

強い高周波磁場による 光ポンピング磁力計の誤差*

小川 徹**・中山 茂**・藪崎 努**

Errors of Optically Pumped Magnetometer Due to Strong rf Field

By

Toru OGAWA, Shigeru NAKAYAMA and Tsutomu YABUZAKI

Abstract : Behavior of the optically pumped atoms in a static magnetic field and a strong rf field is analyzed for the general field configuration where the rf field is oriented in an arbitrary direction with respect to the static magnetic field and its amplitude can be very strong. Particular attention is given to the power shifts of single-photon and multiphoton transitions, which are not expressed only by the amount but also by the direction. An optical pumping experiment is made to check the validity of the theoretical results, and a good agreement is found. These power shifts cause the errors of optically pumped magnetometers. It is found that this kind of error becomes serious in the case of lower disturbed frequency than the resonant frequency of the magnetometer.

1. は し が き

筆者等は先に中緯度地方における電離層電流系の精密な観測に成功し、電流系の高さ分布が i) 従来電導度から推定されていた厚みよりはるかに薄いこと, ii) 微弱な第 2 層が存在するらしいことなどを明らかにした [1]. 今後種々の Local Time や季節にわたって観測を行う計画であるが, そのためには磁力計の誤差を 10^{-1} nT 以下にする必要がある [2]. 最近ロケット搭載装置が多様化し特にいわゆる Active Experiment が増加しつつあるので, このような強い高周波磁場中に光ポンピング磁力計がおかれた場合予想される高周波磁場と光ポンプされた原子との高次の相互作用 [3], [5], [10] により生ずる誤差を解明する必要が生じてきた. 取り扱いは広い範囲の周波数および磁場強度にわたり, また高周波磁場の振動方向と電離層電流と地球磁場による直流磁場の方向が任意の場合につき一般的に行い, 実験的にも確認した.

* 宇宙研特別事業費による論文

** 京都大学工学部

2. 基礎理論

第1図のように地磁気 H_0 の方向を z 軸にとり, それと θ の角を成して $H_1 e^{j\omega t}$ の擾乱高周波磁場が存在しているとする. ロケットのスピンの軸は上方にあり, その方向に光ポンピング磁力計の高周波磁場 $H_r e^{j\omega_0 t}$ が存在する. 静磁場 H_0 の擾乱磁場に対する平行および垂直成分を H_{\parallel} , H_{\perp} とする. 以下 $H_r \ll H_1$ の場合が問題であるので, H_r は無視する. 光ポンピング磁力計は原子の Zeeman 効果を利用したものであるから, 原子と電磁場の相互作用を取扱う必要がある.

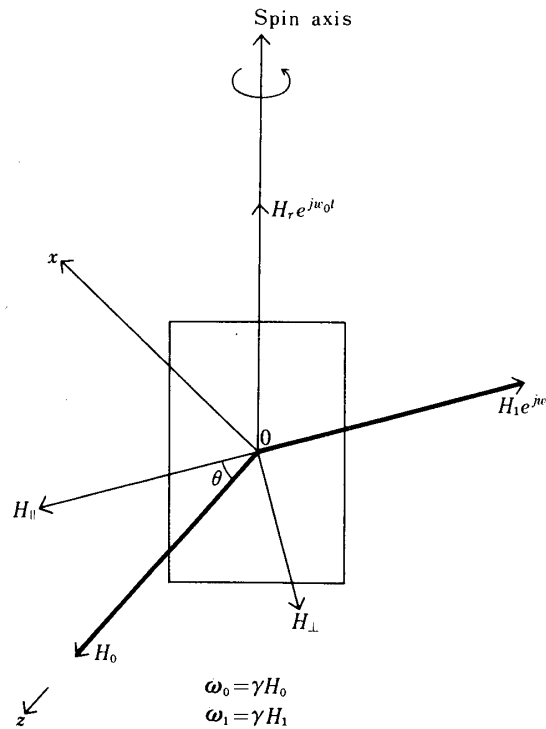
さてスピン角運動量 \mathbf{J} を持った原子とそれと相互作用する量子化された単一モードの高周波電磁場とによって構成された system について, 系のハミルトニアンは原子のエネルギー (\mathcal{H}_{at}) と, rf photon のエネルギー (\mathcal{H}_{rf}) と, 原子と rf photon の相互作用 (V) とによって構成され, 系全体のハミルトニアン \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{at} + \mathcal{H}_{rf} + V \quad (1)$$

となる. スピン \mathbf{J} の原子が z 軸に平行な一様均質の静磁場 ω_0 の中で Zeeman ハミルトニアン ($\hbar=1$) は

$$\mathcal{H}_{at} = \omega_0 J_z \quad (2)$$

となる. ω_0 は Larmor 周波数で, スピン $|\mathbf{J}| = 1/2$ とすると原子の準位は2つの Zeeman



第1図

副準位に分裂し、固有値 $\pm\omega_0/2$ に対する固有状態を $|\pm\rangle$ とする。また、偏り \mathbf{e} 、角振動数 ω を持った単一モードの高周波磁場は、真空の零点エネルギー $\omega/2$ を無視して、

$$\mathcal{H}_{rf} = \omega a^\dagger a \quad (3)$$

で表わされる。 a^\dagger, a は rf photon の生成・消滅演算子で、この固有状態は $|n\rangle$ となり、固有値 $n\omega$ を持つ。ところが、物理的に実現される高周波磁場は十分位相が定義されるので、不確定性関係により定った光子数は定義されずに、異った光子数の状態のコヒーレントな重ね合せされた状態 $|\alpha\rangle$ が定義される。Glanber によって、 $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ から、コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (4)$$

と示された。古典的な量と量子的な量との比較には、式(4)が使われなければならない。原子と rf photon との相互作用は、古典的な磁気双極子相互作用により、

$$V_{c1} = -\gamma \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}_1(t) \quad (5)$$

但し、

$$\mathbf{H}_1(t) = H_1(\mathbf{e}e^{-j\omega t} + \mathbf{e}^*e^{j\omega t})/2 \quad (6)$$

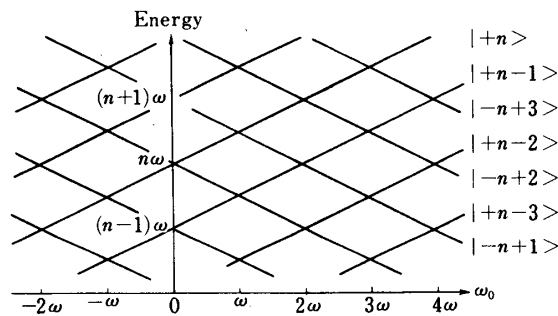
を量子力学的磁場演算子

$$\mathbf{H}_1 = \mu(\mathbf{a}\mathbf{e} + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{e}^*) \quad (7)$$

に変換すれば、

$$V = \lambda \mathbf{J}(\mathbf{a}\mathbf{e} + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{e}^*) \quad (8)$$

となる。ここで、 λ は結合定数で $-\gamma\mu$ ($\mu = H_1/2\alpha$) に等しく、 rf photon の平均個数 N によって $\omega_1/2\sqrt{N}$ となる。



第2図 無摂動ハミルトニアン \mathcal{H}_0 のエネルギー

ここで、 \mathcal{H}_0 を原子と rf photon とのエネルギー和とすれば、

$$\mathcal{H}_0|\pm n\rangle = \left(n\omega \pm \frac{\omega_0}{2}\right)|\pm n\rangle \quad (9)$$

となる。但し、 $|\pm n\rangle = |\pm\rangle|n\rangle$ 。この無摂動ハミルトニアンを ω_0 の関数として図示すれば第2図のようになる。これは、スピン1/2の Zeeman 副準位の重ね合せによって構成され互いに rf photon のエネルギー ω だけ離れている。そして、すべてのエネルギー準位は、 $\omega_0 = \dot{p}\omega$ で交わっている。そこで、摂動ハミルトニアン V が加わると、2つの基本的なエネルギー・ダイアグラムに変わる。交わっていた準位は交さなくなる場合 (anticrossing) と、そのまま交さしつづける場合 (crossing) とがある。

