

# 連続的及び離散的円運動波源 より生ずる周波数変調波について

(Doppler VOR にも関連して)

飯 口 真 一

Frequency Modulated Waves Produced by Continuous and  
Discrete Circular Motion Wave Sources  
(Concerning also Doppler VOR)

By

Shin-ichi IIGUCHI

**Abstract:** In this paper the frequency spectra of frequency modulated waves (FM waves) at far observing point which are produced by continuous and discrete circular motion wave sources are analyzed and compared with the conventional FM wave modulated by single angular frequency which is same as the angular velocity of the motion wave source.

In the analysis of the spectrum by the discrete motion wave source, the sampling function is used as the switching envelope.

To simplify the problem, the observing point is assumed to be on the plane of the wave source circle.

The Doppler VOR system, the necessary frequency band width of FM wave and the sampling frequency are explained briefly.

## 概 要

本論文において、著者は、連続的及び離散的に円運動する波源により、遠方点に生ずる FM波のスペクトルを計算し、それが、波源の回転角速度を単一の変調角周波数とする普通の FM波とどの様に異なるかを示している。

離散的波源による場合の計算では、スイッチング包絡線波形としてサンプリング関数を用いてある。又、問題を簡単にする為、遠方点は、波源の存在する円と同一平面内にあると仮定してある。

尚、Doppler VORの簡単な解説と、「FM波の所要帯域巾」及び「サンプリング周波数」について説明を行ってある。

## 緒 言

連続的に円運動する波源により生ずる遠方界は一種の周波数調波 (FM波) となるが、回転角速度を単一の変調角周波数とする普通の意味の FM波 (以下、理想的な FM波と呼ぶ) と若干異っている。

又、スイッチングの包絡線波形にサンプリング関数を用いた離散的に円運動する波源による FM波は、帯域制限された理想的な FM波とかなり異っている。

離散的な円運動波源により生ずる FM波は、現実に、Doppler VOR の方位角情報を含んだ信号波として用いられており、又、Doppler VOR は、従来の VOR に代って採用される状況である。

この Doppler VOR の FM波について、連続的波源によるものの計算が離散的波源によるものの代りに時々用いられているが、余り精密でない近似計算が行われている [1]。

又、離散的波源による計算は、通常入手し得る雑誌には見受けられない。

本論文は、連続的及び離散的な波源による輻射界のスペクトルを精密に計算し、理想的な FM波との相違について論ずるものである。但し、問題を簡単にする為に、遠方点は、波源の存在する円周と同一平面内にあるものとする。

本論文の内容に簡単にふれると、序節では、単一周波数による理想的な FM波とそのスペクトルを掲げる。次に、第一部では、連続運動波源による FM波を計算し、第二部では、離散的運動波源による FM波を計算する。そこでは、波源のスイッチング包絡線波形にサンプリング関数を用いる。第三部では、Doppler VOR を簡単に解説し、又、「FM波の所要帯域巾」及び「サンプリング周波数」について論ずる。

### 記号表

$\omega_0$	搬送角周波数
$c$	光速度
$R, \Phi$	遠方観測点の2次元極座標
$p$	円運動波源の角速度
$h$	円運動の半径
$g(x, y, z; t)$	波源の関数
$\psi(x', y', z; t)$	遠方点の界
$\Psi(\omega)$	遠方点の界のスペクトル
$r$	波源と遠方点との距離
$\phi$	波源の流通極座標の角度成分
$m$	アンテナ素子の数
$b$	アンテナ素子への励振時刻間隔 (図3参照)
$\alpha$	相隣るアンテナ素子間の中心角
$q$	$\pi/b$
$\omega_d$	$\omega - \omega_0$

**序節 理想的な周波数変調波とそのスペクトル**

図1の様に、半径  $h$  の円周上を角速度  $p$  で連続的に運動する波源  $\text{Exp}(j\omega_0 t)$  により、遠方点  $P(R, \Phi)$  に生ずる周波数変調波（以下、FM波と略称する）は、変調角周波数  $p$  による理想的なFM波と厳密にはやや異なる。ここでは、後の比較の為に、理想的なFM波とそのスペクトルを掲げる事とする。（付録B参照）

