

短繊維理想成形複合材料の内部応力

福田 博・河田 幸三

The Internal Stresses of Ideally Formed Short Fiber Composites

By

Hiroshi FUKUDA and Kozo KAWATA

Abstract: The axial stress of a fiber, the shear stress at the fiber-matrix interface and the stress in the matrix of short fiber composites under tension are calculated using a new model proposed by the authors. In the present model, the fiber and the matrix do not overlap at the region corresponding to the fiber, while they overlap in most of the former reports published by other authors. Calculations are performed for ideally formed composites, that is, single short fiber models and models of regular fiber array. Effects of the aspect ratio of the fiber and the modulus ratio of the fiber and matrix are clarified in the former case. Effects of the spacing of fibers are discussed in the latter case. Experiments are also done. The numerical results are found to coincide fairly well with the experimental data.

概 要

短繊維を理想的にならべた複合材料を引張ったときに生ずる内部応力を平面弾性問題として解く。従来の解析の矛盾をとり除き、かつ計算を容易にするため新しいモデルが提案されている。

計算結果は実験結果と比較され、かなりよく一致することが確かめられている。

1. 序

複合材料はその優れた特性を生かして、今日広い範囲で活用されている。短繊維強化材は連続繊維強化材に比べて強度、剛性の点では劣るが、成形性の点では、たとえば射出成形が可能である（連続繊維では不可能）など、有利な点を持っており、自動車部品、電気器具、日用品などに欠かせない材料となっている。短繊維強化材を有効に使うためには、その強度、剛性を知る必要があるが、現実の材料では、強度、剛性に影響を及ぼす要因はあまりにも多く、また複雑であるため、解析的研究はほとんどなされていないのが現状である。しかし、その強度、剛性を知るための第一段階のところ、すなわち、単一短繊維モデルあるいは短繊維を理想的に配列したモデルを繊維方向に引張ったとき、繊維とマトリックスの間の干渉（力の伝達）がどうなるか、といった問題に対しては、数多くの研究が報告されている。

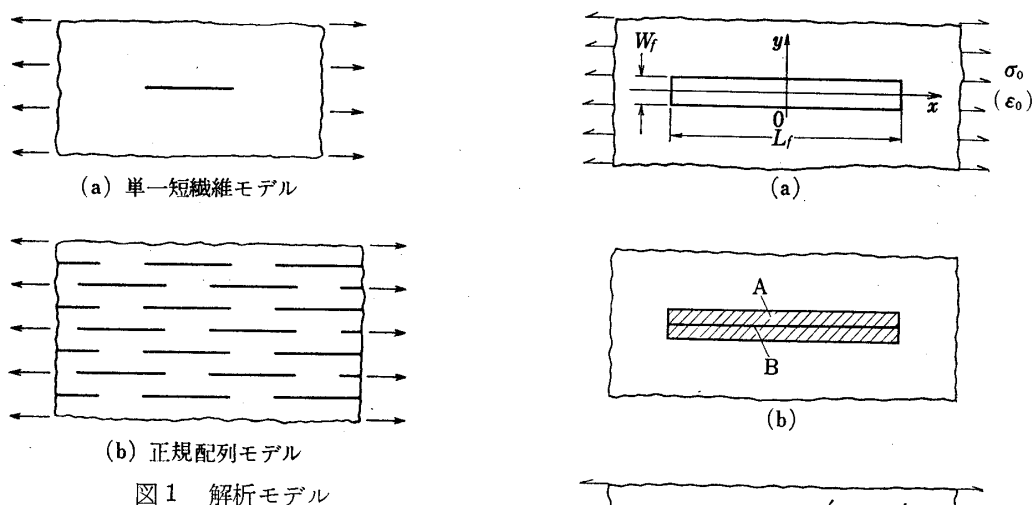


図1 解析モデル

[1]~[15]. しかしながら, これらの研究は, 繊維を一次元と仮定したり, 繊維の配列間隔が非現実的であったりするなど, 必ずしも十分とは言えない.

本論では, 短繊維を理想的にならべて成型した複合材料をとりあげ, 単一短繊維モデル (図1 (a)) および短繊維正規配列モデル (図1 (b)) を繊維方向に引張ったときに生ずる内部応力状態を, 筆者らが提案している考え方をを用いて解析する. 後者のモデルにおいては, ヤング率の推定も行なう. 解析には, 微小変形, 平面応力弾性論を用いた. なお, 実験との比較もあわせて行なう.

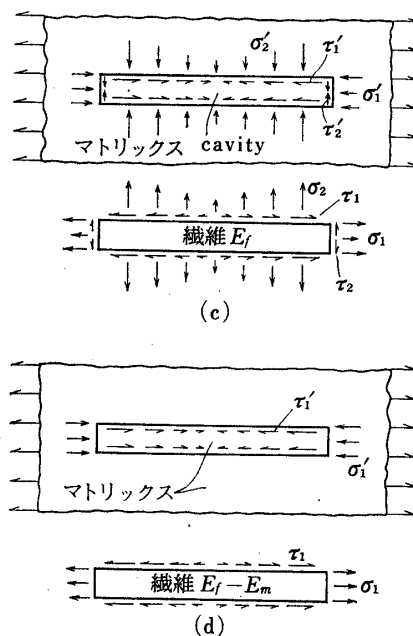


図2 単一短繊維モデルの詳細

2. 解 析

2.1 単一短繊維モデルの解析

従来の議論は, 図2 (a)のようなモデルの内部応力を考えるにあたって, 繊維は十分細いとして, 繊維をマトリックスの伸びを拘束するための力 (x 軸上に働らく) におきかえて問題を解こうとしているのが大半であり, 得られた結果は有限繊維幅の場合に拡張されて用いられている. その際, 繊維に相当する部分の弾性率は E_f ではなく, マトリックスの弾性率が加算された形で扱われているようである. すなわち, 図2 (b)について説明するならば, 実際の繊維Aを線要素Bでおきかえるわけで, このこと自体は繊維強化ゴムにおける Rivlin の仮定 (一方向強化ゴムで $V_f \rightarrow 0$, $E_f \rightarrow \infty$ として有限の縦方向ヤング率 E_L を作り出す) と同じ考え方で, ある近似の範囲で有効であろう. しかし, この際, Aの繊維と, 理想化され

た B の繊維は等価に、すなわち、A のヤング率と断面積の積は B の弾性率（実は無限大）と断面積（実は無限小）の積に等しくとられており、しかも図の斜線部にマトリックスが存在するとしている。従って、解析終了後に繊維 B を A に引き戻して議論を続けるならば、図 2 (b) の斜線部は繊維とマトリックスが重複していることになる。

本論文では上述の矛盾に対して、繊維とマトリックスの重複が起らないようにするため、次に述べる新しい考え方を提案する。

2.1.1 考え方の基礎

図 2 (a) のモデルを詳細に検討するならば、図 2 (c) のように、マトリックスについては、繊維に相当する部分に穴のあいたマトリックス板が、無限遠点応力 (σ_0) と、繊維-マトリックス間の界面応力 ($\sigma_1', \sigma_2', \tau_1', \tau_2'$) をうけて変形し、一方繊維の方は、界面における反作用 ($\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$) をうけて変形する。この界面応力ないし変形量は、界面における繊維とマトリックスの変位が等しい (No slip) という条件を用いて求めることができる。しかし、この矩形挿入物 (inclusion) の問題を厳密に解くことはむづかしく、ここでは以下の仮定を設けて問題を単純化させる (図 2 (d) 参照)。

(1) 界面応力のうち、 τ_1', σ_1' のみを考慮に入れる。従ってこのモデルは y 方向の力及び変位について厳密に考察していないことになるが、 x 方向にのみ焦点をあてるならば、大きな過誤はないであろう。さらに σ_1' は、繊維の幅にそって一定 (p_0') とする。前半の考え方は Conway のグループの研究 [10]~[12] を除いて多くの研究者が暗黙のうちに採用しているものである [6], [8], [9], [15]。また、端部伝達応力 (σ_1') を考慮に入れた解析は、Owen [15] が行なっているものを除いては初めてである。

(2) 繊維を仮想的にヤング率 E_m の部分と $E_f - E_m$ の部分に分け、前者を一時的にマトリックスとみなし、マトリックスを穴のない無限平板とする。すなわち、穴のあいたマトリックスとヤング率 E_f の繊維の組み合わせを、穴のないマトリックスとヤング率 $E_f - E_m$ の仮想繊維の組み合わせとみるわけである。この考え方は、本節冒頭で触れた矛盾を解決するために導入されたもので、本節の考え方の最大の特徴となる点である。

(3) 繊維とマトリックスは界面において変位が等しくなければならないが、繊維の中心軸において x 方向の変位が等しいということで代行する。 y 方向の変位については考慮しない。

以上の仮定をもとに、無限遠点応力、界面応力 (未知量) によるマトリックスの歪および、界面応力による繊維の歪を未知量を含んだ形で計算し、その二つが繊維の中心軸で等しいという条件から未知量を求める。

2.1.2 基礎方程式

(a) マトリックス場の応力と歪

マトリックスを変形させる要因は、図 2 (d) 中の、(1) 無限遠点応力 σ_0 、(2) 界面剪断応力 τ' 、端部伝達応力 p_0' の三つである。これらの応力によるマトリックス中の応力、歪を逐次求める。

(1) σ_0 による (x, y) 点の応力、 $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ 。

これは、

$$\sigma_x^1 = \sigma_0, \quad \sigma_y^1 = 0, \quad \tau_{xy}^1 = 0 \quad (1)$$

である。

(2) τ' による (x, y) 点の応力, $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \tau_{xy}^2$.

