3\alpha_0} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 3\alpha_0} \right) \cos 3\alpha_0 \right\} \quad (37)$$

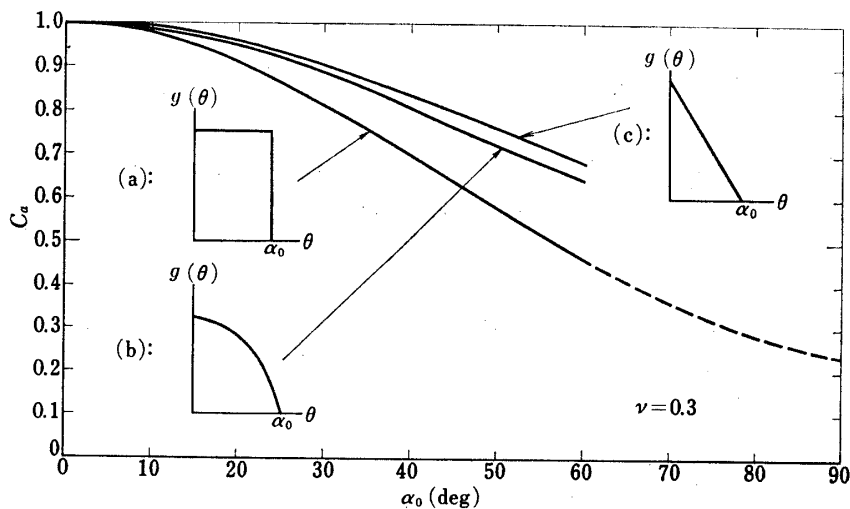


図8 配向のバラつきと配向係数 (C_a) の関係

$$(c): \quad C_a = 4 \cdot \frac{1 - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2} \left\{ \frac{3 - \nu}{4} \frac{1 - \cos \alpha_0}{\alpha_0^2} + \frac{1 + \nu}{4} \frac{1 - \cos 3\alpha_0}{9\alpha_0^2} \right\} \quad (38)$$

となる。 $\alpha_0 > \theta_0$ の範囲についても同様に計算でき、たとえば (a) では

$$C_a = \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} \left\{ \frac{3 - \nu}{4} \frac{\sin \theta_0}{\alpha_0} + \frac{1 + \nu}{4} \frac{\sin 3\theta_0}{3\alpha_0} \right\} \quad (39)$$

となる。これらの数値計算の結果を図8に示した。図8から大略次のことが言えるであろう。繊維の配列が一方向強化からある程度ずれても、ヤング率の低下はあまり大きくない。また、完全にランダムな分布からある程度ずれてもヤング率の変化はあまり大きくない。しかし、ランダムな配向の中に局所的に一方向強化に近い部分ができると、そこでは方向によるヤング率の変化が大きくなって望ましくない。

(29) 式および図7, 8によって複合材料のヤング率を計算することができる。

3. 実験との比較

本章では、前章でおこなった解析を実験と比較する。

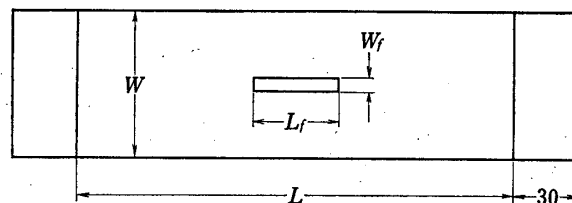
3.1 単一短繊維モデルにおける内部応力

本節では、光弾性実験によって繊維—マトリックス間の界面剪断応力を求める。本来なら、河田ら[11]の実験のように繊維側にも光弾性材料を用いれば、繊維の引張り応力も求めることができ望ましいが、ここでは繊維に金属（アルミ合金）を用いたため、繊維の引張り応力は求められない。

試験片は、日本油脂(株)川越工場、井田峯人氏の御好意により作成していただいたジュラルミン/ポリウレタンのモデルを用いた。モデルの諸元は略図とともに表1に示す。

表1 光弾性試験片の諸元

試片番号	試片長さ L (mm)	試片幅 W (mm)	繊維長さ L_f (mm)	繊維幅 W_f (mm)	板厚 t (mm)
P1	290.0	101.0	50.0	2.0	10.0
P2	290.5	101.3	50.0	2.0	10.0



チャック部は 1.2 mm 板厚の鉄板をアラルダイトで接着して補強した。試験法は円偏光暗視野法により、引張試験機は島津オートグラフを用いた。

ポリウレタンの弾性特性を調べるため、図9の略図に示されるような弾性試験片を作り、引張り荷重をかけた。結果を図9に示す。図中、公称応力は試験機のチャートから得られる

