

翼のフラッタに及ぼす減衰特性及び 支持剛性の影響

名 取 通 弘・砂 川 恵

Influences of Damping Characteristics and Support Stiffness on Wing Flutter

By

Michihiro NATORI and Megumi SUNAKAWA

Abstract: The influences of damping characteristics and support stiffness on a wing flutter are reported. The flutter of rectangular plate wings in a supersonic flow is analyzed by using the root locus method. It is shown that both the damping characteristics and support stiffness have marked and complicated effects upon the high frequency flutter of such wings. And how a significant role the damping plays in the unstable phenomena such as a flutter is shown clearly.

概 要

本研究は翼のフラッタに及ぼす減衰及び支持剛性の影響を扱ったものである。矩形平板翼の超音速フラッタを根軌跡法を用いて解析し、このような翼に対して、減衰及び支持剛性が大きく且つ複雑な影響を与えること。そしてそれは特に高次連成フラッタにおいて顕著であることを示す。そしてこれらがフラッタやダイバージェンスのような不安定現象においていかに重要な役割を果しているかを明確にする。

記 号

A	アスペクト比
a_1, a_2	(12)式, 或いは(25)式
b	半翼弦長
b_1, b_2	(12)式, 或いは(25)式
$C(k)$	Theodorsen 函数
D, D_S, D_{P1}, D_{P2}	フラッタ行列式
E	縦弾性係数
EI	曲げ剛性
F_0, F_1, F_2	(21)式
f_1, f_2	曲げ1次及び2次の固有振動モード
G	剪断弾性係数

GJ	振り剛性
g	振りの固有振動モード
g_1, g_2, g_t	構造減衰係数, (17)式
h, h_0	板厚及び代表板厚
I_1, I_2	(14)式
j	虚数単位, $j \equiv \sqrt{-1}$
K_B, K_T	支持部における曲げ及び振りのバネ定数
k, k_0	無次元振動数及び(23)式
L	空気力
L_S, L_P	動圧パラメタ, (17)及び(20)式
l	半翼幅長さ
M	マッハ数
M_x	空力モーメント
M_{F0}	フラッタマッハ数, (29)式
m	単位翼幅当りの質量
p	単位面積当りの空気力 (ピストン理論)
q	動圧
r, r_α	回転半径及びその無次元表示, (17)式
s	特性方程式の根, $s \equiv \sigma + j\omega$, (17)式
t	時間
U	速度
W, w	撓み及び無次元撓み
x, y	座標
y_G, y_A, y_E	距離; 弾性軸と重心, 翼弦中央と空力中心, 及び翼弦中央と弾性軸の間
$\beta \equiv b/l$	
γ	剪断歪或いは比熱比
δ	板厚比, (27)式
ε	伸び歪
$\eta_G \equiv y_G/b, \eta_A \equiv y_A/b$	
η_b, η_t	曲げ及び振りに関する材料の粘性係数
θ	回転角
κ_B, κ_T	曲げ及び振りに関する支持部の無次元バネ定数
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_t$	曲げ1次, 及び2次, 及び振りの振動数係数
μ	質量比
ν	(15)式
ξ, η	無次元座標
ρ_∞	一様流の密度

σ	垂直応力或いは特性根の実部
τ	剪断応力
ϕ_1, ϕ_2, ψ	曲げ1次, 及び2次, 及び振りに関する規準座標
ω	特性根の虚部
$\omega_1, \omega_2, \omega_t$	円振動数
ω_{1t}, ω_{2t}	無次元円振動数, (17)式
$\times, +$	根軌跡の極
\circ	根軌跡の零点

添字は以下に関する諸量を表す.

B, b	曲げ
T, t	振り
1, 2	曲げ1次及び2次の固有振動
S	定常空気力
P	ピストン理論

1. まえがき

翼のフラッタ特性に及ぼす減衰の影響については、操舵面のフラッタ防止に関連して研究された [1] のを初めとして、今迄に多くの研究がなされてきた. Broadbent & Williams [2] は2自由度のフラッタ及ぼす構造減衰の影響を研究して、減衰が大きくなるとフラッタ速度が低下することがあること、そして通常フラッタが問題とならないような高い高度を飛行している条件の場合並びに実際の構造減衰よりも遥かに大きな減衰を与えた場合にその影響が著しいことを指摘した. その後 Done [3] 及び Nissim [4][5] はフラッタ方程式中に現れる空力減衰及び構造減衰を纏めて線型減衰として扱い、その影響を Routh の判定条件及びエネルギー的考察により研究した. この問題は又フラッタ機構の解明に関連して研究されている [6]. Landahl [7] は、特性方程式の特性図の検討による動的な系の安定解析の研究において二次元翼の超音速フラッタを扱い、構造減衰の影響について触れている. Rheinforth & Swift [8] は、定常空気力による二次元翼のフラッタ解析を根軌跡法を用いて行い、翼の重心位置、空力中心位置、及び固有振動数をパラメタとしてフラッタの機構を明らかにした. そして構造減衰のフラッタに及ぼす影響を解明するには根軌跡法が有用であることを指摘した. 一方、Niblett [9], Lambourne [10], 及び中村 [11] は空力減衰の影響について研究した. 特に中村は、二次元翼の非圧縮流中でのフラッタ解析において、種々の近似空気力と Theodorsen の導いた厳密な空気力とを比較して、準定常空気力を用いた場合より定常空気力を用いた場合の解析がより合理的であること、そしてそれは Theodorsen 関数の虚部の特異性に原因するものであることを示した. 又超音速流に関しては準定常理論であるピストン理論が有効であるが、マッハ数が1に近い場合には、流れの遅れによる影響を無視できなくなって、ピストン理論では具合の悪いことを指摘している. Prasad, Nemat-Nasser & Herrmann [12] は減衰による不安定化効果の研究

[13]の一環として、低速高密度流中における大アスペクト比後退翼のフラッタを扱い、比較的大きな質量比の場合に、曲げに関する減衰力の存在はフラッタ速度を増加させ、振りに関する減衰力はフラッタ速度を減少させることを明らかにして、構造減衰がフラッタ速度に大きな影響を与えることを結論している。超音速の振動空気力としてフラッタ解析に大きな成功を収めているピストン理論 [14] に関しては、Chawla [15] がフラッタに及ぼす多くのパラメタの影響を研究しており、空力減衰の影響も簡単に述べている。

以上述べたように翼のフラッタに及ぼす減衰の影響については、多くの研究があるが、未だその影響の定性的な理解は十分でないように思われる。又実際の翼においてはその付根が完全に固定されることは殆んどなく、適当な剛性を持つバネで支持されていると考えられる。通常、フラッタ解析は翼の振動特性の知識に基づいて展開されるから、固有振動数比のフラッタに及ぼす影響等に関しては古くから多くの研究がある。しかし、具体的にこれらの支持条件のフラッタに及ぼす影響を論じたものは見られないようである。

本研究では、片持矩形平板翼の超音速曲げ振りフラッタに及ぼす減衰の影響及び支持剛性の影響を3自由度のフラッタ問題として根軌跡法によって解析する。特に、従来解析 [5] [16] 及び模型実験 [17] において指摘されてきた高次連成フラッタに減衰項が複雑な影響を与えることを示してその機構を明らかにする。

2. 基礎方程式

翼の材料特性が次のような Voigt 型の応力-歪関係式に従うとする。

$$\sigma = E\varepsilon + \eta_b \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \tau = G\gamma + \eta_t \frac{d\gamma}{dt}. \quad (1)$$

ここに、 $\sigma, \tau, \varepsilon, \gamma, E, G, \eta_b$, 及び η_t は夫々垂直応力、剪断応力、伸び歪、剪断歪、縦弾性係数、剪断弾性係数、曲げ及び剪断における材料の粘性係数である。

第1図のような系において、変位 W を

$$W(x, y, t) = l \cdot w(x, t) + y \cdot \theta(x, t), \quad (2)$$

とすると、平衡方程式は、

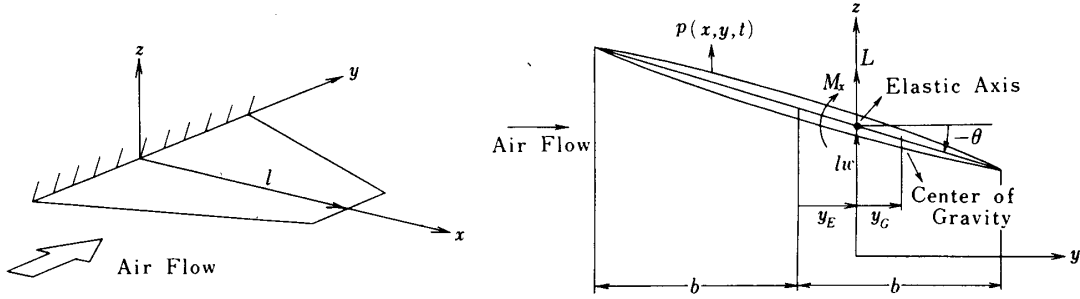
$$\left. \begin{aligned} l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_b I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + ml \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m y_G \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= L, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(G J \frac{\partial \theta}{\partial x} + \eta_t J \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \right) - m l y_G \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= M_x, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。ここに EI, GJ, m, r, y_G は夫々翼の曲げ剛性、振り剛性、単位翼幅当りの質量、回転半径、及び弾性軸から重心までの距離であり、 L 及び M_x は空気力及びそのモーメントである。

空気力として定常空気力を用いる場合は、

$$\left. \begin{aligned} L &= q 2b \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} (-\theta), \\ M_x &= -y_A L, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