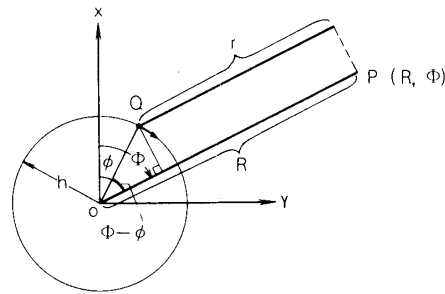


図1. 連続円運動波源よりの輻射

$$\begin{aligned}
 & e^{j\omega_0 \left[ t - \frac{R}{c} + \frac{h}{c} \cos \left( pt - \frac{pR}{c} - \Phi \right) \right]} \\
 &= e^{j\omega_0 \left( t - \frac{R}{c} \right)} \\
 & \times e^{j \frac{\omega_0 h}{c} \cos \left( pt - \frac{pR}{c} - \Phi \right)} \\
 &= e^{j\omega_0 \left( t - \frac{R}{c} \right)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega_0 h}{c} \right) e^{jk \left( pt - \frac{pR}{c} - \Phi \right)} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega_0 h}{c} \right) e^{j(\omega_0 + kp)t} e^{-j(\omega_0 + kp) \frac{R}{c}} e^{-jk\Phi} \tag{1}
 \end{aligned}$$

唯一つの変調角周波数  $p$  によるFM波でも、無限個の線スペクトルを有するが、特徴的なのは、 $J_k$  の argument が  $\omega_0 h/c$  の様に  $k$  によらない形となっている事である。

連続円運動波源によるFM波はその argument が  $(\omega_0 + kp)h/c$  の様に、 $k$  に depend する形となっており、この点だけが異っている。

**第一部 連続円運動する波源によるFM波**

**1. 基礎の方程式 [2]**

$g(x, y, z, t)$  を波源の関数とする方程式

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g(x, y, z, t) \tag{2}$$

の解は、

$$\psi(x', y', z', t) = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{1}{r} g(x, y, z, t - \frac{r}{c}) dv \tag{3}$$

但し、

$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} \tag{4}$$

## 2. 連続円運動波源によるFM波

半径  $h$  の円周上を角速度  $p$  で連続的に運動する波源  $Exp(j\omega_0 t)$  により, 遠方点  $P(R, \Phi)$  に生ずる FM 波を求める. (図1参照)

$\phi$  を, 図1の流通極座標の角度成分とすると, 波源の関数は,

$$g(t) = \delta(\phi - pt) e^{j\omega_0 t} \quad (5)$$

$$\therefore g\left(t - \frac{r}{c}\right) = \delta\left[\phi - p\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] e^{j\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)} \quad (6)$$

但し,

$$r = R - h \cos(\phi - \Phi) \quad (7)$$

基礎の方程式(3)は体積々分であるが, 今の場合, 波源は円周上のみにあるので, 線積分の形に直すと,

$$\psi(t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} g\left(t - \frac{r}{c}\right) ds \quad (8)$$

(6)を(8)に代入すれば,

$$\psi(t) \doteq \frac{h}{4\pi R} \int \delta\left[\phi - p\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] e^{j\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)} d\phi \quad (9)$$

時間領域の形(9)は, そのままでは, 逐次近似法を用いて, 複雑な計算によらねば, 精密な解は得られない. 併し, (9)にフーリエ変換を行って,  $\phi$  と  $t$  との積分順序を交換すると, 精密な解が級数の形で, 簡単に求まる.

即ち,

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &\doteq \frac{h}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left[\phi - p\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] e^{j\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{h}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left[\phi - p\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] e^{j\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \quad (10) \end{aligned}$$

$t$  による積分は,  $\phi = p\left(t - \frac{r}{c}\right)$  の所のみ残るので,  $t - r/c$  に  $\phi/p$ ,  $t$  に  $\phi/p + r/c$  を代入すれば宜しい.

即ち

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &\doteq \frac{h}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 \frac{\phi}{p}} e^{-j\omega\left(\frac{\phi}{p} + \frac{r}{c}\right)} d\phi \\ &= \frac{h}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega R}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0) \frac{\phi}{p}} e^{j\frac{\omega h}{c} \cos(\phi - \Phi)} d\phi \quad (11) \end{aligned}$$

こゝで、(7)を用いた。

(11) の積分以降を  $I$  とおくと、

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)} \frac{\phi}{p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega h}{c} \right) e^{jk(\phi-\Phi)} d\phi \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega h}{c} \right) e^{-jk\Phi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0-kp)} \frac{\phi}{p} d\phi \end{aligned} \quad (12)$$

