

# 高速回転する円筒殻の許容真円度について

平野 陽一

## Deformations of Noncircular Cylindrical Shells under Centrifugal Forces

By

Yoichi HIRANO

**Abstract:** When noncircular cylindrical shells rotate about their longitudinal axes, centrifugal forces on shell surfaces are not uniform circumferentially and may make initial noncircularities larger. If cylinders deform in the direction of enlarging noncircularities, dynamic unbalance of rotating systems will become large at high rotational speed. Whether deformations are in the direction of increasing or decreasing unbalance is investigated, and it is shown for oval shells that deformations due to centrifugal forces are in the direction of diminishing initial noncircularities.

### 概 要

毎分3万～4万回転する軸系の中に薄肉の円筒殻がある時、その円筒殻が真円であれば一様な遠心力による円筒殻の変形を考えればよい。しかし、真円でない時には筒殻面に働く遠心力は一樣とはならないため、初期の断面不整が助長される危険性がある。初期不整が助長されると回転軸系のアンバランスがますます大となり、この軸系は破損にいたるかもしれない。この危険性についての解析的検討を行なったので本稿で報告したい。

断面の初期不整形の代表的なものとして楕円形状を考え、その真円からのずれが筒殻が回転すると増大するか減少するかを検討した。その結果、楕円の長軸半径が真円半径の±10%程度なら初期不整が減少する方向に変形することを明らかにした。

### 1. は し が き

薄肉円筒殻を高速回転させる時、その初期断面不整が回転数の増加とともにどう変化するかを検討するのが本論の目的である。初期不整の代表的形状としては第1図に示すような疑似楕円形（以下では単に楕円形と呼ぶ）を考える。回転軸芯が楕円形の図心にあるとすると、楕円の長軸付近の筒面には短軸付近よりも大きな遠心力が働き、断面の扁平度が回転数の増大と共に一見増大する危険性があるように考えられる。そこで、この楕円筒がある回転数におかれた時、その変形が真円からの扁平度を減少する方向に進むかどうかを調べてみる。

## 2. 初期断面形状と筒殻面に働く遠心力

初期断面は真円ではなく楕円に近いものとし、その形状を第 1 図のように表現する。この形状の曲率 ( $1/r_0\rho$ ) は次式で与えられるものとする [1].

$$\frac{1}{r_0\rho} = \frac{1}{r_0} (1 + \xi \cos 2\eta) \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (1)$$

上式は  $\xi=0$  とおけば真円の曲率  $1/r_0$  を表現する。いま  $\phi$  を楕円周上のある点の法線が  $y$  軸となす角とし、周方向の座標  $s$  を  $r_0\eta$  で表わすことにする。すると曲率 ( $1/r_0\rho$ ) は  $d\phi/d(r_0\eta)$  で与えられるから

$$\frac{d\phi}{d\eta} = 1 + \xi \cos 2\eta \quad (2)$$

および

$$\phi = \eta + \frac{\xi}{2} \sin 2\eta \quad (3)$$

なる関係式が得られる。

楕円周上 A 点の座標 ( $x, y$ ) は第 2 図を参照して次式で与えられる。

$$x = r_0 \int_0^\eta \cos \phi d\eta \quad (4)$$

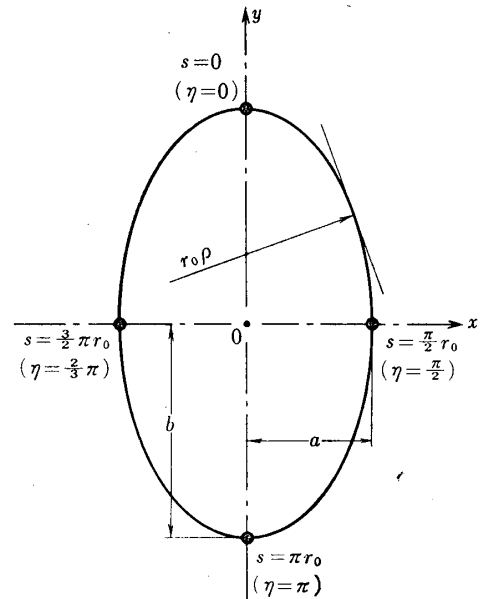
$$y = b - r_0 \int_0^\eta \sin \phi d\eta \quad (5)$$

