

ドップラ・アレイ・アンテナによる遠方界の 周波数スペクトル

飯 口 真 一

Frequency Spectrum of Far Field Radiated by Doppler Array Antenna

By

Shin-ichi IIGUCHI

Abstract : For the countermeasure of the congestion and the noise of airports, the systems of multiple and variable landing path are needed. For the purpose the systems using the doppler array are being tried in Europe and United State.

In this paper frequency spectrum of far field radiated by the doppler array are analyzed to help to design the array. The relation between wave source function and far field and general formula of frequency spectrum are described first. And then the spectra of the fields by rectangular and Gauss type modulated wave sources moving point to point and radiating at the points are obtained.

The analyses for general wave-type modulated wave source and also for continuously moving and radiating source are described in appendix.

概 要

空港の輻湊の軽減、騒音の軽減のために、多経路又は可変経路の降下路が必要とされるが、それに対して、ドップラ・アレイを用いる試みが欧米で行われている。

本論文は、ドップラ・アレイの設計に必要な遠方界の周波数スペクトルの解析を行ったものである。

初めに、波源の関数と遠方界との関係及び遠方界の周波数スペクトルの一般式をあげ、次に、波源の包絡線が、矩形波及びガウス形である場合のスペクトルを求めてある。付録では、包絡線が一般の波形の場合も取扱っており、更に、波源が連続的に動きながら輻射する場合も取扱っている。

緒 言

標記のアンテナは、図1に示す様に、波源が1つの点で或時間だけ輻射し、次の点で又輻射すると云う具合に、点から点へと移動し、輻射し続けるアンテナである。波源の角周波数が一定の ω_0 であっても、遠方点Pにおける界のスペクトルが角度 θ により異なるので、スペクトルの相違の認識から、 θ を知る事が出来る。

空港の輻湊の軽減、騒音の軽減の立場から、多経路又は可変経路の降下路が必要とされる

が、それに対して、このドップラ・アレイを用いる試みが欧米で行われている[1][2].

本研究所においても、「航空機による環境汚染防止の研究」を本年度より行う事になったが、その一環として、降下路の多様化、可変化の研究を計測部で取上げる事となった。先づ、地上アンテナ系の設計を始めたが、ドップラ・アレイのスペクトルの解析に関する文献が通常入手しうる雑誌には見当たらないので、新たに解析を行い、記録に残す事とした。

この論文の内容に簡単に触れると、始めに、波源の関数と遠方界との関係及び遠方界の周波数スペクトルの一般式をあげてある。次に、波源の関数即ちパルス変調波の記法について述べてある。3, 4節では、波源が夫々矩形状及びガウス形パルス変調波である場合のスペクトルを求めてある。

以上は、波源が飛び石の様に点から点へと移る場合について述べて来たが、波源が連続的に動きながら輻射する場合を付録Aで取扱っており、付録Bでは、離散的な場合と比較してある。更に、付録Cでは離散的な場合で、波源が、一般的なパルス変調波の時のスペクトルの表示式を求めてある。

記号表

$g(x, y, z, t)$	波源の関数	(スカラ方程式の場合)
$g_n(x, y, z, t)$		
$\psi(x', y', z', t)$	遠方の界	
$J(x, y, z, t)$	波源の電流	(ベクトル方程式の場合)
$\phi(x', y', z', t)$		
$F_n(t-t_{rn})$	g_n の包絡線. t_{rn} は参照時刻.	
$F_n(t-t_n, t-t_n-a)$	(図 2, 3 参照)	
b	一点に, 波源のとどまる時間.	(図 4 参照)
a	一点での, 波源の輻射時間.	
ζ	点の間隔.	
R	アレイの原点と遠方点との距離.	
v	ζ/b	
c	光速度	
r_n	$n+1$ 番目の点と, 遠方点との距離. $R-n\zeta \cos \theta$	
ω_0	搬送角周波数	
$\Delta\omega$	$\omega - \omega_0$	
Ω	$\omega_0 - \omega \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c} \right)$	
m	アレイ素子の数	
T	走査の繰返し時間 (図 5 参照)	
D	$1 - \frac{v \cos \theta}{c}$	
付 録		
l	連続アンテナの長さ	

v 連続的に動く波源の速度
 B 一回の走査時間 = l/v

1. 受信点の界の周波数スペクトル

電流源 J と遠方界 E との関係は、非同次のマクスウェルの方程式から導かれるが、 E の表示式に、 J の時間微分が入って来る。一方、所謂スカラーの非同次の波動方程式が従来からあって、これによると、遠方界 ψ は、微分されない源関数 g を用いて表示しうる。

後述の様に、ガウス形パルス変調波の様に、微分可能な場合は勿論、矩形状パルス変調波の場合にも、定数を除いて、 g で求めた周波数スペクトルを単に $j\omega$ 倍すれば J で求めたスペクトルとなる。