(12) の積分部分に関して

$$\phi/p = \tau$$

とおくと、

$$d\phi = p d\tau$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0-kp)} \frac{\phi}{p} d\phi &= p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0-kp)} \tau d\tau \\ &= 2\pi p \delta(\omega-\omega_0-kp) \end{aligned} \quad (13)$$

(13) を導くのに、付録の式 (A-6) を用いた。

(13) を (12) に代入すると、

$$I = 2\pi p \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega h}{c} \right) e^{-jk\Phi} \delta(\omega-\omega_0-kp) \quad (14)$$

(14) を (11) に代入すると、

$$\Psi(\omega) \doteq \frac{ph}{2R} e^{-j\frac{\omega R}{c}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega h}{c} \right) e^{-jk\Phi} \delta(\omega-\omega_0-kp) \quad (15)$$

(15) は、周波数スペクトルであり、このまゝでも良いが、FM波で見慣れている形にする為には、フーリエ逆変換を行えば良い。即ち、

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{ph}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\omega R}{c}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega h}{c} \right) e^{-jk\Phi} \delta(\omega-\omega_0-kp) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{ph}{4\pi R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{(\omega_0+kp)R}{c}} j^k J_k \left( \frac{\omega_0+kp}{c} h \right) e^{-jk\Phi} e^{j(\omega_0+kp)t} \\ &= \frac{ph}{4\pi R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega_0+kp}{c} h \right) e^{j(\omega_0+kp)t} e^{-j(\omega_0+kp)\frac{R}{c}} e^{-jk\Phi} \end{aligned} \quad (16)$$

前掲の理想的な FM 波 (1) と (16) の  $\Sigma$  以降を見較べると異なる点は唯一つ、 $J_k$  の argument であり、(16) では、 $(\omega_0 + kp)h/c$  の様に  $k$  に depend する形となっている事である。

(16) の  $J_k$  の部分をテイラー展開すると、

$$J_k \left( \frac{\omega_0 + kp}{c} h \right) \doteq J_k \left( \frac{\omega_0 h}{c} \right) + \frac{kp h}{c} J_k' \left( \frac{\omega_0 h}{c} \right)$$

$ph$  は周辺速度であり、之を  $v$  とすれば、 $ph/c = v/c$  となるが、 $v/c$  が充分小である場合は、第 2 項以下は省略しうる。

## 第二部 離散的に円運動する波源による FM 波

### 1. 基礎の方程式

多くの点波源  $g_n(x_n, y_n, z_n, t)$  を波源の関数とする方程式

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \sum_n g_n(x_n, y_n, z_n, t) \quad (17)$$

の解は、

$$\psi(x', y', z', t) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \frac{1}{r_n} g_n(x_n, y_n, z_n, t - \frac{r_n}{c}) \quad (18)$$

但し、

$$r_n = \sqrt{(x' - x_n)^2 + (y' - y_n)^2 + (z' - z_n)^2} \quad (19)$$

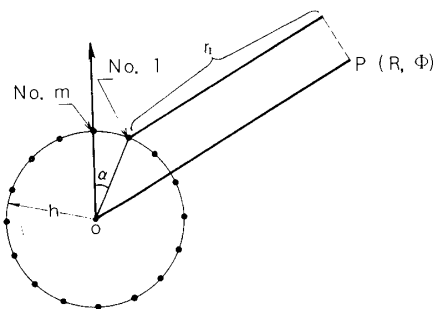


図 2. 離散的に運動する波源よりの輻射 (素子数  $m$  個)

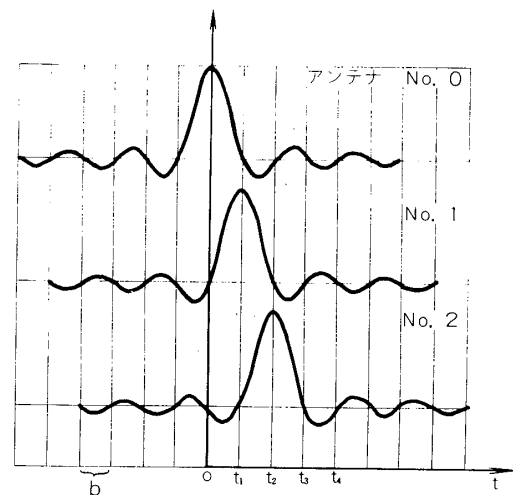


図 3. 波源の包絡線  $\frac{\text{sinc}(t-t_n)}{q(t-t_n)}$  の sequence ( $q = \pi/b$ ,  $t_n = nb$ )

## 2. 離散的円運動波源によるFM波

図2は半径  $h$  メートル, 相隣るアレイ素子間の中心角  $\alpha$  ラジアン, 総数  $m$  個のサーキュラ・ドップラ・アレイを示す. 図3は, 図2の各素子 #0, #1, #2……に時間々隔  $b$  秒で, 切替給電するパルス変調波の包絡線とその sequence を示すものである.