ところが、一般には相互作用項 V は正確には取り扱えず、多くの固有状態 $|\pm n\rangle$ のうち多くとも2つの共鳴状態が重要となり、多くの固有状態のうち、共鳴状態 (real state) と非共鳴状態 (virtual state) とを区別しなければならない。 \mathcal{H}_0 の固有値 E_a と E_b をもった2つの共鳴状態 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ とを考えると、共鳴状態へと非共鳴状態へと射影演算子 P 、 Q とを

$$\left. \begin{aligned} P &= |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| \\ Q &= 1 - P \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

のように定義すれば Resolvent 形式によって式(1)のハミルトニアンは、有効ハミルトニアン:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 + P R P \quad (11)$$

として与えられる。但し、 R は変位演算子 (Level shift operator) で

$$R = V + V \frac{Q}{E - \mathcal{H}_0 - Q V Q} V \quad (12)$$

によって定義される。この変位演算子の非対角成分 R_{ab} および R_{ba} は状態 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ との間の rf photon による real transition を表わし、共鳴線の幅に関係し、対角成分 R_{aa} および R_{bb} は状態 $|a\rangle$ 及いは $|b\rangle$ における rf photon による virtual transition を表わし、共鳴周波数の shift に関係する。

このようにして、式(11)の有効ハミルトニアン $\tilde{\mathcal{H}}$ を使って、エネルギー・ダイアグラムを正確に求めることができるなら、多重量子遷移の共鳴線やコヒーレンス共鳴線が理論的に解析できる。一般的には、式(12)の変位演算子を摂動的に

$$R = V + V \frac{Q}{E - \mathcal{H}_0} V + V \frac{Q}{E - \mathcal{H}_0} V \frac{Q}{E - \mathcal{H}_0} V + \dots$$

のように展開して近似的に求められるが、第3図のような高周波磁場と相互作用する場合、

ハミルトニアン \mathcal{H} は正確に対角化できて、エネルギー固有値が求められる。高周波磁場の偏向状態によって、(i) π photon, (ii) σ_- photon, (iii) σ_+ photon と分類される。

(i) π photon

高周波磁場の偏りは $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$ となり、式(8)より

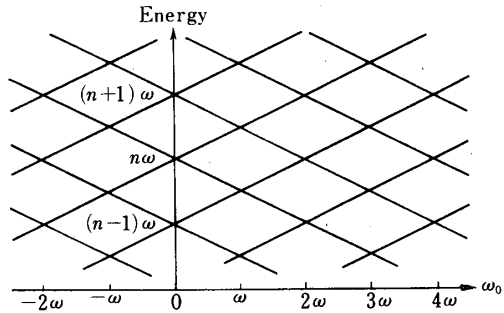
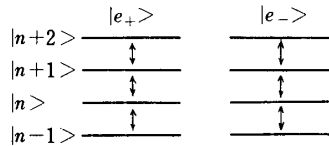
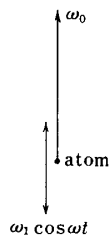
$$V_\pi = \lambda J_z (a + a^\dagger) \tag{13}$$

となり、固有状態として、

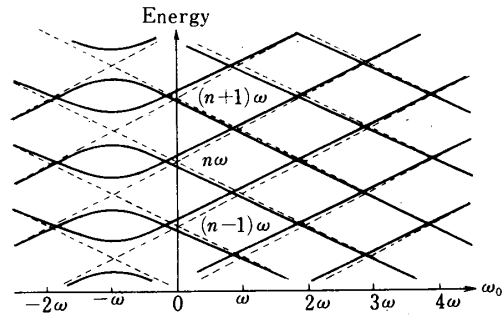
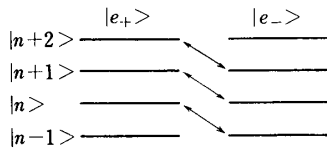
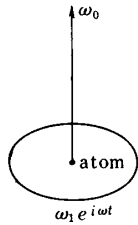
$$|\pm \bar{n}_\pm\rangle = |\pm\rangle \cdot \exp\left\{\mp \frac{\lambda}{2\omega} (a \pm a^\dagger)\right\} |n\rangle \tag{14}$$

を選ぶことによって、全ハミルトニアン \mathcal{H} のエネルギー固有値は

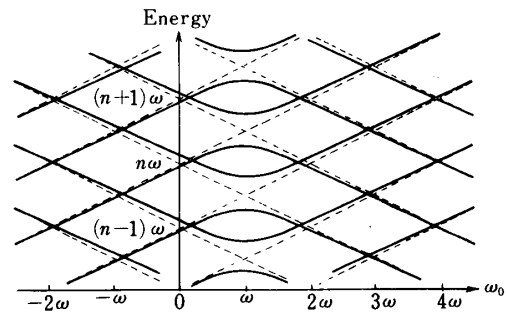
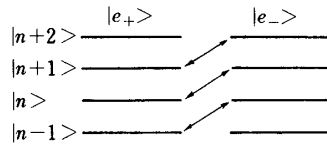
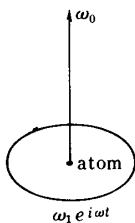
(I) π photon



(II) σ_- photon



(III) σ_+ photon



第3図 基本的な rf photon とエネルギー・ダイアグラム

$$E_{\pm \bar{n}_{\pm}} = \pm \frac{\omega_0}{2} + n\omega - \frac{\lambda^2}{4\omega} \quad (15)$$

となる. ここで, $\lambda^2/4\omega = \omega_1^2/16n\omega$ となり, *rf* photon の光子数が大きいから無視されて, 無摂動ハミルトニアン \mathcal{H}_0 と同じエネルギー・ダイアグラムになる.

(iii) σ_+ photon (σ_- photon も同様)

高周波磁場の偏りは $\mathbf{e} = \mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y$ となり, 式(8)より

$$V_{\sigma_+} = (aJ_+ + a^+J_-) \quad (16)$$

となる. 但し, $J_{\pm} = J_x \pm jJ_y$. この σ_+ photon は ω_0 方向に沿って角運動量を1だけ運び, 原子に対して角運動量を1だけ変化させる. これに反して, π photon は角運動量はもたず原子に対して角運動量を変化させない. そこで, 例えば, V_{σ_+} は $|+n\rangle$ と $|-n+1\rangle$ との準位間の結合に寄与し, 固有状態として,

$$\left. \begin{aligned} |+\bar{n}\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} | +n \rangle + \sin \frac{\theta}{2} | -n+1 \rangle \\ |-\bar{n}+1\rangle &= -\sin \frac{\theta}{2} | +n \rangle + \cos \frac{\theta}{2} | -n+1 \rangle \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

を選ぶことにより, (但し θ は $\tan \theta = \omega_1/(\omega - \omega_0)$) 全ハミルトニアンは正確に対角化されて, その固有値は

$$\left. \begin{aligned} E_{+\bar{n}} &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2} \\ E_{-\bar{n}+1} &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となり, それぞれのエネルギー・ダイアグラムが第3図に示されている.

そこで, 状態 $|a\rangle$, $|b\rangle$ 間の遷移確率 $P_{ab}(t)$ は

$$P_{ab}(t) = |\langle b | e^{-i\tilde{\mathcal{H}}t} | a \rangle|^2 \quad (19)$$

となる. 但し, $\exp(-i\tilde{\mathcal{H}}t)$ は時間発展演算子 (time evolution operator) であり, $\tilde{\mathcal{H}}$ が時間に依存しない時にもみ表示される. 状態 $|a\rangle$, $|b\rangle$ での自然幅を Γ として平均化すると,

$$P_{ab} = \frac{2|R_{ab}|^2}{(E_a - E_b + \Delta\omega)^2 + 4|R_{ab}|^2 + \Gamma^2} \quad (20)$$

但し, $\Delta\omega = R_{aa} - R_{bb}$. これは, 縦ポンピングによって検出される多重量子遷移を表わす式である. 多重量子共鳴は $E_a - E_b + \Delta\omega = 0$ でおこり, 半値幅 $\sqrt{4|R_{ab}|^2 + \Gamma^2}$ を持つことになる.