荷重を断面積で除し、公称歪は試験機の引張り速度（クロスヘッド速度で 2 mm/min）に時間を乗じ、初期の長さで除すことによって得た。図9の略図に示すごとく、チャック部を幅広にしなかったため、チャック部からクラックが発生し、ゴムに特有な逆S字型の荷重-伸び線図を得ることはできなかったが、前章の解析と比較する上では十分であろう。また、光弾性感度は 1.14 mm/kg であった。

実験結果を試片 P1 によって説明する。図10は、荷重0のときの等傾線であり、暗箱カメラのスクリーン上でスケッチした。荷重0のときの等色線を図11の下半に示す。原図は

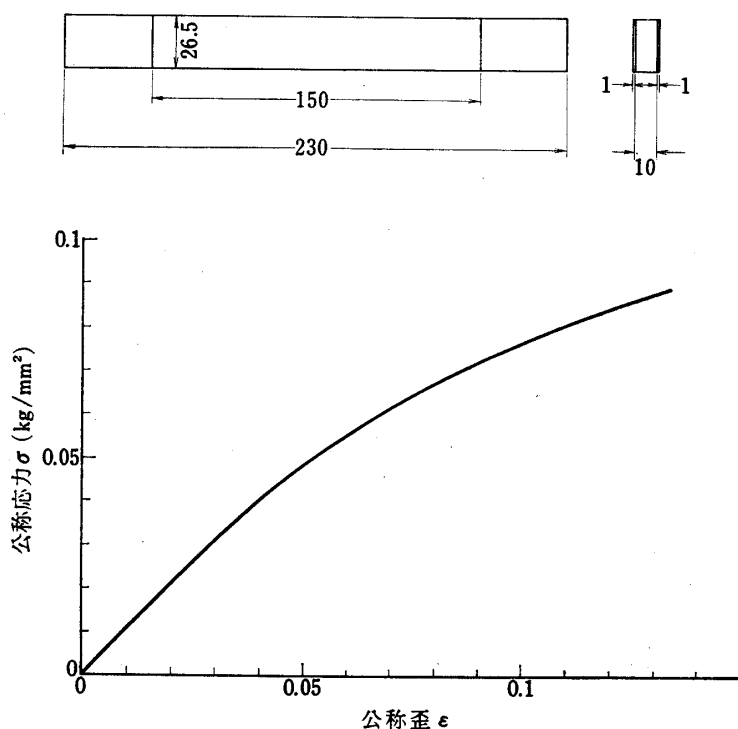


図9 ポリウレタン、応力～歪線図

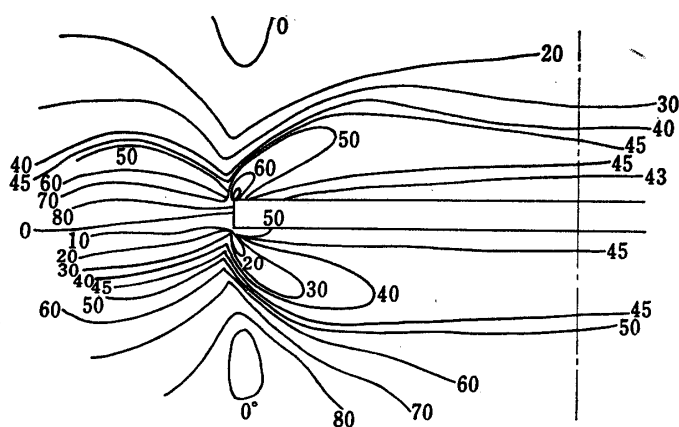


図10 等傾線図 (P1, P=0 kg)

光学系によって実物の3倍強に拡大されている。等色線、等傾線ともに、像はあまり鮮明ではなかった。図10, 11は硬化時にあらわれた初期応力を示している。

これらの等色線、等傾線から、繊維マトリックスの界面に沿った剪断応力を求めた。界面とは言っても、本当の界面の位置について読み取るのは困難であり、界面から繊維の幅の1/5だけ離れたマトリックス内(図11の破線)の主応力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ 、主応力方向 ϕ を読みとり、

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\phi \quad (40)$$

により剪断応力を求めた。結果を図11の上半に示す。図の縦軸は、 $\sigma_1 - \sigma_2$ を搞次数として読みとり、(40)式に代入して得られたそのままの値である。次に同様にして $P=15\text{ kg}$ の場合について等傾線(図12)および等色線(図13の下半)より界面剪断応力を求め、図13の上半に $P=15\text{ kg}$ 時として記入した。この値から初期応力を引いた値が荷重(15 kg)をかけたことによる応力の変化量である。実際の応力値は搞次数と光弾性感度から容易に求められ、図13の縦軸に書き込んだ。また、界面剪断応力と平均応力の比(τ_{xy}/σ_0)も図13に併記した。