包絡線波形は  $\sin qt / t$  の関数形を使用するが, 之は, サンプリングの定理の類推からであり, 之を用いると, 第一部の連続円運動波源による遠方界 (FM波) に極めて近くなるからである. [3]

但し, 第一部と同様に問題を簡単にする為に, 遠方点  $P(R, \Phi)$  は, 円形アレイの面と同一面にあるものとする.

こゝで,

$$p = \alpha / b \quad (20)$$

とおくと,  $p$  は等価角速度である. 包絡線パルスの中心点は, 輻射点と輻射点との間では姿を見せないが, その中心が各輻射点に現われる時刻は, 角速度  $p$  で連続円運動する点波源が各輻射点に現われる時刻と一致している.

$$m\alpha = 2\pi \quad (21)$$

である故,

$$p = m\alpha / mb = 2\pi / mb \quad (22)$$

波源の関数  $g_n(t)$  は次の形を取るものとする.

$$g_n(t) = \frac{\sin q(t - t_n)}{q(t - t_n)} e^{j\omega_0 t} \quad (23)$$

こゝに,

$$q = \pi / b, \quad t_n = nb \quad (24)$$

である.

(23) は, 包絡線の中心が各輻射点に現われる時刻が,  $t = nb$  であり, 図3に示す sequence をみたしているものである.

図2を参照して,

$$r_n = R - h \cos(n\alpha - \Phi) \quad (25)$$

である.

(23) より,

$$g_n\left(t - \frac{r_n}{c}\right) = \frac{\sin q\left(t - \frac{r_n}{c} - nb\right)}{q\left(t - \frac{r_n}{c} - nb\right)} e^{j\omega_0\left(t - \frac{r_n}{c}\right)} \quad (26)$$

となる.

(26)を(18)に代入すれば,

$$\psi(t) \doteq \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin q(t - \frac{r_n}{c} - nb)}{q(t - \frac{r_n}{c} - nb)} e^{j\omega_0(t - \frac{r_n}{c})} \quad (27)$$

(27)をフーリエ変換すれば, 点Pでの周波数スペクトルが得られる. 即ち,

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt \\ &\doteq \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin q(t - \frac{r_n}{c} - nb)}{q(t - \frac{r_n}{c} - nb)} e^{j\omega_0(t - \frac{r_n}{c})} e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (28)$$

こゝで, 次の様に積分変数の変換を行う.

$$t - \frac{r_n}{c} - nb = \tau \quad (29)$$

(28)の積分以降をIとおくと,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin q\tau}{q\tau} e^{j\omega_0(\tau+nb)} e^{-j\omega(\tau+nb+\frac{r_n}{c})} d\tau \\ &= \frac{1}{q} e^{-j\frac{\omega}{c}R} e^{-j\omega_d nb} e^{j\frac{\omega}{c}h \cos(n\alpha - \Phi)} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin q\tau}{\tau} e^{-j\omega_d \tau} d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

こゝで,

$$\omega_d = \omega - \omega_0 \quad (31)$$

とおいた.

(30)の中で, 次の二つの公式 [4] [5]

$$e^{j\frac{\omega}{c}h \cos(n\alpha - \Phi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k\left(\frac{\omega h}{c}\right) e^{jk(n\alpha - \Phi)} \quad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin q\tau}{\tau} e^{-i\omega_d \tau} d\tau = \begin{cases} \pi & : |\omega_d| < q \\ \pi/2 & : |\omega_d| = q \\ 0 & : |\omega_d| > q \end{cases} \quad (33)$$



を用いると,

$$I = b e^{-j \frac{\omega}{c} R} e^{-j \omega d n b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega h}{c} \right) e^{j k (n \alpha - \Phi)} \\ \times P \left( \omega - \omega_0 + \frac{\pi}{b}, \omega - \omega_0 - \frac{\pi}{b} \right)$$

