

周波数測定によりスペクトルの包絡線中心を推定する方法

飯 口 真 一

Estimation of Envelope Center of Spectrum by Frequency Measurement

By

Shin-ichi IIGUCHI

Abstract: In this paper the method of estimating the envelope center of two pieces of line spectra by frequency measurement is studied. Namely it is shown that the amplitude ratio of two sinusoidal waves is obtained by measuring the frequency of the resultant wave and that the method of estimating the envelope center of the spectrum is considered by use of the amplitude ratio.

概 要

本論文には、周波数測定により、二本だけ存在する周波数線スペクトルの包絡線の中心周波数を推定する方法を考察してある。始めに、二つの正弦波の振幅比が、その合成波の周波数測定により求められる事を示し、次に、その振幅比より、スペクトル包絡線の中心を推定する方法について考察してある。

緒 言

航空電子装置等で、図1に示す様に孤立した包絡線に包まれた周波数線スペクトルがあっ

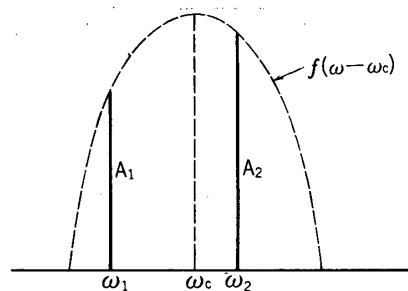


図1 線スペクトルとその包絡線

た場合、その包絡線の中心周波数を推定したい時がある [1]。ブラウン管表示型のスペクトル・アナライザ（周波数分析器）を利用出来る場合には、線スペクトルの密度を増して、その中心を求める事が出来ようが、スペクトル・アナライザは高価のわりには、数値的に正確な表示を期待し得ない。

本論文では、図1に示す様に、その関数形は既知である孤立した包絡線の中に、周波数の定まった二本だけの線スペクトルがある場合、周波数計（ゼロクロス・カウンター）を用いて、包絡線の中心を推定する方法について考察する。

本論文は二つに分れている。即ち、始めに、二つの正弦波の振巾比が、その合成波の周波数測定より求められる必要があるので、その振巾比とこの周波数との関係を考察する。この関係は、所謂、「唸り」の知識より求められるものであるが、知識の整理もかねて、やや詳細に記載する。尚、文献 [2] は、「唸り」について、かなりよく書かれている。

次に、二波の振巾比より、解析又は数値計算法で、スペクトル包絡線の中心周波数を推定する方法について考察する。

記号表

| | |
|--|---|
| $\left. \begin{matrix} \mathbf{A}_1(A_1, \theta_1) \\ \mathbf{A}_2(A_2, \theta_2) \end{matrix} \right\}$ | 夫々、角周波数 ω_1, ω_2 を持つ二つの正弦波を表す回転ベクトル |
| $\mathbf{A}_3(A_3, \theta_3)$ | $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ |
| Ω_s | $\omega_2 + \omega_1$ |
| Ω_d | $\omega_2 - \omega_1$ |
| B | $\frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1}$ |
| ω_i | $\partial\theta_3/\partial t$: 瞬時角周波数 |
| θ_d | $\theta_2 - \theta_1$ |
| ρ | A_2/A_1 |

1. 両正弦波の振巾と、その合成波の瞬時周波数との関係

図2の様に、2つの回転ベクトル $\mathbf{A}_1(A_1, \theta_1)$, $\mathbf{A}_2(A_2, \theta_2)$ を取る。その合成ベクトルを $\mathbf{A}_3(A_3, \theta_3)$ とすると、 \mathbf{A}_3 が y 軸及び $-y$ 軸を横切る時が、ゼロ・クロスの時である。 \mathbf{A}_3 の瞬時角速度が、合成波の瞬時角周波数であり、之が重要な量となる。始め、図の様に、 $\theta_2 - \theta_1$ が鋭角の時を取扱う。

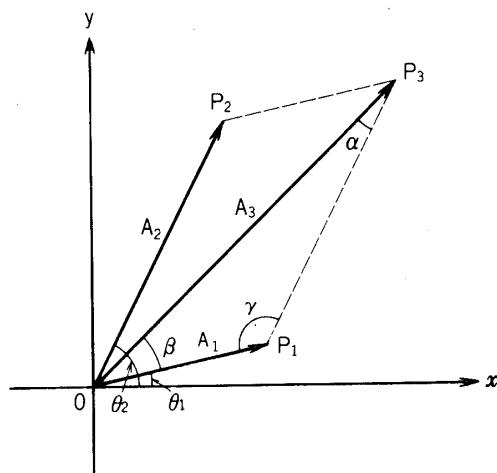
\mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 の尖端の点を p_1 , p_2 , p_3 とし、 $\Delta p_3 O p_1$ に着目して、 $\angle p_3$, $\angle O$, $\angle p_1$ を夫々 α , β , γ とすると、

$$\gamma = \pi - (\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

又、三角形の公式より、[3]