である。ここに、 $q, \partial C_L / \partial \alpha, y_A$ は夫々動圧、揚力傾斜、及び翼弦中央から空力中心までの



第1図 座 標

距離であり、非圧縮流中の平板翼の場合、 y_E を翼弦中央から弾性軸までの距離として、

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = 2\pi, \quad y_A + y_E = -\frac{b}{2}, \quad (5)$$

超音速流中の平板翼の場合、

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad y_A + y_E = 0, \quad (6)$$

である。ここに、 M は一様流のマッハ数である。更に非圧縮流中の平板翼についての非定常空気力 (strip theory) を用いる場合には、

$$\left. \begin{aligned} L &= -\pi\rho_\infty b^2 \left[l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + U \frac{\partial \theta}{\partial t} - y_E \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \\ &\quad - 2\pi\rho_\infty U b C(k) \left[l \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{b}{2} - y_E \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right], \\ M_x &= -\pi\rho_\infty b^2 \left[y_E l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - U \left(\frac{b}{2} - y_E \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \left(\frac{b^2}{8} + y_E^2 \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \\ &\quad - 2\pi\rho_\infty U b \left(y_E + \frac{b}{2} \right) C(k) \left[l \frac{\partial w}{\partial t} + U \theta + \left(\frac{b}{2} - y_E \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right], \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である [18]。ここに、 ρ_∞ 及び U は一様流の密度及び速度、 $C(k)$ は Theodorsen 函数で無次元振動数 $k = b\omega_k/U$ の函数、 ω_k は円振動数である。超音速流中では翼厚等の非線型項の影響が大きく、これらを含む準定常空気力として、ピストン理論 [14] が解析によく用いられる。これによれば、

$$\begin{aligned} L &= \int p dy, \quad M_x = - \int p y dy, \\ p(x, y, t) &= -q \frac{4}{M} \left[1 + \frac{(\gamma+1)M}{4} \frac{\partial h}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{U} \frac{\partial W}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

である。ここに、 γ 及び h は一様流の比熱比及び翼の板厚である。

次に、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x/l, \quad \eta = y/l, \quad \beta = b/l, \\ \eta_A &= y_A/b, \quad \eta_G = y_G/b, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

として(3)式を無次元化する.

ここで梁の固有振動モードを用いて, w, θ を次のように表す.

$$\left. \begin{aligned} w(\xi, t) &= \phi_1(t)f_1(\xi) + \phi_2(t)f_2(\xi), \\ \theta(\xi, t) &= \psi_1(t)g(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに, $f_i(\xi)$ 及び $g(\xi)$ は曲げ及び捩りの固有振動モードであり, 翼の付根が曲げ及び捩りに対して夫々バネ定数 K_B 及び K_T のバネで支持されているとすると,

$$\kappa_B = \frac{EI}{K_B l}, \quad \kappa_T = \frac{GJ}{K_T l}, \quad (11)$$

を用いて

$$\left. \begin{aligned} f_i(\xi) &= a_i \{ \cosh \lambda_i \xi - \cos \lambda_i \xi + 2\kappa_B \lambda_i \sin \lambda_i \xi \\ &\quad - a_{0i} (\sinh \lambda_i \xi - \sin \lambda_i \xi) \}, \\ a_{0i} &= \frac{\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i - 2\kappa_B \lambda_i \cos \lambda_i}{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i}, \quad (i=1, 2), \\ g(\xi) &= b_1 (\sin \lambda_t \xi + \kappa_t \lambda_t \cos \lambda_t \xi), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

と書くことが出来る. ここに, a_1, a_2 , 及び b_1 は正規化の為の定数であり, λ_i 及び λ_t は夫々

$$\left. \begin{aligned} \cosh \lambda_i \cos \lambda_i + 1 - \kappa_B \lambda_i (\sin \lambda_i \cosh \lambda_i - \cos \lambda_i \sinh \lambda_i) &= 0, \\ \cos \lambda_t - \kappa_T \lambda_t \sin \lambda_t &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

の根である. (12)式を用いると

$$\int_0^1 f_1^2 d\xi = \int_0^1 f_2^2 d\xi = \int_0^1 g^2 d\xi = 1,$$

であり, また

$$I_1 = \int_0^1 f_1 g d\xi, \quad I_2 = \int_0^1 f_2 g d\xi, \quad (14)$$

と表しておく. (3)式及び(10)式から Galerkin法によって ϕ_1, ϕ_2 及び ψ についての方程式を導き, それに

$$\phi_1 = \bar{\phi}_1 e^{\nu t}, \quad \phi_2 = \bar{\phi}_2 e^{\nu t}, \quad \psi = \bar{\psi} e^{\nu t}, \quad (15)$$

を代入すると, $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2$, 及び $\bar{\psi}$ についての斉次連立方程式を得る. この係数の行列式がフラッタ行列式 D であり, 空気力に定常空気力を用いた場合,

$$D_s = \begin{vmatrix} s^2 + g_1 \omega_1 t s + \omega_1^2 t, & 0, & I_1 (\eta_C \beta s^2 + L_s) \\ 0, & s^2 + g_2 \omega_2 t s + \omega_2^2 t, & I_2 (\eta_C \beta s^2 + L_s) \\ \frac{I_1 \eta_C}{\beta r_a^2} s^2, & \frac{I_2 \eta_C}{\beta r_a^2} s^2, & s^2 + g_t s + 1 + L_s \frac{\eta_A}{\beta r_a^2} \end{vmatrix}, \quad (16)$$

である. ここに,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1t} &= \omega_1/\omega_t, \quad \omega_{2t} = \omega_2/\omega_t, \quad s = \nu/\omega_t, \\ \omega_i &= \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (i=1, 2), \quad \omega_t = \frac{\lambda_t}{l} \sqrt{\frac{GI}{mr^2}}, \\ r_\alpha &= r/b, \\ g_1 &= \eta_b \omega_1/E \equiv g_b, \quad g_2 = \eta_b \omega_2/E, \quad g_t = \eta_t \omega_t/G, \\ L_s &= \frac{q2b\delta C_L/\partial\alpha}{ml\omega_t^2}: \text{動圧パラメータ}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

である。ここで $g_1, g_2,$ 及び g_t は材料の内部減衰を表す係数であるが以下ではこれを構造減衰係数と呼び、これによって構造減衰を代表させることにする。又添字 S は定常空気力によることを示す。 $s = j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$) として、 $D_s = 0$ を解いてフラッタ動圧パラメータ L_{SF} 及びフラッタ円振動数 ω_F が求められる。一方、 $D_s = 0$ より、

$$1 + \frac{L_s}{\beta r_\alpha^2} \times \frac{\eta_A (s^2 + g_1 \omega_{1t} s + \omega_{1t}^2)(s^2 + g_2 \omega_{2t} s + \omega_{2t}^2) - \eta_G s^2 \{I_1^2 (s^2 + g_2 \omega_{2t} s + \omega_{2t}^2) + I_2^2 (s^2 + g_1 \omega_{1t} s + \omega_{1t}^2)\}}{(s^2 + g_1 \omega_{1t} s + \omega_{1t}^2)(s^2 + g_2 \omega_{2t} s + \omega_{2t}^2)(s^2 + g_t s + 1) - (\eta_G^2/r_\alpha^2) s^4 \{I_1^2 (s^2 + g_2 \omega_{2t} s + \omega_{2t}^2) + I_2^2 (s^2 + g_1 \omega_{1t} s + \omega_{1t}^2)\}} = 0, \quad (18)$$

が導かれ、この式によって L_s をゲインとした根軌跡を調べることが出来る。それにより $D_s = 0$ の根 $s = \sigma + j\omega$ の安定を判定することになる。

空気力にピストン理論を用いた場合には、添字 P を使って、

$$D_{P1} = \begin{vmatrix} s^2 + g_1 \omega_{1t} s + \omega_{1t}^2 + \frac{L_P l \omega_t}{2\beta U} H_0 s, & 0, & I_1 \left(\eta_G \beta s^2 + \frac{L_P}{2\beta} H_0 + \frac{L_P l \omega_t}{2\beta U} H_{1s} \right) \\ 0, & s^2 + g_2 \omega_{2t} s + \omega_{2t}^2 + \frac{L_P l \omega_t}{2\beta U} H_0 s, & I_2 \left(\eta_G \beta s^2 + \frac{L_P}{2\beta} H_0 + \frac{L_P l \omega_t}{2\beta U} H_{1s} \right) \\ \left(\frac{\eta_G}{r_\alpha^2 \beta} s^2 \right. & \left. \left(\frac{\eta_G}{r_\alpha^2 \beta} s^2 \right. & \left. s^2 + g_t s + 1 + \frac{L_P}{2r_\alpha^2 \beta^3} H_0 \right) \\ \left. + \frac{L_P}{2r_\alpha^2 \beta^3} \frac{l \omega_t}{U} H_{1s} \right) I_1, & \left. + \frac{L_P}{2r_\alpha^2 \beta^3} \frac{l \omega_t}{U} H_{1s} \right) I_2, & \left. + \frac{L_P}{2r_\alpha^2 \beta^3} \frac{l \omega_t}{U} H_{2s} \right) \end{vmatrix} \quad (19)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} L_P &= \frac{q2b(4/M)}{ml\omega_t^2}: \text{動圧パラメータ}, \\ H_0 &= \frac{1}{4} \{F_0 + (\gamma+1)MG_0\}, \quad H_1 = \frac{1}{4} \{G_1 + (\gamma+1)MF_1\}, \\ H_2 &= \frac{1}{4} \{F_2 + (\gamma+1)MG_2\}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