上式中の  $\sin \phi$  と  $\cos \phi$  は  $\xi$  と  $\eta$  を使って次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \sin \left( \eta + \frac{\xi}{2} \sin 2\eta \right) \\ &= \sin \eta \cos \left( \frac{\xi}{2} \sin 2\eta \right) + \cos \eta \sin \left( \frac{\xi}{2} \sin 2\eta \right) \\ &\doteq \sin \eta + \frac{\xi}{2} \sin 2\eta \cos \eta - \frac{\xi^2}{8} \sin \eta \sin^2 2\eta \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \cos \left( \eta + \frac{\xi}{2} \sin 2\eta \right) \\ &= \cos \eta \cos \left( \frac{\xi}{2} \sin 2\eta \right) - \sin \eta \sin \left( \frac{\xi}{2} \sin 2\eta \right) \\ &\doteq \cos \eta - \frac{\xi}{2} \sin \eta \sin 2\eta - \frac{\xi^2}{8} \sin^2 2\eta \cos \eta \end{aligned} \quad (7)$$

上の近似式は  $\sin \phi$  と  $\cos \phi$  を展開して  $\xi$  が微小として  $\xi^2$  の項までとった式である。さらに (6), (7) 式より次の諸関係式を得る。



第 1 図 疑似楕円筒殻

$$\int_0^\eta \sin \phi d\eta = 1 - \cos \eta + \frac{\xi}{3}(1 - \cos^3 \eta) + \xi^2 \left( -\frac{1}{15} + \frac{1}{6} \cos^3 \eta - \frac{1}{10} \cos^5 \eta \right) \quad (8)$$

$$\int_0^\eta \cos \phi d\eta = \sin \eta - \frac{\xi}{3} \sin^3 \eta + \xi^2 \left( -\frac{1}{6} \sin^3 \eta + \frac{1}{10} \sin^5 \eta \right) \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin \phi d\eta = 1 + \frac{\xi}{3} - \frac{\xi^2}{15} \quad (10)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos \phi d\eta = 1 - \frac{\xi}{3} - \frac{\xi^2}{15} \quad (11)$$

(4) 式と (11) 式より楕円の短軸半径  $a$  として次式を

$$\frac{a}{r_0} = 1 - \frac{\xi}{3} - \frac{\xi^2}{15} \quad (12)$$

また (5) 式と (10) 式より長軸半径  $b$  として次式を得る.

$$\frac{b}{r_0} = 1 + \frac{\xi}{3} - \frac{\xi^2}{15} \quad (13)$$

第 2 図で回転軸芯 0 より楕円周上 A 点までの距離を  $\lambda$  とすると近似的に

$$\frac{\lambda}{r_0} = 1 + \frac{\xi}{3} \cos 2\eta + \frac{\xi^2}{18} (\cos^6 \eta + \sin^6 \eta) + \xi^2 \left\{ -\frac{1}{6} (\cos^4 \eta + \sin^4 \eta) + \frac{1}{10} (\cos^6 \eta + \sin^6 \eta) \right\} \quad (14)$$

と書ける. A 点に働く単位面積当りの遠心力  $q_c$  は  $\lambda$  に比例するから比例定数を  $\alpha$  とすると

$$q_c = \alpha \lambda \quad (15)$$

となる.  $\alpha$  は回転角速度の 2 乗と筒殻の単位面積当りの質量の積で与えられる. A 点に働く  $q_c$  の筒殻面に垂直方向の分力を  $q_n$  とし接線方向分力を  $-q_2$  とすると,  $q_n$  と  $-q_2$  は,