マトリックスのヤング率は図9に見られるごとく一定でなく、厳密には第2章の計算も不可能であるが、ここでは一応 $E_m = 0.075\text{ kg/mm}^2$ として計算し、計算結果を図13に併記した。同様にして試片P2の場合について図14, 15に示した。

これらの実験で得られた応力分布は、計算値の傾向とよく一致するが、定量的には若干の差が認められる。この原因はいくつか考えられる。まず、本実験に用いたモデルの繊維は、アスペクト比が25であり、これが前章の解析の基礎となった“繊維が十分細い”という条

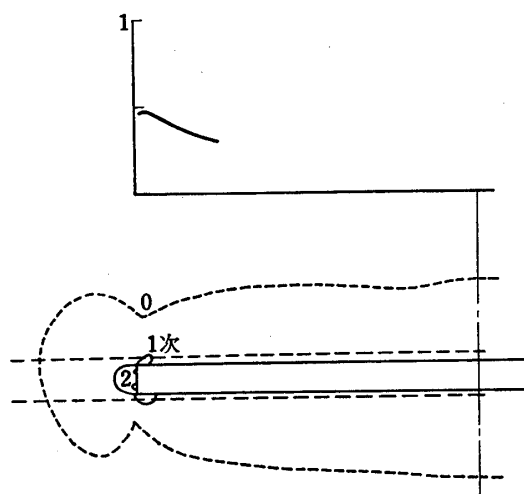


図11 等色線図および界面剪断応力 (P1, P=0 kg)

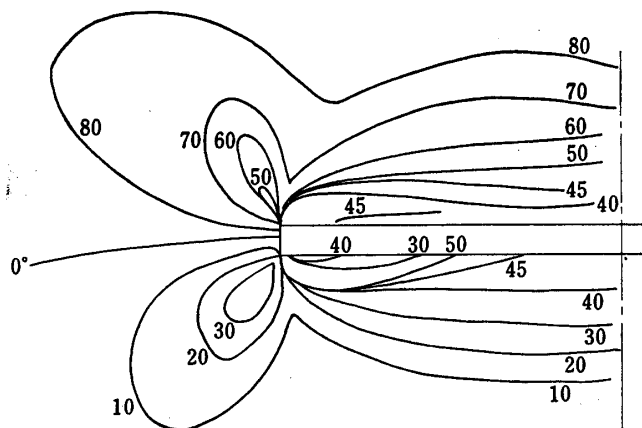


図12 等傾線図 (P1, P=15 kg)

件を満足しているかどうかという点である。第二に、ゴム（ポリウレタン）はフック弾性体ではないが、計算の都合上これをフック弾性体と仮定したことである。第三に、今回行なった光弾性実験は、縞次数もあまり十分でなく、十分な精度が得られていないことである。これらの問題点を除去すれば、計算値と実験値はもっと良い一致を示す可能性があると思われる。

3.2 短繊維強化材のヤング率

本節では、前章の (29) 式および図 7, 8 から得られる複合材料のヤング率の計算値を、各種実験結果と比較する。短繊維強化材料の弾性率を求めた実験報告は少なからずあるが、必ずしも必要なデータを提供していないものが多い。ここでは、そのうち三種の報告と比較を行ない、最後に著者らが行なった実験との比較を行なう。

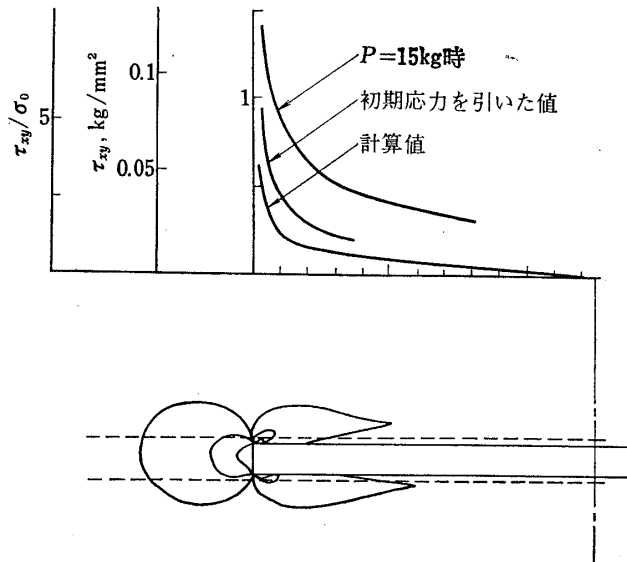


図 13 等色線図および界面剪断応力分布 (P1, P=15 kg)