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \quad (2)$$

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (3)$$

図2 両ベクトル A_1 , A_2 の合成

(1) を (2) に代入すれば,

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \quad (4)$$

(4) を (3) に代入すれば,

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

$$\therefore \frac{\alpha - \beta}{2} = \arctan \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \quad (5)$$

(4) から (5) を引けば,

$$\beta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \arctan \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tan \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \quad (6)$$

従って,

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \theta_1 + \beta \\ &= \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} + \arctan \left(\frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \tan \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

\arctan は、多価関数であり、一般に、その値は、整数 $\times \pi$ だけの ambiguity がある。実用的には、主値 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \arctan \leq \frac{\pi}{2} \right)$ を求めると、都合よく合う場合が多いが、他の枝を取ら

ねばならぬ事もある。(図2の場合は、すべて主値で合う。)

θ_3 を示す式(7)は、 A_1 と A_2 、 θ_1 と θ_2 とを同時に交換しても、全く同一の式となる。従って、 A_1 と A_2 とが、図3の様な配置の場合にも、 θ_3 は(7)で表しうる。また、(7)を導出した過程では、 A_1 と A_2 との大小は問題ではないので、どちらが大きくても、 θ_3 は(7)で表しうる。

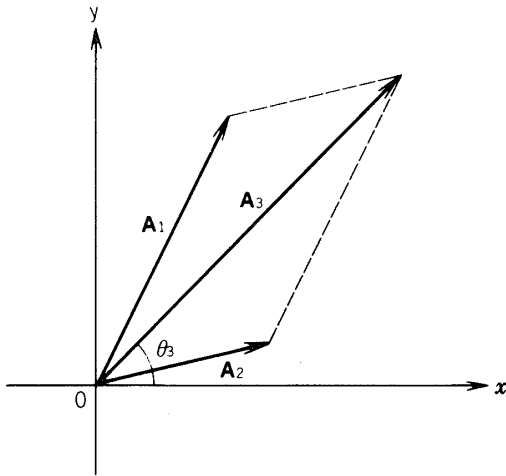


図3 図2と異なる配置

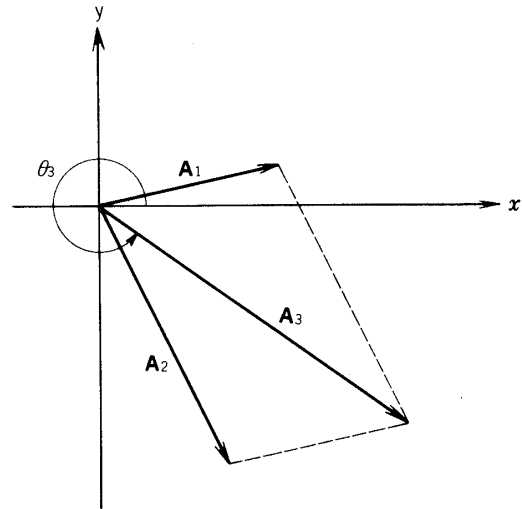


図4 $\theta_2 - \theta_1$ が鈍角の場合

更に、図4の様に、 $\theta_2 - \theta_1$ が鈍角の時には、

$$\theta_3 = \pi + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} + \arctan\left(\frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \tan \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \quad (8)$$

の様に、(7)に π を加えた形となる。(但し、 \arctan の多価性を考えれば、 π は重要ではない。尚、(8)で \arctan の主値を取れば、図4は合う)

又、 A_3 の振巾 A_3 は、図2, 3, 4にかかわらず、次の様になる。

$$\begin{aligned} A_3 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos r} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、

$$\theta_2 = \omega_2 t + \phi - 2m_2 \pi \quad (10)$$

$$\theta_1 = \omega_1 t - 2m_1 \pi \quad (11)$$

と考える. この記法は, 例えば θ_1 について, $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ であるとし, A_1 ベクトルが, $t=0$ から回転を始め, 一回目の時は, $\theta_1 = \omega_1 t$, 2回目の時は, $\theta_1 = \omega_1 t - 2\pi$, ……の様になる.

