

大きな迎角をもつ錐体を過ぎる流れの研究(1)

玉木章夫・河村龍馬・中尾晨一

Supersonic Flow past Conical Bodies at Large Angles of Attack (1)

By

Fumio TAMAKI, Ryuma KAWAMURA and Shin-ichi NAKAO

Abstract: In the study of an inviscid supersonic flow past conical bodies at large angles of attack (relative incidence $\alpha/\theta_0 > 1$), one of the difficulties is the appearance of the vortical singularity in the flow field pointed out by Ferri. The phenomenon of the “lift off” of the vortical singularity causes the divergence of the computation of the conical flow field. In order to avoid the divergence, in this report we have proposed the method that varied a standard circular cone as follows; the windward-side shape leaves a circular cone as it is and the leeward-side shape is replaced by an elliptic cone, which is expanded gradually in proportion to the increase of the angle of attack as including the vortical singularity. By solving the flow field of this equivalent body and applying this results, we have attempted to approximate the pressure distribution of the standard circular cone at large angles of attack. The agreement between the results of the present method and the experiments is good.

概 要

円錐が大きな迎角（相対迎角 $\alpha/\theta_0 > 1$ ）をとるとき、非粘性超音速流れの中に、特異点が発生することは、よく知られている。本報告は下半分（風上側）に円錐、上半分（風下側）に楕円錐という錐体を考え、それによって特異点の発生を防ぎ、その結果が、大迎角時の円錐回りの圧力分布をよく近似するというを示したものである。

記 号

x, r, φ : 円柱座標. (第1図)

Z, ξ, η : 変換後の座標. (③式)

u, v, w : (x, r, φ) 方向の速度成分一様流 U_∞ で無次元化.

P, ρ : 圧力及び密度. それぞれ, $\rho_\infty U_\infty^2, \rho_\infty$ で無次元化.

θ_0 : 円錐の半頂角.

K : 変形された物体上面の楕円の形状比 (第4図)

M_∞, α : 一様流の Mach 数及び, 迎角.

r_b, r_s : $z=1$. の平面での物体形状及び衝撃波の形状 (第2図)

1. 緒 言

超音速の錐体を過ぎる流れ（錐状流）の研究は、A. H. Stone 以来多くの人によってなされてきた [1]~[3]. また、数値解法も多くの方法が提案されてきている [4]~[6]. 特に、Belotserkovskii らによってはじめられた、“The Method of Lines” は、有効な手段であり、Jones [3] は、この方法によって楕円錐を含む任意断面の錐体回りの流れを解いている。非粘性超音速流において、錐体が大迎角 ($\alpha/\theta_0 > 1$.) をとるとき、1つの困難に直面する。それは、Ferri [7] が指摘した、特異点、Vortical Singularity の物体表面からの lift off という現象である。Ferri の指摘以来、vortical singularity, vortical layer について多くの研究がなされてきた [8]~[11]. この特異点の流れの場の中への出現は、大迎角での錐状流を解くときのさけることのできない困難であり、それゆえ、 $\alpha/\theta_0 > 1$ の円錐回りの流れを解いたものは少ない。

Jones は、 $\alpha/\theta_0 \approx 1$. 前後の値をもとにして、 $\alpha/\theta_0 \approx 1.5$ 位までの圧力分布を外挿によって求めているが、当然その誤差は外挿幅が大きくなれば、大きくなってゆく。Bazzhin と Chelysheva [12][13] は、風上側には鈍頭物体の考えを適用そして、風下側の双曲型領域に特性曲線法を用いて、 $\alpha/\theta_0 \approx 5.0$ 前後の場合を解いている。

ここでは、Jones の用いた方法を利用して、下半分に基準となる円錐をそして上半分に基準となる円錐より適当に変形させられた楕円錐をもつ錐体の回りの流れを解き、上面の変形による影響が、十分小さいときの圧力分布によって、基準円錐が、大きな迎角をもったときの圧力分布を近似しようとした。それは、実験値とよい一致を示している。

2. 解 法

1. The Method of Lines

(i) 基礎方程式

第1図に示されたような円柱座標 (z, r, φ) で、運動方程式を書くと次のようになる。

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w\rho)}{\partial \varphi} + \frac{\rho v}{r} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$u \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{w \cdot v}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$u \frac{\partial s}{\partial z} + v \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0$$