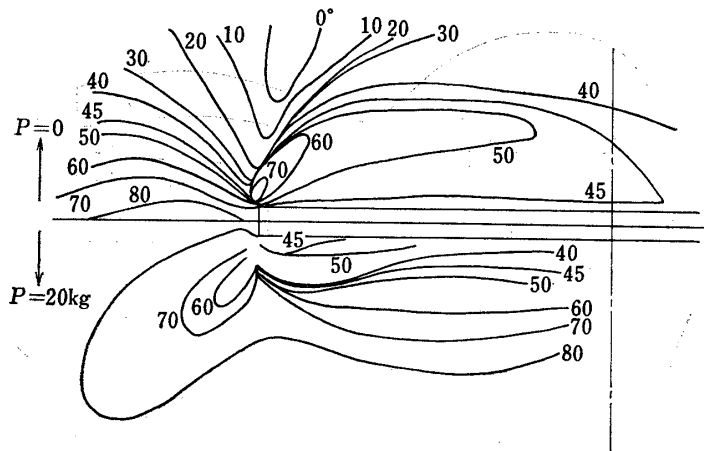


図 14 等傾線図 (P2)

(1) Schierding らの実験[3]

基材は SiC/Al で、SiC (シリコンカーバイド) ウィスカーは図 16 に見られるような長さの分布をしているが、計算上、一様長さとみなし、彼らの論文に出てくる平均アスペクト比 19 を採用した。直径は平均 1.48μ である。繊維の配向は図 17 の実線のような分布 (累積度数分布) をしているが、計算の都合上、確率密度 $g(\theta)$ を cosine 曲線分布で近似した。これは累積度数分布に直すと、図 17 の点線のような分布になる。基材の弾性率についての記述は論文に見出されないで、公称値をとって $E_f=49,000 \text{ kg/mm}^2$ [12], $E_m=7,000 \text{ kg/mm}^2$ とした。以上のデータにより、図 7 から $R_0=0.53$ ($V_s=2.7$)、図 8 から $C_a=0.64$ ($\alpha_0=60^\circ$) となり、(29) 式に代入して

$$K_c = 1.37V_f + 1 \tag{41}$$

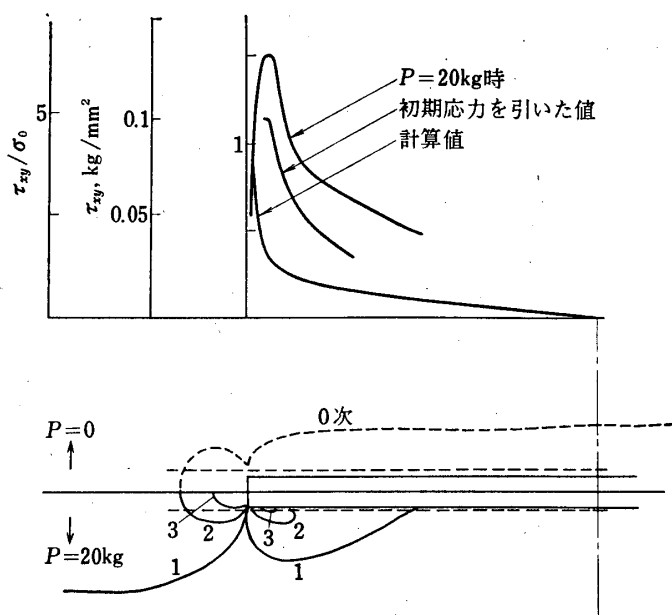


図 15 等色線図および界面剪断応力分布 (P2)

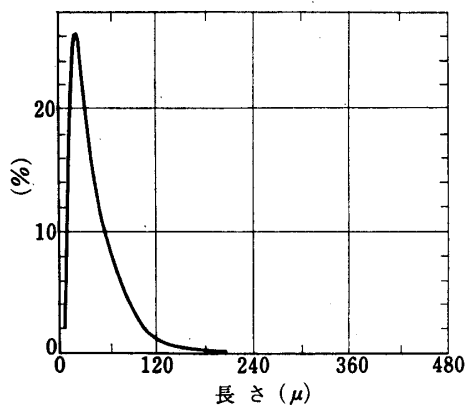


図 16 繊維の長さ分布 (SiC/Al, Ref. 3)