図3のように, (x_0, y_0) 点に働く x 方向の集中力 P (kg/mm) による (x, y) 点の応力は [16],

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{4\pi} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \left[-(3+\nu) + 2(1+\nu) \frac{(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{P}{4\pi} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \left[(1-\nu) - 2(1+\nu) \frac{(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{4\pi} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \left[(1-\nu) + 2(1+\nu) \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。したがって, 図2(d)中の分布応力 τ' による (x, y) 点の応力は, (2)式の P を $\tau'(\xi)$ におきかえ, 繊維側面に沿って積分することにより,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^l \left\{ \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-w)^2} \left[-(3+\nu) + 2(1+\nu) \frac{(y-w)^2}{(x-\xi)^2+(y-w)^2} \right] \right. \\ &\quad + \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y+w)^2} \left[-(3+\nu) + 2(1+\nu) \frac{(y+w)^2}{(x-\xi)^2+(y+w)^2} \right] \\ &\quad - \frac{x+\xi}{(x+\xi)^2+(y-w)^2} \left[-(3+\nu) + 2(1+\nu) \frac{(y-w)^2}{(x+\xi)^2+(y-w)^2} \right] \\ &\quad \left. - \frac{x+\xi}{(x+\xi)^2+(y+w)^2} \left[-(3+\nu) + 2(1+\nu) \frac{(y+w)^2}{(x+\xi)^2+(y+w)^2} \right] \right\} \tau'(\xi) d\xi \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^l \left\{ \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-w)^2} \left[(1-\nu) - 2(1+\nu) \frac{(y-w)^2}{(x-\xi)^2+(y-w)^2} \right] \right. \\ &\quad + \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y+w)^2} \left[(1-\nu) - 2(1+\nu) \frac{(y+w)^2}{(x-\xi)^2+(y+w)^2} \right] \\ &\quad - \frac{x+\xi}{(x+\xi)^2+(y-w)^2} \left[(1-\nu) - 2(1+\nu) \frac{(y-w)^2}{(x+\xi)^2+(y-w)^2} \right] \\ &\quad \left. - \frac{x+\xi}{(x+\xi)^2+(y+w)^2} \left[(1-\nu) - 2(1+\nu) \frac{(y+w)^2}{(x+\xi)^2+(y+w)^2} \right] \right\} \tau'(\xi) d\xi \\ \tau_{xy}^2 &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^l \left\{ \frac{y-w}{(x-\xi)^2+(y-w)^2} \left[(1-\nu) + 2(1+\nu) \frac{(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-w)^2} \right] \right. \\ &\quad + \frac{y+w}{(x-\xi)^2+(y+w)^2} \left[(1-\nu) + 2(1+\nu) \frac{(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y+w)^2} \right] \\ &\quad - \frac{y-w}{(x+\xi)^2+(y-w)^2} \left[(1-\nu) + 2(1+\nu) \frac{(x+\xi)^2}{(x+\xi)^2+(y-w)^2} \right] \\ &\quad \left. - \frac{y+w}{(x+\xi)^2+(y+w)^2} \left[(1-\nu) + 2(1+\nu) \frac{(x+\xi)^2}{(x+\xi)^2+(y+w)^2} \right] \right\} \tau'(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。ここで, l は繊維の長さの半分, w は繊維の幅の半分である。

(3) p_0' による (x, y) 点の応力, $\sigma_x^3, \sigma_y^3, \tau_{xy}^3$.

(2)と同様の考え方で求めることができる。すなわち, 2.1.1項の仮定(1)の後半を用

いて p_0' (=一定) を積分の外に出し、繊維端末の幅にそって積分することによって、

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x^3 &= \frac{p_0'}{4\pi} \int_0^w \left\{ \frac{x-l}{(x-l)^2+(y-\eta)^2} \left[-(3+\nu)+2(1+\nu) \frac{(y-\eta)^2}{(x-l)^2+(y-\eta)^2} \right] \right. \\
 &\quad + \frac{x-l}{(x-l)^2+(y+\eta)^2} \left[-(3+\nu)+2(1+\nu) \frac{(y+\eta)^2}{(x-l)^2+(y+\eta)^2} \right] \\
 &\quad - \frac{x+l}{(x+l)^2+(y-\eta)^2} \left[-(3+\nu)+2(1+\nu) \frac{(y-\eta)^2}{(x+l)^2+(y-\eta)^2} \right] \\
 &\quad \left. - \frac{x+l}{(x+l)^2+(y+\eta)^2} \left[-(3+\nu)+2(1+\nu) \frac{(y+\eta)^2}{(x+l)^2+(y+\eta)^2} \right] \right\} d\eta \\
 \sigma_y^3 &= \frac{p_0'}{4\pi} \int_0^w \left\{ \frac{x-l}{(x-l)^2+(y-\eta)^2} \left[(1-\nu)-2(1+\nu) \frac{(y-\eta)^2}{(x-l)^2+(y-\eta)^2} \right] \right. \\
 &\quad + \frac{x-l}{(x-l)^2+(y+\eta)^2} \left[(1-\nu)-2(1+\nu) \frac{(y+\eta)^2}{(x-l)^2+(y+\eta)^2} \right] \\
 &\quad - \frac{x+l}{(x+l)^2+(y-\eta)^2} \left[(1-\nu)-2(1+\nu) \frac{(y-\eta)^2}{(x+l)^2+(y-\eta)^2} \right] \\
 &\quad \left. - \frac{x+l}{(x+l)^2+(y+\eta)^2} \left[(1-\nu)-2(1+\nu) \frac{(y+\eta)^2}{(x+l)^2+(y+\eta)^2} \right] \right\} d\eta \\
 \tau_{xy}^3 &= -\frac{p_0'}{4\pi} \int_0^w \left\{ \frac{y-\eta}{(x-l)^2+(y-\eta)^2} \left[(1-\nu)+2(1+\nu) \frac{(x-l)^2}{(x-l)^2+(y-\eta)^2} \right] \right. \\
 &\quad + \frac{y+\eta}{(x-l)^2+(y+\eta)^2} \left[(1-\nu)+2(1+\nu) \frac{(x-l)^2}{(x-l)^2+(y+\eta)^2} \right] \\
 &\quad - \frac{y-\eta}{(x+l)^2+(y-\eta)^2} \left[(1-\nu)+2(1+\nu) \frac{(x+l)^2}{(x+l)^2+(y-\eta)^2} \right] \\
 &\quad \left. - \frac{y+\eta}{(x+l)^2+(y+\eta)^2} \left[(1-\nu)+2(1+\nu) \frac{(x+l)^2}{(x+l)^2+(y+\eta)^2} \right] \right\} d\eta
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。

(x, y) 点の応力は上記 (1), (3), (4) 式を加算して、

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_x^1 + \sigma_x^2 + \sigma_x^3 \\
 \sigma_y &= \sigma_y^1 + \sigma_y^2 + \sigma_y^3 \\
 \tau_{xy} &= \tau_{xy}^1 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xy}^3
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

として得られる。また、その点の歪は平面応力の仮定より、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E_m} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E_m} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \\
 \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E_m} \tau_{xy}
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、次に (b) で述べる繊維の応力、歪との統一性の関係で、マトリックスに働らく力を繊維に働らく力でおきかえる。すなわち、

$$\tau'(\xi) = -\tau(\xi), \quad p_0' = -p_0 \quad (7)$$

である。次に、界面剪断応力を繊維の引張り応力 $\sigma(x)$ で表現する。すなわち、繊維の微小部分の力の釣合い (図4参照) から、

$$\tau(x) = -\frac{W_f}{2} \frac{d\sigma(x)}{dx} \quad (8)$$

となる。(7), (8) 式を (5) 式に代入すれば、マトリックス中の任意の位置の応力は繊維の軸応力の関数としてあらわされる。さらに、

$$\left. \begin{aligned} u &= x/l, \quad v = y/l, \quad p = \xi/l, \quad q = w/l, \quad r = \eta/l, \\ \bar{\sigma}(p) &= \frac{\sigma(lp)}{\sigma_0}, \quad \alpha = \frac{p_0}{\sigma_0} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