また $s = p/\rho^{\gamma}$

である。

ここで、速度は U_{∞} 、圧力は $\rho_{\infty} U_{\infty}^2$ 、密度は、 ρ_{∞} で

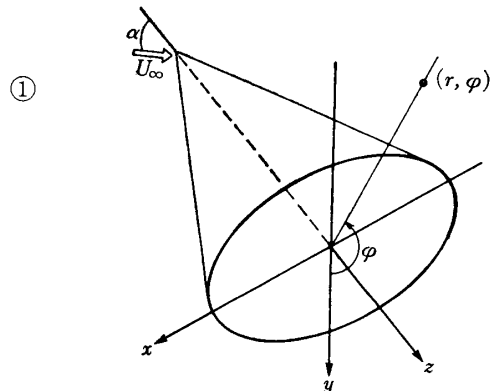


図 1

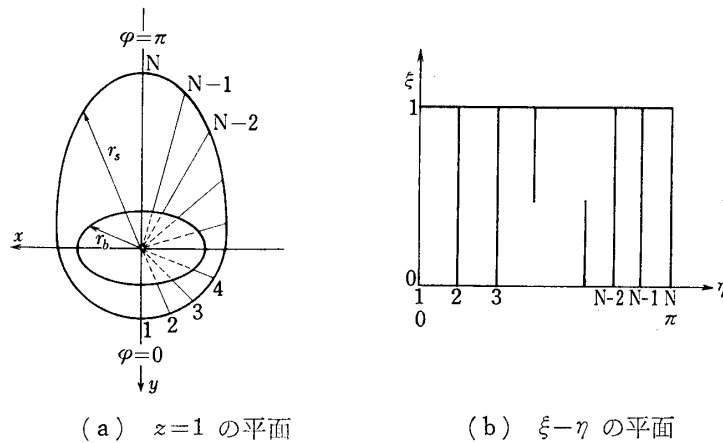


図 2

それぞれ無次元化されている。

錐状物体のみを考えるならば，物体形状，および，衝撃波の形は，次のように書ける。

$$R_b = z \cdot r_b(\varphi) \quad \dots\dots ②$$

$$R_s = z \cdot r_s(\varphi)$$

今，次のような変換を考え，考える領域を 2-a 図より，2-b 図の矩形領域へと変換する。

$$z = Z$$

$$\xi = (r - R_b) / (R_s - R_b) \quad \dots\dots ③$$

$$\eta = \varphi$$

この変換によって，また，錐状流の性質より $\partial/\partial Z$ の項を“0”とおけば，①の方程式系は一般に，

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = G \left(u, v, w, \rho, p, r_s, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta}, \frac{\partial w}{\partial \eta}, \frac{\partial \rho}{\partial \eta}, \frac{\partial p}{\partial \eta}, \frac{\partial r_s}{\partial \eta} \right) \quad \dots\dots ④$$

という形で書く事ができる。

考えるべき領域は，

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq \pi$$

の矩形領域であり， η 方向の微分を差分式でおきかえる事によって，①の方程式系すなわち④の系を ξ について積分すれば，流れの諸量 F は，求める事ができる。

(ii) 境界条件

○衝撃波面の条件 ($\xi=1$)

衝撃波の形状 $r_s(\varphi)$ を与えれば，Rankine-Hugoniot の関係から与えられる。

○物体面上の条件 ($\xi=0$)

垂直な速度成分が，“0” という条件より

$$u \cdot r_b - v + \frac{w}{r_b} \frac{dr_b}{d\varphi} = 0 \quad \dots\dots ⑤$$

が、成立しなければならない。

(iii) くり返し法

(ii)の条件のもとで、④の系を解くわけであるが、仮定された $r_s(\varphi)$ について、一般に、⑤の条件は満足されない。故に、⑤を満足するように、 $r_s(\varphi)$ を変化させてゆき、くり返し法によって解くわけである。

(2) 大きな迎角をもつ場合

円錐が大きな迎角をもつとき、Ferri が指摘したように V. S. (Vortical singularity) が、物体表面を離れる。この現象は、Melnik らによって確認され、一つのパラメーターが、提案されている。この特異点の流れの場の中への流出は、大迎角の円錐を解く上での大きな障害であった。本報告で行なわれた数値計算法において、大迎角時に、計算はやはり発散するわけであるが、それには大きく分けて二つの理由があげられる。