この  $I$  を用いると, (28) は,

$$\Psi(\omega) \doteq \frac{b}{4\pi R} e^{-j \frac{\omega}{c} R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega h}{c} \right) e^{-i k \Phi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0 - k p) n b} \\ \times P \left( \omega - \omega_0 + \frac{\pi}{b}, \omega - \omega_0 - \frac{\pi}{b} \right) \quad (34)$$

こゝで, (20) より求められる  $\alpha = pb$  を用いた. 又,

$$p \left( \omega - \omega_0 + \frac{\pi}{b}, \omega - \omega_0 - \frac{\pi}{b} \right) = \begin{cases} 1 : \omega_0 - \frac{\pi}{b} < \omega < \omega_0 + \frac{\pi}{b} \\ \frac{1}{2} : \omega = \omega_0 \pm \frac{\pi}{b} \\ 0 : \omega < \omega_0 - \frac{\pi}{b}, \omega > \omega_0 + \frac{\pi}{b} \end{cases} \quad (35)$$

である.

付録の式 (A-5) より,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0 - k p) n b} = \frac{\pi}{b} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - k p - N m p) \quad (36)$$

(36) を用いると,

$$\Psi(\omega) \doteq \frac{1}{4R} e^{-j \frac{\omega}{c} R} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k J_k \left( \frac{\omega h}{c} \right) e^{-j k \Phi} \\ \times \delta(\omega - \omega_0 - k p - N m p) P \left( \omega - \omega_0 + \frac{m}{2} p, \omega - \omega_0 - \frac{m}{2} p \right) \quad (37)$$

(36), (37) を導くのに, (22) より求められる  $\pi/b = mp/2$  を用いてある.

こゝで, フーリエ逆変換を行う. 即ち,

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (38)$$

(37) の中に,  $\delta$  関数と  $P$  の関数があるので,

$$\omega_0 - \frac{m}{2} p \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{m}{2} p \quad (39)$$

の角周波数帯域内で,

$$\omega = \omega_0 + (k + Nm) p \quad (40)$$

の所のみ残る.

こゝで,

$$k + Nm = \nu \quad (41)$$

とおくと, (39), (40) は次の様に変換される.

$$-\frac{m}{2} \leq \nu \leq \frac{m}{2} \quad (42)$$

の範囲内で,

$$\omega = \omega_0 + \nu p \quad (43)$$

の所のみ残る. 即ち,

$$\begin{aligned} \psi(t) \doteq & \frac{1}{8\pi R} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, e^{-j \frac{\omega_0 + \nu p}{c} R} j^{\nu - Nm} \\ & \times J_{\nu - Nm} \left( \frac{\omega_0 + \nu p}{c} h \right) e^{-j(\nu - Nm) \Phi} e^{j(\omega_0 + \nu p) t} \end{aligned} \quad (44)$$

こゝで,  $\sum'$  のプライムは,  $\nu = \pm \frac{m}{2}$  の所では,  $\frac{1}{2}$  を乗ずるを意味する. それは, (35) の  $P$  の関数の性質に由来する.

(44) は,  $N$  と  $\nu$  との二重級数で複雑で見透しが悪いが,  $N=0$ ,  $\pm 1$  だけを分離して見ると見透しが良くなる.

(44) の  $\sum_N$  以降を書き直すと,

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, e^{-j \frac{\omega_0 + \nu p}{c} R} j^{\nu} J_{\nu} \left( \frac{\omega_0 + \nu p}{c} h \right) e^{-j\nu \Phi} e^{j(\omega_0 + \nu p) t} \\ & + \sum_{\nu=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, e^{-j \frac{\omega_0 + \nu p}{c} R} j^{\nu - m} J_{\nu - m} \left( \frac{\omega_0 + \nu p}{c} h \right) e^{-j(\nu - m) \Phi} e^{j(\omega_0 + \nu p) t} \\ & + \sum_{\nu=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, e^{-j \frac{\omega_0 + \nu p}{c} R} j^{\nu + m} J_{\nu + m} \left( \frac{\omega_0 + \nu p}{c} h \right) e^{-j(\nu + m) \Phi} e^{j(\omega_0 + \nu p) t} \\ & + \left( \sum_{N=-\infty}^{-2} + \sum_{N=2}^{\infty} \right) \sum_{\nu=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, \end{aligned} \quad (45)$$