であり、又 F_0, G_0 等は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= 4 \int d\eta, \quad F_1 = \int \frac{\partial h}{\partial y} \eta d\eta, \quad F_2 = 4 \int \eta^2 d\eta, \\ G_0 &= \int \frac{\partial h}{\partial y} dy, \quad G_1 = 4 \int \eta d\eta, \quad G_2 = \int \frac{\partial h}{\partial y} \eta^2 d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(19)式のフラッタ行列式においては、空力減衰項の影響は $l\omega_t/U$ の掛っている項で表され、構造減衰項の影響は g_2 、及び g_t を含む項によって表される。又フラッタ限界値としてマッハ数に着目した場合には、フラッタ行列式は、

$$D_{P2} = \begin{vmatrix} s^2 + \left\{ g_1\omega_{1t} + \frac{F_0 + (\gamma+1)MG_0}{2\pi\mu k_0\beta} \right\} s & 0 & I_1 \left[\beta\eta_C s^2 + \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \frac{G_1}{k_0\beta} s \right. \right. \\ \left. \left. + M \left(\frac{F_0}{k_0^2} + \frac{(\gamma+1)F_1}{\beta k_0} s \right) + M^2 \frac{(\gamma+1)G_0}{k_0^2} \right\} \right] \\ 0 & s^2 + \left\{ g_2\omega_{2t} + \frac{F_0 + (\gamma+1)MG_0}{2\pi\mu k_0\beta} \right\} s & I_2 \left[\beta\eta_C s^2 + \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \frac{G_1}{k_0\beta} s \right. \right. \\ \left. \left. + M \left(\frac{F_0}{k_0^2} + \frac{(\gamma+1)F_1}{\beta k_0} s \right) + M^2 \frac{(\gamma+1)G_0}{k_0^2} \right\} \right] \\ I_1 \left\{ \frac{\eta_C}{\beta r_a^2} s^2 \right. & I_2 \left\{ \frac{\eta_C}{\beta r_a^2} s^2 \right. & s^2 + \left\{ g_t + \frac{F_2 + (\gamma+1)MG_2}{2\pi\mu k_0\beta^3 r_a^2} \right\} s \\ \left. + \frac{G_1 + (\gamma+1)MF_1}{2\pi\mu k_0\beta^3 r_a^2} s \right\} & \left. + \frac{G_1 + (\gamma+1)MF_1}{2\pi\mu k_0\beta^3 r_a^2} s \right\} & \left. + \frac{M\{G_1 + (\gamma+1)MF_1\}}{2\pi\mu k_0^2\beta^2 r_a^2} + 1 \right. \end{vmatrix} \quad (22)$$

となる。ここに、

$$\mu = m / (\pi\rho b^2): \text{質量比}, \quad k_0 = b\omega_t / a_\infty, \quad (23)$$

である。今、翼厚や翼材料特性が翼弦中央に関して翼弦方向に対称であるような矩形翼を考えると、 $\eta_C = 0, G_0 = G_1 = G_2 = 0$ となり、 $D_{P2} = 0$ から

$$1 + b_1 M^2 \frac{\{s^2 + (g_1\omega_{1t} + a_1)s + \omega_{1t}^2\} \{s^2 + (g_2\omega_{2t} + a_1)s + \omega_{2t}^2\} - s(b_2 s + a_1) [I_1^2 \{s^2 + (g_2\omega_{2t} + a_1)s + \omega_{2t}^2\} + I_2^2 \{s^2 + (g_1\omega_{1t} + a_1)s + \omega_{1t}^2\}]}{\{s^2 + (g_1\omega_{1t} + a_1)s + \omega_{1t}^2\} \{s^2 + (g_2\omega_{2t} + a_1)s + \omega_{2t}^2\} \{s^2 + (g_t + a_2)s + 1\}} = 0, \quad (24)$$

が導かれる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= F_0 / (2\pi\mu k_0\beta), \quad a_2 = F_2 / (2\pi\mu k_0\beta^3 r_a^2), \\ b_1 &= (\gamma+1)F_1 / (2\pi\mu k_0^2\beta^2 r_a^2), \quad b_2 = (\gamma+1)F_1 / (2\pi\mu\beta^2), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

である。

3. 矩形平板翼の超音速フラッタ

ここでは、矩形断面形を持つ片持矩形板翼を考え、超音速準定常空気力（ピストン理論）の場合を扱うこととする。従って(24)式によって根軌跡を求め解析する。ここで、

$$r_a^2 = 1/3, \quad F_0 = 8\beta, \quad F_1 = -4\beta^2\delta, \quad F_2 = (8/3)\beta^3, \quad (26)$$

である。 δ は板厚比、 A はアスペクト比で、

$$\delta = h_0 / (2b), \quad A = l / (2b), \quad (27)$$

である。翼の支持剛性の影響は後に考察するとして、減衰の影響を調べる次の3.1節においては、翼は付根で完全に固定されているものとする。

3.1. 減衰の影響

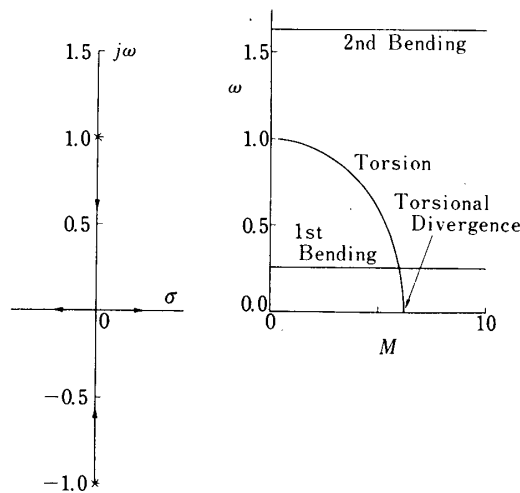
3.1.1. 空力減衰の影響

ここでは構造減衰を省略した場合を考える。(24)式において、 $g_1 = g_2 = g_t = 0$ とした場合を扱う。空力減衰の影響は a_1 及び a_2 を含む項によって表される。又以下の根軌跡の図においては、極を×印、あるいは+印で、零点を○印で表すこととする。

第2図は空力減衰をも考慮しない場合である。この場合(24)式は

$$1 + b_1 M^2 \frac{1}{s^2 + 1} = 0, \quad (28)$$

となって、振りダイバージェンスが現れる丈である。



(a) 根軌跡

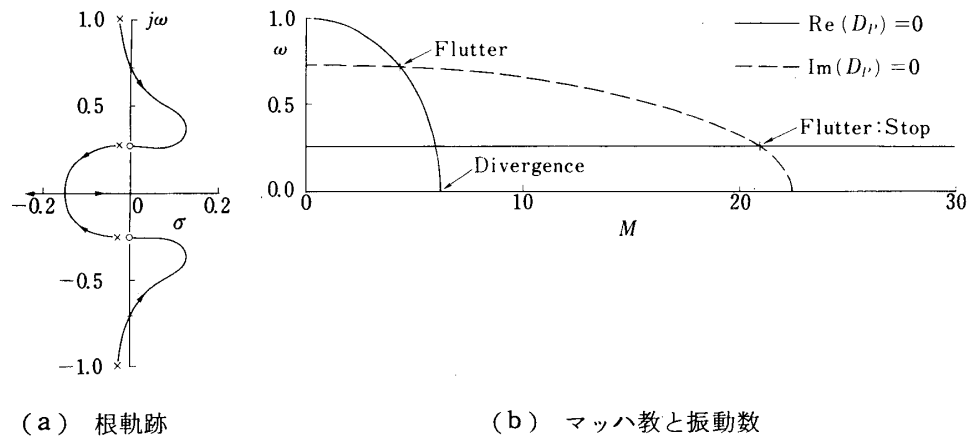
(b) マッハ数と振動数

第2図 矩形翼の特性, I

$A = 2$, $\delta = 0.02$, ステンレス鋼, 海面上飛行, 空力減衰省略の場合

第3図は空力減衰を考慮した場合で、曲げ1次と振り1次との2自由度の場合である。第3図(b)は(22)式に $s = j\omega$ を代入して D_{P_2} の実部=0及び虚部=0を満足する M と ω との関係を図示したものであり、この2曲線の交点としてフラッタあるいはダイバージェンス(M 軸上の点は $Im(D_{P_2}) = 0$ を満足する)の限界値が求められる。この(b)図は(a)図の虚軸上を調べたものに相当している。

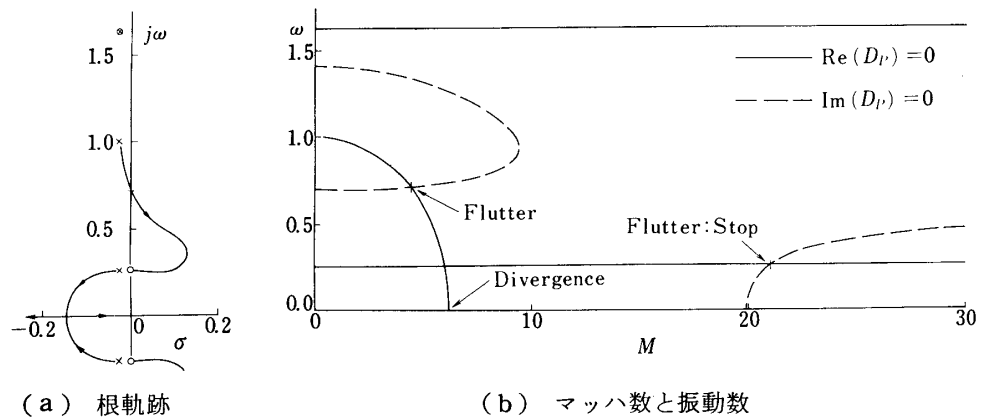
第4図は3自由度の場合である。第4図(a)に示されるように、減衰の影響が小さい場合、根軌跡の極は曲げ1次及び2次の固有振動数、及び振りの固有振動数の近くにある。又零点は曲げ1次、2次の固有振動数の近くにある。このことは(24)式において、減衰の影響を示す項の係数 a_1 , a_2 , 及び b_2 を零に近付けた式を考えれば当然のことであり、 a_1 , a_2 , 及び b_2 を完全に零にした場合が(28)式に相当する。極く僅かでも減衰を考慮した場合、その限界値は振りダイバージェンスからフラッタになり、限界値そのものも2/3程度に低下する。これは、