という新しい記号を導入して、(5) 式を無次元化すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_0} &= 1 - \frac{q}{4\pi} \int_0^1 \{-(3+\nu)C_1 + 2(1+\nu)C_2\} \frac{d\bar{\sigma}(p)}{dp} dp + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^q \{-(3+\nu)C_3 + 2(1+\nu)C_4\} dr \\ \frac{\sigma_y}{\sigma_0} &= -\frac{q}{4\pi} \int_0^1 \{(1-\nu)C_1 - 2(1+\nu)C_2\} \frac{d\bar{\sigma}(p)}{dp} dp + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^q \{(1-\nu)C_3 - 2(1+\nu)C_4\} dr \\ \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} &= -\frac{q}{4\pi} \int_0^1 \{(1-\nu)C_5 + 2(1+\nu)C_6\} \frac{d\bar{\sigma}(p)}{dp} dp + \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^q \{(1-\nu)C_7 + 2(1+\nu)C_8\} dr \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{p-u}{(p-u)^2 + (q-v)^2} + \frac{p-u}{(p-u)^2 + (q+v)^2} + \frac{p+u}{(p+u)^2 + (q-v)^2} + \frac{p+u}{(p+u)^2 + (q+v)^2} \\ C_2 &= \frac{(p-u)(q-v)^2}{\{(p-u)^2 + (q-v)^2\}^2} + \frac{(p-u)(q+v)^2}{\{(p-u)^2 + (q+v)^2\}^2} + \frac{(p+u)(q-v)^2}{\{(p+u)^2 + (q-v)^2\}^2} + \frac{(p+u)(q+v)^2}{\{(p+u)^2 + (q+v)^2\}^2} \\ C_3 &= \frac{1-u}{(1-u)^2 + (r-v)^2} + \frac{1-u}{(1-u)^2 + (r+v)^2} + \frac{1+u}{(1+u)^2 + (r-v)^2} + \frac{1+u}{(1+u)^2 + (r+v)^2} \\ C_4 &= \frac{(1-u)(r-v)^2}{\{(1-u)^2 + (r-v)^2\}^2} + \frac{(1-u)(r+v)^2}{\{(1-u)^2 + (r+v)^2\}^2} + \frac{(1+u)(r-v)^2}{\{(1+u)^2 + (r-v)^2\}^2} + \frac{(1+u)(r+v)^2}{\{(1+u)^2 + (r+v)^2\}^2} \\ C_5 &= -\frac{q-v}{(p-u)^2 + (q-v)^2} + \frac{q+v}{(p-u)^2 + (q+v)^2} + \frac{q-v}{(p+u)^2 + (q-v)^2} - \frac{q+v}{(p+u)^2 + (q+v)^2} \\ C_6 &= -\frac{(q-v)(p-u)^2}{\{(p-u)^2 + (q-v)^2\}^2} + \frac{(q+v)(p-u)^2}{\{(p-u)^2 + (q+v)^2\}^2} + \frac{(q-v)(p+u)^2}{\{(p+u)^2 + (q-v)^2\}^2} - \frac{(q+v)(p+u)^2}{\{(p+u)^2 + (q+v)^2\}^2} \\ C_7 &= -\frac{r-v}{(1-u)^2 + (r-v)^2} + \frac{r+v}{(1-u)^2 + (r+v)^2} + \frac{r-v}{(1+u)^2 + (r-v)^2} - \frac{r+v}{(1+u)^2 + (r+v)^2} \\ C_8 &= -\frac{(r-v)(1-u)^2}{\{(1-u)^2 + (r-v)^2\}^2} + \frac{(r+v)(1-u)^2}{\{(1-u)^2 + (r+v)^2\}^2} + \frac{(r-v)(1+u)^2}{\{(1+u)^2 + (r-v)^2\}^2} - \frac{(r+v)(1+u)^2}{\{(1+u)^2 + (r+v)^2\}^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(b) 繊維の応力と歪

(a) の中に出てくる繊維の軸応力 $\sigma(x)$, $\bar{\sigma}(p)$ は、ヤング率 $E_f - E_m$ の仮想繊維に対してであった。したがって繊維の歪は

$$\varepsilon_f(x) = \frac{\sigma(x)}{E_f - E_m} \quad (12)$$

となる。ここで、

$$K = E_f / E_m \quad (13)$$

とおき、(9) 式を考慮に入れるならば、(12) 式より、

$$\frac{\varepsilon_f(lu)}{\varepsilon_0} = \frac{\bar{\sigma}(u)}{K-1} \quad (14)$$

となる。ここで、本節 2.1.1 項の仮定 (2) の制約をとり除き、もとの弾性率 E_f の繊維について軸応力を求めるならば、(14) 式より、

$$\frac{\sigma_f(lu)}{\sigma_0} = \frac{K}{K-1} \bar{\sigma}(u) \quad (15)$$

となる。従来の解析は、(15) 式の右辺の係数 $K/(K-1)$ があいまいなまま 1 とされていたようである。

(c) 基礎方程式

2.1.1 項 (3) の仮定は

$$\frac{\varepsilon_x(lu, 0)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_f(lu)}{\varepsilon_0}, \quad (0 < u < 1) \quad (16)$$

と表現できる。これが基礎方程式である。

2.1.3 解 法

(10) 式の後半の積分は解析的に可能であるが、前半の積分には未知関数 $\bar{\sigma}(p)$ を含んでいるため、このままでは計算を続行することができない。そこで、積分領域 $[0, 1]$ を n_0 の部分に分け、各領域の開始点、終了点を p_n, p_{n+1} とおき、各領域 (p_n, p_{n+1}) で $d\bar{\sigma}(p)/dp =$ 一定と仮定する。すなわち、

$$S_n = \bar{\sigma}(p_n) \quad (17)$$

とおき、

$$\frac{d\bar{\sigma}(p)}{dp} = \frac{S_{n+1} - S_n}{p_{n+1} - p_n} \quad (18)$$

とするわけである。こうすれば (10) 式の前半の積分において、 $d\bar{\sigma}(p)/dp$ は積分の外に出すことができ、(10) 式は結局、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_0} &= 1 - \frac{q}{4\pi} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{S_{n+1} - S_n}{p_{n+1} - p_n} \{ -(3+\nu)I_1(n) + 2(1+\nu)I_2(n) \} \\ &\quad + \frac{\alpha}{4\pi} \{ -(3+\nu)I_3 + 2(1+\nu)I_4 \} \\ \frac{\sigma_y}{\sigma_0} &= -\frac{q}{4\pi} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{S_{n+1} - S_n}{p_{n+1} - p_n} \{ (1-\nu)I_1(n) - 2(1+\nu)I_2(n) \} \\ &\quad + \frac{\alpha}{4\pi} \{ (1-\nu)I_3 - 2(1+\nu)I_4 \} \\ \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} &= -\frac{q}{4\pi} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{S_{n+1} - S_n}{p_{n+1} - p_n} \{ (1-\nu)I_5(n) + 2(1+\nu)I_6(n) \} \\ &\quad + \frac{\alpha}{4\pi} \{ (1-\nu)I_7 + 2(1+\nu)I_8 \} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} I_1(n) &= \int_{p_n}^{p_{n+1}} C_1 dp, & I_2(n) &= \int_{p_n}^{p_{n+1}} C_2 dp, & I_5(n) &= \int_{p_n}^{p_{n+1}} C_5 dp, & I_6(n) &= \int_{p_n}^{p_{n+1}} C_6 dp \\ I_3 &= \int_0^q C_3 dr, & I_4 &= \int_0^q C_4 dr, & I_7 &= \int_0^q C_7 dq, & I_8 &= \int_0^q C_8 dq \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

である。(20) 式は解析的に積分が可能である。

したがって (16) 式は

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{q}{4\pi} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{S_{n+1} - S_n}{p_{n+1} - p_n} \{ (-3 - 2\nu + \nu^2)(I_1(n))_{v=0} + 2(1 + \nu)^2(I_2(n))_{v=0} \} \\ + \frac{\alpha}{4\pi} \{ (-3 - 2\nu + \nu^2)(I_3)_{v=0} + 2(1 + \nu)^2(I_4)_{v=0} \} = \frac{\bar{\sigma}(u)}{K-1} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。ここで $(I_1(n))_{v=0}$ 等は, (20) 式で $v=0$ とおいた値である。(21) 式は u の全領域 $[0, 1]$ にわたって満足されねばならないが, ここでは $[0, 1]$ の区間を n_0 分割し, 両端を含めた n_0+1 個の点で (21) 式が満足されるように S_n を決定する。もしこの分割のしかたを本項の冒頭で述べた積分領域の分割のしかたと同一にし, 出発点も含めて m 番目の点を u_m とするならば,

$$S_m = \bar{\sigma}(u_m) \quad (22)$$

となり, さらに定義により

$$\alpha = S_{n_0+1} \quad (23)$$

となる。したがって (21) 式は次式のように S_n ($n=1, 2, \dots, n_0+1$) を未知数とする n_0+1 元一次連立方程式となる。

$$1 - \frac{q}{4\pi} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{S_{n+1} - S_n}{\Delta_n} L_{mn} + \frac{S_{n_0+1}}{4\pi} M_m = \frac{S_m}{K-1} \quad (m=1, 2, \dots, n_0+1) \quad (24)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} L_{mn} &= (-3 - 2\nu + \nu^2)(I_1(n))_{u=u_m, v=0} + 2(1 + \nu)^2(I_2(n))_{u=u_m, v=0} \\ M_m &= (-3 - 2\nu + \nu^2)(I_3)_{u=u_m, v=0} + 2(1 + \nu)^2(I_4)_{u=u_m, v=0} \\ \Delta_n &= p_{n+1} - p_n \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(24) 式を S_n について整理する。すなわち, $m \neq n$ のときには,

$$\left. \begin{aligned} B(m, n) &= -\frac{q}{4\pi} \frac{L_{mn}}{\Delta_n} & (n=1) \\ B(m, n) &= \frac{q}{4\pi} \left(\frac{L_{mn-1}}{\Delta_{n-1}} - \frac{L_{mn}}{\Delta_n} \right) & (n=2, \dots, n_0) \\ B(m, n) &= \frac{q}{4\pi} \frac{L_{mn-1}}{\Delta_{n-1}} - \frac{M_m}{4\pi} & (n=n_0+1) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

とおき, $m=n$ のときには (26) 式に $1/(K-1)$ を加えたものを改めて $B(m, n)$ とすると, (24) 式は

$$\sum_{n=1}^{n_0+1} S_n B(m, n) = 1 \quad (m=1, 2, \dots, n_0+1) \quad (27)$$

となる。これを解けば S_n (ヤング率 $E_f - E_m$ の仮想繊維の引張り応力) が得られ, (17) 式

を介して (15) 式に代入すれば実際の繊維の引張り応力が得られる。また、界面剪断応力は (8), (9) および (18) 式から求めることができる。さらに、マトリックス中の応力, 歪は (19), (6) 式より求められる。