(i) 大きな迎角をもつとき、物体上面（風下側）の衝撃波は弱くなり、Mach cone に近づく。そして、流れの場の中に、双曲型の領域が広がってゆく。このとき、衝撃波が十分弱い、もしくは Mach cone になってしまうと、現在の形の境界条件は適用できなくなる。

(ii) V. S. が、物体表面より離れる事によって、⑤式の分母にでてくる量 V_n (垂直速度成分) を“0”とする点が流れの場の中に出現する。

Bazzhin ら [12][13] によって示されたように、相対迎角 $\alpha/\theta_0 \approx 5$ でも、そして、かなり広い双曲型領域が、存在するにもかかわらず、風下側の衝撃波は十分の強さをもっている。又、風下側に広がった、双曲型の領域の存在は、物体上面の風上側への影響をほとんど考えないでよい事を意味している。以上二つの点を考慮して、図3に示される様な V. S. が、物体表面を離れて、流れの場の中に存在する時を考えよう。このとき、V. S. の点を含む、もしくは物体表面上になるように図のように実際の物体（実線）よりも大きな破線の位置へと物体を拡大する。それによって本来ならば、計算できないはずの大きな迎角に対しても計算

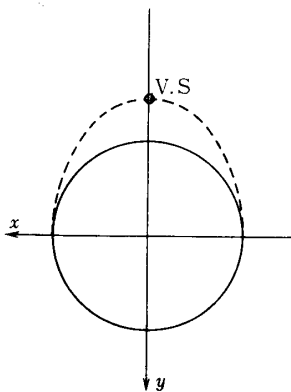


図3

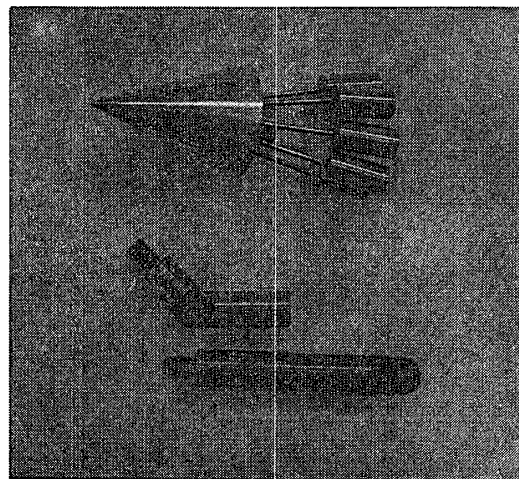


図4 実験に用いた $\theta_0=20^\circ$ の円錐と2段折れの支持棒

をする事ができるようになる。このとき、当然の事であるが、実際とは異なった物体の周りの流れを解くのであるから、変形された物体の部分、すなわち破線の部分が、流れ場全域に影響を与えないように、上面の衝撃波は、十分に弱く、双曲型領域が、十分に広がっている事が必要である。

実際の計算手順は次のように行なわれた。

- (i) 実際の物体に対して、最大の迎角 α_l まで計算をする。 ($\alpha/\theta_0 \approx 1$.)
- (ii) α_l より出発して、物体上面を少しづつ変形してゆき、求める迎角 α_0 まで計算を行う。
- (iii) 一般に、(ii)の段階では、上面の衝撃波は強い。故に、次に、物体を少しづつ小さくして、双曲領域が十分に広がるまで、すなわち、衝撃波の強さが十分小さくなるまで物体を修正してゆく。

3. 計算結果と実験値との比較

1. 実 験

半頂角 20° の円錐に対して、旧玉木研のショックタンネルを用いて表面の圧力分布が求められた。実験においての条件は、 $M_\infty=2.8$, $Re_\infty=4 \times 10^5$, $P_{st}=4$ 気圧, 動圧 $=0.8 \text{ kg/cm}^2$ であった。

実験は、 $\alpha=0^\circ, 14^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ の四つの迎角に対して行なった。また、大迎角に対して横

表 1

A $M_\infty: 4.25$ $\theta_0: 12.5^\circ$	α	8.25°	12.5°	15.63°	
	K	1.0	1.0	1.2	
B $M_\infty: 3.5$ $\theta_0: 15^\circ$	α	10°	15°	20°	25°
	K	1.0	1.0	1.3	1.5
C $M_\infty: 2.8$ $\theta_0: 20^\circ$	α	14°	20°	30°	
	K	1.0	1.0	1.4	