第3図 矩形翼の特性, II

2自由度, $A=2$, $\delta=0.02$, ステンレス鋼, 海面上飛行の場合

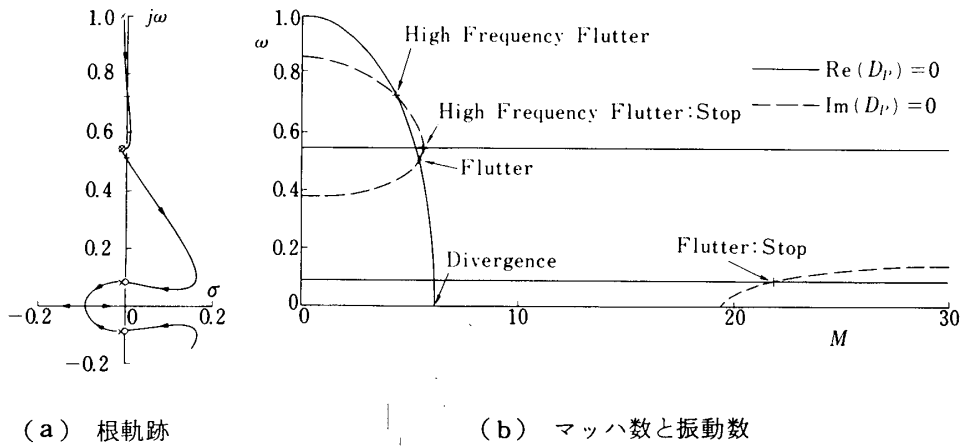
このような翼では空力中心, 重心, 及び剪断中心が一致しているため, 減衰項を通してのみ曲げ振動と振り振動とが連成するため, 減衰がそのフラッタ特性に大きな影響を与えるのである. 第3図と第4図とを比較して分るように, 2自由度と3自由度との場合でその特性は殆んど変わらない. それは曲げ2次の固有振動数が高く, その影響が殆んど無いからである.



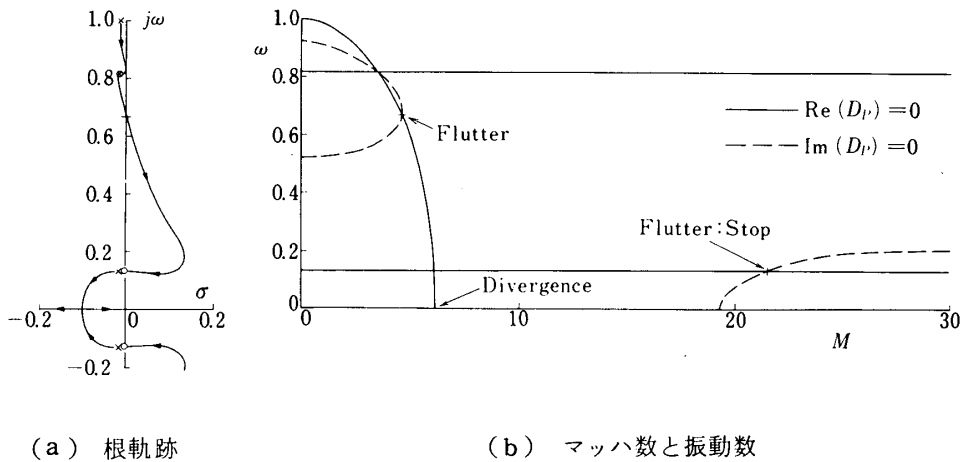
第4図 矩形翼の特性, III

3自由度, $A=2$, $\delta=0.02$, ステンレス鋼, 海面上飛行の場合

第5図はアスペクト比の大きな翼で, 振りの固有振動数が曲げ2次の固有振動数よりも大きい場合である. このような翼では振り1次と曲げ2次の高次連成フラッタ (高振動数フラッタ) が先ず起り, 次いで振り1次と曲げ1次の連成フラッタが起ることが図によく示されている. $M=4.27$, $\omega=0.72$ で高次連成フラッタが起り, このフラッタは $M=5.38$, $\omega=0.54$ で止り, $M=5.31$, $\omega=0.51$ で通常の連成フラッタが起り, これは非常に高いマッハ数 ($M=22$) で止る. 又ダイバージェンスのマッハ数は6.18である. この高次連成フラッタは減衰力の大きさや固有振動数比の大きさに関係し, 必ず起るとは限らない. 第6図が起らない一例である.



第5図 矩形翼の特性, IV
 $A=6, \delta=0.06$, ステンレス鋼, 海面上飛行の場合

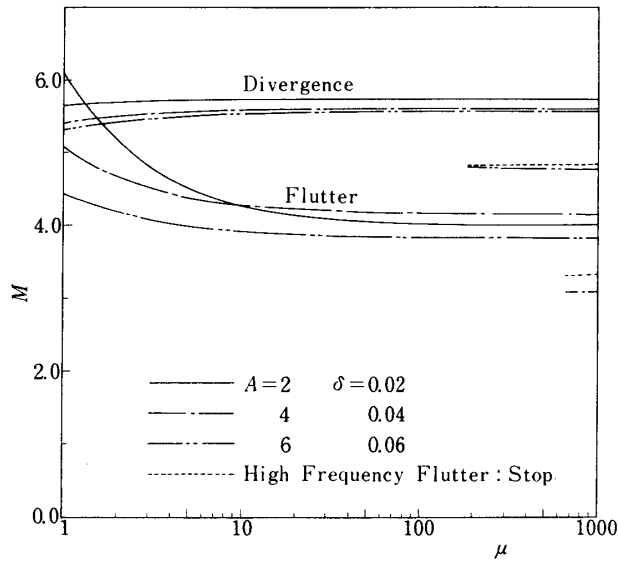


第6図 矩形翼の特性, V
 $A=4, \delta=0.04$, ステンレス鋼, 海面上飛行の場合

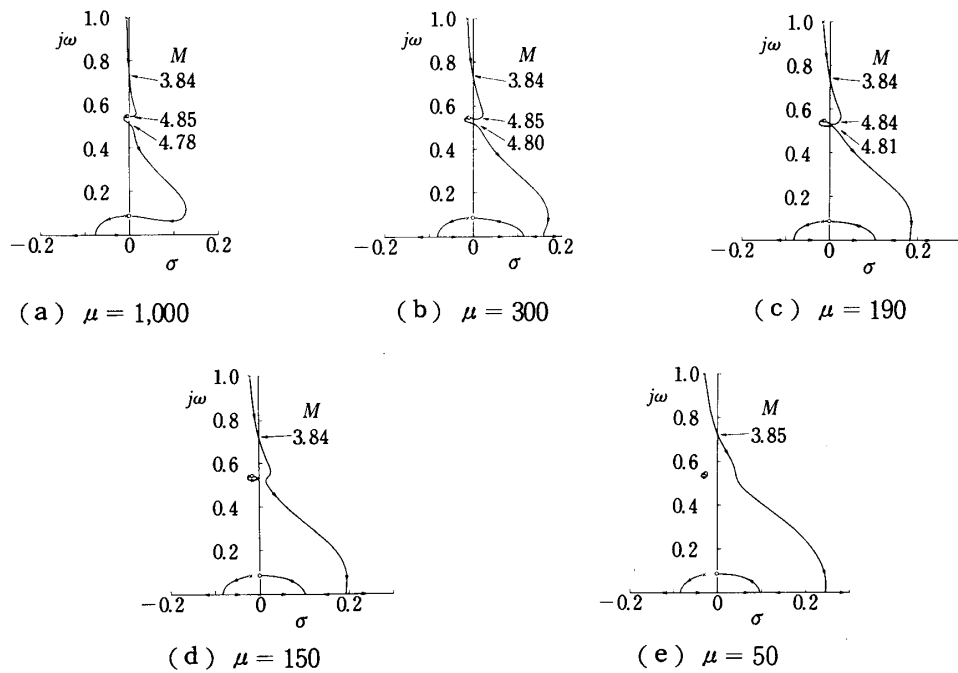
構造減衰を省略した場合, Kobayashi [20] によれば, 質量比 μ が大きい場合には $1/\mu$ の高次項の影響を省略して, フラッタマッハ数 M_F は,

$$M_{F0} = \sqrt{\frac{\pi \mu k_0^2 r_a^2}{2(\gamma+1)\delta} \frac{1-\omega_{it}^2}{1+3r_a^2 I_1^2}} \quad (29)$$

で与えられる. そこで, M_{F0} を一定 (即ち $\mu k_0^2 / \delta$ を一定) として, μ を変えることによって a_1 及び a_2 の値を変えて空力減衰の影響をみたのが第7図である. μ の値は一樣流の密度が大きく, 翼材料が軽く, 又翼が薄くなれば小さくなる. (24)式及び(25)式から分るように, μ の値が大きい時には根軌跡の極と零点は虚軸に近く, 小さくなると虚軸から離れる. この極, 零点及び虚軸の位置関係によってフラッタ限界値は種々変化する. 第7図の実線がアスペクト比 $A=2$ の翼の結果である. それによると μ が小さい場合, 即ち空力減衰の影響が大きい場合のみフラッタ特性は大きな影響を受け, $\mu > 50$ 程度では殆んど変化しないで M_{F0} ($=4.0$) に一致している. μ が1の近傍ではダイバージェンスの方がフラッタより先に起る