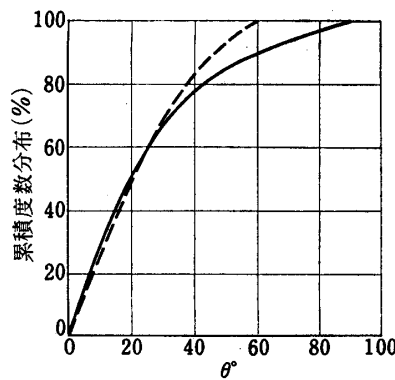


図 17 配向に関する累積度数分布 (SiC/Al, Ref. 3)

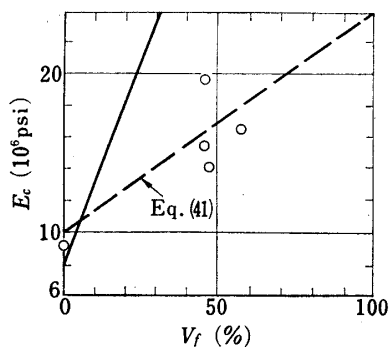


図 18 複合材料のヤング率
(SiC/Al, Ref. 3)

を得る。図 18 の○印は Schierding らの実験値，実線は連続繊維の場合の複合則である。破線は (14) 式から得られる直線であり，(41) 式は実験データをかなりよく説明していると言えよう。

(2) Ishai らの実験[13]

材料はガラス/エポキシで，論文の記述が本計算に適用するには不十分なため，正確な評価は困難である。しかし，論文中に“繊維の長さは 1/8 インチ，これはアスペクト比で 300 以上である”とあるのを，アスペクト比 300 とみなし，マトリックスのヤング率は論文中的値 $E_m=0.40 \times 10^6 \text{psi}$ を採用し，さらに E グラスのヤング率には公称値[12] $7,500 \text{kg/mm}^2$ を用いるならば， $V_s=11.2$ となり，図 7 から $R_0=0.80$ となる。

また，繊維の配向についても，配向角が $10 \sim 15^\circ$ とあるだけで不十分であるが，確率密度 $g(\theta)$ を， $\alpha_0=15^\circ$ の cosine 曲線で近似すると， $C_a=0.98$ となる。

論文では， V_f が 0.50 の場合のヤング率の実験結果 ($2,670 \sim 3,160 \text{kg/mm}^2$) が報告されている。上記の値を (29) 式に代入すると，複合材料のヤング率は $3,080 \text{kg/mm}^2$ と計算される。図 19 に縦線で実験結果を，破線で計算結果を示したが，両者はよく一致する。なお，図中の実線は連続繊維強化の場合の通常複合則であり，その上に乗っている縦線は連続繊維強化の場合の実験値である。

(3) Anderson らの実験[14]

基材はガラス/エポキシおよびボロン/エポキシである。ボロンは直径が $4 \sim 5 \text{mil}$ ，ヤング率が $60 \times 10^6 \text{psi}$ のものを，ガラスは直径が 3.8mil ，ヤング率が $12.7 \times 10^6 \text{psi}$ のものをそれぞれ 1/4, 1/2, 4 インチに切り，またエポキシは増粘剤を加えたり，温度条件を変えたりして，ヤング率を $0.1 \sim 1.02 \text{psi}$ の範囲で変化させて膨大なデータを報告している。これを前章でのべた R_0 と V_s との関係で整理すると図 20 のようになる。・あるいは○の点は

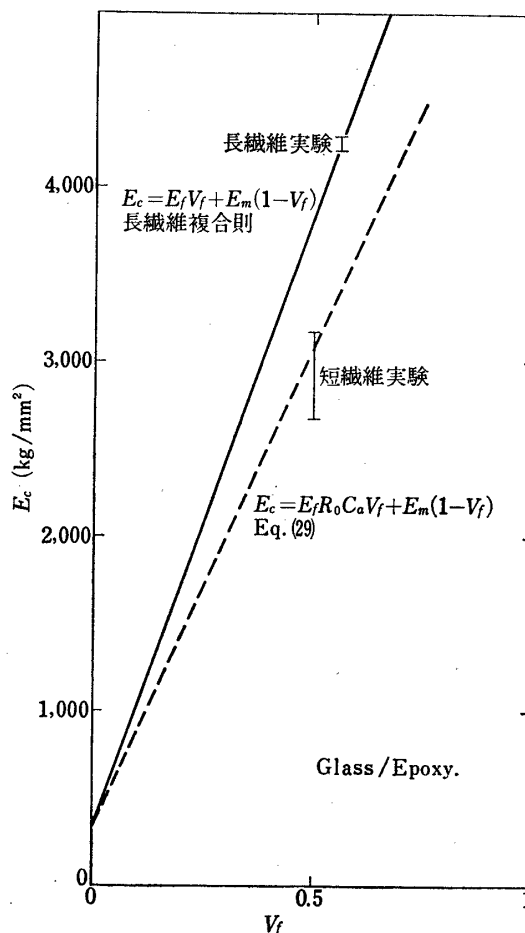


図 19 複合材料のヤング率 (Ref. 13)