型を主流内の適当な位置に設置するために、2 段折れになっている支持棒を用いた。

2. 計算結果

計算は、(A) $M_\infty=4.25$, $\theta_0=12.5^\circ$, (B) $M_\infty=3.5$, $\theta_0=15^\circ$, (C) $M_\infty=2.8$, $\theta_0=20^\circ$ の場合 (すべて半頂角 θ_0 の円錐) について行った。

Case 1: 半頂角 θ_0 の円錐回りの流れを解いた結果。

Case 2: Case 1 の結果をもとに欲しい迎角での値へ外挿によって求めた結果。

Case 3: 第 5 図に示したような $K \neq 1$ の錐体回りの流れを

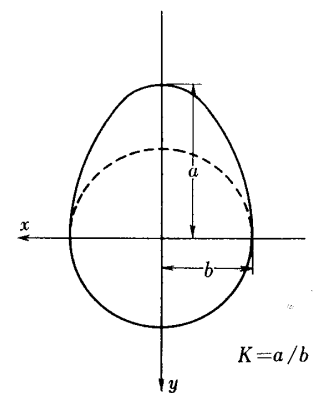


図 5

解いて得た結果.

計算された迎角と, Case 3 における錐体上面の変形量を示す K とが, 表-1 に示されている.

図 6, 7, 8 は, $\alpha/\theta_0 < 1$ の場合で, Case 1 の結果を実験と比較したものであり, $\varphi = 0^\circ \sim$

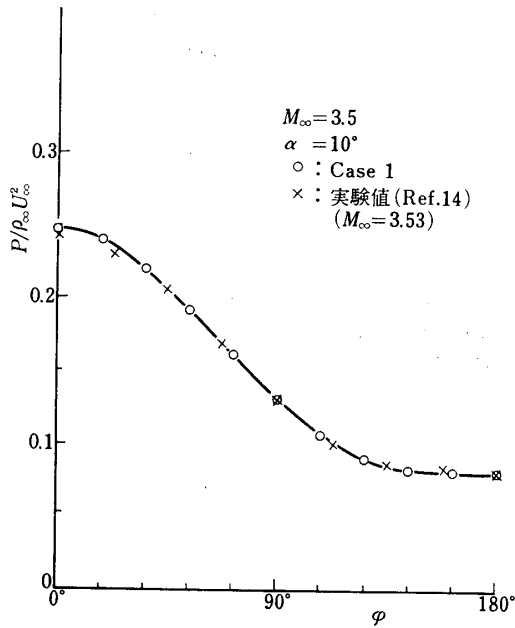


図 6 圧力分布 ($\theta_0 = 15^\circ$ の円錐)

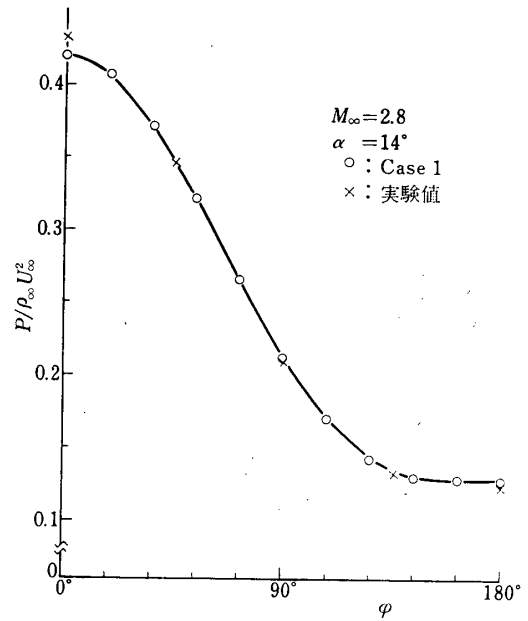


図 7 圧力分布 ($\theta_0 = 20^\circ$ の円錐)