第7図 フラッタ特性に及ぼす空力減衰の影響, I
 $M_{F0} = 4.0$

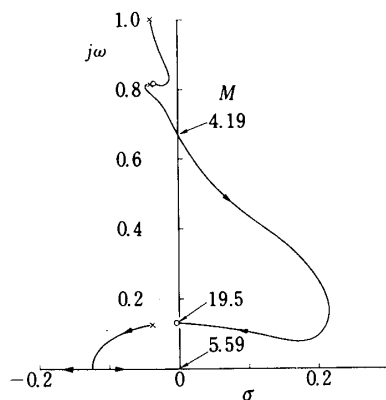


第8図 質量比による根軌跡の変化
 $A = 6, \delta = 0.06, M_{F0} = 4.0$

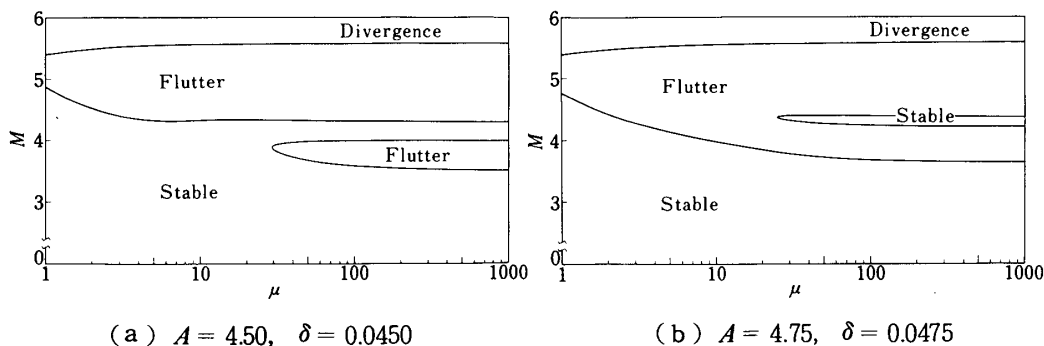
ことが示されている。これは曲げ1次の固有振動数の近くにあった極が大きな減衰項の影響によって実軸上に移動することによる。A=4, 及び6の翼では高次連成フラッタの影響でフラッタマッハ数の値は M_{F0} の値(4.0)からずれている。A=6の翼は高次連成フラッタの方が低いフラッタ限界値を与え、振動数の低い通常のフラッタは μ が190以上の値をとる時

に高次連成フラッタの限界値よりも高い値で現れる。このことは第8図の質量比による根軌跡の変化により明確に示される。第8図(a)は $\mu = 1,000$ の場合で以下順に μ の値が小さくなって行く。(b)では高次のダイバージェンス限界値の現れることが示され、(d)になると曲げ2次の固有振動数の近くにある極と零点とが孤立するようになる。(e)では高次連成フラッタのみが起る。(c)がその境界の状態である。即ち、 μ が190以上ではマッハ数3.84の高次連成フラッタが先ず起り、これで実際の翼は壊れてしまうが、壊れなければ次にマッハ数4.8で低い振動数のフラッタが起って4.85で高次連成フラッタは停止する。第9図は $A = 4$ の翼の場合で、 $\mu = 50$ の時の根軌跡である。この μ の値は第8図($A = 6$)の(e)図に相当する。この場合は固有振動数比等の違いにより、低い振動数のフラッタが現れる丈でその値も4.19と M_{F0} より大きいが、 μ が700よりも大きくなると高次連成フラッタが現れ、その値も3.1程度と非常に低くなる。又その高次連成フラッタは $M = 3.3$ 程度で停止する。これが第7図に一点鎖線で示した結果である。

以上述べたように $A = 4$ と $A = 6$ との翼ではフラッタ特性が異なっているが、この相違を $A = 4.50$ と 4.75 との翼において詳しく調べた結果が第10図である。第10図(a)に示される

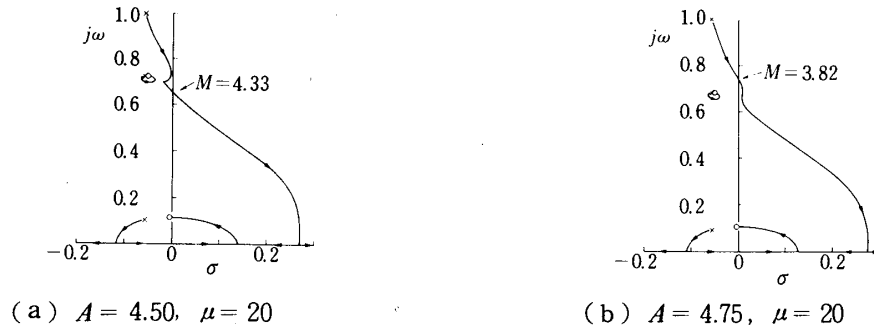


第9図 矩形翼の根軌跡
 $A = 4, \delta = 0.04, M_{F0} = 4.0, \mu = 50$



第10図 フラッタ特性に及ぼす空力減衰の影響, II
 $M_{F0} = 4.0$

ような二つのフラッタ領域を隔てている安定領域は、(b)ではフラッタ領域内に入っている。第11図は第10図の $\mu = 20$ における二つの翼の根軌跡を示したものである。 $A = 4.50$ の翼では $M = 4.33$ の低い振動数フラッタ、 $A = 4.75$ の翼では $M = 3.82$ の高次連成フラッタが起る。又根軌跡が虚軸を横切る様子から $A = 4.75$ の翼の高次連成フラッタは低い振動数のフラッタに比べ激しくないフラッタ (mildなフラッタ) であろうことも推定できる。

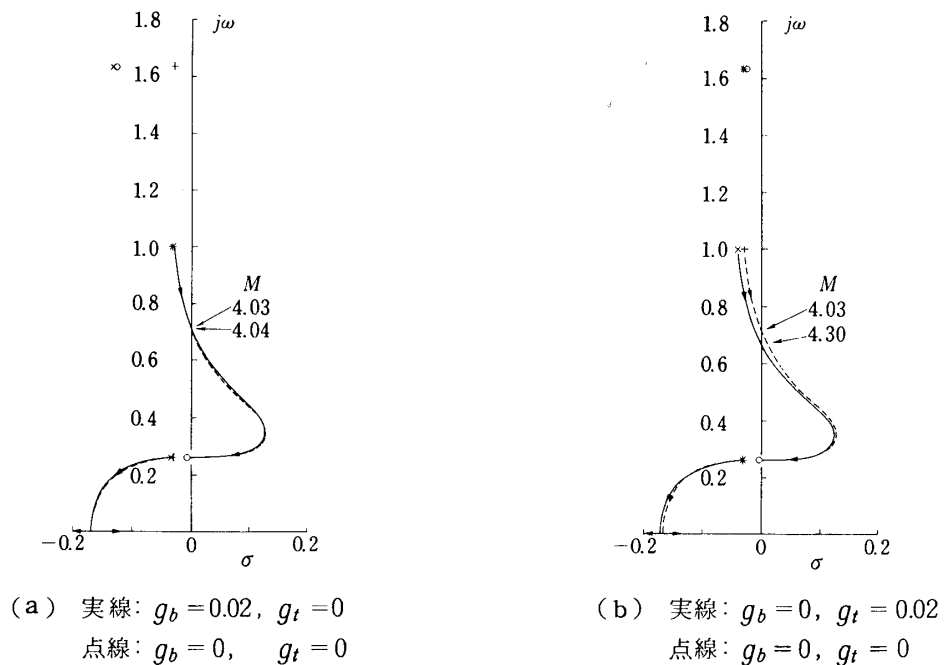


第11図 アスペクト比の相違による根軌跡の変化
 $M_{F0} = 4.0$

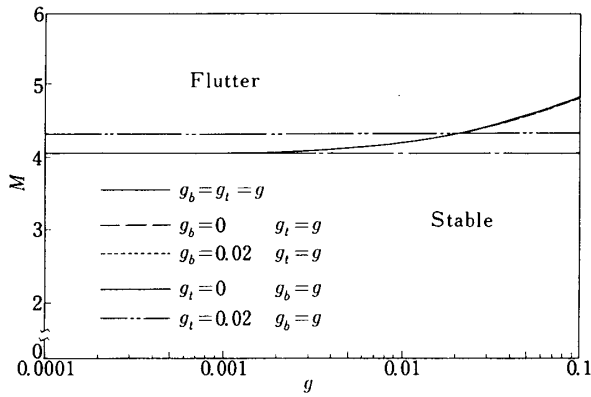
3.1.2. 構造減衰の影響

ここでは空力減衰の大きさを与える μ の値として、板翼の場合の通常値である 150 に限定して考えることとする。

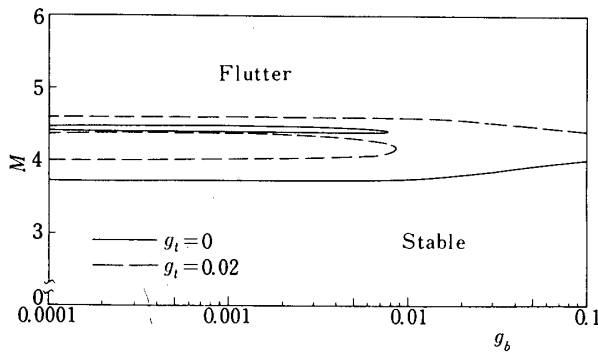
第12図は $A = 2$ の翼の構造減衰を考慮した場合の根軌跡である。(a)図から分るように、