ところが、状態 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ との間の real transition が、禁止されるような場合、 $R_{ab}=0$ となり、遷移確率 P_{ab} は零となる。つまり、level は crossing となり、コヒーレントな偏りをもった optical photon でポンピングされるならば、crossing のために異った準位が同じ所に2つあることになり、同時に励起されるので、状態 $|a\rangle$ での遷移確率振幅を A_a 、 $|b\rangle$ でのそれを A_b とすれば、全体の遷移確率は

$$P_{ab'}(t) = |A_a|^2 + |A_b|^2 + 2R_e A_a A_b \quad (21)$$

となり、式(21)の右辺の第3項が、共鳴的な変化を引き起し、干渉項と呼ばれる。これが、コヒーレンス共鳴の由来で、自然幅 Γ によって、平均化されることにより、コヒーレンス共鳴線は

$$P_{ab'} = C \frac{\Gamma}{(E_a - E_b + \Delta\omega)^2 + \Gamma^2} \quad (23)$$

となる。但し、 C は干渉項の数と、原子と optical photon との結合定数に依存する定数である。このコヒーレンス共鳴は、コヒーレントな偏向をもった optical photon で励起してやらなければならないので、横ポンピングによって観測される。そして、このコヒーレンス共鳴は、 $E_a - E_b + \Delta\omega = 0$ で共鳴がおこり、一定の共鳴幅 Γ を持つ。

3. 応用理論

3.1. 傾斜した回転磁場

静磁場 ω_0 に対して傾斜した回転磁場の偏向は

$$\mathbf{e} = e_x \sin\theta + e_z \cos\theta + j e_y \quad (24)$$

となり、式(8)より相互作用項 V は式(15)と式(16)を用いて、

$$V = \cos\theta V_\pi + \frac{1}{2} (\sin\theta + 1) V_{\sigma_+} + \frac{1}{2} (\sin\theta - 1) V_{\sigma_-} \quad (25)$$

となり、3種類の rf photon を持つことになる。一種類の rf photon であれば、2章のように対角化できて正確に取り扱うことができる。Allegrini [4] 等は、2種類の rf photon (π と σ_+ photon) とを含んだ system に対して、 π photon を正確に取り扱い、式(14)の固有関数を使って、 σ_+ photon を perturbing photon として最低次の摂動計算を行なった。一方 Nakayama [5] 等は、式(25)のような3種類の rf photon を含んだ system に対して、Allegrini 等と同様に、 π photon を正確に取り扱い、 σ_\pm photon を perturbing photon として、misalignment 効果を導き出して、量子効果を無視すれば、Pegg [6] 等の半古典的な結果と一致することを示した。また零静磁場 $\omega_0 \approx 0$ で回転磁場は仮想的な静磁場

$$\omega_f = -\frac{\omega_1^2}{2\omega} \quad (26)$$

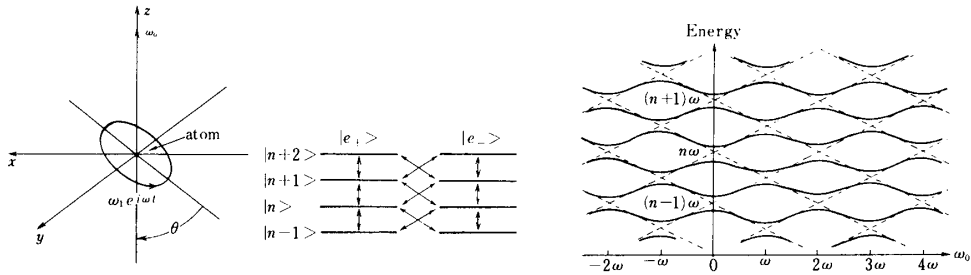
で置換されることが Dournenf [7] 等によって特定の傾斜角度 ($\theta = 0, \pi/2$) に対して示されたが Nakayama 等は任意の傾斜角度に対しても成立することを示した.

ここでは, 相互作用 V を変位演算子に代入した結果のみを示すと, $\omega_0 = p\omega$ の多重量子共鳴は,

$$2R_{ab} = \omega_1^2 \sin 2\theta J_{-p}(s)/8\omega n + \frac{\omega_1}{2} [(\sin \theta + 1)J_{-p+1}(s) + (\sin \theta - 1)J_{-p-1}(s)] \quad (27)$$

$$\Delta\omega = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1^2}{8(q+p)\omega} [(\sin \theta + 1)J_{q+1}(s) + (\sin \theta - 1)J_{q-1}(s)] \quad (28)$$

となる. 但し, $s = \omega_1 \cos \theta / \omega$, $J_m(s)$ は第 m 次の Bessel 関数であり, 式(27)の共鳴幅を与える R_{ab} の右辺第1項は rf photon の光子数 n が大きいので無視することができて, Pegg 等の結果に一致する. この項は a, a^+ の非交換性から出てきた量子効果であり, 式(28)では, 量子効果は無視されている. また $\omega_0 \ll \omega$ と仮定することによって, 式(26)の成立が式(27), (28)から求められる. このようにして求められたエネルギー固有値は第4図のようになり, \mathcal{H}_0 の crossing は, すべて縮退がとけてしまい anticrossing となり, コヒーレンス共鳴はいかなる傾斜角度に対しても観測されない. つまり, 式(27)より $R_{ab} = 0$ とするような θ は存在しないということである.



第4図 傾斜した回転磁場エネルギー・ダイアグラム

3.2. 傾斜した振動磁場

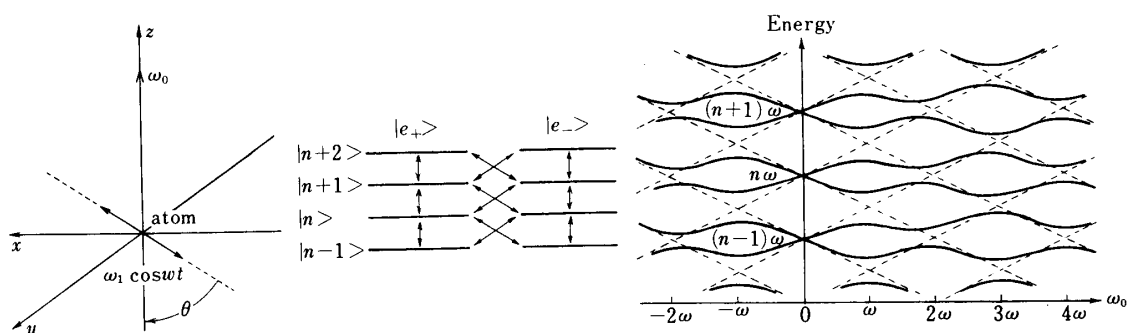
静磁場 ω_0 に対して傾斜した直線振動磁場の偏向は

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_x \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta \quad (29)$$

となり (第5図参照) 式(8)に代入すれば, 相互作用項 V は, 回転磁場と同様にして,

$$V = \cos \theta V_\pi + \frac{1}{2} \sin \theta V_{\sigma_+} + \frac{1}{2} \sin \theta V_{\sigma_-} \quad (30)$$

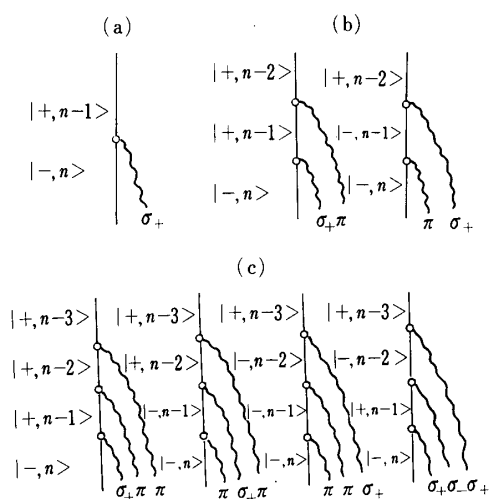
となり, 3種類の rf photon を持つことになる. ここでは π photon を dressing photon