従って、実際の計算は、簡単である g を用いて行うことにする。

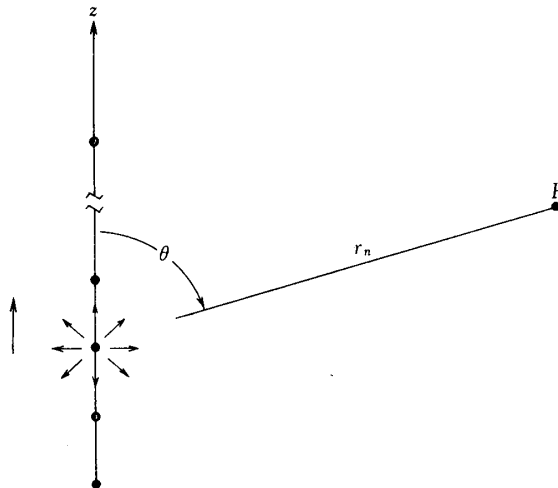


図1 ドップラ・アレイ・アンテナ

1.1 スカラー方程式によるもの [3]

$g(x, y, z, t)$ を波源の関数とする方程式

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g(x, y, z, t) \quad (1)$$

の解は、

$$\psi(x', y', z', t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} g(x, y, z, t - \frac{r}{c}) dv \quad (2)$$

ただし、

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \quad (3)$$

その周波数スペクトルは, (2)をFourier 変換すればよい.

即ち

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

波源が体積がなく, 点として離散的に存在する場合には, (4)は次の様になる.

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_n} g_n(t - \frac{r_n}{c}) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

1.2 マクスウェルの方程式によるもの [4]

電流 \mathbf{J} , 磁流 \mathbf{J}_m , 電荷 ρ がある場合の電界に関する方程式は,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{J}_m + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \quad (6)$$

となる. 電流のみ存在するとし, かつ, スカラーで記すと,

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial J}{\partial t} \quad (7)$$

となる.

$$\mu \frac{\partial J}{\partial t} = -g \quad (8)$$

とおけば, (7)は, (1)と同形である. 従って, (2)に相当する解は,

$$\phi(x', y', z', t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \left[-\mu \frac{\partial J(\tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=t-\frac{r}{c}} dv \quad (9)$$

波源が点として離散的に存在する場合のスペクトルは,

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_n} \left[-\mu \frac{\partial J_n(\tau_n)}{\partial \tau_n} \right]_{\tau_n=t-\frac{r_n}{c}} e^{-j\omega t} dt \quad (10)$$

2. パルス変調波について

図2のガウス状パルスの様に始めと終りとが定まらないものについては, reference 時刻 t_{rn} (例えば, パルスの中央の時刻) を定めて, 次の様に示す.

$$g_n(t) = F_n(t - t_{rn}) e^{j\omega_0 t} \quad (11)$$

又, 図3の矩形状パルスの様に, 始めと終りの時刻が, $t_n, t_n + a$ の様に定まるものにつ

いては、次の様に記す.

$$g_n(t) = F_n(t - t_n, t - t_n - a) e^{j\omega_0 t} \quad (12)$$

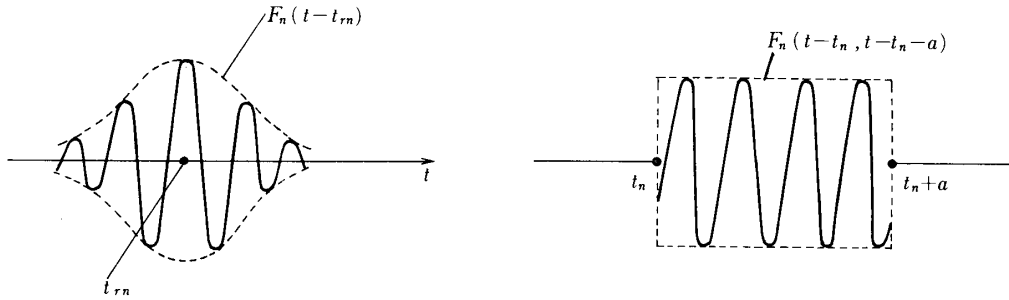


図2 ガウス形パルス変調波の種類(t_{rn} は reference 時刻)

その記法を用いると、上記2種類に関して、 $g_n(t - \frac{r_n}{c})$ は夫々次の様になる.

$$g_n(t - \frac{r_n}{c}) = F_n(t - \frac{r_n}{c} - t_{rn}) e^{j\omega_0(t - \frac{r_n}{c})} \quad (13)$$

$$g_n(t - \frac{r_n}{c}) = F_n(t - \frac{r_n}{c} - t_n, t - \frac{r_n}{c} - t_n - a) e^{j\omega_0(t - \frac{r_n}{c})} \quad (14)$$

3. 矩形状パルス変調波によるスペクトル

g が矩形状パルス変調波である場合は、最も基本的である故、初めに記すことにする.

波源は $e^{j\omega_0 t}$ で振動を続けながら、各点 z_0, z_1, \dots, z_{m-1} と移る. その際、各点で b 秒とどまるが、その中の a 秒だけ輻射する. $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$ は、各点での始めの時刻である. 隣接点の距離は ζ とする. 又、 $v = \zeta/b$ とする. 点の数は m 個である(図4参照).