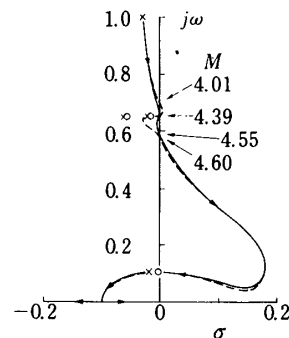
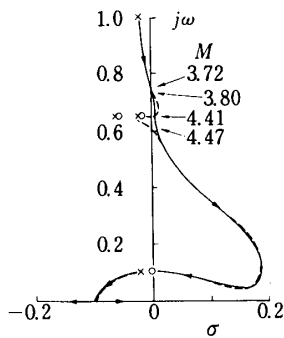
第12図 構造減衰による根軌跡の変化
 $A = 2, \delta = 0.02, \mu = 150, M_{F0} = 4.0$



第13図 フラッタ特性に及ぼす構造減衰の影響, I
 $A=2, \delta=0.02, \mu=150, M_{F0}=4.0$



(I) $M-g_b$



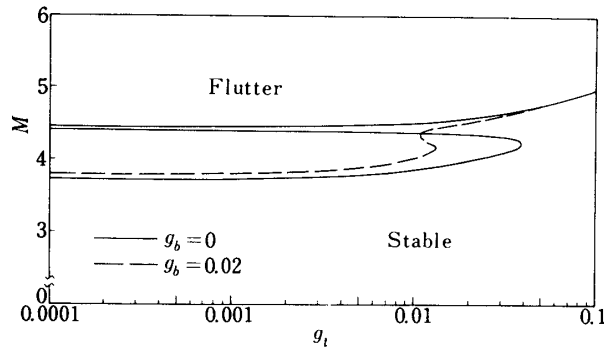
(a) 実線: $g_b=0.02, g_t=0$ (b) 実線: $g_b=0.02, g_t=0.02$
 点線: $g_b=0, g_t=0$ 点線: $g_b=0, g_t=0.02$

(II) 根軌跡

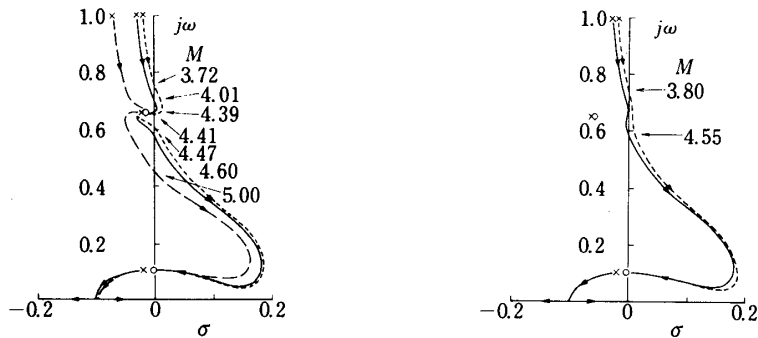
第14図 フラッタ特性に及ぼす構造減衰の影響, II
 $A=5, \delta=0.05, \mu=150, g_t=\text{一定}, M_{F0}=4.0$

曲げ振動の構造減衰係数 $g_b (= \eta_b \omega_1 / E = g_1)$ を考慮すると、曲げ1次の固有振動数の近くにある極と零点とは僅かな影響を受ける丈であるが、曲げ2次の固有振動数の近くにある極と零点とは大きな影響を受けて移動する。又(b)図から分るように、振り振動の構造減衰係数 $g_t (= \eta_t \omega_t / G)$ を考慮すると振りの固有振動数の近くにある極が移動するが、他の極や零点は影響を受けない。これは(24)式から明らかである。そこで、 g_t を一定にして g_b を変化させてもフラッタ根界値は殆んど変化せず、 g_b を一定として g_t を変化させると限界値は幾らか変化することになる。このことを示したのが第13図である。第13図には g_b 及び g_t の組合せにより五通りの場合を示してあるが、そのうち g_t を変えたもの(図の実線、点線、破線)はほぼ同じ結果を与えている。 g_t を一定として g_b を変えたものは変化しない。

高次連成フラッタが現れるような翼では、当然減衰項の大きさによってフラッタ限界値は複雑な影響を受けることになる。第14図、第15図、及び16図がその結果である。第14図は g_t が一定で g_b が変化する場合である。第14図(II)の根軌跡より、 $g_t = 0$ の場合((a)図)にお



(I) $M - g_t$



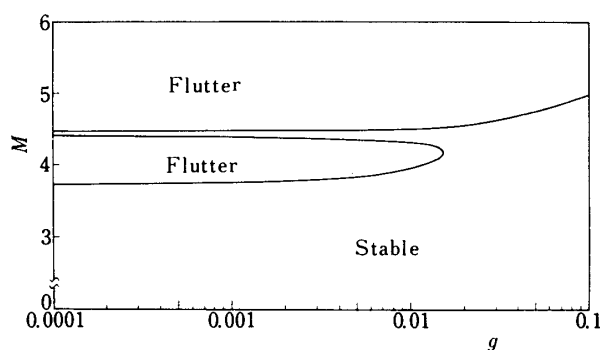
- (a) 破線: $g_b = 0, g_t = 0.10$
- 実線: $g_b = 0, g_t = 0.02$
- 点線: $g_b = 0, g_t = 0$
- (b) 実線: $g_b = 0.02, g_t = 0.02$
- 点線: $g_b = 0.02, g_t = 0$

(II) 根軌跡

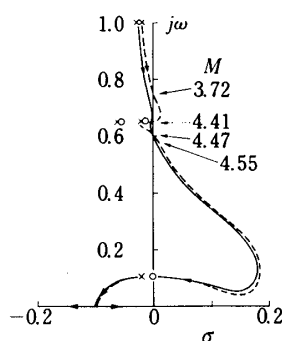
第15図 フラッタ特性に及ぼす構造減衰の影響, III
 $A = 5, \delta = 0.05, \mu = 150, g_b = \text{一定}, M_{F0} = 4.0$

いては、 $g_b = 0$ に比べ $g_b = 0.02$ では低い振動数のフラッタは起らなくなり高次連成フラッタが低いマッハ数で生ずることが分る。これと反対に $g_t = 0.02$ の場合 ((b) 図) には、 $g_t = 0.02$ では高次連成フラッタは起らずに高いマッハ数で低い振動数のフラッタが生ずる。これらをまとめて第14図(I)にその特性を示す。

第15図は g_b が一定で g_t を変化させた場合であり、その特性は(I) 図に示すようである。 $g_b = 0$ の場合には $g_t = 0, 0.02, 0.10$ の夫々の値についての根軌跡を(II)-(a) 図に示してある。 $g_t > 0.1$ の場合には曲げ2次の固有振動数の近傍の極と零点とは、今迄に示した孤立の傾向(例えば第8図(d))とは逆にではあるが、矢張り孤立するようになる。その場合、低い振動数のフラッタが現れる丈である。第16図には g_b 及び g_t を同様に变化させた場合を示してある。この(I) 図と第15図(I) とを比べて分るように、 g_t を变化させた場合のフラッタ特性の傾向は g_b の値にかかわらずよく似ている。このことは第13図の説明のところでも既に述べた。



(I) M-g



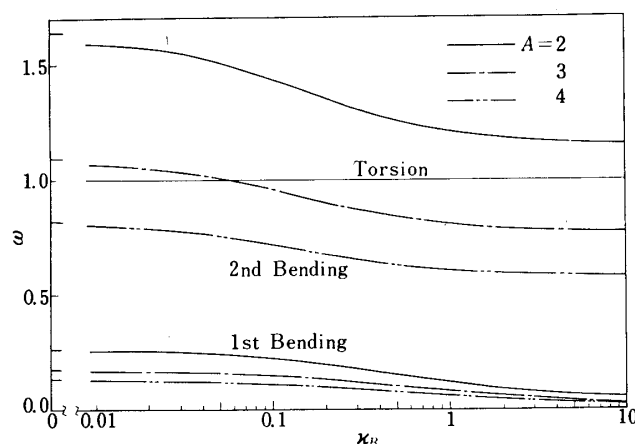
点線: $g_b = g_t = 0$
 実線: $g_b = g_t = 0.02$

(II) 根軌跡

第16図 フラッタ特性に及ぼす構造減衰の影響, IV
 $A = 5, \delta = 0.05, \mu = 150, g_b = g_t = g, M_{F0} = 4.0$

3.2. 支持剛性の影響

今迄述べてきたように、減衰の影響は高次連成フラッタを起すような翼において複雑に現れる。支持剛性が変れば小さなアスペクト比の翼でも曲げ2次の固有振動数が捩りの固有振動数よりも低くなることもあり得る。第17図は付根の曲げについてのバネ支持が固有振動数に及ぼす影響をみたものである。横軸の κ_B の値が無限大になれば単純支持の片持梁、零の時は完全固定の片持梁に相当する。 $A=3$ の翼では曲げ2次の固有振動数が捩りの固有振動数よりも低くなることもあるが、 $A=2$ の翼ではそのようなことは無い。従って $A=2$ の翼では支持剛性が変わっても高次連成フラッタの現れる可能性はない。