(10), (11) を (7) に代入すると,

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} + \frac{\phi}{2} - (m_2 + m_1)\pi \\ &\quad + \arctan \left\{ \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \tan \left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} + \frac{\phi}{2} - (m_2 - m_1)\pi \right] \right\} \\ &= \frac{\Omega_s t}{2} + \frac{\phi}{2} - (m_2 + m_1)\pi \\ &\quad + \arctan \left[B \tan \left(\frac{\Omega_d t}{2} + \frac{\phi}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \Omega_s &= \omega_2 + \omega_1 \\ \Omega_d &= \omega_2 - \omega_1 \\ B &= \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

と置いた.

(12) を t で微分したものを, 瞬時角周波数 ω_i とおくと,

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{\partial \theta_3}{\partial t} \\ &= \frac{\Omega_s}{2} + \frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2 + A_1^2 + 2A_2 A_1 \cos(\Omega_d t + \phi)} \frac{\Omega_d}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで,

$$\begin{aligned} &\Omega_d t + \phi \\ &= (\omega_2 - \omega_1)t + \phi \\ &= \theta_2 - \theta_1 + 2(m_2 + m_1)\pi \end{aligned} \quad (15)$$

なる故

$$\begin{aligned} &\cos(\Omega_d t + \phi) = \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ \therefore \omega_i &= \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} + \frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2 + A_1^2 + 2A_2 A_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

(8) の θ_3 を用いても, (16) と同一の結果がえられる.

(16) は, すぐ次に述べる一つの状態を除いては, A_2 と A_1 , θ_2 と θ_1 の如何に拘らず成立する式である. その状態とは, $A_2 = A_1$ で, 且つ, $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$ の場合である. この場合, 両ベクトル A_2 , A_1 が, 逆向きで, その和は零である.

尚, $A_2 = A_1$ の場合は常に,

$$\omega_i = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \quad (17)$$

である.

(16) より, 瞬時角周波数 ω_i は, $\theta_2 - \theta_1$ により色々変る. 次に, その様子を考察する.

Case 1. $\theta_2 - \theta_1 = 0$: 両ベクトルが重なった時で, ビート波の振巾が最大となるので見分けやすい. (図5)

(16) より,

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} + \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ &= \frac{\omega_2 A_2 + \omega_1 A_1}{A_2 + A_1} \end{aligned} \quad (18)$$

この時, (9) より,

$$A_3 = A_2 + A_1 \quad (19)$$

Case 2. $|\theta_2 - \theta_1| = \pi/2$: 両ベクトルが垂直になった時. (図6). (16) より,

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} + \frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2 + A_1^2} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ &= \frac{\omega_2 A_2^2 + \omega_1 A_1^2}{A_2^2 + A_1^2} \end{aligned} \quad (20)$$

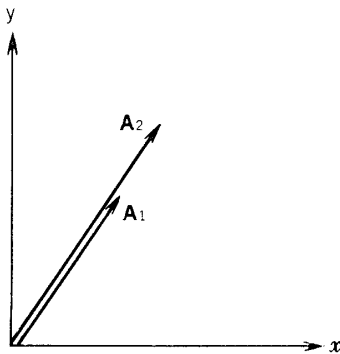


図5 $\theta_2 = \theta_1$ の場合

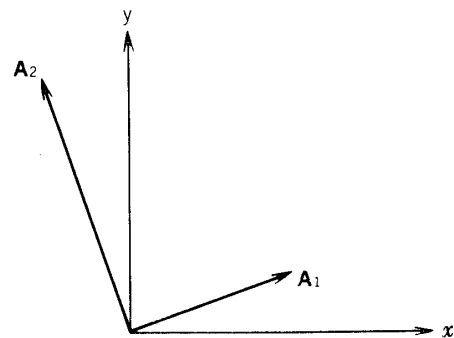


図6 $|\theta_2 - \theta_1| = \frac{\pi}{2}$ の場合

この時, (9) より,

$$A_3 = \sqrt{A_2^2 + A_1^2} \quad (21)$$

Case 3. $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$: 両ベクトルが逆向きの時 (図7). (16) より,

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} + \frac{A_2 + A_1}{A_2 - A_1} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ &= \frac{\omega_2 A_2 - \omega_1 A_1}{A_2 - A_1} \end{aligned} \quad (22)$$