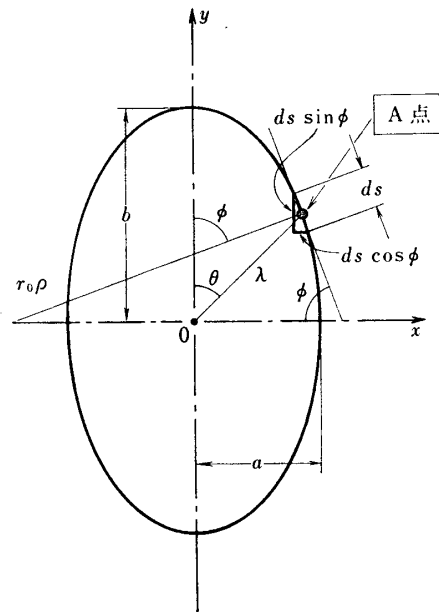
$$q_n = q_c \cos(\phi - \theta) \quad (16)$$

$$-q_2 = q_c \sin(\phi - \theta) \quad (17)$$

と書ける. ところで  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  は (4), (5) 式を使って求めることができ次のように書ける.

$$\sin \theta = \frac{1}{\lambda} \left\{ \sin \eta - \frac{\xi}{3} \sin^3 \eta + \xi^2 \times \left( -\frac{1}{6} \sin^3 \eta + \frac{1}{10} \sin^5 \eta \right) \right\} \quad (18)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\lambda} \left\{ \cos \eta + \frac{\xi}{3} \cos^3 \eta - \xi^2 \times \left( \frac{1}{6} \cos^3 \eta - \frac{1}{10} \cos^5 \eta \right) \right\} \quad (19)$$



第 2 図 楕円周上 A 点

故に  $q_c$  の分力  $q_n$  と  $-q_2$  は次式となる.

$$q_n = \alpha \left( 1 + \frac{\xi}{3} \cos 2\eta - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^2}{10} \cos 4\eta \right) \quad (20)$$

$$-q_2 = \alpha \left( \frac{2\xi}{3} \sin 2\eta + \frac{\xi^2}{15} \sin 4\eta \right) \quad (21)$$

### 3. 筒殻の微分方程式

筒殻の微分方程式は Vlasov の semi-membrane theory [2] を使うことにする. この理論は十分に長い筒殻の支持部の影響は末端のみで中央部の断面の変形は主として周方向の曲げモーメント  $M_2$  により軸方向の曲げモーメント  $M_1$  と振りモーメント  $H$  にはよらないとした理論で膜理論と一般シェル理論との中間的な理論である. すなわち  $M_1 = H = 0$  とし, さらに剪断歪と周方向の中央面内歪を 0, すなわち  $\omega = \varepsilon_2 = 0$  とすると適合条件式として次式を得る

$$\frac{12r_0}{t^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + W(T_1) = 0 \quad (22)$$

平衡条件式として

$$r_0 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} - W(M_2) = r_0^2 \left[ \frac{\partial^2 (\rho q_n)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right] \quad (23)$$

を得る. 上式で,

$$T_1 = \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad M_2 = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu \kappa_1)$$

であり,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_2$  は軸方向変位  $u$ , 周方向変位  $v$ , 径方向変位  $w$  を使って

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{w}{\rho} \right), \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{w}{\rho} \right)$$

と書ける. 演算子  $W$  は

$$W(\dots) = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[ \rho \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial \eta^2} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\dots)}{\partial \eta} \right] \quad (24)$$

で与えられる. いま筒殻は無限長とし, 外力として  $q_n$  と  $q_2$  を考えることにする. すると適合条件式は自動的に満たされ平衡条件式は次のように書ける.

$$W(M_2) + r_0^2 \left[ \frac{\partial^2 (\rho q_n)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (25)$$

$$W(\dots) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial^3 (\dots)}{\partial \eta^3} + \rho \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial \eta^4} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial (\dots)}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial \eta^2} \quad (26)$$