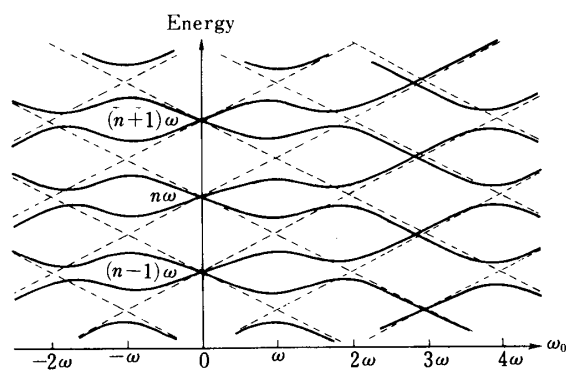
第5図 傾斜した振動磁場エネルギー・ダイアグラム

とせずに、すべての rf photon を $perturbing$ photon として摂動計算を行なう Dournenf [7] 等によって、 $\omega_0 \approx 0$ では、Raman 等の多重量子遷移がおこり、 rf photon の角運動量の違いによって同時にいくつかの素過程があり、それらが相殺的に干渉しあって、多重量子遷移が禁止されるようになり、 $R_{ab} = 0$ となり、level crossing がおこり、(第5図のエネルギー・ダイアグラム参照)。コヒーレンス共鳴が観測されることになる。Haroche [8] は、この level crossing は、系のハミルトニアンが時間反転に対して不変であることにもとづくクラマース縮退 (Kramers degeneracy) であることを示し、 $\omega_0 = 0$ 以外では level crossing はおこらないとした。

ところが、Tsukada [9] 等によって、円偏光したポンピング光に平行に静磁場 $\omega_{||}$ と振動磁場 $\omega_1 \cos \omega t$ とがあり、それらに垂直に静磁場 ω_{\perp} を sweep すれば、 $\omega_{||} = n\omega$ に一致するところで、Haroche 共鳴に似た level crossing に起因するような新しいタイプの共鳴が



第6図 (a) 1光子過程, (b) 2光子過程, (c) 3光子過程での最低次の Feynman ダイアグラム



第7図 $\cos \theta = 1/3$ でのエネルギー・ダイアグラム

観測された。そして、Yabuzaki [3] 等は、最低次の摂動計算を行なった結果、Tsukada 等のみた共鳴は、特定の傾斜角度で発生する level crossing にもとづくコヒーレンス共鳴であることを証明した。例えば、状態 $|a\rangle = |-n\rangle$ と $|b\rangle = |+n-3\rangle$ との3光子過程を考えると、rf photon の角運動量の違いによって、第6図(c)のような4つの素過程を考慮することができる。ただし同種の rf photon の交換は同じ過程である。そこで式(30)の相互作用 V を level shift operator に代入することにより、最低次の零ではない R_{ab} は、

$$R_{ab} = \frac{\omega_1^3 \sin \theta}{256 \omega^2} (9 \cos^2 \theta - 1) \quad (31)$$

となり、 $R_{ab}^{(1)} = 0$ となるのは、つまり、level crossing がおきるのは、

$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta = 0 \\ \text{および } \cos \theta = 1/3 \end{array} \right\} \quad (32)$$

のところである。sin $\theta = 0$ 時、 $\theta = 0$ で、この時の crossing は parametric 共鳴で、実は第6図(c)の4つの素過程は、それぞれ禁止される。つまり $\theta = 0$ だと σ_{\pm} photon は含まれないからである。しかし、cos $\theta = 1/3$ の時は、4つの素過程のおのおのは存在するが、全体としては確率が零となることになる。そのため、第7図のように $\omega_0 = 3\omega$ で level crossing ができる。

さらに、高次の摂動計算を行ない、新しいタイプのコヒーレンス共鳴の機構を調べる。anticrossing であると考えられていたのに、どのようにして crossing になり、その点で、どのようなコヒーレンス共鳴がおこり、どのように共鳴線が、高周波磁場の強度とともにシフトしていくかを述べる。

(a) crossing mechanism [10]

高周波磁場が存在しない時に、縮退している準位 $|a\rangle = |-n\rangle$ と $|b\rangle = |+n-p\rangle$ に関して、高周波磁場が存在する時の $\omega_0 = p\omega$ での level shift operator を計算する。

i) $\omega_0 = \omega$ (1光子過程)

最低次では、第6図(a)のように、real transition が1つ存在し、2次効果では5つの素過程が存在して、

$$\left. \begin{array}{l} R_{ab} = \frac{\omega_1}{4} \sin \theta + 0 \cdot \frac{\omega_1^3}{\omega^2} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \\ \Delta \omega = \frac{\omega_1^2}{16 \omega} \sin^2 \theta \end{array} \right\} \quad (33)$$

となり、level crossing がおきるのは sin $\theta = 0$ で parametric 共鳴であって、shift はおこらない。(第3図(i)参照) また、傾斜角度の強度依存性もみられない。

ii) $\omega_0 = 2\omega$ (2光子過程)

最低次では第6(b)のように、2つの素過程が考えられ2次効果で16の素過程があり、

$$\left. \begin{aligned} R_{ab} &= -\frac{\omega_1^2}{8\omega} \sin\theta \cos\theta - \frac{\omega_1^4}{192\omega^3} \sin\theta \cos\theta \\ \Delta\omega &= \frac{\omega_1^2}{6\omega} \sin^2\theta \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

となる. Level crossing がおきるのは $\sin\theta=0$ と $\cos\theta=0$ の時であり, $\theta=0$ で parametric 共鳴, $\theta=\pi/2$ で Haroche 共鳴がおこる. この場合も傾斜角度の rf 強度依存性はない.

iii) $\omega_0=3\omega$ (3光子過程)

最近次では, 前述したように4つの素過程があり, 2次効果として, 第8図に示されているような素過程が, 48通り存在し, 2次の $R_{ab}^{(2)}$ は,

$$R_{ab}^{(2)} = \frac{\omega_1^5}{256\omega^4} \sin\theta (16 \cos^4\theta - 12 \cos^2\theta \sin^2\theta - \sin^4\theta) / 32 \quad (35)$$

のようになる. 今, $\cos\theta=1/3$ の近くの共鳴に注目し, rf 強度が弱い場合 $\omega_1 \ll \omega$ を考えているから式(31)の $R_{ab}^{(1)}$ と式(35)の $R_{ab}^{(2)}$ との和は,

$$R_{ab} = \frac{\omega_1^3}{256\omega^2} \sin\theta [9 \cos^2\theta - 1 - (\omega_1/\omega)^2 / 18] \quad (36)$$

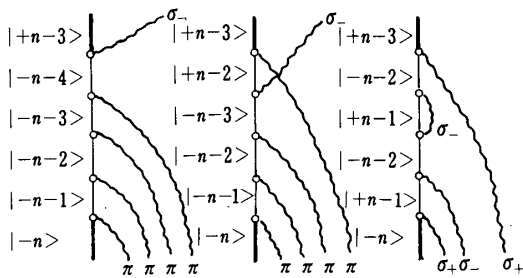
となり, level crossing がおきるのは, $\sin\theta=0$ の parametric 共鳴と,

$$\cos\theta = \frac{1}{3} + \frac{1}{108} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \quad (37)$$

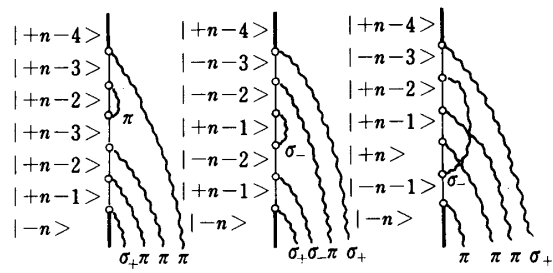
の新しいタイプのコヒーレンス共鳴である. Level crossing のおこる傾斜角度 θ は強度に依存して, rf 強度の増加とともに小さくなる. また,

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1^2}{32\omega} \sin^2\theta \quad (38)$$

となる.



第8図 Higher-Order Effects ($\omega_0=3\omega$)



第9図 Higher-Order Effects ($\omega_0=4\omega$)

iv) $\omega_0 = 4\omega$ (4光子過程)

同様にして, 4光子過程では, 最低次では, 8通りの素過程があり, 2次では, 144通りの素過程であり, その一部は第9図に示されている. そこで, $R_{ab}^{(1)} + R_{ab}^{(2)}$ は

$$R_{ab} = -\frac{\omega_1^4}{576\omega^3} \sin\theta \cos\theta \left[4 \cos^2\theta - 1 - \frac{1}{40} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right]$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1^2}{15\omega} \sin^2\theta \quad (39)$$

となり, level crossing がおきるのは, $\sin\theta=0$ (parametric 共鳴) と $\cos\theta=0$ (Haroche 共鳴) と,

$$\cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{160} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \quad (40)$$

のコヒーレンス共鳴である.