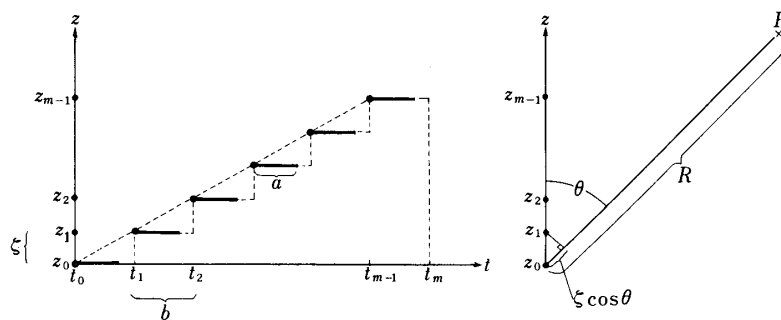


図4 輻射点と輻射時間の関係(a は輻射時間, b は切替時間)

(14)を(5)に代入すればよい。ただし、 F の代りに、矩形状パルスを表すものとして、 P を用いる。又、(5)の分母にある r_n は、 z_n 点により大きさが変わるが、源と受信点との距離が極めて大であるとして、すべて R に等しいとおく。(ただし、実際、 ζ/R が v/c と同じオーダーとなる場合は、 r_n の相違を考慮せねばならない。それは困難ではないが、複雑である。)

$$\begin{aligned}\Psi(\omega) &= \frac{1}{4\pi R} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} P\left(t - \frac{r_n}{c} - t_n, t - \frac{r_n}{c} - t_n - a\right) e^{j\omega_0\left(t - \frac{r_n}{c}\right)} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{\frac{r_n}{c} + t_n}^{\frac{r_n}{c} + t_n + a} e^{j\omega_0\left(t - \frac{r_n}{c}\right)} e^{-j\omega t} dt\end{aligned}\quad (15)$$

(15)の積分以降を I_n と記す事とし、積分変数を次の様に変換する。

$$t - \frac{r_n}{c} = \tau_n \quad (16)$$

$$\therefore dt = d\tau_n$$

その時

$$I_n = \int_{t_n}^{t_n + a} e^{j\omega_0 \tau_n} e^{-j\omega\left(\tau_n + \frac{r_n}{c}\right)} d\tau_n = e^{-j\omega \frac{R - n\zeta \cos \theta}{c}} \int_{t_n}^{t_n + a} e^{-j\Delta\omega \cdot \tau_n} d\tau_n \quad (17)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}\Delta\omega &= \omega - \omega_0 \\ r_n &= R - n\zeta \cos \theta\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を用いた。

結果は、

$$I_n = e^{-j\frac{\omega}{c}R} e^{-j\frac{\Delta\omega \cdot a}{2}} \frac{\sin \frac{\Delta\omega \cdot a}{2}}{\frac{\Delta\omega \cdot a}{2}} a \cdot e^{jn\Omega b} \quad (19)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}\Omega &= \omega_0 - \omega \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right) \\ v &= \frac{\zeta}{b}\end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(19)を用いると、(15)より、

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{4\pi R} e^{-j\left[\frac{\omega}{c}R + \frac{\Delta\omega \cdot a}{2} - \frac{(m-1)\Omega b}{2}\right]} a \frac{\sin \frac{\Delta\omega \cdot a}{2}}{\frac{\Delta\omega \cdot a}{2}} \frac{\sin \frac{m\Omega b}{2}}{\sin \frac{\Omega b}{2}} \quad (21)$$

ここで,

$$\sum_{n=0}^{m-1} e^{jn\Omega b} = e^{j\frac{(m-1)\Omega b}{2}} \frac{\sin \frac{m\Omega b}{2}}{\sin \frac{\Omega b}{2}} \quad (22)$$

を用いた.

(21) は, 一度走査した時の周波数スペクトルである.

次に, この走査を, 周期 T で繰返す時のスペクトルを求める(図5参照).

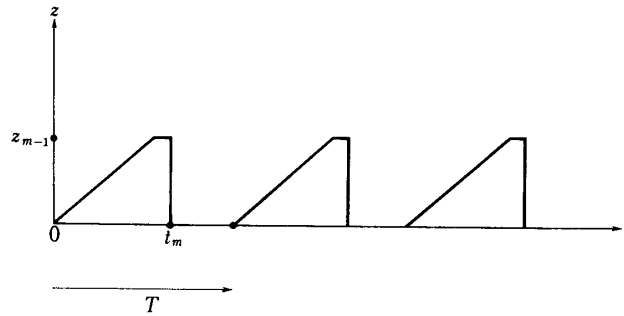


図5 周期 T の繰返し走査を示す

2回目の走査の時は, (12) に相当する $g_n(t)$ は,

$$g_n(t) = P(t - t_n - T, t - t_n - T - a) e^{j\omega_0 t} \quad (23)$$

となるので, 式(15)の積分の所に相当するものは,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} P\left(t - \frac{r_n}{c} - t_n - T, t - \frac{r_n}{c} - t_n - T - a\right) e^{j\omega_0\left(t - \frac{r_n}{c}\right)} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{\frac{r_n}{c} + t_n + T}^{\frac{r_n}{c} + t_n + T + a} e^{j\omega_0\left(t - \frac{r_n}{c}\right)} e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (24)$$

$$t - \frac{r_n}{c} - T = x_n \quad (25)$$

の様に変換すると, (24) は次の様になる.