2.1.4 計算結果と検討

従来の研究からも明らかなように、繊維の引張り応力は繊維端末に近づくに従って急激に変化するので、積分領域 $[0, 1]$ を n_0 等分するよりは 1 の近傍で分割を細かくした方が精度がよくなるであろう。そのため、ここでは (17) 式以降の計算にあたって

$$p_n = \sin \frac{\pi}{2} \frac{n-1}{n_0} \quad (28)$$

という分割を行なった。

最初に分割の項数 (n_0) による計算精度をチェックするために、 n_0 を 10, 20, 30 としたときの繊維の引張り応力の比較を行なった。図 5 に繊維のアスペクト比 (L_f/W_f) が 1000, 繊維とマトリックスのヤング率比 (E_f/E_m) が 2 及び 100 の場合について示した。縦軸は繊維の軸応力の無次元化量をさらに E_f/E_m で割った量で示してある。この量は、連続繊維の場合には 1 となるべきものであり、連続繊維との比較のうえで便利なので、今後多く採用する。図 5 によると、 n_0 の項数による差はあまり大きくない。従って今後の計算は $n_0=10$ のものを基本とする。なお、本項でのべる計算はすべて $\nu=0.3$ とした。

計算は L_f/W_f については 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000, E_f/E_m については 2, 5, 10, 20, 50, 100 をとり、その組合せについて行なった。 L_f/W_f が 50 以下の場合には十分な値が得られなかったが、これは、繊維の幅が大きくなるに従って、本節 2.1.1 項の仮定がだんだん現実的でなくなるためと思われる。しかし、 $L_f/W_f=50$ といった小さい値を実際に用いることはあまりなく、実用面ではあまり問題がないであろう。

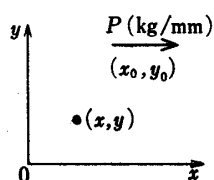


図3 集中力

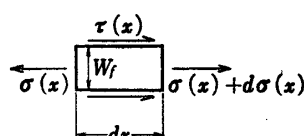


図4 繊維の力の釣合い

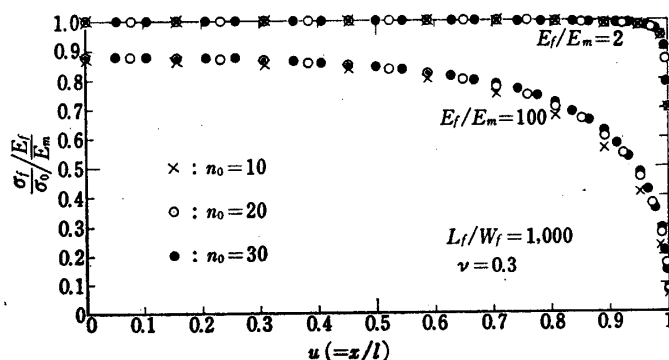


図5 計算の精度のチェック

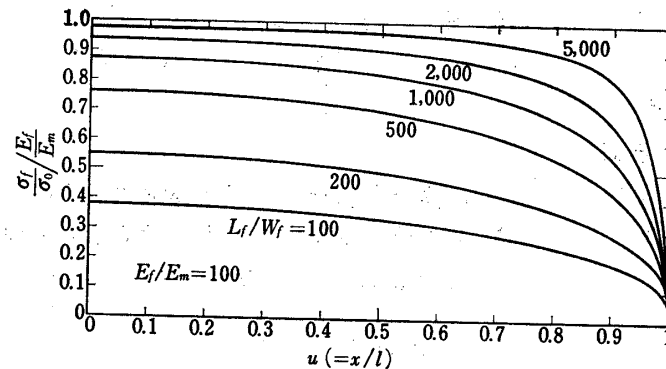


図6(a) 繊維の軸応力分布

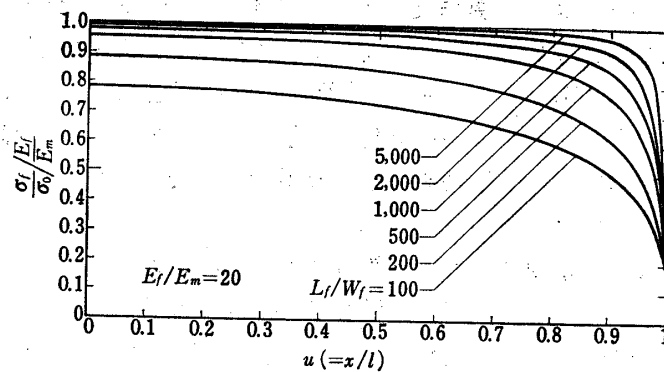


図6(b) 繊維の軸応力分布

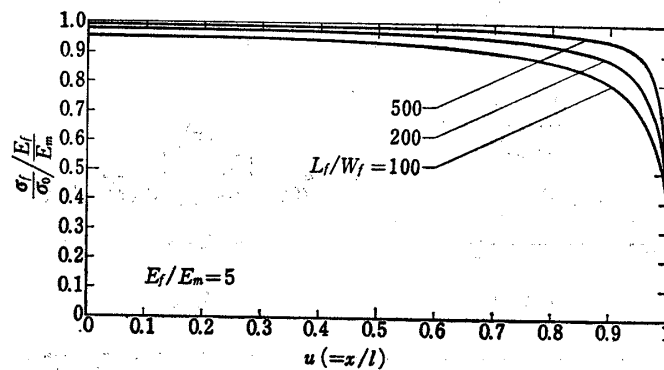


図6(c) 繊維の軸応力分布

図6に繊維の軸応力分布，図7に界面剪断応力分布を系統的に示した．先ず，図6に着目するならば，同じ E_f/E_m でも，繊維のアスペクト比 (L_f/W_f) が大きくなれば繊維の軸応力は長繊維の場合に近付くことがわかる．これは直観的にも承認されるであろう．次に，同じ L_f/W_f でも， E_f/E_m が小になれば繊維の軸応力が長繊維の場合に近付く．これは繊維とマトリックスのなじみややすさを示すものである．第三に，繊維末端 ($u=1$) において軸応力が0になっていない点が注目される．この値が繊維末端において伝達される応力であり，従来 Owen [15] 以外ほとんど議論されていない．この端部伝達応力については大略，“ E_f/E_m

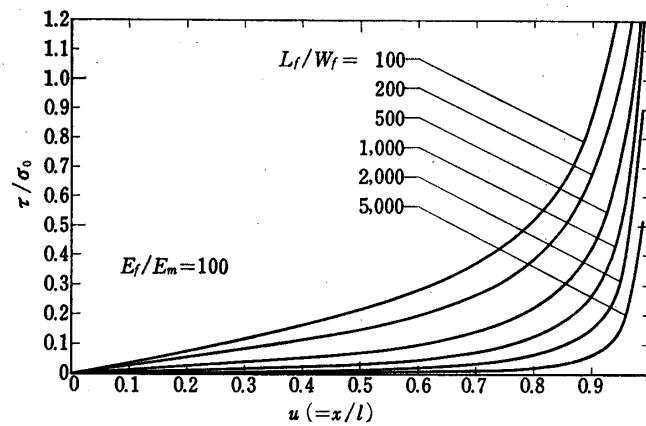


図 7 (a) 界面剪断応力分布

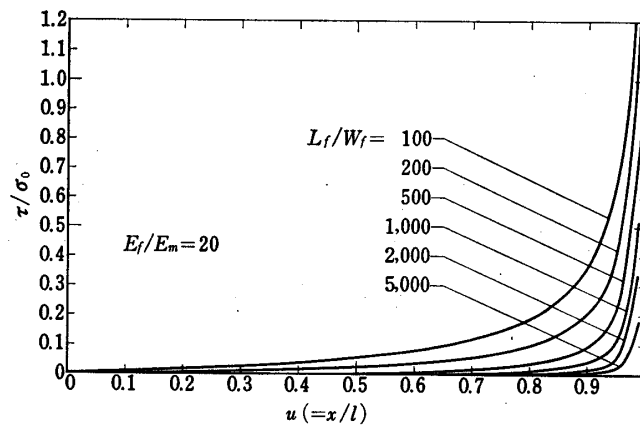


図 7 (b) 界面剪断応力分布

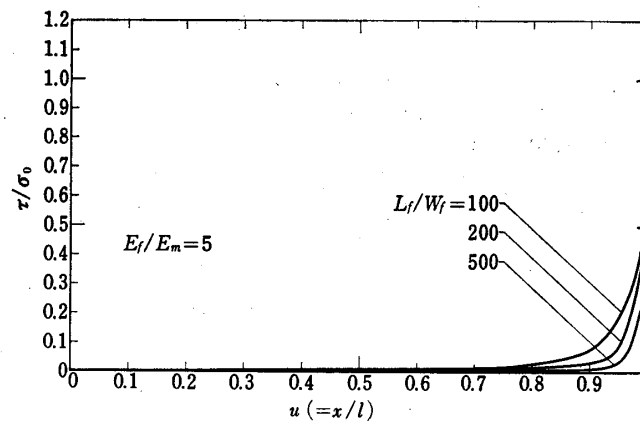


図 7 (c) 界面剪断応力分布

が同じ場合には L_f/W_f の大小によって大きな変化をうけることはなく、 E_f/E_m が大きくなるに従って $(\sigma_f/\sigma_0)_{\text{fiber end}}$ の値も大きくなる”ということが言えよう。