前述のように semi-membrance theory では変形は周方向に不伸張と考えているので

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{w}{\rho} \right) = 0 \quad (27)$$

より

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{w}{\rho} \quad (28)$$

なる関係式を得る. (28) 式を使えば (25) 式は  $v$  のみに関する微分方程式に書き下せる. まず  $w$  およびその  $\eta$  に関する微分は次のように  $v$  のみで表わされる.

$$\begin{aligned}
 w &= -\rho \frac{\partial v}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial w}{\partial \eta} &= -\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} &= -\frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \frac{\partial v}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \rho \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial^6 w}{\partial \eta^6} &= -\frac{\partial^6 \rho}{\partial \eta^6} \frac{\partial v}{\partial \eta} - 6 \frac{\partial^5 \rho}{\partial \eta^5} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 15 \frac{\partial^4 \rho}{\partial \eta^4} \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} - 20 \frac{\partial^3 \rho}{\partial \eta^3} \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} \\
 &\quad - 15 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \frac{\partial^5 v}{\partial \eta^5} - 6 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial^6 v}{\partial \eta^6} - \rho \frac{\partial^7 v}{\partial \eta^7}
 \end{aligned} \tag{29}$$

次に  $\kappa^2$  およびその  $\eta$  に関する微分は次のように書ける.

$$\begin{aligned}
 \kappa_2 &= -\frac{1}{r_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right\} \\
 \frac{\partial \kappa_2}{\partial \eta} &= -\frac{1}{r_0^2} \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) v \right\} \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial^4 \kappa_2}{\partial \eta^4} &= -\frac{1}{r_0^2} \left\{ \frac{\partial^6 w}{\partial \eta^6} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^5 v}{\partial \eta^5} - 5 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} - 10 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} \right. \\
 &\quad \left. - 10 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 5 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial^5}{\partial \eta^5} \left( \frac{1}{\rho} \right) v \right\}
 \end{aligned} \tag{30}$$

(29), (30) 式により (25) 式は  $v$  のみに関する微分方程式に書き改めることができる.

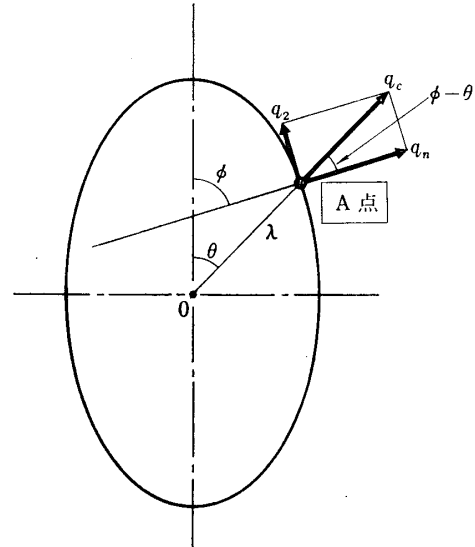
#### 4. 遠心力を受ける楕円筒殻

第 2 節で考えた楕円筒殻に一般筒殻の平衡方程式 (25) を適用する.  $1/\rho$  とその  $\eta$  に関する微分は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} &= 1 + \xi \cos 2\eta \\
 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\rho} \right) &= -2\xi \sin 2\eta \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial^5}{\partial \eta^5} \left( \frac{1}{\rho} \right) &= -32\xi \sin 2\eta
 \end{aligned} \tag{31}$$

となり,  $\rho$  とその  $\eta$  に関する微分は  $\xi^2$  の項までとって近似的に次式のように与えられる.

$$\rho = \frac{1}{1 + \xi \cos 2\eta} \doteq 1 - \xi \cos 2\eta + \xi^2 \cos^2 2\eta$$



第 3 図 遠心力とその分力  
(訂正:  $q_2 \rightarrow -q_2$ )