$$e^{-j\Delta\omega \cdot T} e^{-j\omega \frac{R - n\zeta \cos \theta}{c}} \int_{t_n}^{t_n + a} e^{-j\Delta\omega \cdot x_n} dx_n \quad (26)$$

(17) と (26) とを比較すると, 2回目の走査の時は, 1回目のものに, $e^{-j\Delta\omega \cdot T}$ を乗じたもの

となる。一般に n 回目の時は、一回目のものに $e^{-j(n-1)\Delta\omega \cdot T}$ を乗じた形となる。

従って、これを無限回繰返す時のスペクトルは、無限等比級数

$$1 + e^{-j\Delta\omega \cdot T} + e^{-j2\Delta\omega \cdot T} + \dots \quad (27)$$

を、1 回だけのスペクトル(21) に乗ずればよい。

(27) の級数は、

$$\frac{-j}{2} e^{j\frac{\Delta\omega \cdot T}{2}} \frac{1}{\sin \frac{\Delta\omega \cdot T}{2}} \quad (28)$$

である[6]。

(21) と(28) とより、無限回繰返す時のスペクトルの主要部分は、

$$\frac{\sin \frac{\Delta\omega \cdot a}{2}}{\frac{\Delta\omega \cdot a}{2}} \frac{\sin \frac{\Omega b}{2}}{\sin \frac{\Omega b}{2}} \frac{1}{\sin \frac{\Delta\omega \cdot T}{2}} \quad (29)$$

ここに、 $\Delta\omega$ と Ω とは、(18)、(20) にある。

(29) は、3 個の典型的なパターンの掛け合せである。

a) $\sin \frac{\Delta\omega \cdot a}{2} / \frac{\Delta\omega \cdot a}{2}$ は、時間巾 a の矩形パルス変調波(被変調波は ω_0) の 1 個だけの周波数スペクトルの主要部分である。中心は $\omega = \omega_0$ であり、そこは最大値 1 をとる。零点は次式より定まる。

$$\frac{(\omega - \omega_0)a}{2} = \pm n\pi \quad (n \text{ は } 0 \text{ を除く正整数})$$

これより、

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{2\pi}{a} n \quad (30)$$

中心の部分を除くと、零点は、 $2\pi/a$ の角周波数間隔で出る。図 6(a) にその様子を示す。

b) $\sin \frac{\Omega b}{2} / \sin \frac{\Omega b}{2}$ は、 Ω を角周波数 ω と読み変えれば、時間間隔 b で続く、等振幅巾の m 個のパルス列の周波数スペクトルの主要部分である。中心は、

$$\Omega = 0$$

$$\text{即ち} \quad \omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \quad (31)$$