次にマトリックス内の応力状態について調べる。

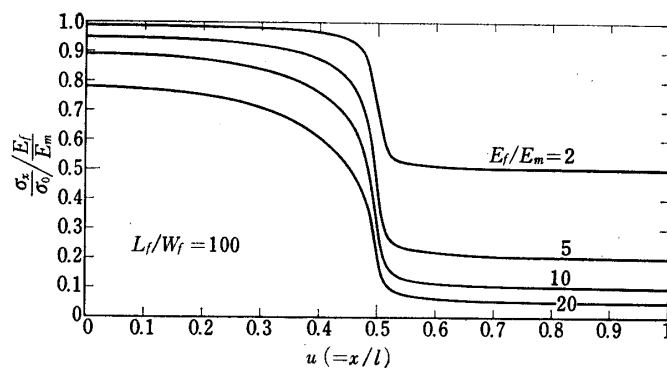
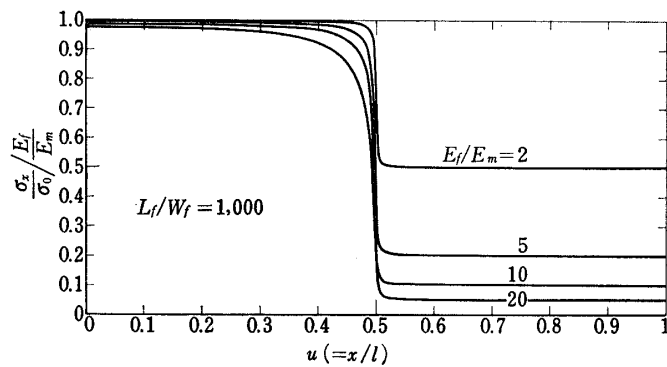
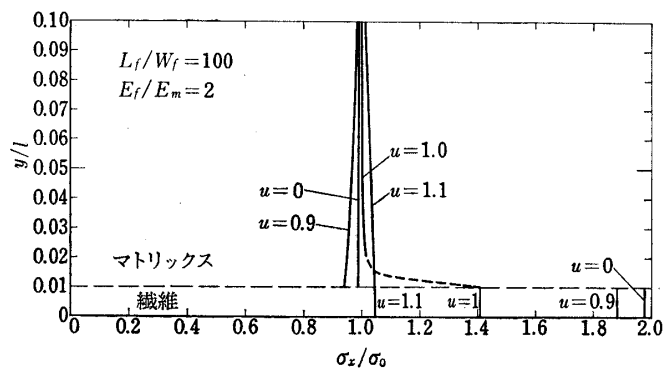
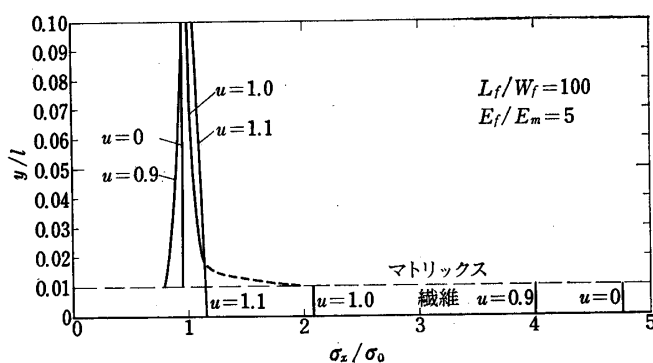
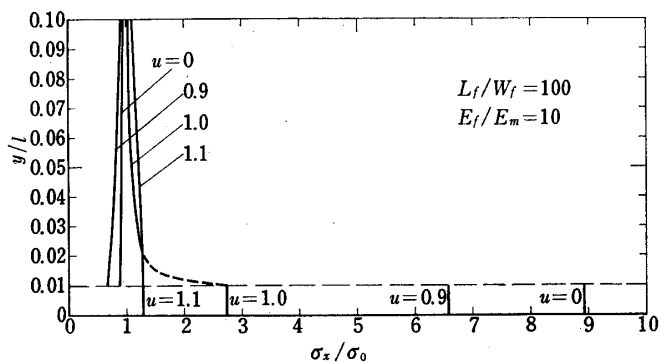
図8(a) x 軸上の σ_x 分布図8(b) x 軸上の σ_x 分布図9(a) y 方向にそった σ_x 分布

図8に、 $y=0$ にそった x 方向の応力分布の数例を示した。 $0 < u < 1$ の区間は繊維の応力であり、繊維末端に向って徐々に減って行き、繊維末端で比較的スムーズにマトリックス側への応力の伝達が行なわれ、しだいに無限遠点応力に近付くことがわかる。繊維末端から繊維半長の10%程度の際に急激に応力の低下が起こり、 l 程度離れた点ではほとんど無限遠点応力に等しい。

図9に、 $u=0$ (繊維中央)、 $u=0.9$ 、 $u=1$ (繊維末端)、 $u=1.1$ に沿ったマトリックス内の応力分布(σ_x)を示す。 $v=0.1$ あたりでは σ_x はまだ完全には σ_0 に一致していない。しか

図9(b) y 方向にそった σ_x 分布図9(c) y 方向にそった σ_x 分布

し、図にはのせなかったが、 $v=1$ 付近では σ_x はほとんど σ_0 に等しいことが計算で得られている。

2.2 正規配列モデルの解析

本節では、図1(b)のモデルについて前節と同様の解析を行ない、繊維が多数配列されることによって内部応力がどのように変化するかを調べる。また、正規配列の場合のヤング率の計算も行なう。

2.2.1 考え方の基礎

本節は2.1節の解析の拡張である。したがって、前節で用いた考え方、仮定はそのまま踏襲される。本節ではさらに、多数の繊維が並んでいるため、単一短繊維の場合に比べていくつかの条件が加わる。すなわち、

(4) 中心の繊維の近傍についてのみ考える。すなわち、図10のように繊維に番号(n_x, n_y)をつけ、 $|n_x| + |n_y| \leq N_a$ の範囲にある繊維についてのみ考える。 N_a をある程度大きくすれば、中央付近は完全に正規配列された場合と同じ状態を作り出せるであろう。

(5) (4)のように繊維の数を制約すれば、各繊維の果す役割(応力分布)は少しずつちがってくるが、すべての繊維が同じ応力分布をしているとみなす。各繊維の応力分布は、外側にある繊維ほど中央の繊維との差が激しくなるであろうが、他方、中央の繊維から離れていけばそれだけ中央の繊維に及ぼす影響も少ないわけであり、(5)の仮定には大きなあやま

ちは含まれていないと思われる。

基礎方程式の誘導，計算手法は，数多くの繊維の影響を重ね合わせるということを除いては2.1節と同様であり，その詳細は割愛する[22]。

2.2.2 計算結果と検討

仮定(4)から明らかなように， $N_a \rightarrow \infty$ とすると，繊維が完全に正規配列された場合になるが，計算時間の都合上， N_a をある値にとどめなければならない。まず， N_a をどの程度にとれば完全に正規配列された場合にほぼ等しくなるかをチェックするために行なった計算結果の一例を図11に示す。 $N_a=2$ にすると，繊維の軸応力は単一短繊維の場合に比べ大きく変化し， $N_a=10, 50$ にすると，軸応力の値そのものに少しの変化は生じるが，形状は $N_a=2$ の場合と同様である。特に $N_a=10$ と50 とでは，応力値がほとんど等しく，繊維の配列は $N_a=10$ 程度で十分ということがわかる。従って，本論文では $N_a=10$ の配列を基準とした。ちなみに計算時間は，東京大学宇宙航空研究所の大型計算機(HITAC 5020F)で， $N_a=2$ で約1秒， $N_a=10$ で約17秒， $N_a=50$ では約370秒であった。