この時, (9) より,

$$A_3 = |A_2 - A_1| \quad (23)$$

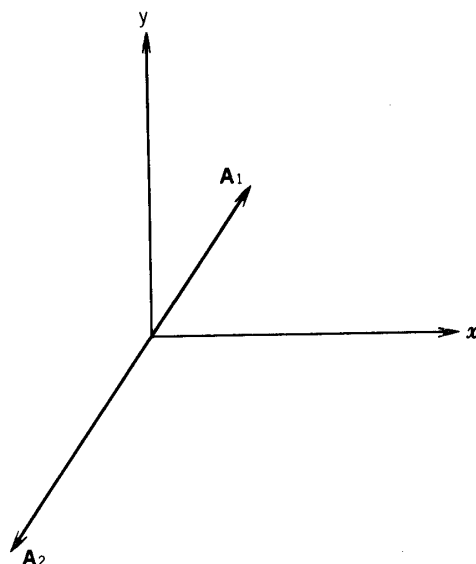


図7 $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$ の場合

2. 瞬時角周波数 ω_i の平均値と効果ある瞬時角周波数の測定

$$\theta_d = \theta_2 - \theta_1 \quad (24)$$

と, おく時, θ_d の 0 から 2π 迄の間の ω_i の平均値を求める. この間は, ビート角周波数 $|\omega_2 - \omega_1|$ の一週期である.

(16) を用いて,

$$\bar{\omega}_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_i d\theta_d$$

$$= \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \frac{A_2^2 - A_1^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_d}{A_2^2 + A_1^2 + 2A_2A_1 \cos\theta_d} \quad (25)$$

(25) の積分の所を I とおくと, $A_2 \neq A_1$ のとき, [4]

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{(A_2^2 - A_1^2)^2}}$$

故に,

$$A_2 > A_1 \text{ のとき, } I = \frac{2\pi}{A_2^2 - A_1^2} \quad (26)$$

$$A_2 < A_1 \text{ のとき, } I = \frac{-2\pi}{A_2^2 - A_1^2} \quad (27)$$

(26), (27) を (25) に代入すれば,

$$\bar{\omega}_i = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \begin{cases} \omega_2 & (A_2 > A_1 \text{ のとき}) \\ \omega_1 & (A_2 < A_1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (28)$$

(28) より明らかな様に, ビート周波数の一周期に亘る瞬時角周波数の平均値は, 振巾の大なる方の角周波数に一致し, 振巾比に無関係である. 従って, ビートの周期より大なる区間に亘る平均値は, 両正弦波の振巾比に関しては, 乏しい情報よりほか持っていない.

故に, 両正弦波の振巾比を知る為には, 極めて短時間に亘る瞬時周波数の平均値を用いねばならぬ. 特に, $\omega_2 + \omega_1 \gg |\omega_2 - \omega_1|$ の場合は, 合成波の振動に比べて, ビートの包絡線の振動が極めて緩かであるので, 前述の Case 1, 2, 3 の各々に近い状態が暫く続くものと考えて, 各々の場合の瞬時角周波数の式を用いればよいであろう.

特に, ビート波の振巾が最大になる Case 1 は見分けやすいので, 以後, その場合の式 (18) を用いて考察する.

3. 二本の線スペクトルの高さ比から, スペクトルの包絡線中心を推定する方法

図1の様に, 線スペクトルの角周波数 ω_2, ω_1 , その振巾比 $\rho = A_2/A_1$ が分っており, 且, スペクトルの包絡線の関数形 $f(\omega - \omega_c)$ が分っている時, 中心角周波数 ω_c を推定する方法について考察する.

$$A_2 = f(\omega_2 - \omega_c), \quad A_1 = f(\omega_1 - \omega_c) \quad (29)$$

である故

$$\frac{f(\omega_2 - \omega_c)}{f(\omega_1 - \omega_c)} = \rho \quad (30)$$

(30) は、未知数 ω_c に関する方程式である故、原理的には、 ω_c を求めうる訳であるが、解析的には、一般に不可能である。

不可能な場合は、Computer を用いねばならぬであろう。

ρ を与えて ω_c を求める事よりも、その逆の方が容易である故、夫々の ω_c に対して ρ を求め、之を広範囲に行い、数表又は曲線にして置けば、 ρ の或値に対する ω_c を即読出来る。

又、 f が、ガウス形関数の時は、解析的に (30) の解が求まり、簡単な形となる。 f の中心が丸みのある形のもの、ガウス形関数の定数を選ぶ事により形を似せて、近似的に、ガウス形関数の解を用いてもよいであろう。

§ 1. f がガウス形関数の場合 (図 8 参照)

$$f(\omega - \omega_c) = e^{-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{4c^2}} \quad (31)$$