但し、(45)の最後の $\Sigma'$ より後は省略したが、(44)の $\Sigma'$ より後と形式的には全く等しい。

(45)より、全体を含めて角周波数帯域は、 $\omega_0 - \frac{m}{2}p$ から $\omega_0 + \frac{m}{2}p$ である事が分る。そして、連続運動波源による式(16)では、一つの角周波数 $\omega_0 + kp$ に対して、一つのベッセル関数 $J_k$ が対応したが、離散運動波源による式(45)では、一つの角周波数 $\omega_0 + \nu p$ に対して、 $J_\nu$ 、 $J_{\nu-m}$ 、 $J_{\nu+m}$ ……のある項の無限和となる。

連続運動の式(16)の無限和の中、 $k = -(\frac{m}{2}-1)$ から、 $k = (\frac{m}{2}-1)$ の和を取れば、(45)の第1の和の $\nu = -(\frac{m}{2}-1)$ から、 $\nu = (\frac{m}{2}-1)$ 迄の和と全く等しい。〔上述で、 $\pm \frac{m}{2}$ とせず、 $\pm(\frac{m}{2}-1)$ としたのは、 $\pm \frac{m}{2}$ の時は、振巾が $\frac{1}{2}$ になる事を考慮したからである。〕

従って(45)で、 $J_\nu$ に比べて、 $J_{\nu-m}$ 、 $J_{\nu+m}$ ……が充分小であるとして無視すれば、(45)は、(16)で、 $\omega_0 - \frac{m}{2}p$ から $\omega_0 + \frac{m}{2}p$ 迄に帯域制限したものに、帯域端を除いては全く等しい。

之が、離散的波源によるFM波が、連続波源によるFM波の帯域制限をしたものに近いと云う理由である。

### 第三部 Doppler VOR の簡単な説明

こゝでは、Doppler VOR の解説と、それに関連して、「FMの所要帯域巾」及び「sampling rate」について簡単な説明を行う。

VORは、VHF Omni-directional Range の略称で、VHFを使用した全方向式レンジ・ビーコンの事である。VORは1つの局を中心とした極座標航法の $\rho-\theta$ の中、航空機の位置の方位角 $\theta$ の情報をその機に与えるものである。始めにConventional VORが用いられたが、後にDoppler VORが考案された。地上の送信装置についてはこの両方式は異なるが、機上の受信装置は前者のものが、そのまま後者のものに使用可能な様に、後者の方式は工夫されてある。

VORの使用帯域は108~118 MHzで、各チャンネルは100 KHzの間隔で存在している。

[6].

#### 1. 地上送信系

アンテナ系については後述するので、こゝでは簡単に説明すると、円の中心にある一本のアンテナと、半径6.7 mの円周上にある52本のアンテナ系との二組が役割を演ずる。中心の一本のアンテナは、30 Hzで振巾変調された連続波を360度全方向に輻射しており、この波は30 Hzの基準位相を提供する。(図4参照)