さて, crossing 機構に関して, 最近 Grynberg [11] 等によって levelの対称性につき詳細に研究されているが, 彼らと Haroche 等は第一種と第二種との crossing に分類した. 第一種は off diagonal 共鳴, parametric 共鳴そして Haroche 共鳴にみられるように rf photon の角運動量が多重量子遷移のためのパリティ条件を全く満たさないために引き起される level crossing で, 第二種の crossing は, 振動磁場での零静磁場付近での Raman 型の共鳴にみられるように, 多重量子遷移があっても, それらが相殺的に干渉しあって, 多重量子遷移がおこらなかったように見える. そのために, おこる level crossing であると考えられた. そして, 著者等は, 最低次の計算では, 新しいタイプのコヒーレンス共鳴は, この第2種の crossing によるものであると考えたが, 最近, Nakayama 等は, 高次の計算によって, 第2種の crossing とは違った機構を待つことを指摘した.

つまり, $R_{ab_i}^{(k)}$ を k 番目 (k 次) の摂動計算で i 番目の素過程に対する変位演算子 (real transition を表わす) とすれば, 第一種の crossing は, いかなる k, i に対しても,

$$R_{ab_i}^{(k)} = 0 \quad (41)$$

となり, $R_{ab} = \sum_k \left(\sum_i R_{ab_i}^{(k)} \right) = 0$ となるが, 第二種の crossing では, 特に Raman 型の共鳴に対応する crossing は, ある k に対して,

$$R_{ab_i}^{(k)} \neq 0, \sum_i R_{ab_i}^{(k)} = 0 \quad (42)$$

+ となり, $R_{ab} = \sum_k \left(\sum_i R_{ab_i}^{(k)} \right) = 0$ となる. ところが, 新しいコヒーレンス共鳴に対しては,
+ 式(40)や式(37)を満足するような θ に対しては,

$$R_{ab_i}^{(k)} \neq 0, \sum_i R_{ab_i}^{(k)} \neq 0, R_{ab} = 0 \quad (43)$$

となり、各々の素過程は存在し、また各々の次元での摂動計算の素過程の和も存在するが、全体としての素過程の和が禁止されて、存在しなくなることによる level crossing であると考えられる。このような crossing を第3種の crossing と呼ぶことにする。

(b) coherent mechanism

式(21)や(23)で示されたように、level crossing があれば、その crossing point でコヒーレントな偏向を持った optical photon によって2つの path が考えられ、それらの干渉効果によって共鳴が引き起されることは Franken によって示された。また Cohen-Tannoudji 等は Haroche 共鳴に対して、式(21)の右辺の第3項の干渉項、即ち、 $\omega_0 = 2n\omega$ の共鳴に対して V の最低次 $4n$ 次の干渉項が $(2n+1)^2$ 通り存在することを示したが、Haroche 共鳴は、振動磁場が ω_0 に垂直になっているために σ_{\pm} photon しか含まないが、筆者らのコヒーレンス共鳴は、 π photon も含まれるので、干渉項が増加すると考えられる。例えば、 $\omega_0 = p\omega$ のコヒーレンス共鳴に対して、 $(p+1)^3$ 通りの干渉項が存在すると考えられ、Haroche の計算とは異なり、式(23)により、共鳴のピーク値に変化を与える。式が複雑となるので、ここでは示さないが、干渉項の個数が変化することが分った。

(c) shift mechanism

第一種の crossing によるコヒーレンス共鳴は shift 方向に角度依存性はみられず、静磁場 ω_0 方向弱磁場の向きに shift していくことが、式(33)と式(34)からも理解できる。第二種の crossing によるコヒーレンス共鳴である。振動磁場での Raman 型の共鳴は零磁場での共鳴で shift は起らない。第三種の crossing である筆者らの場合のコヒーレンス共鳴の shift 方向は静磁場方向ではなく、 $\omega_{\parallel} = n\omega$ とするように振動磁場に垂直方向に shift するという実験事実があり、Yabuzaki 等によって最低次摂動計算によって、コヒーレンス共鳴が $\omega_{\parallel} = n\omega$ で発生することは証明された。しかし、この共鳴が $\omega_{\parallel} = n\omega$ として ω_{\perp} の方向に shift していくことは解析的には証明されなかったが、(a)のように高次効果を考慮することにより、証明される。

4. 数 値 計 算

以上はいずれも摂動計算ではあるが、これらの計算により大体の共鳴のあり方について知ることができた。しかしながら、摂動が高次におよんだ場合のシフトの正確な値や中間状態などを調べることができない。この点をおぎなうために数値計算を行なった。

4.1. 数値計算の方法

式(1)の全ハミルトニアンを \mathcal{H}_0 の固有状態を基底とした表示で explicit に書くと、次のようになる。

ここで I は単位行列である。

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{H} - n\omega I \\
 & \begin{matrix} (n-1, +) & (n-1, -) & (n, +) & (n, -) & (n+1, +) & (n+1, -) \end{matrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{\omega_0}{2} - \omega & 0 & c & b & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & -\frac{\omega_0}{2} - \omega & b & -c & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & c & b & \frac{\omega_0}{2} & 0 & c & b & \cdot \\ \cdot & b & -c & 0 & -\frac{\omega_0}{2} & b & -c & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & c & b & \frac{\omega_0}{2} + \omega & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & b & -c & 0 & -\frac{\omega_0}{2} + \omega & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} (n-1, +) \\ (n-1, -) \\ (n, +) \\ (n, -) \\ (n+1, +) \\ (n+1, -) \end{matrix} \\
 & \hspace{15em} (44)
 \end{aligned}$$

ここで b, c は

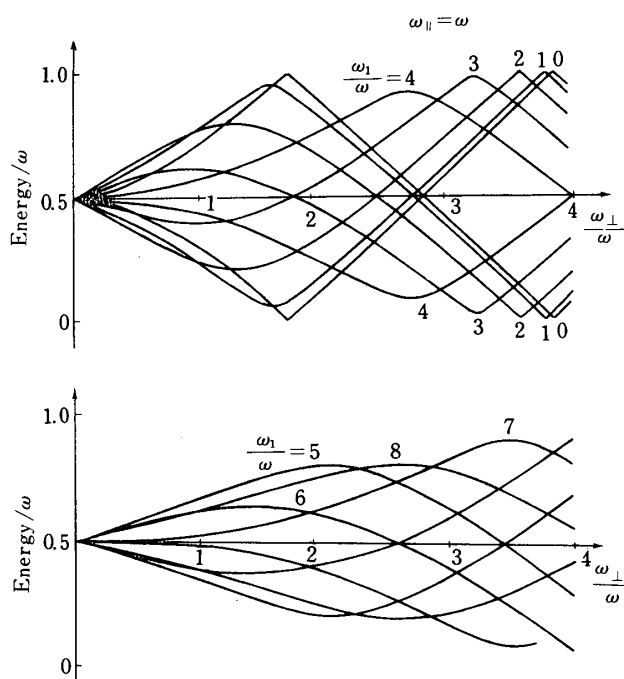
$$b \equiv \langle n, \pm | V | n+1, \mp \rangle = \langle n+1, \pm | V | n, \mp \rangle = \frac{\omega_1}{4} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \quad (45)$$

$$\pm c \equiv \langle n, \pm | V | n+1, \pm \rangle = \langle n+1, \pm | V | n, \pm \rangle = \pm \frac{\omega_1}{4} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \quad (46)$$

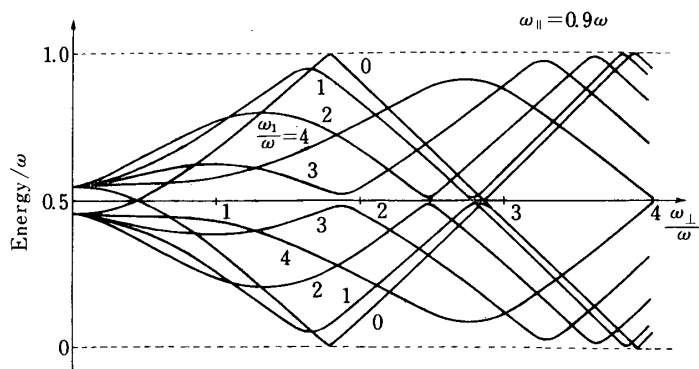
である。この行列で $c=0$ の場合は Shirley の Floquet ハミルトニアンに相当する [12]。この行列の固有値をハウスホルダー法で数値的に求めた。この行列は無次元の行列であるので、実際の計算においては式(44)を中心とした 40×40 の行列で近似した。正確な固有値を $\lambda_{n,\pm}$ とおくと $\lambda_{n+1,\pm} - \lambda_{n,\pm} = \omega$ であるので、この式を近似の目安とした。すなわち、この近似計算において最も条件のよい固有値すなわち式(44)を対角化した場合に中央の固有値とその一つおいた固有値との差をとったところ誤差が 10^{-4} 程度であった。従ってこれは十分よい近似である。 40×40 の行列に近似したということは20次の摂動計算に相当する。