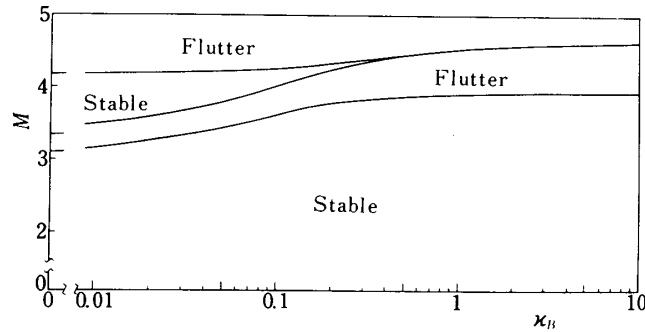


第17図 振動特性に及ぼす支持剛性の影響, I
 $\kappa_T = 0$

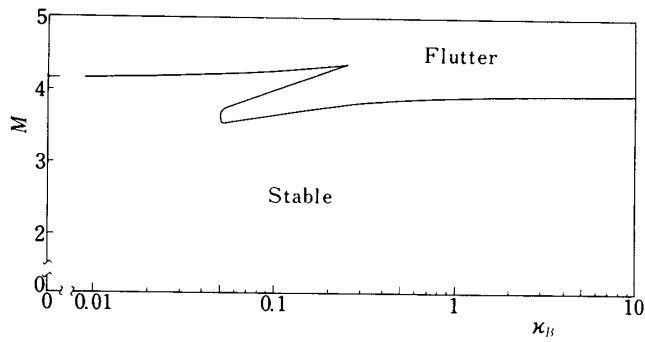
第18図が構造減衰を考慮しない場合のフラッタ特性で、(a)が $\mu=10,000$ 、(b)が $\mu=150$ の場合である。(a)は空力減衰の影響の少ない場合に相当し、この場合曲げに関する支持剛性が低下すると高次連成フラッタの限界値はむしろ高くなるが、低い振動数のフラッタとの間にある安定領域は無くなって行く。(b)図の場合、支持剛性が低下すると高次連成フラッタのため限界値は低くなる。 $A=2$ の翼についての計算結果では、曲げに関する支持剛性の影響は殆んど見られず、極く僅かに限界値が高くなる程度であった。

次に捩りに関する支持剛性の影響を考察する。第19図に付根を捩りについてバネ支持した場合の振動特性を示す(曲げについては完全固定)。横軸の $\kappa_T=0$ の場合が完全固定に相当する。第20図がフラッタ特性である。完全固定の場合のフラッタマッハ数 M_{F0} を4.0とし構造減衰を考慮しない場合を扱っている。支持剛性が低下することによる捩り剛性の低下によりフラッタ限界値は低くなって行く。空力減衰が小さい場合($\mu=10,000$)には高次連成フラッタが現れるが、捩りの固有振動数が曲げ2次の固有振動数に近付き更に小さくなって行くと、この高次連成フラッタは現れなくなる。その様子を第21図(a)及び(b)の根軌跡図に示す。(c)は更に支持剛性が低下して捩りの固有振動数が曲げ2次の固有振動数よりも小さくなって行った場合である。

捩り及び曲げに関する支持剛性を両方共低下させて行った場合については、 $\kappa_B=\kappa_T(=\kappa)$ とした場合についてその特性を求めてみる。第22図及び第23図がその結果である。フラッタ

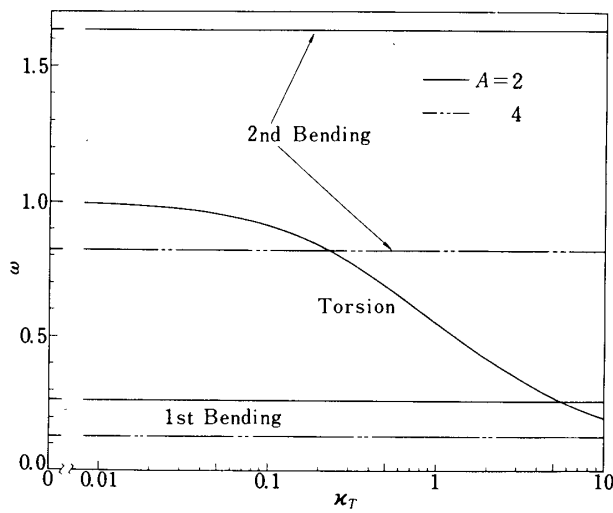


(a) $\mu = 10,000$

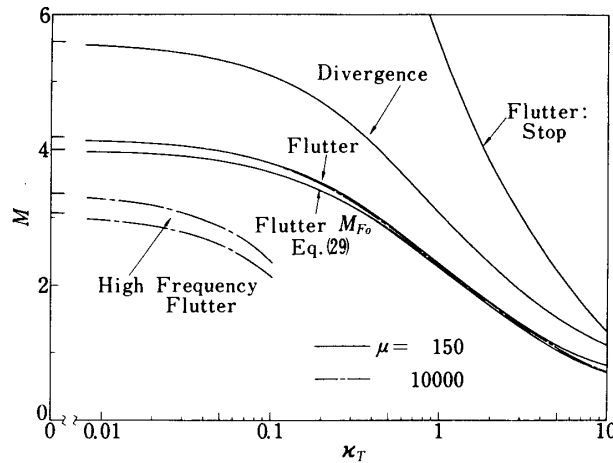


(b) $\mu = 150$

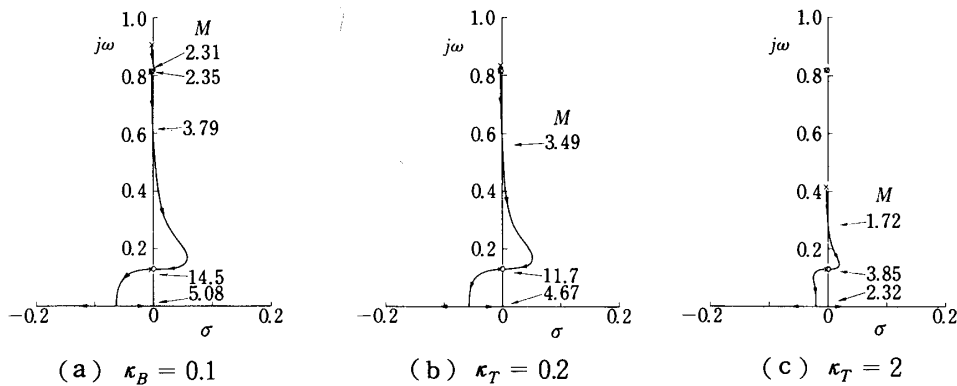
第18図 フラッタ特性に及ぼす支持剛性の影響, I
 $\kappa_T = 0, A = 4, \delta = 0.04, M_{F0} = 4.0$



第19図 振動特性に及ぼす支持剛性の影響, II
 $\kappa_B = 0$



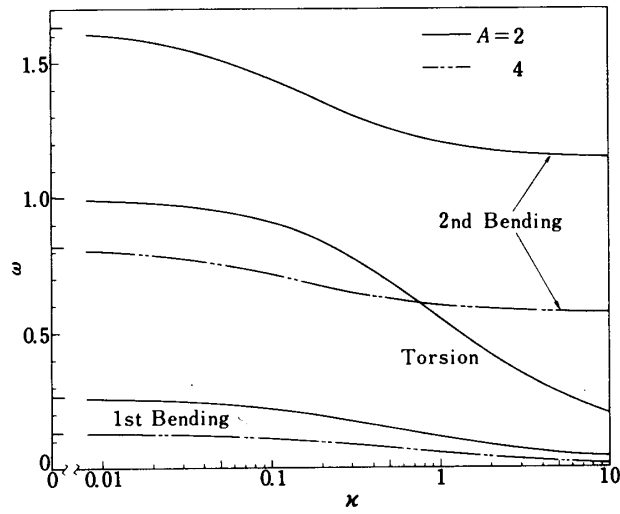
第20図 フラッタ特性に及ぼす支持剛性の影響, II
 $\kappa_B = 0, A = 4, \delta = 0.04, M_{F0} = 4.0$



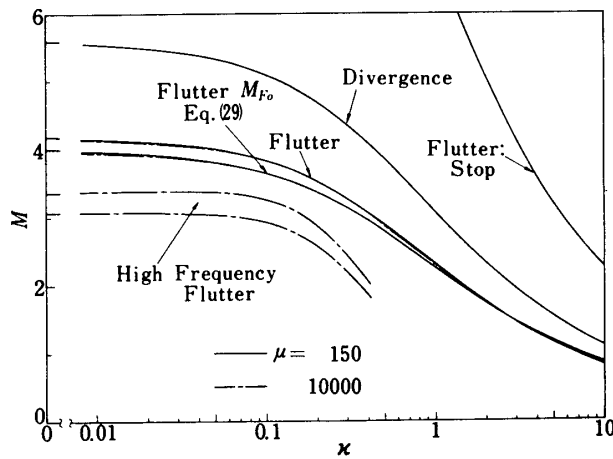
第21図 フラッタ特性に及ぼす支持剛性の影響, 根軌跡, (1)
 $\kappa_B = 0, A = 4, \delta = 0.04, M_{F0} = 4.0, \mu = 10,000$

特性に関しては、第20図に示すような振りに関する支持剛性のみが低下する場合と殆んど同じであるが、高次連成フラッタの範囲が広がっている。これは曲げ及び振りの固有振動数の両方共が変化する為に根軌跡の極が相対的に離れていることによるのであって、第21図(b)のような状況が現れ難いことによる。 $\kappa = 0.2$ 及び2の場合の根軌跡を第24図に示す。