円周上にある52本のアンテナは、容量性のコンデンタで、次々に給電されるが、その掃引の速さは毎秒30回転の割合である。52本のアン

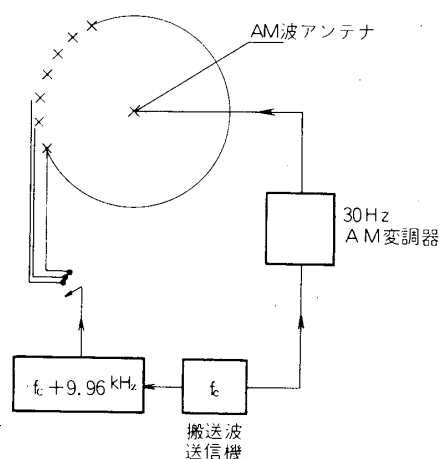


図4 Doppler VORの地上送信系のブロック図

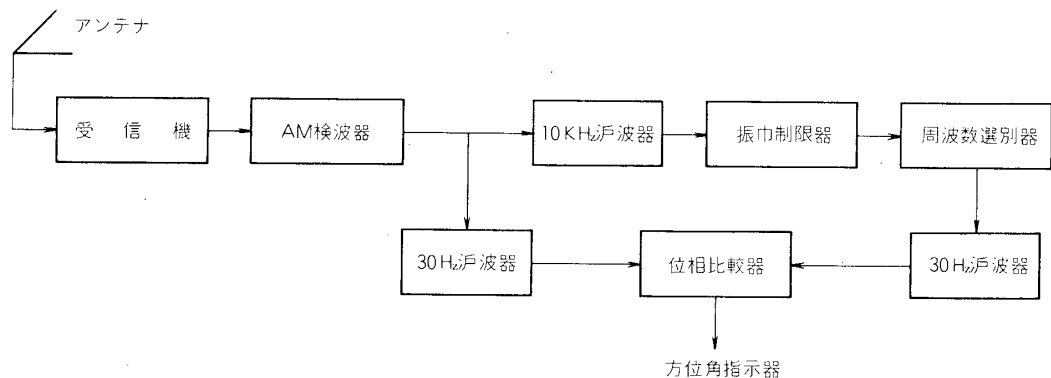


図5 VOR の機上受信系のブロック図

テナへの VHF は、中心のアンテナへの VHF より、9.96 KHz 高い周波数を用いている。52本からの輻射波は合成されて30 Hz rateの FM 波となる。

## 2. 機上受信系

図5に受信系のブロック図を示すが、AM 検波器で、AM 波は30 Hz の成分が現われ、FM 波は、9.96 kHz が搬送波である FM 波に周波数変換され、夫々30 Hz、10 KHz 帯の帯域濾波器を通る。その後、FM 波は、周波数選別器を通過して、30 Hz が現われる。AM 波よりの30 Hz に対して、FM 波よりの30 Hz は、方位角と等しい大きさの位相遅れを生ずるので、之を位相比較器で比較して、その方位を知りうる訳である。

## 3. 52本のアンテナ系について

このアンテナ系は、始め、一本のダイポール・アンテナを実際に毎秒30回転の割合で回転する試みが行われた。現在では上述の様に、52本のアルフォード・アンテナに、静電型コンmutータを用い、毎秒30回転の割合で次々に給電する様になっている。(図6参照)

このアンテナ系は、上述の様に、半径6.7 m (22フィート) の円周上に並んでいるので、その等価周辺速度は  $v = h \times p = 6.7 \times 2\pi \times 30 = 1262$  (m/sec) である。従って、最高のドップラ周波数は、 $f_{max} \times (v/c) = 118 \times 10^6 \times (1262/3 \times 10^8) \div 496$  (Hz) である。之は、FM 波の最大周波数偏移に相当する。

普通の教科書の多くは、之を480 Hz としているが、それは、114 MHz を搬送周波数とし

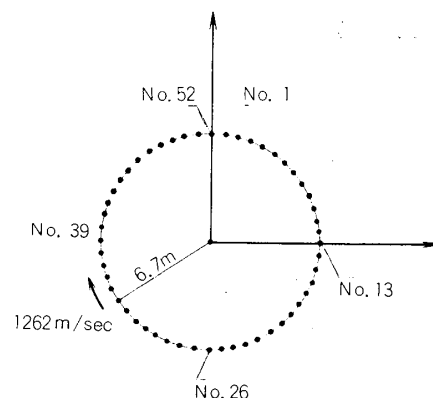


図6 52本のアンテナ系の配置略図

た場合に相当する。

#### 4. FMの所要帯域巾とサンプリングの定理

単一周波数の変調波によるFM波でも、占有帯域は無限大であるが、実際の装置では帯域が制限される。どの程度の帯域があれば、まづ宜しいかと云う設問に対しては、「変調指数が5より充分大である場合、最大周波数偏移の2倍の帯域があればほゞ充分」と云われている。〔7〕 今の場合、 $496 \times 2 = 992$  (Hz) あれば、ほゞ充分である。

次に、サンプリングについては、「サンプリングを行うには、その信号の片側帯域の2倍のサンプリング周波数を用いれば宜しい」と云う定理がある。(〔8〕のp. 62)

今の場合、FM波の両側帯域は992 Hz であるので、992 Hz rate でサンプリングすればよい事になる。992 Hz のサンプリング rate では、 $992 \div 30 \div 33$  (本) のアンテナで宜しい訳であるが、余裕を持たせて、52本としてある。52本はサンプリング rate  $30 \times 52 = 1560$  (Hz) に相当し、FM帯域巾を1560 Hz、52個のside band迄、所有させた事に相当する。