4.2. 数値計算の結果

第10図は $\omega_{\parallel} = \omega$ の場合に、 ω_1 をパラメーターとして、 ω_{\perp} の関数として書いたエネルギー図である。この場合 $\cos \theta = 1/3$ 、すなわち、 $\omega_{\perp} = 2\sqrt{2}\omega$ でクロッシングポイントが生じ、 ω_1 が大きくなるにつれて、この点は $\omega_{\perp} = 0$ の方向にシフトする。そして、この点が $\omega_{\perp} = 0$ に到着するときの ω_1 はベッセル関数 $J_1(\omega_1/\omega) = 0$ の最初の根に相当する。二番目のクロッシングポイントが $\omega_{\perp} = 0$ に到着するときの ω_1 は $J_1(\omega_1/\omega) = 0$ 二番目の根に相当する。またこの図より、シフトの方向は $\omega_{\parallel} = \omega$ となる方向であることがわかる。第11図



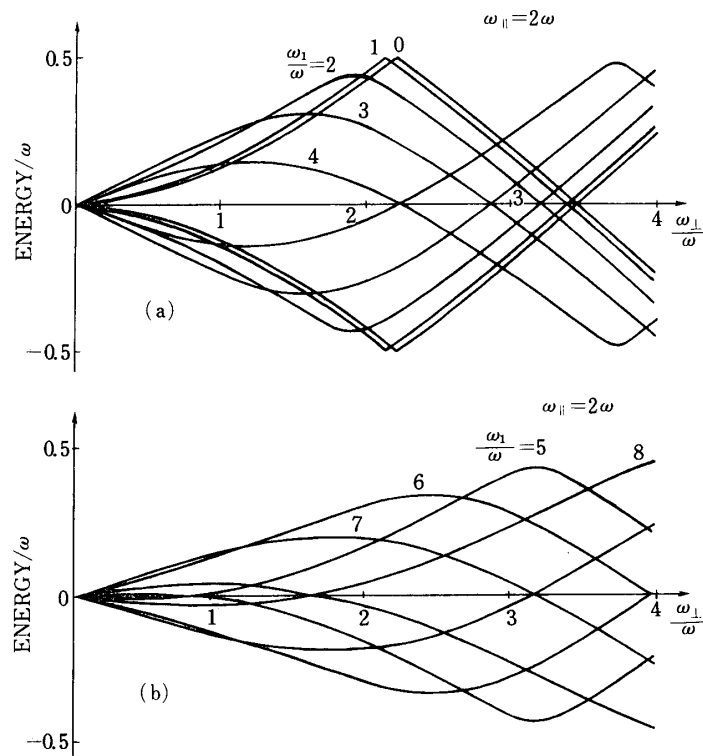
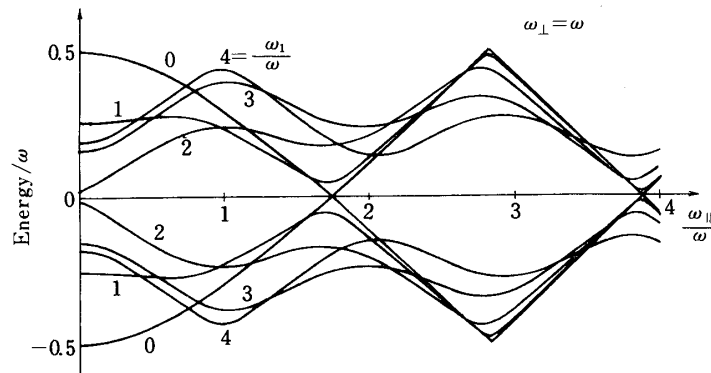
第10図



第11図 ω_{||} = 0.9ω のエネルギー図

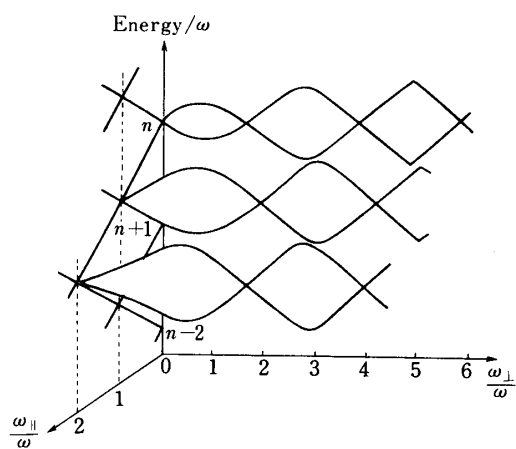
は $\omega_{||} = 0.9\omega$ の場合である. この場合 $\omega_{||} = \omega$ で縮退していた点の縮退が解けていることがわかる. すなわち $\omega_{||} = n\omega$ より $\omega_{||}$ がはずれた場合にはクロッシングポイントは存在しない. 第12図は $\omega_{||} = 2\omega$ で, この場合も $\omega_{||} = \omega$ の場合と $J_1(\omega_1/\omega)$ が $J_2(\omega_1/\omega)$ となるだけで同じことがいえる.

第13図は $\omega_1 = \omega$ とおいて, $\omega_{||}$ の関数としたエネルギー図である. この図において, ω_1 を大きくするとアンチクロッシングポイントは $\omega_{||} = n\omega$ の上に移動していくのがわかる. また $\omega_{||} = \text{一定}$ とした場合のエネルギー図はクロッシングポイントを見つけることがむずかしい

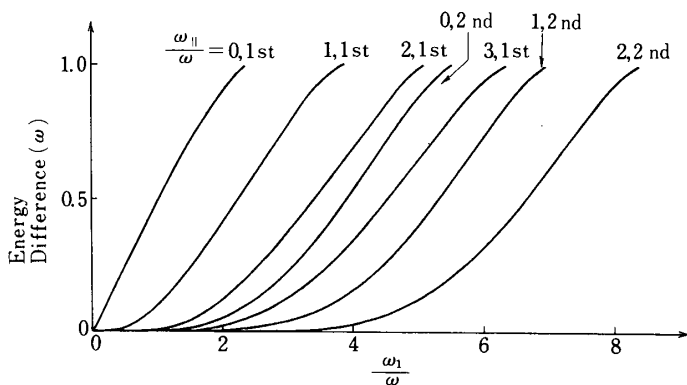
第12図 $\omega_{\parallel} = 2\omega$ のエネルギー図第13図 $\omega_{\perp} = \omega$ のエネルギー図

ので、 ω_{\parallel} = 一定としてみたエネルギー図ほど物理的な意味を持たないことがわかる。第14図は以上を基にして立体的に書いたエネルギーレベルの概念である。

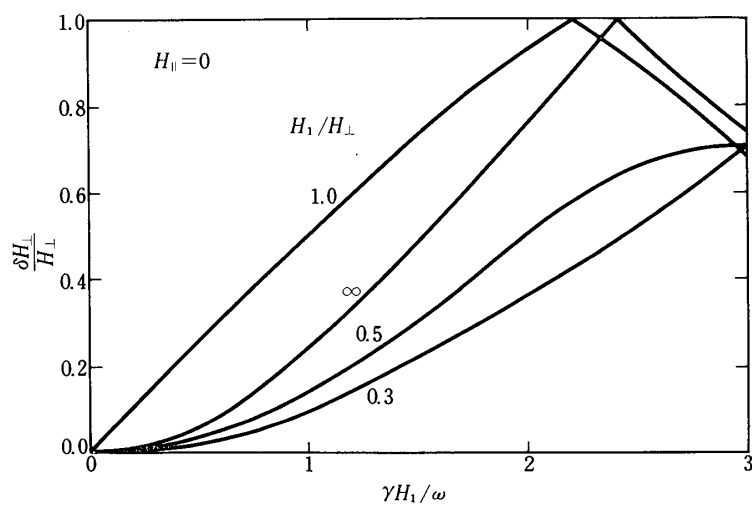
第15図は $\omega_{\parallel} = n\omega$ の場合に表われるアンチクロッシングポイントのエネルギー差を書いたものである。 $\omega_{\parallel}/\omega = 1$, 1st は $\omega_{\parallel} = \omega$ の場合の一番目のアンチクロッシングという意味である。このエネルギー差はレベル間の結合エネルギーに相当する。 ω_1 が小さい場合には、一