図12, 13に， s および g を系統的に変化させたときの繊維の引張り応力，界面剪断応力分布を示す。

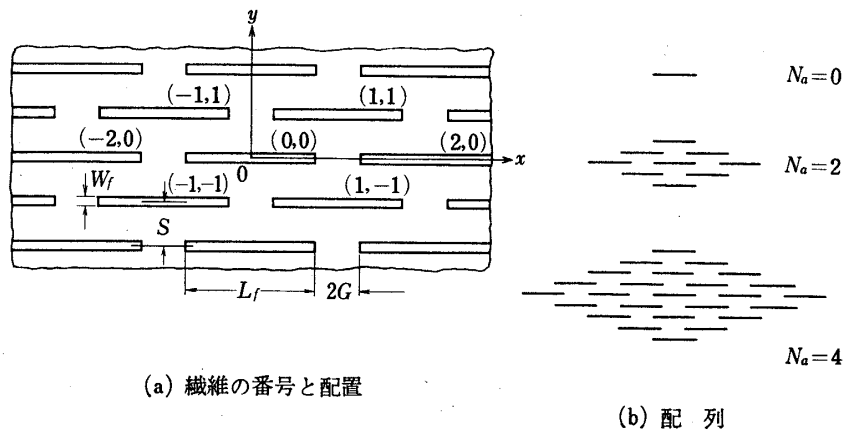


図10 正規配列モデル

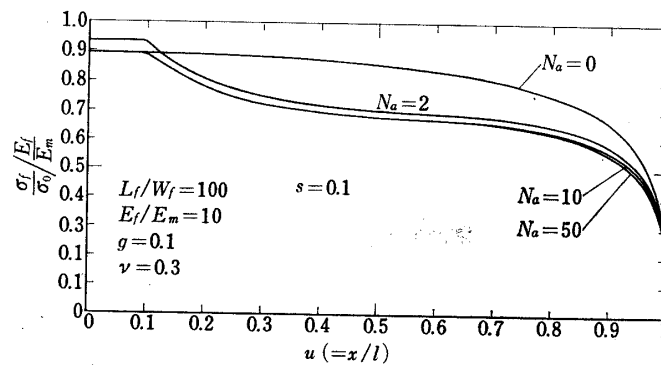


図11 N_a と繊維軸応力

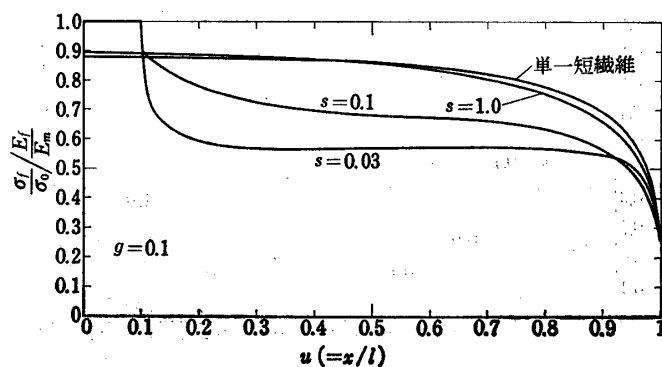


図 12(a) 繊維軸応力分布

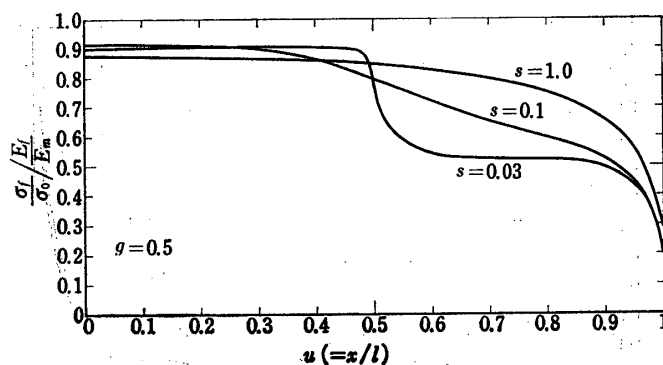


図 12(b) 繊維軸応力分布

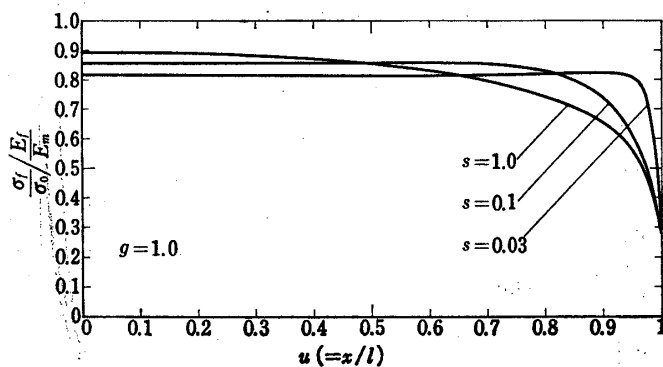


図 12(c) 繊維軸応力分布

図 10 によると、 $0 < x/l < s$ の範囲ではおおいかぶさっている繊維が欠如しており、したがって中央の繊維は $0 < x/l < s$ の領域では他の領域に比べ応力が高くなることが予想されるが、図 12 はそれをはっきり物語っている。この傾向は s が小さくなるに従って顕著になる。

Riley [17] は、極めて簡単なモデルで、隣接繊維の端部のところでは、着目している繊維の応力は高くならなければならないとして破壊の問題を扱っており、大筋において妥当な推論であると思われる。一方、Owen [15] は、繊維の中心からある部分にわたっては繊維の引張り応力は一定であるという仮定をおいているため、本論文のような結果は得られない。

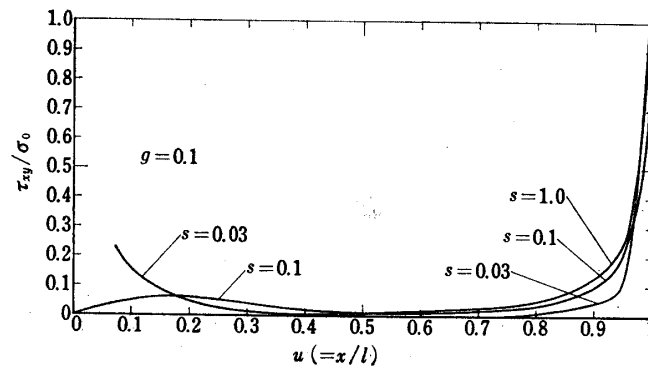


図 13(a) 界面剪断応力分布

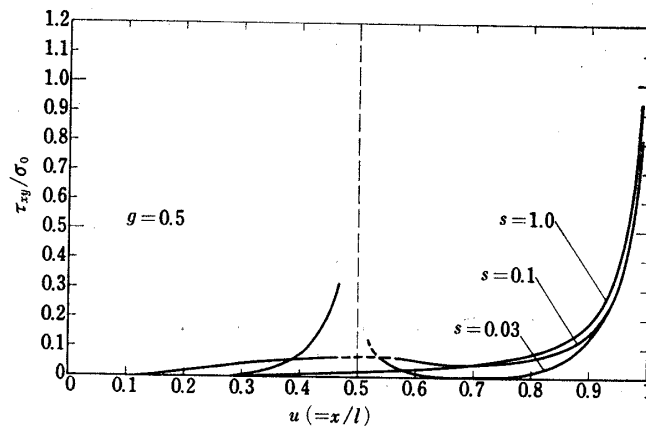


図 13(b) 界面剪断応力分布

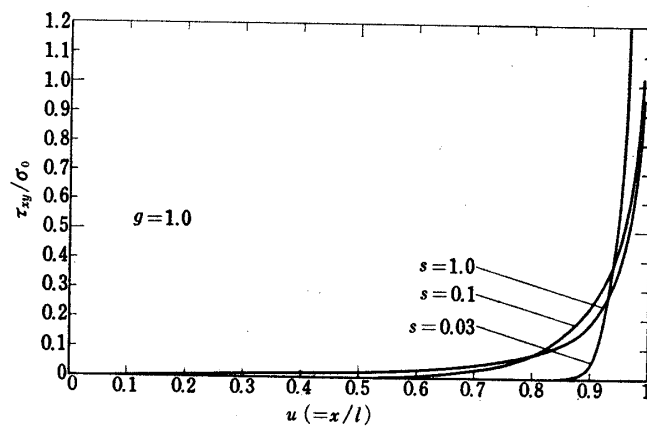


図 13(c) 界面剪断応力分布

繊維の応力分布が繊維の配列状態に大きく依存するということは従来ほとんど議論されておらず、本論文で得られた新しい知見ということができよう。

2.2.3 ヤング率の計算

図 14 の AO, OB, BC, CA は応力, 変位に関して対称軸であり, AOBC は短繊維一方向

正規配列の場合のユニットとすることができる。したがってこのユニットを均質な直交異方性材料とみなせば、 x 方向のヤング率は

$$E_C = \sigma_x / \varepsilon_x \quad (29)$$

とあらわされる。ただし、 σ_x は AO 間の x 方向の平均応力、 ε_x は DD' 間の x 方向の平均歪、すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{s} \int_0^s \sigma_x(0, v) dv \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{1+g} \int_0^{1+g} \varepsilon_x\left(u, \frac{1}{2}s\right) dx \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

である。(30) 式は台形公式により求められる。

以下、 $L_f/W_f=100$, $E_f/E_m=10$, $\nu=0.3$ の場合について s, g を変化させたときのヤング率を計算する。

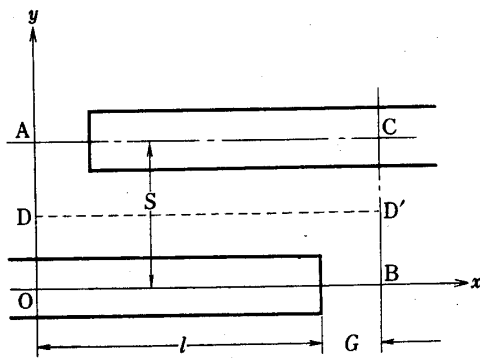


図 14 正規配列モデルのユニット

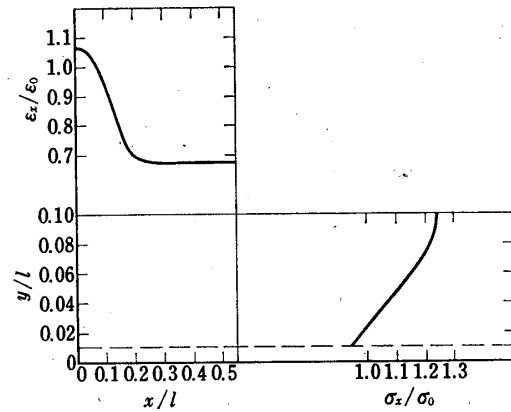


図 15 マトリックス内の応力、歪分布 ($s=0.1, g=0.1$)