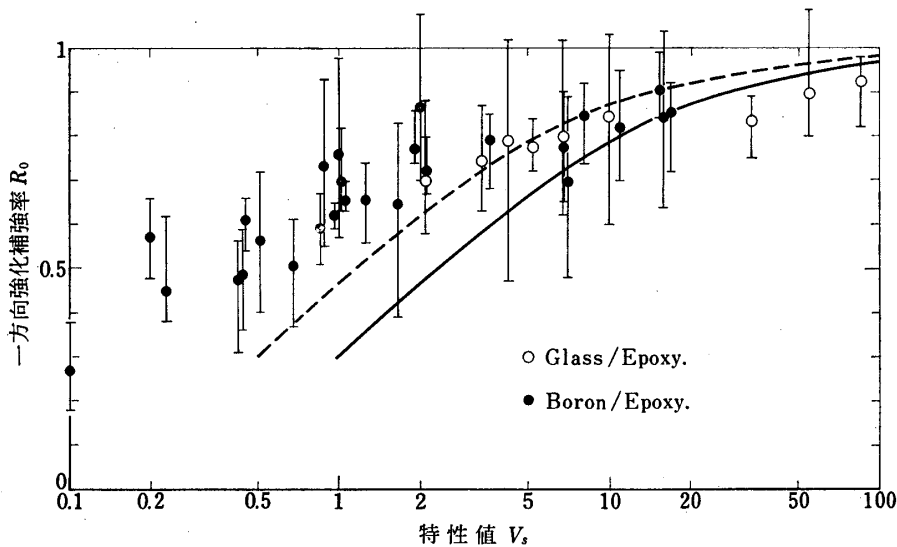


図 20 複合材料のヤング率, $R_0 \sim V_s$ の関係 (Ref. 14)

5~18 個の実験値の平均値であり, それら平均値相互の間にはかなりのバラつきがあるが, ほぼ一つの曲線に乗るような傾向を示しており, 短繊維強化材料を V_s で特徴づけることはほぼ妥当であろう. ちなみに, Anderson らは色々な角度からデータを整理しているが, 図 20 程度のバラつきは避けられないようである.

次に計算値との比較であるが, 計算結果を図 20 に実線で示した. 理論値は実験値の傾向をよく示しているが, V_s が小の領域では両者の間にずれが見られる. これは, 本論文の理論の基礎となった第 2.1 節が, 繊維が十分細いという仮定の上になり立っているため, V_s が小さい所では理論があまり厳密でなくなってきたためと思われる. ただ, 一つ指摘するならば, $V_s=1$ ということは (15) 式の定義によると, $E_f/E_m=20$ の場合 (ガラス/エポキシの組合せに相当) には繊維のアスペクト比が 20 となる. ところで, 市販されているチョップドストランドは, 直径が 9μ 前後に対して長さが 3, 6, 13, 25 mm といったものであり, 繊維のアスペクト比は 300 以上である. 従って $V_s=1$ 付近は実際にはあまり使われない領域といえる. 事実, Anderson ら [14] は, 直径の大きい特別な繊維 ($d \approx 0.1$ mm) を用いてこの実験を行なっている.

(4) 著者らの実験

マトリックスは, エポキシ系のアラルダイト B と無水フタル酸 (硬化剤) を重量比で 100 : 30 に混合したものをを用い, 繊維は旭ファイバークラス製グラスロービング (R 1150 HA 801) を写真用カッターで一定の長さに切ったものをを用いた.

試験片は離型のためにセロファン紙を張ったガラス板をスペーサーで囲い, その中に短かく切ったグラス繊維を均一, 無秩序にばらまき, 樹脂を流し込んだ後, 上からガラス板で押えて板厚を均一にし, 恒温炉の中で 130°C で 24 時間放置後, 徐冷 (約 5 deg/hr) して作り, 機械加工により表 2 の中に略記した図のような形に仕上げた. 試験片は樹脂のみ, 5 mm および 20 mm 長の繊維の入ったものの三種類を, 同じ樹脂から作った. 試験片は 3 枚を重ねて機械加工したため, 外形は板厚を除いて全く等しい. 試験片の諸元は表 2 に示した.