であり、中心に隣接の零点は次式で与えられる。

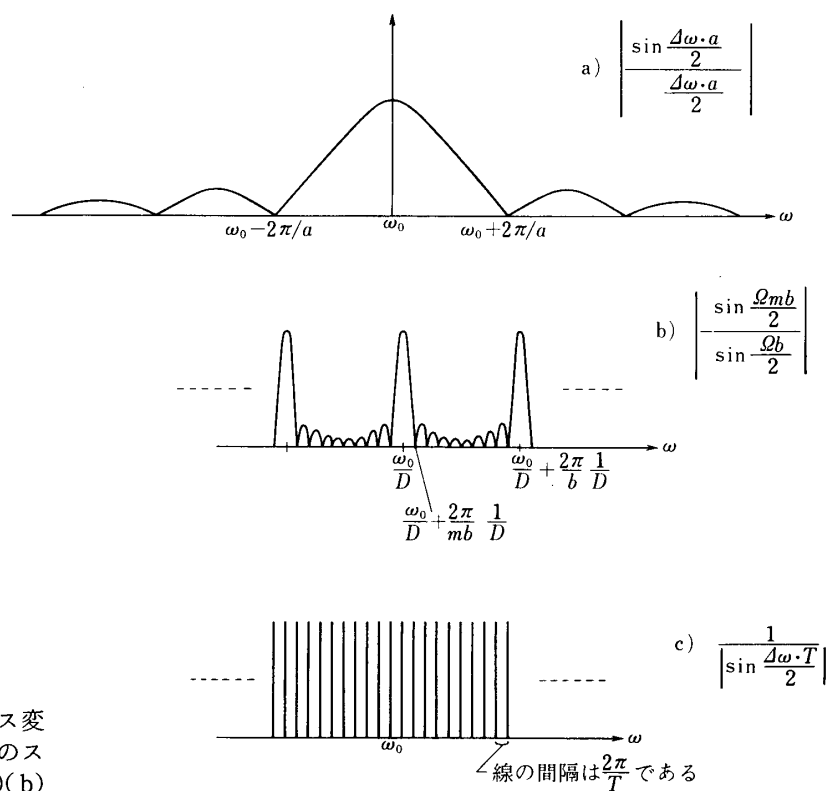


図 6 矩形パルス変調による界のスペクトル。(a)(b)(c) の積となる。

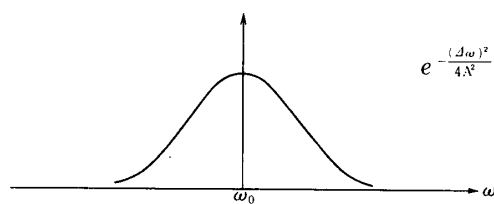


図 7 ガウス形パルス変調による界のスペクトルの第 1 乗数。

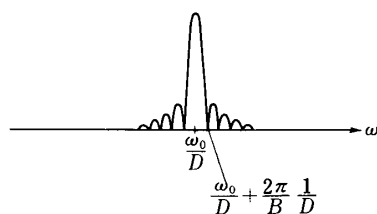


図 9 連続形ドップラ・アンテナによる界のスペクトルの第 1 乗数。

図 6 の a), b) に関連して, $a \doteq bD$ として描かれてある。又, 図 6 の b), c) に関連して, $mb \doteq T$ として描かれてある。図 7 は, 包絡線であるガウス波形の e^{-1} に落ちる時間巾が a である時のスペクトルであり, 横軸は, 図 6 と関連がある。更に, 図 9 に関して, $B \doteq mb$ として描かれてある。

$$\frac{\Omega mb}{2} = \mp \pi$$

これより,

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \pm \frac{2\pi}{mb} \frac{1}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \quad (32)$$

又, 最大の点は, 無限個あるが, 次式で与えられる.

$$\frac{\Omega b}{2} = \mp n\pi \quad (n \text{ は } 0 \text{ を含む正整数})$$

$$\therefore \omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \pm \frac{2\pi n}{b} \frac{1}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \quad (33)$$

その様子を図 6(b) に示す. 図で, $D = 1 - \frac{v \cos \theta}{c}$ である.

c) $1/\sin \frac{\Delta\omega \cdot T}{2}$: 最大点は,

$$\frac{(\omega - \omega_0)T}{2} = \pm n\pi \quad (n \text{ は } 0 \text{ を含む正整数})$$

$$\text{これより, } \omega = \omega_0 \pm \frac{2\pi}{T} n \quad (34)$$

中心は ω_0 で, 間隔は $2\pi/T$ である. 図 6(c) にその様子を示す.

図 a), b) に関連して, $a \doteq bD$ として描かれてある. 又, 図 b), c) に関連して, $mb \doteq T$ として描かれてある. 例えば, T がその 2 倍になれば, 図 c) の線の間隔は, $1/2$ にせばまる.

4. ガウス形パルス変調波によるスペクトル

ここでは, g がガウス形パルス変調波である場合を取扱う. ガウス波は, Fourier 変換を含めて, 積分が容易であり, 積分後の形も単純なために, 通常, パルスの理論計算には先づ用いられるものである.

波形は, (11) を用いるが, reference 時刻 t_{r_n} を, 矩形波の場合の輻射時間に相当するものの中点に取る.

即ち,

$$t_{r_n} = t_n + \frac{a}{2} \quad (35)$$

矩形波の場合は, その波の形から, 判然とした輻射時間が考えられるが, ガウス波の場合は, 判然とした輻射時間を定める事も出来るし, $-\infty$ から ∞ まで, ガウス波の形のままとする事も出来る. 本稿では後者に従う.

波の形は,

$$g_n(t) = e^{-A^2\left(t-t_n-\frac{a}{2}\right)^2} e^{j\omega_0 t} \quad (36)$$

$$\therefore g_n\left(t-\frac{r_n}{c}\right) = e^{-A^2\left(t-\frac{r_n}{c}-t_n-\frac{a}{2}\right)^2} e^{j\omega_0\left(t-\frac{r_n}{c}\right)} \quad (37)$$

(37) を (5) に代入すれば、スペクトルが求まる。即ち、

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{4\pi R} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A^2\left(t-\frac{r_n}{c}-t_n-\frac{a}{2}\right)^2} e^{-j\omega_0\left(t-\frac{r_n}{c}\right)} e^{-j\omega t} dt \quad (38)$$

ここで次の様に変数変換を行う。

$$t - \frac{r_n}{c} - t_n - \frac{a}{2} = \eta_n \quad (39)$$

(38) の積分以降を J_n とおくと、

$$\begin{aligned} J_n &= e^{-j\Delta\omega\left(t_n+\frac{a}{2}\right)} e^{-j\omega\frac{r_n}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A^2\eta_n^2} e^{-j\Delta\omega\eta_n} d\eta_n \\ &= e^{-j\omega\frac{R}{c}} e^{-j\frac{\Delta\omega\cdot a}{2}} e^{jn\Omega b\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{(\Delta\omega)^2}{4A^2}}}{A} \end{aligned} \quad (40)$$

ここに、 $\Delta\omega$, Ω は、(18), (20) と同じである。

従って、(38), (40) より、

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{4\pi R} e^{-j\left[\frac{\omega}{c}R + \frac{\Delta\omega\cdot a}{2} - \frac{(m-1)\Omega b}{2}\right]} \frac{\sqrt{\pi}}{A} e^{-\frac{(\Delta\omega)^2}{4A^2}} \frac{\sin\frac{m\Omega b}{2}}{\sin\frac{\Omega b}{2}} \quad (41)$$