(30) に相当する方程式は、

$$\frac{e^{-\frac{(\omega_2 - \omega_c)^2}{4c^2}}}{e^{-\frac{(\omega_1 - \omega_c)^2}{4c^2}}} = \rho \quad (32)$$

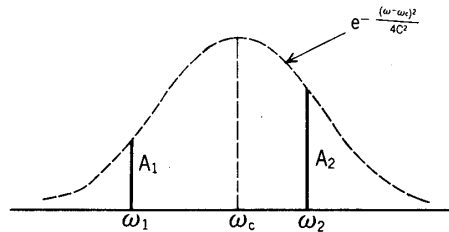


図 8 ガウス形の包絡線

(32) より、

$$e^{\frac{[2\omega_c - (\omega_2 + \omega_1)](\omega_2 - \omega_1)}{4c^2}} = \rho$$

上式の自然対数をとる事より、

$$\omega_c = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} + \frac{1}{2} \frac{4C^2}{\omega_2 - \omega_1} \ln \rho \quad (33)$$

(33) では、 C の大いさを与えてないが、中心 ω_c から、 $\omega_2 - \omega_1$ の所で、 e^{-1} に落ちるもの考えると、

$$2C = \omega_2 - \omega_1 \quad (34)$$

(34)を(33)に代入すれば,

$$\omega_c = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \ln \rho \quad (35)$$

§ 2. f が三角形の場合

図9の様な二等辺三角形を考える. 底辺の線分の両端の角周波数を図の様に, ω_u, ω_l とし, 底辺の長さの半分は, $\omega_2 - \omega_1$ の K 倍とする.

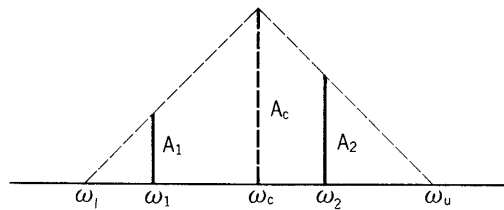


図9 二等辺三角形の包絡線

即ち,

$$\omega_u - \omega_c = \omega_c - \omega_l = K(\omega_2 - \omega_1) \quad (36)$$

又, 三角形の図形の性質から

$$\frac{A_2}{A_c} = \frac{\omega_u - \omega_2}{\omega_u - \omega_c}, \quad \frac{A_1}{A_c} = \frac{\omega_1 - \omega_l}{\omega_c - \omega_l} \quad (37)$$

なる故, (30) は, 次の様になる.

$$\frac{\omega_u - \omega_2}{\omega_1 - \omega_l} = \rho \quad (38)$$

(36) より,

$$\omega_u = \omega_c + K(\omega_2 - \omega_1), \quad \omega_l = \omega_c - K(\omega_2 - \omega_1) \quad (39)$$

(39) を (38) に代入すると,

$$\frac{\omega_c + (K-1)\omega_2 - K\omega_1}{-\omega_c + K\omega_2 + (1-K)\omega_1} = \rho$$

之より ω_c を求めると,

$$\omega_c = \frac{[\rho K + (K-1)]\omega_2 + [K + \rho(1-K)]\omega_1}{\rho + 1} \quad (40)$$

特に, $K=1$ のときは, 次の様になる.

$$\omega_c = \frac{\rho\omega_2 + \omega_1}{\rho + 1} \quad (41)$$

之は、式(18)にある $\theta_2 - \theta_1 = 0$ の場合の ω_i と全く一致する。即ち、 $\theta_2 - \theta_1 = 0$ の場合の瞬時角周波数 ω_i と、二等辺三角形であるスペクトラム包絡線の中心 ω_c とが同じになる。

結 言

以上、二つの正弦波の合成波の振巾が最大値を示すあたりを、短時間、周波数測定する事により、その二波の振巾比を知りうる事を示し、その振巾比より、線スペクトルの包絡線の中心周波数を推定する方法について考察した。

1976年3月31日 計測部

参 考 文 献

- [1] 飯口真一, "ドップラ・アレイ・アンテナによる遠方界の周波数スペクトル," 宇宙航空研究所報告, 11巻, 4号(A), pp. 839 - 856, 1975年11月
- [2] 坪井忠二, "振動論," 河出書房, pp. 32 - 39, 1944年2月(4版)
- [3] 藤田, 刈屋, 梶島, "数学公式," p. 126, 山海堂, 1953年6月(57版)
- [4] 森口, 宇田川, 一松, "数学公式 I," p. 247, 岩波書店, 1965年9月(5刷)