表 2 試験片の諸元および弾性率

試片番号	板厚 t (mm)	繊維長 L_f (mm)	繊維体積含有率 V_f	ヤング率, E_c (kg/mm ²)	
				試験	理論
R1 ⁽¹⁾	2.03	—	—	355.0	355.0 ⁽²⁾
R2	2.19	5.0	9.3%	517.0	470.0 ⁽³⁾
R3	2.26	20.0	6.1	472.2	437.7 ⁽³⁾

(1) マトリックスのみ
 (2) 実験値
 (3) (29) 式
 $E_f=7,500 \text{ kg/mm}^2, W_f=9 \mu$

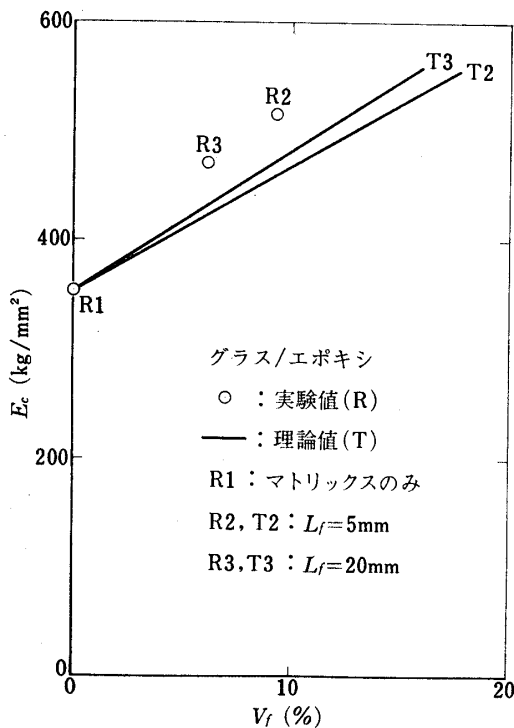
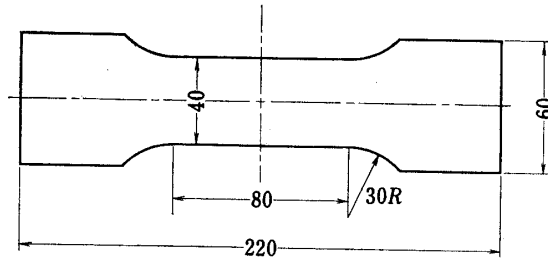


図 21 複合材料のヤング率

式より

$$K_c = 4.48V_f + (1 - V_f) \tag{42}$$

試験機は島津万能試験機 REH-100 を用い、歪の測定は歪ゲージ (KL-20-A4) を用いて行ない、動歪測定器 (共和電業, DM-6J) を介して電磁オシログラフ (横河電機) に記録した。試験機は油圧式のため、歪速度は一定ではないが、ほぼ $\dot{\epsilon} = 3 \times 10^{-4} \text{ sec}$ であった。荷重一伸び線図は破断まではほぼ直線であった。

以上の実験で得られたヤング率を表 2 および図 21 に示す。

次に理論計算であるが、直径 9μ の繊維を二次元繊維とみなし、繊維のヤング率は $7,500 \text{ kg/mm}^2$ とした。マトリックスのヤング率は樹脂のみの試験片の引張り試験で得られた値 (355 kg/mm^2) を採用した。また、繊維は全くランダムに配向されているとして、図 8 より $C_a = 0.237$ を採用した。以上のデータから、繊維の長さが 5 mm のときには $V_s = 26.3$ となり、図 7 から $R_0 = 0.895$ 、したがって (29)

となり、繊維長が 20 mm の場合には $V_s=105$, $R_0=0.965$ より、

$$K_c=4.83V_f+(1-V_f) \quad (43)$$

となる。

これらの式に当該する V_f を代入した値を表 2 に理論値として記入し、また図 21 に (42), (43) 式から得られるヤング率を実線で記入した。表 2 および図 21 によると、計算値は実験値より約 10% 低く出ている。この原因として、解析においては繊維を二次元と仮定し、また繊維間の干渉がないと仮定した点のほか、(27) 式を導いたときに、 $\theta > \theta_0$ なる配向の繊維の補強効果を見逃した点があげられる。ランダム配向の場合には約 30% の繊維が $\theta > \theta_0$ の領域に入る。実際には、一方向強化材の横方向のヤング率もマトリックスそのもののヤング率よりは高く [15]、圧縮を受ける繊維もヤング率に何らかの寄与をするが、本論の解析はその効果を見逃している。