(41) は、一度走査した時のスペクトルである。この走査を周期 T で繰返す時は、矩形パルス変調波の場合と同様に取扱う事が出来、(28) の関数を(41) に乗じたものとなる。

その結果、スペクトルの主要部分は、

$$e^{-\frac{(\Delta\omega)^2}{4A^2}} \frac{\sin\frac{m\Omega b}{2}}{\sin\frac{\Omega b}{2}} \frac{1}{\sin\frac{\Delta\omega\cdot T}{2}} \quad (42)$$

である。前節の(29) と比べると、第1乗数のみ異り、第2, 3乗数は全く等しい。

第1乗数は、ガウス状パルス変調波(被変調波は ω_0) 1個だけの周波数スペクトルの主要部分である。図7にその様子を示す。図7は、ガウス波の $1/e$ に落ちる時間巾が a であるとして、図6と関連づけて描かれてある。図6(a)の中心ローブと図7の中心部分とは、ほぼ同じ様な形である。第2, 3乗数は、図6の(b), (c) をそのまま使えばよろしい。

5. マクスウエルの方程式による解

1節で触れた様に、前3, 4節ではスカラー波動方程式の源関数 g が与えられた時のスペクトルを求めたが、本節では、マクスウエルの方程式の J が与えられた時の遠方界 E のスペクトルとの関連について述べる。

Fourier 変換の定理に、「関数 $g(t)$ の Fourier 変換が $F(\omega)$ であると、 dg/dt の Fourier 変換が存在する時、それを $F_t(\omega)$ とすれば、 $F_t(\omega) = j\omega F(\omega)$ である。」[5] というのがあるがこの問題の場合、やや複雑ではあるが、この定理をそのまま適用しうる事を示す。

マクスウエルの方程式によるスペクトルは、すでに(10)で与えられている。近似を用いると、

$$\Phi(\omega) = -\frac{\mu}{4\pi R} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial J_n}{\partial \tau_n} \right]_{\tau_n=t-\frac{r_n}{c}} e^{-j\omega t} dt \quad (43)$$

一方、

$$\frac{\partial J_n}{\partial t} = \frac{\partial J_n}{\partial \tau_n} \frac{\partial \tau_n}{\partial t} = \frac{\partial J_n}{\partial \tau_n} \quad (44)$$

積分の部分は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial J_n(\tau_n)}{\partial t} e^{-j\omega t} dt \quad (45)$$

となるので、 $J_n(\tau_n)$ の Fourier 変換が求まっていれば、 $\partial J_n(\tau_n)/\partial t$ の Fourier 変換が存在すれば、後者は前者の $j\omega$ 倍である。 $j\omega$ は n に無関係である故、和を取ってもその関係はそのまま残るので、上記の定理は、1回目の走査の場合に適用出来る事となる。又、2回目以降の場合にも同様にして、適用しうる事が分るので、周期 T で繰返した場合の全体のスペクトルにも、この定理は適用しうる。

4節で述べたガウス形パルス変調波の場合、その波形の関数は穏やかであり、微分可能で、微分したものの積分も可能である故、この定理を適用しうる事は明瞭である。

3節で述べた矩形状パルス変調波の場合は、微分すると、パルスの始めと終りに、 δ 関数が現われる。併し、この場合も、上記の定理の範囲内にある様である。事実、上記の変調波の関数を時間微分して計算すると、2つの項に別れるが、夫々の Fourier 変換の和は、微分しない前の Fourier 変換の $j\omega$ 倍になる。

結 言

以上、ドップラ・アレイ・アンテナによる遠方界の周波数スペクトルに関して、波源の関数と遠方界との関係、遠方界の周波数スペクトルの一般式をあげ、その応用として、波源が離散的に動いている場合で、その包絡線の時間的波形が、矩形状及びガウス形である時のスペクトルを計算した。

なお、付録では、波源が連続的に動きながら輻射する場合を計算してあり、離散的な場合

と比較してある。又、付録で、離散的な場合で、その包絡線の波形が、一般の場合も取扱ってある。

これ等の結果を、直接、間接に用いる事により、ドップラ・アレイの設計を行う事が可能である。

1975年10月11日計測部

参 考 文 献

- [1] C.W. Earp, F.G. Overbury & P. Sothcott, "Doppler Scanning Guidance System, " "Electrical Communications, Vol. 46, No.4, pp. 253 ~ 270, 1971
- [2] L.L. Sanders & V.J. Fritch, "Instrument Landing Systems", IEEE trans. Communications, Vol. com-21, No.5, pp. 435 ~ 454, May 1973
- [3] J.A. Stratton, "Electromagnetic Theory," p. 424, McGraw-Hill, 1941
- [4] S. Silver, "Microwave Antenna Theory and Design," p. 72, McGraw-Hill, 1949
- [5] B.P. Lathi, "Signals, Systems and Communication," p. 143, John Wiley, 1965
- [6] R.E. Collin, "Field Theory of Guided Waves," p. 579, McGraw-Hill, 1960