#### 結 言

以上、連続的及び離散的に円運動する波源により、遠方点に生ずるFM波のスペクトルを精密に計算した。之等の計算は、基本的なものなので種々の利用可能性があろうが、就中、Doppler VOR の信号の性質の考察及びVOR設置点近傍地形の凹凸による信号波の騒乱等の計算の際に参考になるであろう。

#### 謝 辞

VORの資料に関して、種々便宜をはかって下さった大野繁樹氏に感謝致します。

1976年7月3日 計測部

#### 参 考 文 献

- [1] S. R. Anderson and R. B. Flint: "The CAA Doppler Omnirange", Proc. IRE, Vol. 47, No. 5, pp. 808-821, May 1959.
- [2] J. A. Stratton: "Electromagnetic Theory", p. 424, McGraw-Hill, 1941.
- [3] S. R. Anderson: "VHF Omnirange Accuracy Improvements", IEEE Trans. on Aerospace and Navigational Electronics, Vol. ANE-12, No. 1, pp. 26-35, March 1965.
- [4] 日本数学会編集, "数学辞典", 附録 p. 45, 岩波書店, 1954年4月(第1刷)
- [5] "数学ハンドブック" p. 153, 丸善, 1971年8月, (2版)
- [6] M. Kayton and W. R. Fried (Ed.): "Avionics Navigation Systems", pp. 163-170, John Wiley & Sons, 1969.
- [7] J. C. Hancock: "通信理論序説" (邦訳) p. 57, 丸善, 1966年6月
- [8] A. Papoulis: "応用フーリエ積分" (邦訳) オーム社, 1974年9月(1版8刷)

**付録A  $\delta$  関数に関する二、三の公式**

A. 1 文献 [8] の p. 53~54 に、次の公式がある。

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (\text{A-1})$$

但し、

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{A-2})$$

(A-2) を用いると、(A-1) は次の様になる。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \quad (\text{A-3})$$

(A-3) は時間領域の形である。之を角周波数領域での形に直すには、次の置き換えをすればよい。

$$\omega_0 \rightarrow \tau_0, \quad t \rightarrow \Omega \quad (\text{A-4})$$

即ち、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega\tau_0} = \frac{2\pi}{\tau_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - k \frac{2\pi}{\tau_0}\right) \quad (\text{A-5})$$

こゝでは、(A-3) の右辺の  $\delta$  関数は時間の逆数の次元を持ち、(A-5) の右辺の  $\delta$  関数は角周波数の逆数の次元を持つ事に注意する必要がある。

A. 2 文献 [8] の p. 45 に次の公式がある。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (\text{A-6})$$

**付録B 連続円運動波源による波の一次近似解**

本文第一部では精密に求めたが、こゝでは、逐次近似法の一次近似で求める。結果は、理想的なFM波の形となる。

本文の式(9)より、

$$\begin{aligned}\psi(t) &\doteq \frac{h}{4\pi R} \int \delta\left[\phi - p\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] e^{j\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)} d\phi \\ &= \frac{h}{4\pi R} e^{j\omega_0 \frac{\phi}{p}}\end{aligned}\quad (\text{B-1})$$

但し、(B-1)の $\phi$ は $t$ の関数で、次式をみたすものである。

$$\phi = p\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (\text{B-2})$$

(B-2)に本文(7)の $r$ を代入すれば、

$$\phi = pt - \frac{pR}{c} + \frac{ph}{c} \cos(\phi - \Phi) \quad (\text{B-3})$$

(B-3)より、 $\phi$ を $t$ の関数として求めて、それを(B-1)に代入したい所であるが、(B-3)は、超越方程式である故、それは出来ない。こゝで、逐次近似法を用いる事となる。それは、 $ph$ は、周辺速度であるので、 $ph/c$ は、極めて小である故、

$$\phi \doteq pt - \frac{pR}{c}$$

を、(B-3)の右辺の $\phi$ に代入するのである。即ち、

$$\phi \doteq pt - \frac{pR}{c} + \frac{ph}{c} \cos\left(pt - \frac{pR}{c} - \Phi\right) \quad (\text{B-4})$$

(B-4)を(B-1)に代入すれば、

$$\psi(t) \doteq \frac{h}{4\pi R} e^{j\omega_0\left[t - \frac{R}{c} + \frac{h}{c} \cos\left(pt - \frac{pR}{c} - \Phi\right)\right]} \quad (\text{B-5})$$

となり、本文の式(1)に掲げた理想的なFM波と同形となる。