図 15 に、 $s=0.1, g=0.1$ の場合について、横軸に x 座標、縦軸に ε_x をとって $v=1/2s$ に沿った x 方向の歪分布、および、縦軸に y 座標、横軸に σ_x をとって $u=0$ に沿った x 方向の応力分布を示した。図により、マトリックス中の平均応力（無限遠点応力で割った無次元化量）は 1.10 となり、一方、繊維の応力（無次元化量）は 8.95 であるので、OA 上の平均応力は

$$\sigma_x / \sigma_0 = 1.10 \times 0.9 + 8.95 \times 0.1 = 1.885 \quad (31)$$

となり、DD' に沿った x 方向の平均歪は (30) 式より

$$\varepsilon_x / \varepsilon_0 = 0.751 \quad (32)$$

となる。従って x 方向のヤング率は、

$$E_C = \sigma_x / \varepsilon_x = 2.51 E_m \quad (33)$$

となる。一方、連続繊維における複合則によると

$$E_C = E_f V_f + E_m (1 - V_f) = 2.64 E_m \quad (34)$$

であり、現在のモデルにおけるヤング率は連続繊維の場合の 95.1% となる。また、著者ら

の別の近似解法[20]によると, $C_a=1$, $R_0=0.785$ となり,

$$E_c = E_f R_0 C_a V_f + E_m (1 - V_f) = 2.25 E_m \quad (35)$$

となる. 同様に, $s=0.03$, $g=0.1$ の場合には, $E_c=5.91 E_m$, 連続繊維複合則で $E_c=6.40 E_m$, 近似解法で $E_c=5.15 E_m$ となり, $s=0.03$, $g=0.5$ の場合には順に, $E_c=4.66 E_m$, $E_c=5.0 E_m$, $E_c=4.04 E_m$ となる. 近似解法[20]は繊維間の干渉を考慮しない解析であったが, 上の数値例でわかるように, 繊維間の干渉はヤング率を上げる方向に働くものと思われる.

3. 実 験

本章では, 歪ゲージを埋め込んで, 繊維の歪を直接測定した.

3.1 単一短繊維モデル

最初にモデル設定の条件について触れる. 本実験は解析との比較を目的としたので, 繊維のアスペクト比は100以上にしなければならない. モデル自体の大きさには製作上および試験機, 治具の制約があり, 上限が限定される. 従って繊維のアスペクト比を大きくするためには繊維の幅を小さくしなければならない. また, モデルの板厚については, 歪ゲージの大きさの都合上, 5~6mmは必要である. 以上のような条件を満足するため, 繊維(アルミ合金板)の幅を0.5mm, 長さを50mmおよび100mm, モデルの板厚を6mmとした.

モデルは図16に示すようなものである. 歪ゲージ(共和電業, KFC-1-C2-11)は繊維の側面に歪ゲージ用瞬間接着剤(共和電業, CC-15)で貼った. 樹脂は, 常温硬化型エポキシ樹脂(エピコート828, シェル化学)に硬化剤(DTA)を重量比で8%加えたものを用いた. 硬化温度は常温よりやや高い程度(約30°C)である.

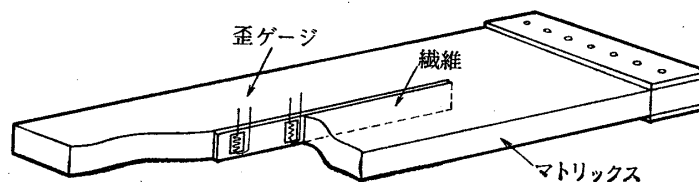


図16 試験片概念図

試験片の諸元を表1に示す.

引張試験機は東洋測器テンシロン UTM-1 を用い, 歪の測定は動歪測定器 (DM-6J, 共和電業) を介して電磁オシログラフ (横河電機) に記録した. 引張り速度はクロスヘッド速度で 0.5 mm/min であり, 歪速度に直すと $\dot{\epsilon} \approx 3 \times 10^{-5} / \text{sec}$ である.

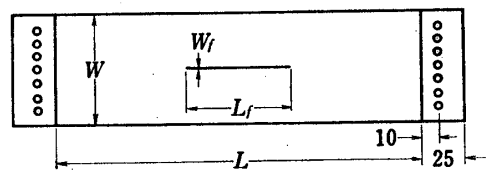
弾性試験では荷重-歪線図はほぼ直線となり, 材料のクリープはほとんど無視できると思われる. 得られた弾性率を表1に記す.

次に本実験を行ない, 得られた繊維の各点の歪を図17に○印で示す. 歪の測定点は1つの試験片について4~5点である. 図の縦軸は繊維の歪をマトリックスの無限遠点歪(ϵ_0)で除した量を示してある.

図17には前章で作った計算プログラムに当該材料定数を代入して得られた計算結果を実

表 1 単一短繊維試験片

試片番号	試片長 $L(\text{mm})$	試片幅 $W(\text{mm})$	板厚 $t(\text{mm})$	繊維長 $L_f(\text{mm})$	繊維幅 $W_f(\text{mm})$	繊維厚さ $t_f(\text{mm})$
G1-1	280.0	80.05	5.48	50.4	0.50	6.08
G1-2	280.0	80.0	6.95	49.8	0.50	6.01
G1-3	280.0	79.9	6.08	100.0	0.50	6.00
G1-4	280.0	80.1	6.95	100.1	0.50	6.01



弾性試験片

試片番号	試片長 $L(\text{mm})$	試片幅 $W(\text{mm})$	板厚 $t(\text{mm})$	ヤング率 $E_m(\text{kg/mm}^2)$	ポアソン比 ν
G1-1'	200.0	27.0	5.48	417.8	0.416
G1-2'	200.0	28.4	6.95	405.5	0.409
G1-3'	200.0	27.35	6.09	439.0	0.377
G1-4'	(G1-2' に同じ)				

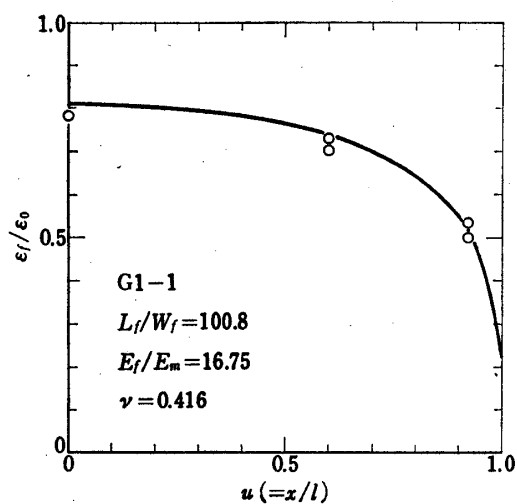
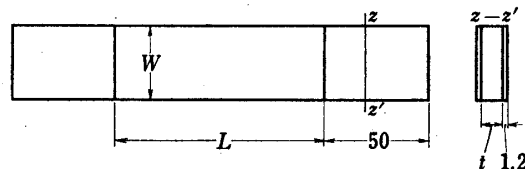


図 17(a) 繊維の歪分布 (G1-1)

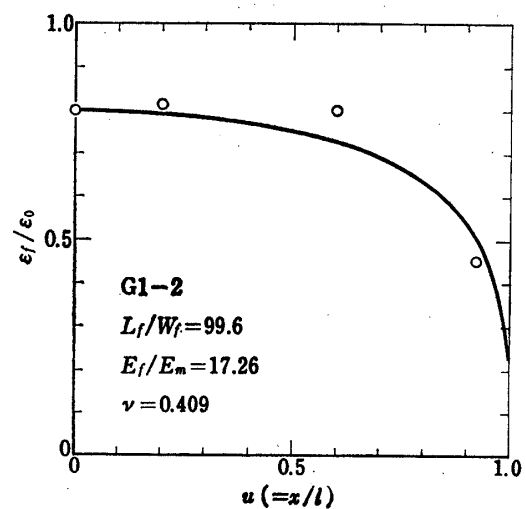


図 17(b) 繊維の歪分布 (G1-2)

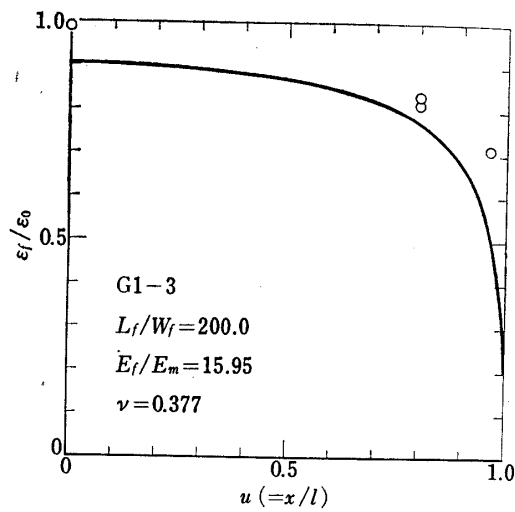


図 17(c) 繊維の歪分布 (G1-3)

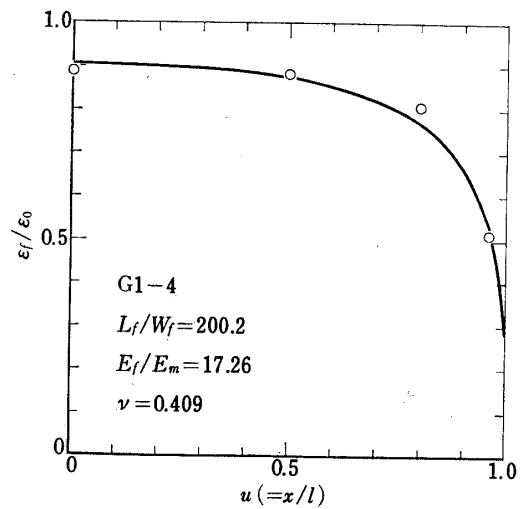
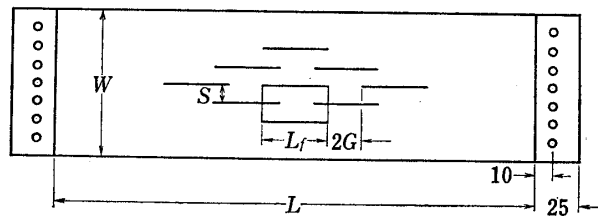