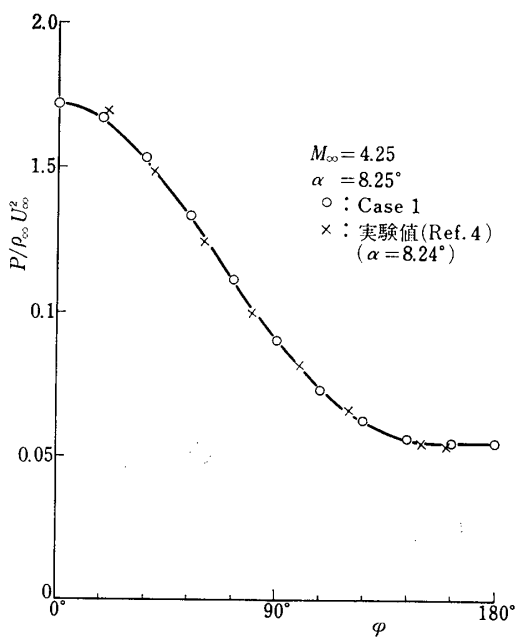


図 8 圧力分布 ($\theta_0 = 12.5^\circ$ の円錐)

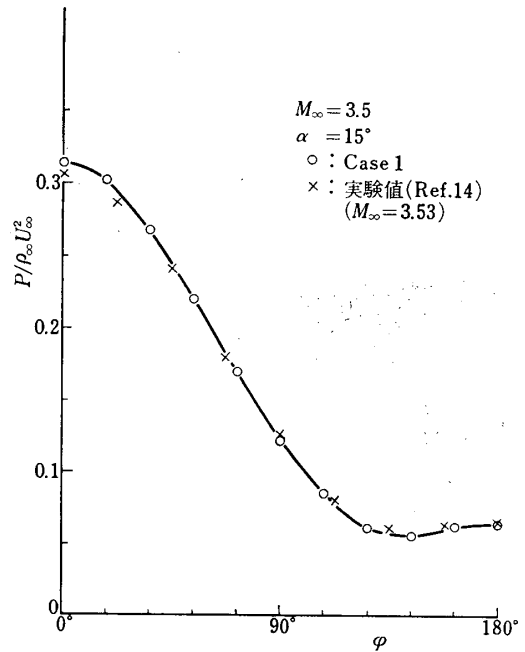


図 9 圧力分布 ($\theta_0 = 15^\circ$ の円錐)

20° をのぞけば、実験値とよく一致している。図 9, 10, 11 には、 $\alpha/\theta_0=1$ のときが、示されている。この場合も、風上側の実験値との差が、大きくなっているが、他の所では、よく一致している。図 12~15 には、 $\alpha/\theta_0>1$ の場合が、Case 2, Case 3, および基準円錐の

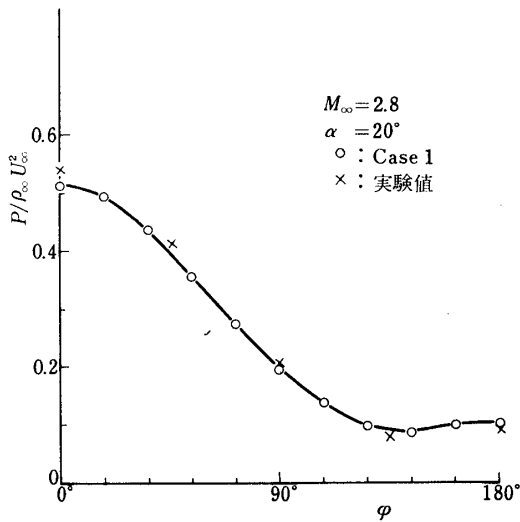


図 10 圧力分布 ($\theta_0=20^\circ$ の円錐)

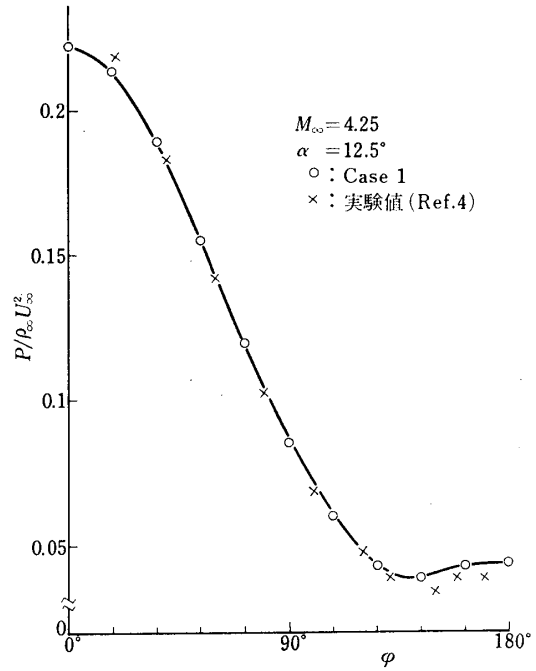


図 11 圧力分布 ($\theta_0=12.5$ の円錐)