第14図 エネルギーレベルの概念図



第15図 アンチロッキングのエネルギーの差



第16図

第 1 表

	H_0 (μT)	δH_0 (nT)	$\omega / 2\pi$ (Hz)	H_1 (μT)	E_1 (V/m)
(1)	50	10^{-2}	10^6	10^{-1}	3×10^2
(2)	50	1	10^6	1	3×10^3
(3)	5	1	10^6	10^{-2}	3×10
(1')	50	10^{-2}	10^5	3×10^{-5}	10^{-1}
(2')	50	1	10^5	3×10^{-3}	10
(3')	5	1	10^4	3×10^{-3}	10

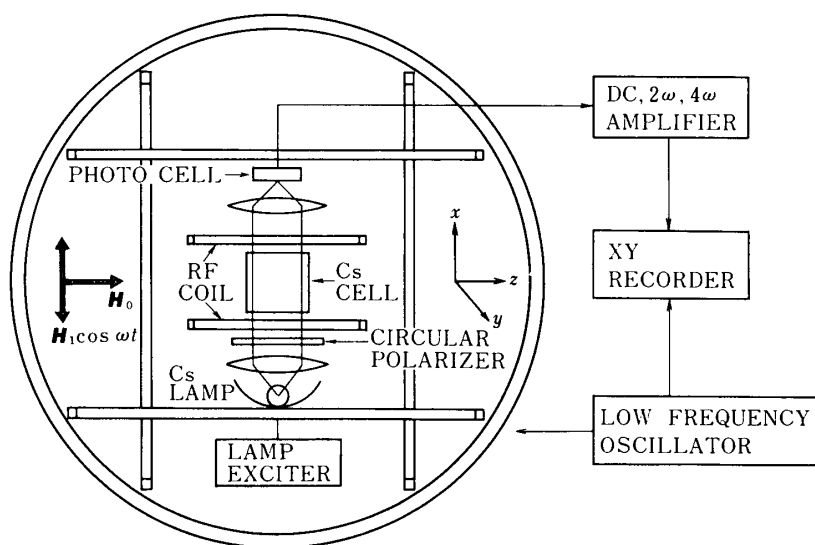
般に n 個の光子が関係する遷移では結合エネルギーは ω_1^n に比例する。図をみるとそうになっているし、 ω_1 が大きくなるとはずれてくるのは飽和効果を表わしている。

以上は主として一般的な取扱いを行ったが、擾乱高周波磁場と磁力計の誤差の程度を知るために、特殊な場合を考へて見る。今高周波磁場に平行な静磁場成分 H_{\parallel} が零の場合、すなわち高周波磁場か静磁場に垂直な場合を取り出して見ると第16図のようになる。パラメータは高周波磁場の振幅 H_1 と静磁場 H_{\perp} との比をとってある。擾乱高周波がずっと大きい時は ($H_1/H_{\perp} \rightarrow \infty$) 磁力計の精度 $\delta H_{\perp}/H_{\perp}$ は図のように第一種の Bessel 関数で与えられる [13]。 H_1 が減少しても誤差は必ずしも減少せず、 γH_1 , γH_{\perp} , ω の相対的な大きさで決まってくる (γ は磁気回転比)。より具体的な数値例は第1表に示す通りである。この表は高周波磁場 $H_1 \cos \omega t$ と直流磁場 H_0 とが垂直な場合で δH_0 は磁力計の誤差である。 E_1 は H_1 に対応する真空中における電界強度を表す。(1), (2), (3) は $\omega \gg \gamma H_0$ の場合, (1'), (2'), (3') は $\omega < \gamma H_0$ の場合である。また (1), (1') は高精度を要求される場合, (2), (2') は高出力の送信機と相乗りの場合, (3), (3') は $2R_e$ 程度の高高度の場合である。この表でも分る通り電界強度 1V/m 以上が予想される場合には磁力計の誤差を検討する必要があることが分る。尚 $\mu\text{T} = 10^{-2}$ Gauss, nT = gamma である。

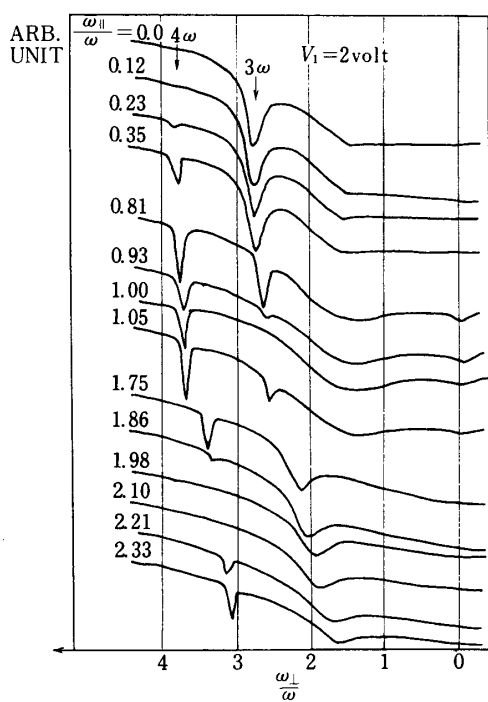
5. 実験結果とその検討

第17図に実験装置のブロック図を示す。光学系は無電極高周波セシウムランプ、円偏光板、吸収セル、太陽電池からなっている。セシウムランプからの光は円偏光板を通り、セルに入り、透過光の強度変化が太陽電池で電流変化に変換され DC 増幅器を通して X-Y レコーダーに記録される。壁面をパラフィンで処理された円筒形吸収セルは直径、長さ共 5 cm で約 25°C に保たれている。

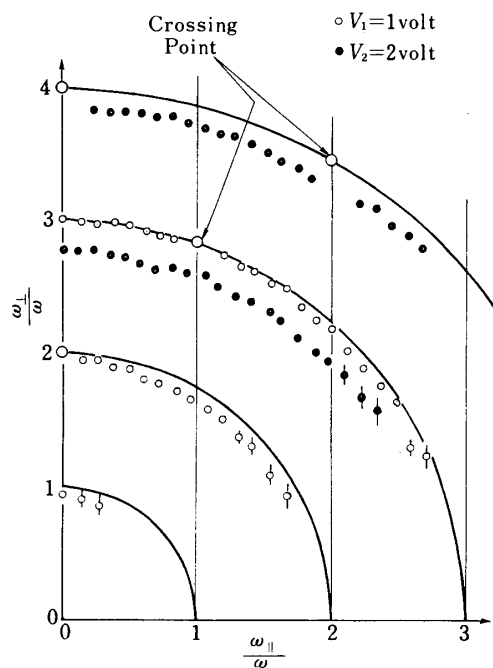
第18図は振動磁場の振幅を一定とし、 ω_{\parallel} をパラメーターとして ω_{\perp} をスイープした場合の多重量子遷移の実験例である。振動磁場の振幅は高周波発振器の出力電圧に比例するので出力電圧 V_1 の値を書いた。 $V_1 = 2\text{volt}$ は比較的振動磁場が強い場合で、 4ω の多重量子遷移がみられる。この図でみると 3ω の共鳴は $\omega_{\parallel} = \omega$ の点で消滅し、 4ω の共鳴は $\omega_{\parallel} = 0$ と $\omega_{\parallel} = 2\omega$ 付近で消滅している。このことはこの点で遷移が禁止されている。すなわちレベルクロッシングが生じていることを意味する。また $\omega_{\perp} = 0$ の方向にシフトしていき巾が広が