4. 結 論

微小変形・平面応力の弾性論を用いて、短繊維任意方向強化材料の引張り方向のヤング率の推定を試みた。これは繊維間の干渉については考慮されておらず、大きな問題点を残しているが、従来ほとんど皆無であったこの分野に新しい知見を加え、特に一様長さの繊維で強化した薄板のヤング率については、図と簡単な式を用いて容易に求められるようにした点で意義をもつと考える。

この計算結果は多くの実験結果と比較され、大筋において実験結果と一致した。残された問題点はいくつかあるが、与えられた基材で与えられた要求値（ヤング率）を得るには、繊維の長さをどの位にとり、配向のバラつきはどの程度にすればよいといった材料設計への一助となるであろう。

末筆ながら、実験において細部に亘って御協力いただいた橋本彰三、本堂明の両氏に厚くお礼申し上げます。また、光弾性試験片の作成を引き受けていただいた日本油脂(株)川越工場、井田峯人氏に厚くお礼申し上げます。

1974年5月7日 材料部

参 考 文 献

- [1] H. D. Conway & C. I. Chang: The Effective Elastic Constants and Bond Stresses for a Fiber Reinforced Elastic Sheet, *Fibre Sci. Tech.*, 3 (1971), 249.
- [2] C. I. Chang, H. D. Conway & T. C. Weaver: The Elastic Constants and Bond Stresses for a Three-Dimensional Composite Reinforced by Discontinuous Fibers, *Fibre Sci. Tech.*, 5 (1972), 143.
- [3] R. G. Schierding & O. deS. Deex: Factors Influencing the Properties of Whisker-Metal Composites, *J. Comp. Mat.*, 3 (1969), 618.
- [4] R. W. Tock & D. E. McMackins: Experimental Studies of the Tensile Properties of Discontinuous Fiber Reinforced Plastics, *Preprint Mater. Eng. Sci. Div. Bien. Conf. Am. Inst. Chem. Engrs*, (Feb. 1970), 433.
- [5] 岸谷孝一, 平居孝之: せんい強化複合材料の降伏強度試算式, 日本建築学会大会学術講演会梗概

集, (1971.11), 223.

- [6] T. Hayashi: Photoelastische Untersuchungen der Spannungsverteilung in der durch Fasern Verstärkten Platte, Proc. I. U. T. A. M. Symposium, Warsaw (1958), 501.
- [7] T. Hayashi: Reinforcement Effect of Fibers in Fiber-Reinforced Plastics, Proc. 5th Inter. Symposium on Space Tech. and Sci., Tokyo (1963), 683.
- [8] B. Bürgel, A. J. Perry & W. R. Schneider: On the Theory of Fibre Strengthening, J. Mech. Phys. Solids, 18 (1970), 101.
- [9] D. R. J. Owen: Analysis of Fibre-Reinforced Materials by an Initial Strain Method, Fibre Sci. Tech., 5 (1972), 32.
- [10] D. R. J. Owen: 私信.
- [11] 河田幸三, 橋本彰三, 本堂 明: FRP の微視力学の光弾性的研究について, 東京大学宇宙航空研究所報告, 4-3(B), (1968), 435.
- [12] 林 毅編: 複合材料工学, 日科技連 (1971), p. 97, p. 84.
- [13] O. Ishai & R. E. Lavengood: Tensile Characteristics of Discontinuous "Unidirectional" Glass-Epoxy Composites, Proc. 24th Ann. Tech. Conf. SPI, (1969), 11-F.
- [14] R. M. Anderson & R. E. Lavengood: Variables Affecting Strength and Modulus of Short Fiber Composites, SPE J., 24 (1968), 20.
- [15] たとえば, C. H. Chen & S. Cheng: Mechanical Properties of Fiber Reinforced Composites, J. Comp. Mat., 1 (1967), 30.
- [16] 福田 博, 河田幸三: 短繊維強化複合材料の剛性試算, 宇宙航空工学における FRP シンポジウム(第6回), (1972.3), 1.
- [17] H. Fukuda, K. Kawata: On the Elastic Modulus of Short Fiber Reinforced Composites, Fukugo Zairyo (Composite Materials), 1 (1972), 35.
- [18] 福田 博: 不連続繊維強化複合材料の内部応力, 剛性, 強度に関する研究, 学位論文(東京大学), (1972).
- [19] H. Fukuda, K. Kawata: On Young's Modulus of Short Fibre Composites, Fibre Sci. Tech., to appear (accepted).