図 17(d) 繊維の歪分布 (G1-4)

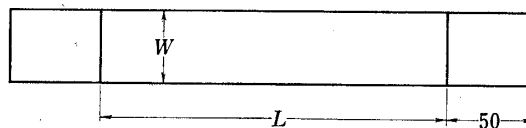
表 2 正規配列試験片

試片番号	試片長 $L(\text{mm})$	試片幅 $W(\text{mm})$	繊維幅 $W_f(\text{mm})$	繊維厚さ $t_f(\text{mm})$	S (mm)	G (mm)
G2-1	280.0	79.8	0.00	6.07	2.5	2.5
G2-2	280.0	80.1	0.50	5.90	2.5	2.5



弾性試験片

試片番号	試片長 $L(\text{mm})$	ヤング率 $E_m(\text{kg/mm}^2)$	ポアソン比 ν
G2-1'	200.0	395.0	0.395
G2-2'	200.0	430.5	0.418



線で併記した。数値計算結果と実験はほぼ良い一致を示している。

3.2 正規配列モデル

モデルは大きさの制限を考慮して $N_a=2$ (図 10 参照) の場合に限定した。また、繊維の

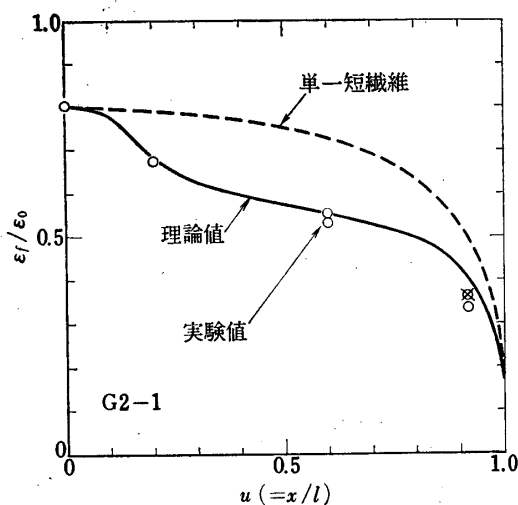


図 18(a) 繊維の歪分布

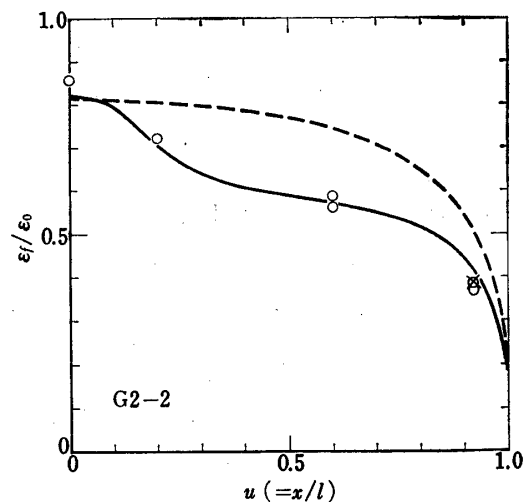


図 18(b) 繊維の歪分

間隔は手作業の限界を考慮して $S=G=2.5\text{ mm}$ ($s=g=0.1$) とした。表 2 に試験片の諸元を示す。

前節と同じ手順により歪を測定し、図 18 に ○, ×印で示した。これに対して計算値を図 18 に実線で示した。なお、破線は参考のために単一短繊維における繊維の歪を計算して併記したものである。実験では $s=0.1, g=0.1$ の場合に限定されているが、計算と実線はかなり良い一致を示している。

最後に埋込みゲージの信頼性について述べる。ゲージを埋めこんだ場合 [17], [19], 成形時の発熱およびマトリックス中という環境中でゲージそのものの信頼性が問題になる [18]。本実験においては常温硬化型樹脂を用いたため、成形時にゲージ (使用限界は 130°C) の特性が変わることはないと思われる。後半の問題は、マトリックスによる締めつけの問題と、熱伝導率の悪いマトリックスで包囲したことによる温度上昇 (ジュール熱) の問題が考えられる。締めつけの影響はよくわからないが、ジュール熱の問題については、図 18 中 × の印が試験片と同じダミーゲージを用いて温度補償を行なった結果であり、他の測定結果との有意な差は認められない。以上、今回行なった埋込みゲージによる測定には大きな誤差は含まれていないと考える。

4. ま と め

短繊維を理想的にならべて成型した複合材料について研究を行なった。単一短繊維および短繊維正規配列モデルを繊維方向に引張った場合に生ずる内部応力を、筆者らが提案した考え方にもとづいて解析した。得られた結果は予想される諸現象をよく示した。また、短繊維正規配列モデルでは、繊維間の干渉がよくあらわれた。短繊維正規配列モデルにおける複合材料としてのヤング率の計算を行ない、連続繊維の場合のヤング率および近似計算で得られたヤング率と比較した。

得られた結果は実験と比較され、よく一致することが確かめられた。

1974 年 5 月 7 日 材料部

参 考 文 献

- [1] H. L. Cox: The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materias, Brit. J. Appl. Phys., 3 (1952), 72.
- [2] N. F. Dow: Study of Stresses near a Discontinuity in a Filament-Reinforced Composite Metal, G. E. C. Missile and Space Division, R63D61 (1963).
- [3] B. W. Rosen, N. F. Dow & Z. Hshin: Mechanical Properties of Fibrous Composites, NASA CR-31 (1964).
- [4] D. C. West: Resin-Fiber Load Transfer in Fiber-Reinforced Plastics, Proc. 19th Ann. Tech. Conf. SPI (1964), 3-A.
- [5] J. O. Outwater Jr.: The Mechanics of Plastics Reinforcement in Tension, Modern Plastics, (1956), 156.
- [6] T. Hayashi: Photoelastische Untersuchungen der Spannungsverteilung in der durch Fasern Verstärkten Platte, Proc. I. U. T. A. M. Symposium, (1958), Warsaw, 501.
- [7] T. Hayashi: Reinforcement Effect of Fibers in Fiber-Reinforced Plastics, Proc. 5th Inter. Symposium on Space Tech. and Sci., (1963) Tokyo, 683.
- [8] B. Bürgel, A. J. Perry & W. R. Schneider: On the Theory of Fibre Strengthening, J. Mech. Phys. Solids, 18 (1970), 101.
- [9] L. J. Cohen & J. P. Romualdi: Stress, Strain and Displacement Fields in a Composite Material Reinforced with Discontinuous Fibers, J. Franklin Institute, 284 (1967), 388.
- [10] C. S. Chang & H. D. Conway: Bond Stresses in Fiber Reinforced Composites Subjected to Uniform Tension, J. Comp. Mat., 2 (1968), 168.
- [11] W. W. L. Chu & H. D. Conway: Bond Stresses in Composites with Overlapping Fibers, Int. J. Mech. Sci., 12 (1970), 761.
- [12] H. D. Conway, W. W. Chu & C. I. Chang: Effect on Bond Stresses of Partial Bond Failure of Overlapping Fibers in a Composite Material, Fibre Sci. Tech., 2 (1970), 289.
- [13] H. D. Conway & C. I. Chang: The Effective Elastic Constants and Bond Stresses for a Fiber Reinforced Elastic Sheet, Fibre Sci. Tech., 3 (1971), 249.
- [14] C. I. Chang, H. D. Conway & T. C. Weaver: The Elastic Constants and Bond Stresses for a Three-Dimensional Composite Reinforced by Discontinuous Fibers, Fibre Sci. Tech., 5 (1972), 143.
- [15] D. R. J. Owen: Analysis of Fibre-Reinforced Materials by an Initial Strain Method, Fibre Sci. Tech., 5 (1972), 32.
- [16] S. Timoshenko & J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 2nd ed., Mc Graw-Hill, (1951), 114.
- [17] V. R. Riley: Fibre/Fibre Interaction, J. Comp. Mat., 2 (1968), 436.
- [18] 三道信介: 複合材料積層板における層間せん断応力の解析, 学位論文 (東京大学), (1969).
- [19] R. G. Jacobs: Design and Instrumentation of Glass Filament Wound Interlaminar-shear Specimen, Exp. Mech., 7 (1967), 176.
- [20] 福田博, 河田幸三: 短繊維複合材料の成形条件と剛性, 東京大学宇宙航空研究所報告, 10, 3-A (1974. 7).
- [21] 福田博, 河田幸三: 単一短繊維モデルにおけるマトリックス-繊維間の力の伝達について, 第5

回複合材料シンポジウム発表報文集 (日科技連), (1972. 9), 113.

- [22] 福田博: 不連続繊維強化複合材料の内部応力, 剛性, 強度に関する研究, 学位論文 (東京大学), (1972).
- [23] 福田博, 河田幸三: 短繊維強化複合材料における繊維間の干渉, 宇宙航空材料シンポジウム (第 3 回), (1973. 3), 1.
- [24] H. Fukuda & K. Kawta: Stress and Strain Fields in Short Fibre-Reinforced Composites, Fibre Sci. Tech., 7 (2) (1974. 4) in printing.