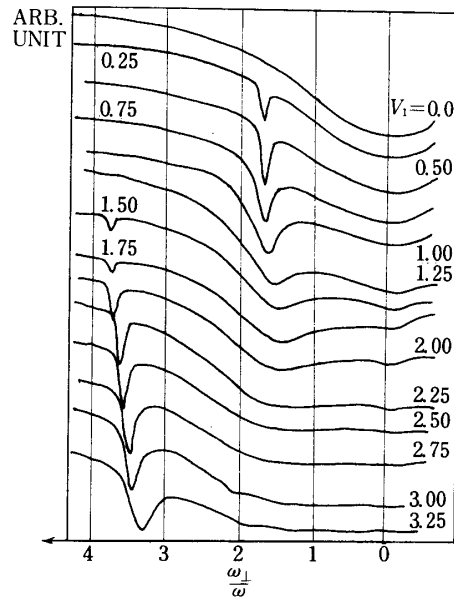
第17図



第18図 多重量子遷移(ω_1 一定)



第19図 共鳴点の位置

第20図 多重量子遷移($\omega_{\parallel} = \omega$)

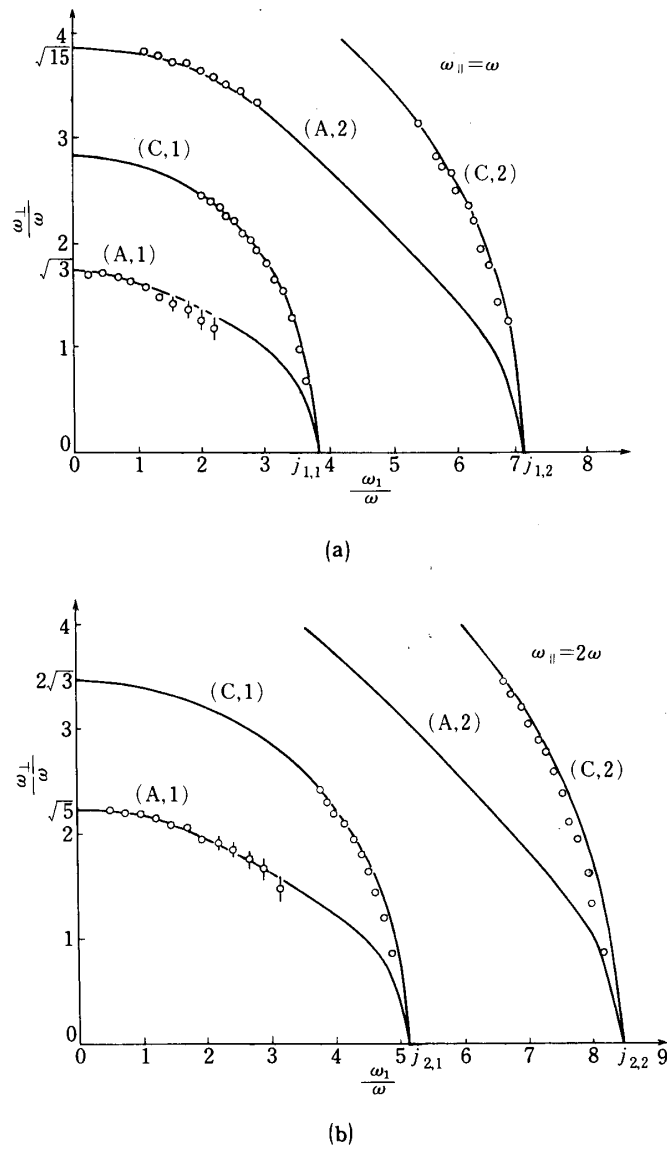
ることともわかる。第19図は共鳴の位置をプロットしたものである。 ω_{\perp} が小さい場合には、共鳴は $\omega_0 = n\omega$ でみられるので ω_{\parallel} 、 ω_{\perp} を横軸、縦軸とした平面上では共鳴点は $\sqrt{\omega_{\parallel}^2 + \omega_{\perp}^2} = n\omega$ の円上にのる。また ω_{\perp} を強くすると、共鳴は ω_{\perp} 方向にシフトしていくこともわかる。図の丸で示したクロッシングポイントは、それぞれ第18図でみることでできたものである。

第20図は $\omega_{\parallel} = \omega$ の場合のアンチクロッシングポイントのみを観測した実験である。図では 2ω と 4ω の共鳴がみられる。この共鳴も ω_{\perp} を増していくと $\omega_{\perp} = 0$ 方向にシフトする。 $\omega_{\perp} = 0$ に到着するときの ω_{\perp} は $J_1(\omega_{\perp}/\omega) = 0$ と一致するはずであるが、すぐに巾が広がるので、この観測はむずかしい。

第21図は、それぞれ $\omega_{\parallel} = \omega$ 、 $\omega_{\parallel} = 2\omega$ のとき、 ω_{\perp} を変数とした場合の共鳴点のシフトを書いたものである。ここで、 (A, n) は n 番目のアンチクロッシングポイント、 (c, n) は n 番目のクロッシングポイント、 $j_{n,m}$ は n 次ベッセル関数の m 番目の根という意味である。実線は前述の数値計算より求めた理論値である。 $\omega_{\parallel} = 0.0$ の場合の理論はStenholm [14]とTsukada等 [15]が連分数表示を用いて求めた理論値と一致することを確めた。丸が実験値を示す。アンチクロッシングの共鳴はすぐに巾が広がるので、 ω_{\perp} が小さい場合しか求めることができなかった。図を見てもわかるように理論値と実験値はきわめてよい一致を示す。なお ω が小さいときに、実験値がわずかに理論値よりも小さな値であるのは、Hanle線の肩に共鳴がのるためや残留磁場の影響であろうと思われる。

6. おわりに

以上広い強度範囲と周波数範囲の高周波磁場が任意の振動方向をもつ極めて一般の場合に、



第 21 図

光ポンピング磁力計におよぼす誤差について理論を発展させ、実験的にも確かめた。実際のロケット域は衛星の場合、特に注意を要するのは第 1 表でも明らかなように磁力計の発振周波数（セシウム磁力計では 350 kHz/Gauss）より低い擾乱周波数が存在する場合であることが分った。この場合条件にもよるが例えば磁力計センサー部での電界強度 10^{-1} volt/m 程度でも誤差が 10^{-2} nT (10^{-2} gamma) に達することもあり、擾乱電磁波の遮蔽や振動方向の変更などの対策が必要となってくる。

1975年9月30日

考 考 文 献

- [1] T. Yabuzaki and T. Ogawa, *Journ. Geophys. Rev.* **79**, 1999 (1974).
- [2] 藪崎努, 小川徹, 宇宙観測シンポジウム, p. 15, 昭和49年度
- [3] T. Yabuzaki, S. Nakayama, Y. Murakami, and T. Ogawa, *Phys. Rev. A*, **10** 1955 (1974).
- [4] M. Allegrini and E. Avimondo, *J. Phys. B*, **4** 1008 (1971).
- [5] S. Nakayama, T. Yabuzaki and T. Ogawa, *Phys. Lett.*, **49A** 421 (1974).
- [6] D.T. Pegg, *J. Phys. B*, **6** 241 (1973).
- [7] M.L. Dournef, C. Cohen-Tannauji, J. Dupont-Roc and S. Haroche, *C.R. Acad. Sci.* **272** B 985, B 1048 (1971).
- [8] S. Haroche, *Ann. Phys. (Paris)* **6** 189 (1971).
- [9] N. Tsukada, T. Koyama and T. Ogawa, *Phys. Lett.*, **44A** 501 (1973), *J. Phys. B*, **7** 799 (1974).
- [10] S. Nakayama and T. Ogawa, *Phys. Lett.* **53A** 171 (1975).
- [11] G. Grynberg, J. Dupont-Roc, S. Haroche and C. Cohen-Tannouji, *J. Phys.* **34** 523, 537 (1973).
- [12] J.H. Shirley, *Phys. Rev. B*, **138** 979 (1965).

- [13] T. Yabuzaki, N. Tsukada and T. Ogawa, *Japanese Journ, Appl. Phys.*, **11** 1071 (1972).
- [14] S. Stenholm, *J. Phys. B*, **5** 6890, 9878 (1972).
- [15] N. Tsukada and T. Ogawa, *ibid.* **6** 1643 (1973).