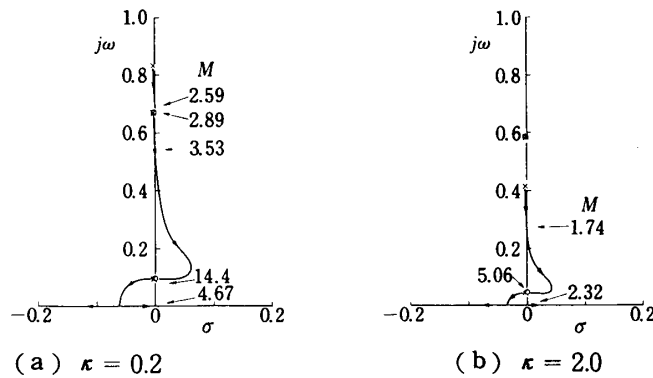
第25図は $A = 2$ の翼の結果である。フラッタ限界値そのものは $A = 4$ の翼の場合と大差ないが、振りに関する支持剛性のみを低下させて行った場合(図の実線)には逆にフラッタが起らなくなることもあるのが示されている。但し、マッハ数の小さな値に対しては仮定した空気力が妥当でなくなる。しかし、限界値として動圧(マッハ数一定)を考える場合には、このように支持剛性を低下させると却ってフラッタが現れずにダイバージェンスが現れ、しかもそれはフラッタより高い限界値となっている場合があることを示していることになる。このようなことの生ずる理由が第26図の根軌跡に示されている。図の(a)が曲げの支持剛性のみを低下した場合、(b)及び(c)が振りの支持剛性のみを低下した場合、(d)が曲げ及び振り



第22図 振動特性に及ぼす支持剛性の影響, III
 $\kappa_B = \kappa_T = \kappa$

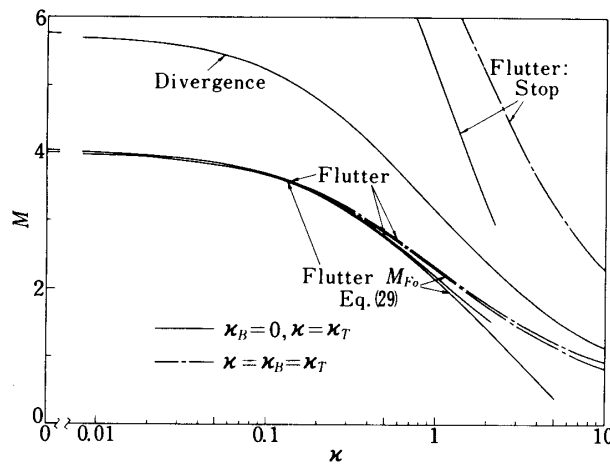


第23図 フラッタ特性に及ぼす支持剛性の影響, III
 $\kappa_B = \kappa_T = \kappa, A = 4, \delta = 0.04, M_{F_0} = 4.0$

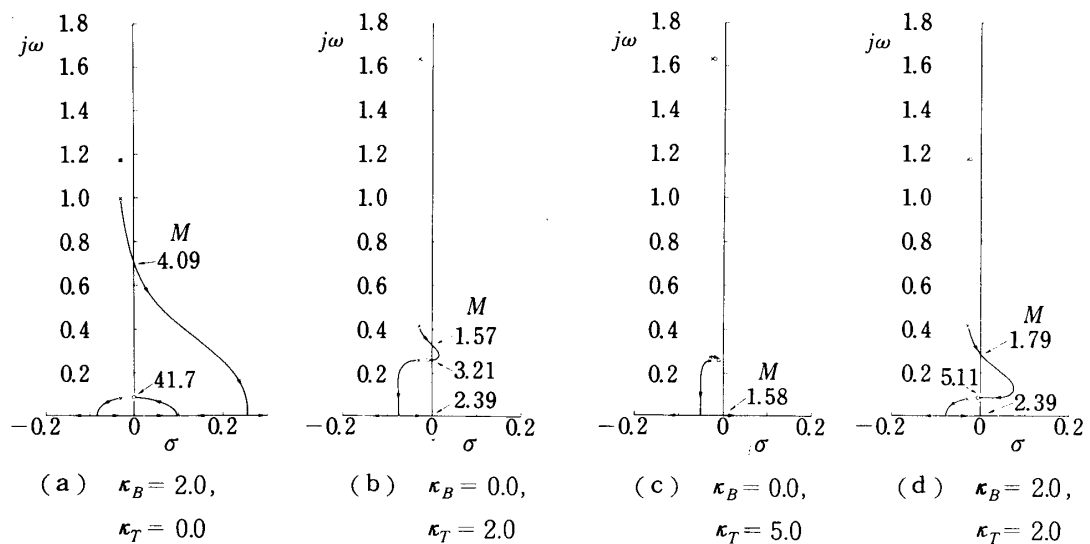


第24図 フラッタ特性に及ぼす支持剛性の影響, 根軌跡, (2)
 $\kappa_B = \kappa_T = \kappa, A = 4, \delta = 0.04, M_{F_0} = 4.0, \mu = 10,000$

の支持剛性を共に低下した場合である。(a)は振り剛性は元のままであるからフラッタ限界値は高い値を示す。(b)はそれと比較して遥かに小さな値でフラッタを起す。(c)は逆にフラッタを起さなくなる場合である。(c)のような場合は根軌跡の零点が虚軸から離れる程起り易くなっていくので、構造減衰を考慮するとそれ迄現れていたフラッタが現れず、その限界値より高いダイバージェンスが現れる可能性があることを示している。(d)は曲げ及び振りの両方共支持剛性が低下している(共に $\kappa = 2$)ので(b)の場合よりも条件が悪いと考えられるにもかかわらず、極及び零点が適切に配置されている為、高いフラッタ限界値が得られているのである。



第25図 フラッタ特性に及ぼす支持剛性の影響, IV
 $A = 2, \delta = 0.02, M_{F0} = 4.0, \mu = 150$



第26図 フラッタ特性に及ぼす支持剛性の影響, 根軌跡, (3)
 $A = 2, \delta = 0.02, M_{F0} = 4.0, \mu = 150$

4. あとがき

片持矩形平板翼の曲げ振りフラッタに及ぼす減衰及び支持剛性の影響について、特に矩形断面形を持つ翼の超音速フラッタ特性への影響を根軌跡法によって明確にした。このような翼の場合、フラッタに及ぼす減衰及び支持剛性の影響は、特に高次連成フラッタが現れる場合、複雑で大きなものであることを明らかにした。実際の後退テーパ翼は振り剛性のみでなく曲げ剛性によってもフラッタ特性が規定されるので、実際に使用されているような低アスペクト比の翼のフラッタ特性に及ぼす減衰及び支持剛性の影響を有限要素法やエネルギー的手法によって研究する際、本研究は有用な情報を与えるものと考えられる。本研究では曲げ1次及び2次、並びに振り1次の3自由度の場合を扱ったが、支持剛性が低下した場合には更に高次の不安定領域の存在が予想される。今後の研究課題の一つである。

本研究に際し有益な助言を寄せられた東京大学工学部小林繁夫教授に謝意を表す。

昭和50年5月27日 航空力学部

参 考 文 献

- [1] R. A. Frazer: The Prevention of Binary Flutter by Artificial Damping, ARC R&M 2552 (1944).
- [2] E. G. Broadbent & M. Williams: The Effect of Structural Damping on Binary Flutter, ARC R&M 3169 (1960).
- [3] G. T. S. Done: The Effect of Linear Damping on Flutter Speed, ARC R&M 3396 (1963).
- [4] E. Nissim: Effect of Linear Damping on Flutter Speed Part I: Binay System, Aeron. Quart., **16**(1965), 159-178.
- [5] E. Nissim: Effect of Linear Damping on Flutter Speed Part II: Systems with Three or More Degrees of Freedom, Aeron. Quart., **16**(1965), 231-242.
- [6] 例えば S. Pines: Elementary Explanation of the Flutter Mechanism, Proc. of Dynamics and Aeroelasticity Meeting, I. A. S., New York (1958), 52-59.
- [7] M. T. Landahl: Graphical Technique for Analyzing Marginally Stable Dynamic Systems, J. Aircraft, **1** (1964), 293-299.
- [8] M. H. Rheinfurth & F. W. Swift: A New Approach to the Explanation of the Flutter Mechanism, NASA TN D-3125 (1966).
- [9] L. I. T. Niblett: A Graphical Representation of the Binary Flutter Equation in Normal Co-ordinates, ARC R&M 3496 (1966).
- [10] N. C. Lambourne: Calculations Showing the Influence of Aerodynamic Damping on Binary Wing Flutter, ARC R&M 3579 (1969).
- [11] 中村泰治: 曲げ-振りフラッタ解析における準定常空気力について, 九州大学応用力学研究所報, **32** (1969), 13-31.
- [12] S. N. Prasad, S. Nemat-Nasser & G. Herrmann: Bending-Torsional Flutter of a Swept Wing in a High-Density, Low-Speed Flow, AIAA J., **5**(1967), 316-321.

- [13] G. Herrmann: Dynamics and Stability of Mechanical Systems with Follower Forces, NASA CR-1782 (1971).
- [14] H. Ashley & G. Zartarian: Piston Theory-A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, JAS, 23(1956), 1109-1118.
- [15] J. P. Chawla: Aeroelastic Instability at High Mach Number, JAS, 25(1958), 246-258.
- [16] 名取通弘, 小林繁夫: 板翼の超音速フラッタ特性, 日本航空宇宙学会誌, 21(1973), 27-37.
- [17] E. B. Kinnaman: Flutter Analysis of Complex Airplanes by Experimental Methods, JAS, 19(1952), 577-584.
- [18] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley & R. L. Halfman: "Aeroelasticity", Addison-Wesley, (1955).
- [19] J. B. Herreshoff: Analysis Using Influence Matrices and Steady-State Aerodynamics, AIAA J., 1 (1963), 2853-2855.
- [20] S. Kobayashi: Flutter of Wings Subjected to Aerodynamic Heating, Trans. Japan Soc. Aeron. Space Sci., 5(1962), 57-68.
- [21] 埜 武敏, 築地恒夫, 越出慎一, 林 洋一: 弾性支持片持板の振動, NAL-TM 102(1967).