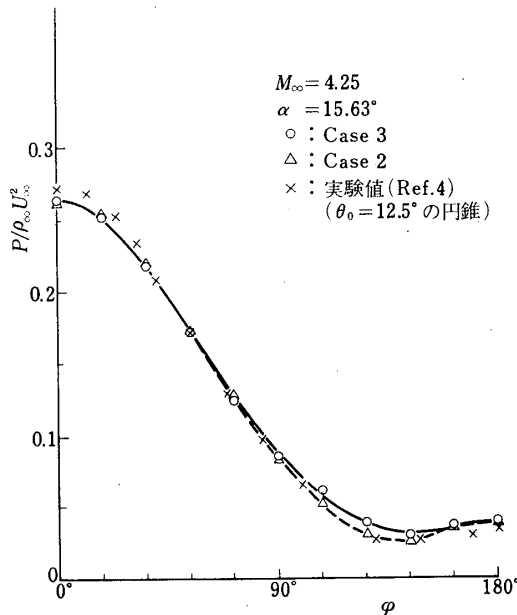


図 12 圧力分布 (下面 $\theta_0=12.5^\circ$ の円錐, 上面 $K=1.2$ の楕円錐の錐体)

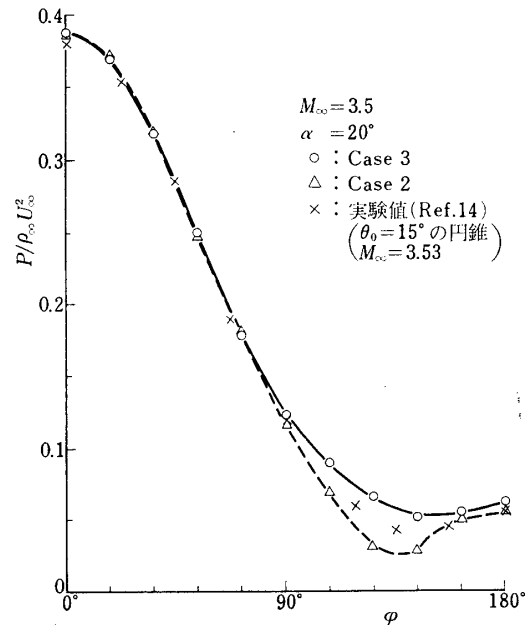


図 13 圧力分布 (下面 $\theta_0=12.5^\circ$ の円錐, 上面 $K=1.3$ の楕円錐の錐体)

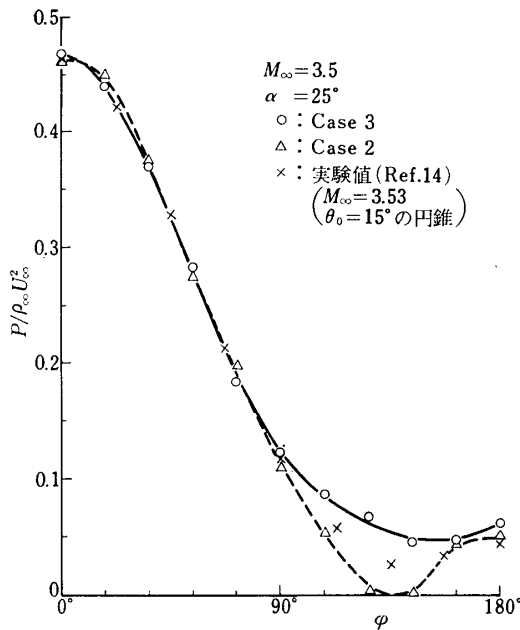


図 14 圧力分布 (下面 $\theta_0=15^\circ$ の円錐
上面 $K=1.5$ の楕円錐の錐体)