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial \eta} &= 2\xi \sin 2\eta - 2\xi^2 \sin 4\eta \\
\frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} &= 4\xi \cos 2\eta - 8\xi^2 \cos 4\eta \\
\frac{\partial^3 \rho}{\partial \eta^3} &= -8\xi \sin 2\eta + 32\xi^2 \sin 4\eta \\
&\vdots \\
\frac{\partial^6 \rho}{\partial \eta^6} &= 64\xi \cos 2\eta - 2048\xi^2 \cos 4\eta
\end{aligned} \tag{32}$$

(31), (32) 式を演算子  $W$  [(26) 式] に代入し  $\xi^2$  の項までとると次式となる.

$$\begin{aligned}
W(M_2) &= \frac{1}{r_0^2} \left[ \left\{ \left( 1 + \frac{3\xi^2}{2} \right) - 2\xi \cos 2\eta + \frac{3\xi^2}{2} \sin 4\eta \right\} \frac{\partial^7 v}{\partial \eta^7} \right. \\
&\quad + (16\xi \sin 2\eta - 24\xi^2 \sin 4\eta) \frac{\partial^6 v}{\partial \eta^6} \\
&\quad + \{ (2 - 12\xi^2) + 64\xi \cos 2\eta - 180\xi^2 \cos 4\eta \} \frac{\partial^5 v}{\partial \eta^5} \\
&\quad + (-160\xi \sin 2\eta + 816\xi^2 \sin 4\eta) \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} \\
&\quad + \{ (1 + 30.5\xi^2) - 250\xi \cos 2\eta + 2248.5\xi^2 \cos 4\eta \} \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} \\
&\quad + (232\xi \sin 2\eta - 3446\xi^2 \sin 4\eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \\
&\quad + (-2\xi^2 + 116\xi \cos 2\eta - 2202\xi^2 \cos 4\eta) \frac{\partial v}{\partial \eta} \\
&\quad \left. + (-24\xi \sin 2\eta + 72\xi^2 \sin 4\eta) v \right] \tag{33}
\end{aligned}$$

(20), (21) 式より (25) 式の左辺第 2 項は

$$r_0^2 \left\{ \frac{\partial^2 (\rho q_n)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} \right\} = r_0^2 \frac{\alpha \xi}{15} (20 \cos 2\eta - 108\xi \cos 4\eta) \tag{34}$$

となり, 結局平衡方程式は次のように書ける.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r_0^2} \left[ \left\{ \left( 1 + \frac{3\xi^2}{2} \right) - 2\xi \cos 2\eta + \frac{3\xi^2}{2} \cos 4\eta \right\} \frac{\partial^7 v}{\partial \eta^7} \right. \\
&\quad + (16\xi \sin 2\eta - 24\xi^2 \sin 4\eta) \frac{\partial^6 v}{\partial \eta^6} \\
&\quad + \{ (2 - 12\xi^2) + 64\xi \cos 2\eta - 180\xi^2 \cos 4\eta \} \frac{\partial^5 v}{\partial \eta^5} \\
&\quad + (-160\xi \sin 2\eta + 816\xi^2 \sin 4\eta) \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} \\
&\quad \left. + \{ (1 + 30.5\xi^2) - 250\xi \cos 2\eta + 2248.5\xi^2 \cos 4\eta \} \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^3} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (232\xi \sin 2\eta - 3446\xi^2 \sin 4\eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \\
& + (-2\xi^2 + 116\xi \cos 2\eta - 2202\xi^2 \cos 4\eta) \frac{\partial v}{\partial \eta} \\
& + (-24\xi \sin 2\eta + 72\xi^2 \sin 4\eta) v \Big] \\
& + r_0^2 \frac{\alpha \xi}{15} (20 \cos 2\eta - 108\xi \cos 4\eta) = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

上式を Galerkin 法を使って解くことにする。周方向の変位は  $\eta=0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  で 0 の奇関数であるので一般に次のように書ける。