付録A. 波源が連続的に移動する場合

図8のように、波源が $z=0$ から $z=l$ まで、連続的に移動しながら輻射し、これを周期 T で繰返す場合のスペクトルを求める。波源の関数は次の通り。

$$g_1(z, t) = P(z-0, z-l) \delta(z-vt) e^{j\omega_0 t} \quad (\text{A-1})$$

上式の P は、 $z=0$ で始まり、 $z=l$ で終る矩形関数を示す。

点 P における界は、本文(2)を用いて、

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} g_1(z, t - \frac{r}{c}) dz \\ &\div \frac{1}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} P(z-0, z-l) \delta\left[z-v\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] e^{j\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)} dz \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

ここで、

$$z-v\left(t - \frac{r}{c}\right) = 0$$

を用いるが、これは、

$$t - \frac{r}{c} = \frac{z}{v} \quad (\text{A-3})$$

であり、更に、

$$r = R - z \cos \theta \quad (\text{A-4})$$

を用いると,

$$z = \frac{v}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (\text{A-5})$$

ただし,

$$D = 1 - \frac{v \cos \theta}{c} \quad (\text{A-6})$$

(A-3, 5)を用いると, (A-2)は,

$$\psi_1(t) = \frac{1}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega_0 R}{Dc}} P \left[t - \frac{R}{c}, t - \left(\frac{R}{c} + BD \right) \right] e^{j\frac{\omega_0}{D}t} \quad (\text{A-7})$$

ただし,

$$B = \frac{l}{v} \quad (\text{A-8})$$

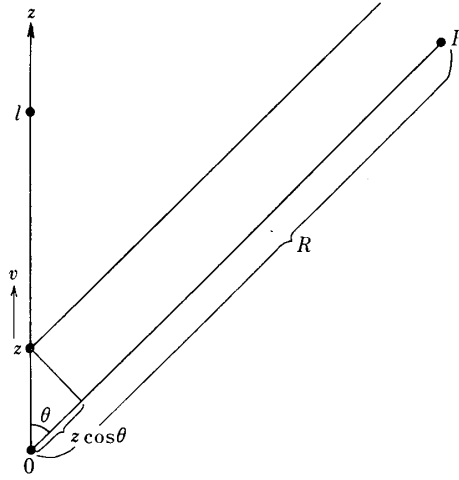


図8 連続形ドップラ・アンテナ

(A-7)の周波数スペクトルは,

$$\begin{aligned} \Psi_1(\omega) &= \frac{1}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega_0 R}{Dc}} \int_{-\infty}^{\infty} P \left[t - \frac{R}{c}, t - \left(\frac{R}{c} + BD \right) \right] e^{j\frac{\omega_0}{D}t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega_0 R}{Dc}} \int_{\frac{R}{c}}^{\frac{R}{c} + BD} e^{j\frac{\omega_0}{D}t} dt \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

$$= \frac{1}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega}{c}R} e^{j\frac{\Omega B}{2}} \frac{\sin \frac{\Omega B}{2}}{\frac{\Omega B}{2}} BD \quad (\text{A-10})$$

ここに、 Ω は、本文(20)と同じ。

次に、これを周期 T で繰返した時の2回目の様子を調べるに、波源の関数は、

$$g_2(z, t) = P(z-0, z-l) \delta[z-v(t-T)] e^{j\omega_0 t} \quad (\text{A-11})$$

となる。点 P における界は、

$$\psi_2(t) \doteq \frac{1}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} P(z-0, z-l) \delta\left[z-v\left(t-T-\frac{r}{c}\right)\right] e^{j\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)} dz \quad (\text{A-12})$$

となるが、今度は、 $z-v\left(t-T-\frac{r}{c}\right)=0$

の所のみ残る。これより、

$$t-\frac{r}{c} = \frac{z}{v} + T \quad (\text{A-13})$$

$$z = \frac{v}{D} \left(t-T-\frac{R}{c}\right) \quad (\text{A-14})$$

となる。これを用いると、(A-12)は、

$$\psi_2(t) = \frac{1}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega_0}{D}\frac{R}{c} + j\omega_0 T - j\frac{\omega_0}{D}T} P\left[t-\left(\frac{R}{c}+T\right), t-\left(\frac{R}{c}+\frac{B}{D}+T\right)\right] e^{j\frac{\omega_0}{D}t} \quad (\text{A-15})$$

これより、スペクトルを求めると、

$$\begin{aligned} \Psi_2(\omega) &= \frac{1}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega_0}{D}\frac{R}{c} + j\omega_0 T - j\frac{\omega_0}{D}T} \int_{\frac{R}{c}+T}^{\frac{R}{c}+\frac{B}{D}+T} e^{j\frac{\omega_0}{D}t} e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\Delta\omega \cdot T} \frac{1}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega_0}{D}\frac{R}{c}} \int_{\frac{R}{c}}^{\frac{R}{c}+\frac{B}{D}} e^{j\frac{\Omega}{D}t} dt \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

ただし、 $\Delta\omega$ は、本文(18)と同じ。

(A-16)と(A-9)とを比べると、(A-16)は、乗数 $e^{-j\Delta\omega \cdot T}$ だけ多い。従って、これを繰返す時は、次の(A-17)を、1回だけのスペクトル(A-10)に乗ずればよい。

$$\begin{aligned} &1 + e^{-j\Delta\omega \cdot T} + e^{-j2\Delta\omega \cdot T} + \dots \\ &= \frac{e^{j\frac{\Delta\omega \cdot T}{2}}}{2j \sin \frac{\Delta\omega \cdot T}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

(A-17) は、本文(27), (28) と全く同じ.