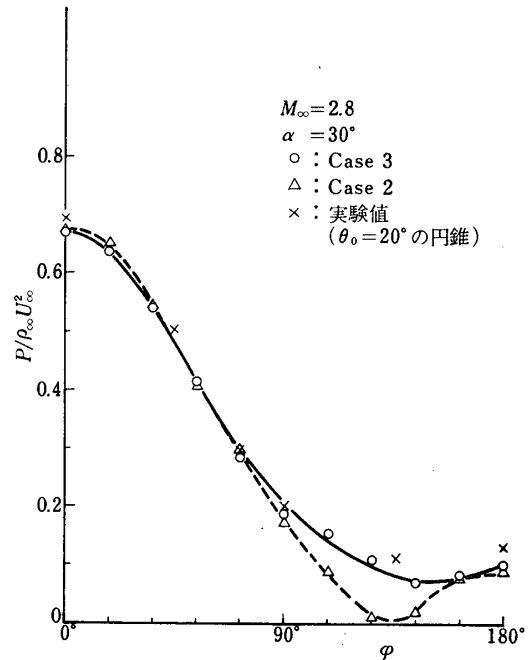


図 15 圧力分布 (下面 $\theta_0=20^\circ$ の円錐, 上
面 $K=1.4$ の楕円錐の錐体)

実験値とで、示されている。相対迎角が、まだ 1 よりもあまり大きくないときは(図 12)、外挿によって求めた結果は、風上側をのぞいて、実験値と一致している。しかし、 $\alpha/\theta_0 > 1.3$ となると、外挿によって得た圧力分布は、風下側において、実験値より大きな谷があらわれ、迎角が大きくなるにつれて、谷も大きくなり実験値との差が大きくなる。しかるに、Case 3の結果は、風下側では、実験値と同じ傾向をもち(大きな谷をもたない)、実験値ともよく一致している。また、Case 2 と Case 3 との結果は、風上側では、ほとんど一致している。実験値との差は、 $\alpha/\theta_0=1$ の場合よりも大きくなっている。風下側での差は、迎角が大きくなるにつれて、少しずつ大きくなっていることがわかる。

4. 考 察

1. 風 上 側

全体について、風上側では、 $\varphi=0\sim 20^\circ$ の領域で実験値との差がみられ、その差は迎角とともに大きくなっている。それは、大きな迎角によって生じる物体表面の強い粘性層の影響と考えられ、非粘性流を与える限りにおいては、解決されないものであろう。その点を考慮するならば、Case 2 によって与えられる圧力分布は外挿幅が、かなり大きくても、相対迎角が 2 程度までならば、風上側に関しては、十分な精度をもっていると言う事ができる。また Case 3 の結果が、Case 2 の結果とほぼ一致しているという事は、風下側の物体形状の影響が風上側におよんでいない事を意味していると思われる。

2. 風 下 側

迎角を大きくとってゆくとき、円錐回りの圧力分布は、圧力の最小値が、 $\varphi=180^\circ$ の対称面より移動し、そこを小さな谷として、対称面に向って圧力を回復するという形をとる。迎角が増すにつれて、最小値の位置は、風上側に進みはく離線とほぼ一致した、 $\varphi=130^\circ$ 前後で止る [20][21]。それより迎角が大きくなっても最小値の位置は、ほとんど変らない。Case 2 によって得られた圧力分布は、実験値と比べてはるかに大きな谷を $\varphi=140^\circ$ の近くにもっている。この違いは、実際には、風下側では、はく離によって渦が発生し、それによってそれほど大きな圧力減少が、起こらないという事からきている。ゆえに、風下側ではあまり大きな外挿幅を持つときは、Case 2 で圧力分布を与える事は適切ではない。

Vortical singularity を包み込むための物体上面の変形は、大きな迎角を円錐がもったときの渦を含むはく離領域にあたり、丁度、equivalent body のような形となるわけである。ゆえに、そのような物体回りの流れを解くという事 (Case 3) は、「基準円錐+はく離領域」の外側の非粘性流を解く事に相当している。これが、Case 3 の結果が、実験値とよく一致している理由であろう。

しかし、風下側のはく離領域内の流れは、複雑であり、その様子を知るには、実験点は少なすぎると思われる。また、それとよりよく一致させるには、粘性流れを解く事が、必要になると思われる。それらを考慮するならば、Case 3 の結果は、風下側の圧力分布を十分近似しうるものと思われる。