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\eta \tag{36}$$

(a) 1 項近似

$v = C \sin 2\eta$  と仮定し, multiplier [3] として  $\partial v / \partial \eta = \cos 2\eta$  を選ぶことにする。計算結果は次式で与えられる。

$$C = \frac{4\xi}{18 + 193\xi^2} \frac{\alpha r_0^4}{Et^3} \tag{37}$$

いま  $\alpha$  と  $\xi$  は正であるから  $C$  は正である。径方向の変位 (撓み) は  $\partial v / \partial \eta = -w/\rho$  より

$$w = -2C(1 - \xi \cos 2\eta + \xi^2 \cos^2 2\eta) \cos 2\eta \tag{38}$$

となり,  $\eta=0$  での撓みは

$$w_{\eta=0} = -(1 - \xi + \xi^2) \frac{8\xi}{10 + 193\xi^2} \frac{\alpha r_0^4}{Et^3} \tag{39}$$

であるから, 楕円の長軸の方が内側にへこむ。つまり扁平度を軽減する方向に変形することがわかる。ただし, 上で求めた  $w$  はその正負にのみ意味があり, 本解析では変形量を遠心力に付加項として含めていないのでその絶対量はあまり意味を持たない。

(b) 2 項近似

次に  $v = C_2 \sin 2\eta + C_4 \sin 4\eta$  と仮定して multiplier として  $\cos 2\eta$  と  $\cos 4\eta$  を選ぶと  $C_2$  と  $C_4$  は次式のように求まる。

$$C_2 = \frac{12(132,884\xi^2/15 + 4,800)\xi}{7,493,032\xi^4 + 906,120\xi^2 + 259,200} \frac{\alpha r_0^4}{Et^3} \tag{40}$$

$$C_4 = \frac{12(6,912/5 - 6,948\xi^2/5)\xi^2}{7,493,032\xi^4 + 906,120\xi^2 + 259,200} \frac{\alpha r_0^4}{Et^3} \tag{41}$$

撓み  $w$  は

$$w = -(1 - \xi \cos 2\eta + \xi^2 \cos^2 2\eta) (2C_2 \cos 2\eta + 4C_4 \cos 4\eta) \tag{42}$$

となり,  $\eta=0$  での  $w$  は

$$w_{\eta=0} = -(1 - \xi + \xi^2) (2C_2 + 4C_4) < 0 \tag{43}$$

この場合も初期の扁平度を軽減する方向に変形することがわかる。

## 5. む す び

初期に断面不整を持つ薄肉円筒殻が高速回転する時、初期変形が増大する方向に変形するのか減少する方向に変形するかを本小論で検討した。初期断面形状が楕円の場合について調べた結果、変形は真円に近づく方向に起きることが判明した。筒殻面は曲げ剛性を有するため完全な真円とはならないが少なくとも真円に近づくとは言えるのであろう。本解析は扁平度を表わすパラメーター  $\xi$  の 2 乗の項までとって行なわれた。したがって  $\xi$  が 0.1 程度ならば断面は真円の方に変形し初期不整の形状が回転数の増加とともに増大する危険性はないと結論できる。 $\xi=0.1$  というのは長軸半径  $(1+\xi/3)r_0=1.03r_0$  で短軸半径  $(1-\xi/3)r_0=0.97r_0$  程度の楕円に相当する。他の初期不整の形状の場合についてもおそらく定性的には上と同様の結論が得られると筆者は考えている。

1973 年 11 月 25 日 航空力学部

## 参 考 文 献

- [1] Romans, F. and Kempner, J.: Stresses in Short Noncircular Cylindrical Shells under Lateral Pressure, J. Appl. Mech., Vol. 29, No. 4, (1962), pp. 669-674.
- [2] Novozhilov, V. V.: The Theory of Thin Shells, Noordhoff, (1959), pp. 254-259.
- [3] Duncan, W. J. and Mech, A. M. I.: The Principles of the Galerkin Method, ARC R & M. No. 1848, (1938).