故に、全体のスペクトルは、

$$\frac{1}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega}{c}R} e^{j\frac{\Omega B}{2}} \frac{\sin \frac{\Omega B}{2}}{\frac{\Omega B}{2}} BD \frac{e^{j\frac{\Delta\omega \cdot T}{2}}}{2j \sin \frac{\Delta\omega \cdot T}{2}} \quad (\text{A-18})$$

スペクトルの主要部分は、

$$\frac{\sin \frac{\Omega B}{2}}{\frac{\Omega B}{2}} \frac{1}{\sin \frac{\Delta\omega \cdot T}{2}} \quad (\text{A-19})$$

である.

(A-19) の第1乗数は、本文(29) の第1乗数と同じ形であるが、入っている記号が異っている. 第1乗数に関して、最大値及び零点は次の通り.

$$\Omega = 0 \quad (\text{A-20})$$

$$\frac{\Omega B}{2} = \mp n\pi \quad (\text{A-21})$$

n は零を除いた正整数.

(A-20) より、

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \quad (\text{A-22})$$

(A-21) より、

$$\omega = \frac{\omega_0 \pm \frac{2\pi}{B}n}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \quad (\text{A-23})$$

(A-19) の第2乗数は、本文(29) の第3乗数と全く等しい.

第1乗数のスペクトルを図9に示す. この連続輻射アンテナの場合、1回走査の時間 B は、本文の離散的アレイの mb に相当するので、図6との関連で、 $B \doteq mb$ として描かれている. 又、第2乗数は、図6の(c)と全く同じであるので、それを使用すればよい.

付録B. 離散的アレイと連続アンテナとのスペクトルの相違

離散的アレイで、連続アンテナの図9に相当するものは、矩形状パルスの場合 図6の a) \times b), ガウス形パルスの場合、図7 \times 図6の b) である. 残る乗数である図6の c) はすべての場合に、全く共通である. 両アンテナの1回の走査時間を等しいと仮定すると、 $B = mb$ である. その時、 ω_0/D の近くの主スペクトルの僅かな相違、及びスペクトルの不用部分の僅

かな相違を除いては、大体の傾向は殆ど一致している。

付録C. 一般の波形のパルス変調波によるスペクトル

本文3, 4節において、源関数 g が夫々矩形状及びガウス形パルス変調波である場合の界のスペクトルを求めた。その際、その主要部分は、3乗数の積の形となる事を見たが、第1乗数は夫々矩形状及びガウス形変調波1個分のスペクトルであった。ここでは、一般の波形のパルス変調波のスペクトルを求めるが、当然の事ながら、第1乗数は、そのパルス変調波1個分のスペクトルとなり、第2, 3乗数は、本文3, 4節のものと全く一致する。

一般の場合の $g_n(t - \frac{r_n}{c})$ は、既に本文(13)にある。即ち、

$$g_n(t - \frac{r_n}{c}) = F(t - \frac{r_n}{c} - t_{r_n}) e^{j\omega_0(t - \frac{r_n}{c})} \quad (C-1)$$

ただし、 F_n はすべて等しいとして、 F とおいた。

(C-1) を本文(5) に代入すれば、

$$\Psi(\omega) \doteq \frac{1}{4\pi R} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} F(t - \frac{r_n}{c} - t_{r_n}) e^{j\omega_0(t - \frac{r_n}{c})} e^{-j\omega t} dt \quad (C-2)$$

$$t - \frac{r_n}{c} - t_{r_n} = \xi_n \quad (C-3)$$

の様に変数変換し、更に、

$$\begin{aligned} t_{r_n} &= t_n + d \\ &= nb + d \end{aligned} \quad (C-4)$$

とすると、(C-2) の積分以降は、

$$\begin{aligned} &e^{j\omega_0 t_{r_n}} e^{-j\omega(t_{r_n} + \frac{r_n}{c})} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_n) e^{-j\Delta\omega \cdot \xi_n} d\xi_n \\ &= e^{-j[\omega \frac{R}{c} + \Delta\omega \cdot d]} e^{j\Delta\omega \cdot nb} G(\Delta\omega) \end{aligned} \quad (C-5)$$

ただし、 $\Delta\omega$ は、本文(18) と同じ。又、 $G(\Delta\omega)$ は、積分の部分を示すが、パルス変調波1個分のフーリエ変換であり、従って、その波のスペクトルである。(C-5) を用いると、(C-2) は、

$$\Psi(\omega) \doteq \frac{1}{4\pi R} e^{-j[\omega \frac{R}{c} + \Delta\omega \cdot d]} \left[G(\Delta\omega) \right] \left[\sum_{n=0}^{m-1} e^{j\Delta\omega \cdot nb} \right] \quad (C-6)$$

(C-6) で、 $G(\Delta\omega)$ は、第1乗数に相当し、最後の和の所は、本文(22) と全く同じで、第2乗数に関連する。

上記の走査を周期 T で繰返す時は、本文 3, 4 節と全く同様で、それは、第 3 乗数に関連する部分となる。