5. 結 論

Equivalent body を考える事によって、大きな迎角をもつ円錐まわりの圧力分布を近似するという現在の方法は、風下側、風上側ともによく実験値と一致しており有効であると考えられる。また、風上側だけを考えるならば、基準円錐の限界の迎角までの値より外挿によって得た圧力分布で十分適用できる。風下側、風上側における実験値との差は、非粘性流れを解く限りにおいては、解決できないものであろう。なお、現在、実験値との差をより小さくするような事が、考えられており、それは、次の機会に報告するつもりである。

6. 謝 辞

本研究を遂行するにあたって、適切な助言、示唆をして下さった、雛田元紀助教授、並びに労をおしめず、実験を援助して下さい、寺田守男、塚本茂樹、両氏に深く感謝いたします。

1973 年 12 月 5 日 新設部 (工学)

参 考 文 献

- [1] Willett, J.E.: "Supersonic Flow at the Surface of a Circular Cone at Angle of Attack" J. A. S., Vol. 27, (pp. 907-912), 1960
- [2] Cheng, H.K.: "Hypersonic Flows past a Yawed Circular Cone and Other Pointed Bo-

- dies" J. F. M., Vol. 17 (pp. 167-191), 1961
- [3] Woods, B. A.: "The Vortical Layer on an Inclined Cone" J. F. M., Vol. 20, (pp. 625-643), 1964
- [4] Jones, D. J.: "Numerical Solutions of the Flow Field for Conical Bodies in a Supersonic Stream" N. R. C., No. 10361
- [5] Tamaki, F., Hinada, M. and Kurosaki, M.: "An Application of the Method of Series Truncation to the Conical Flow Problem" ISAS Report, No. 469, 1971
- [6] South, Jr., J. C. and Klunker, E. B.: "Methods for Calculating Nonlinear Flows" NASA, SP-228, 1970
- [7] Ferri, A.: "Supersonic Flow around Circular Cone" NACA TN 2236, 1951
- [8] Munson, A. G.: "The Vortical Layer on an Inclined Cone" J. F. M., Vol. 20 (pp. 625-643), 1964
- [9] Moore, F. K.: "Laminar Boundary Layer on Cone in Supersonic Flow at Large Angle of Attack" NACA TR-1132
- [10] Melnik, R. E.: "Vortical Singularities in Conical Flow" AIAA. J. Vol. 5 (pp. 631-637)
- [11] Golubinskii, A. I.: "Particular Stream Surfaces in Conical Gas Flow"
- [12] Bazzhin, A. P. and Chelysheva, I. F.: "Application of the Straight Line Method to the Calculation of Flow past Conical Bodies at Large Angles of Attack" Fluid Dyna., Vol. 2, No. 3, 1967
- [13] Bazzhin, A. P., Trusova, O. N. and Chelysheva, I. F.: "Calculation of Perfect Gas Flows around Elliptic Cones at Large Angles of Attack" Fluid Dyna., Vol. 3, No. 4, 1968
- [14] Holt, Maurice and Blackie, J.: "Experiments on Circular Cones at Yaw in Supersonic Flow" J. A. S., Vol. 23, (pp. 931-936), 1956
- [15] Feldhuhn, R. H. and Winkelmann, A. E.: "An Experimental Investigation of the Flow Field around a Yawed Cone" AIAA. J., Vol. 9, (pp. 1074-1081), 1971
- [16] Marcillat, Jacques and Roux, Bernard: "Experimental and Theoretical Study of Supersonic Viscous Flow over a Yawed Circular Cone" AIAA. J., Vol. 10, 1972
- [17] Rainbird, W. J.: "Turbulent Boundary Layer Growth and Separation on a Yawed Cone" AIAA. J., Vol. 6, (pp. 2410-2416), 1968
- [18] Stetson, K. T.: "Boundary Layer Separation on Slender Cones at Angle of Attack" AIAA. J., Vol. 10, (pp. 642-648), 1972
- [19] Lin, T. C. and Rubin, S. G.: "Viscous Flow over a Cone at Moderate Incidence" J. F. M., Vol. 59, (pp. 593-620), 1973
- [20] Avduevskii, V. S. and Medvedev, K. I.: "Study of Laminar Boundary Layer Separation on a Cone at an Angle of Attack" Fluid Dyna., Vol. 1, No. 3, 1966
- [21] Avduevskii, V. S. and Medvedev, K. I.: "Separation of a Three-Dimensional Boundary Layer" Fluid Dyna., Vol. 1, No. 2, 1966