

# 直線運動する波源による遠方界の周波数スペクトルと 瞬時周波数の特殊相対論による解析

飯 口 真 一

Special Relativistic Analysis for Frequency Spectrum and  
Instant Frequency of Far Field Produced by Linearly Moving Wave Source

By

Shin-ichi IIGUCHI

**Abstract:** Concerning the far field from linearly moving wave source, the frequency spectrum and the instant frequency are analyzed respectively in the case of short and long radiating times by the special relativity and these are compared with the analytical results by the non-relativity. It is shown that the frequencies obtained by the special relativity are equal to these by the non-relativity multiplied by  $\sqrt{1-(v/c)^2}$ .

## 概 要

直線運動する波源による遠方界に関して、短時間輻射の場合の周波数スペクトルと、長時間輻射の場合の瞬時周波数を特殊相対論を用いて解析し、それぞれ非相対論による解析結果と比較してある。なお、短時間輻射の場合は、 $v/c$ の2次のオーダーまでの近似を行っている。

対応する周波数に関して、特殊相対論による結果は、非相対論によるものに $\sqrt{1-(v/c)^2}$ を乗じた形となっている。

## 諸 言

筆者は、本研究所報告の前号に[1]、「ドップラ・アレイによる遠方界の周波数スペクトル」という論文をのせたが、その論文の附録で離散的なアレイではなく、連続的に運動する波源による遠方界の周波数スペクトルを非相対論的に求めた。しかし、直線運動しながら輻射する場合は、特殊相対論によらねば厳密ではない。非相対論による解析では、 $v/c$ の1次のオーダーまでは正しいが、2次を考える時は既に正しくない。本論文は、第1部で特殊相対論を用いて、短時間輻射の場合の遠方界の周波数スペクトルを求める。ただし、厳密に行うとフーリエ変換が困難なので、 $v/c$ の2次のオーダーまで考慮した近似を用いる。その結果、周波数スペクトルは $\sin x/x$ の形となり、前回と似ているがその中心周波数および零点は前号のものに、 $\sqrt{1-(v/c)^2}$ を乗じたものになっている。

さらに第2部では、人工衛星が上空を通過しながら電磁波を輻射する様子や、遠方にある天体が光りながら我々から遠ざかって行く様子を想定して、波源が $x=-\infty$ から $\infty$ まで動

いて行く時の遠方界の瞬時周波数を、これも特殊相対論を用いて計算する。これに関して、非相対論の場合を本論文の附録で計算する。この2つの結果を比較すると、瞬時周波数に関して、特殊相対論のものは非相対論のものに、 $\sqrt{1-(v/c)^2}$ を乗じた形となっている

### 記 号 表

$g(x, y, z, t)$	波源の関数
$\psi(x', y', z', t)$	遠方の界
$c$	光速度
$v$	波源の速度
$\phi$	$1 - v^2/c^2$
$\omega_0$	波源の角周波数
$s$	$t' - r'/c$
$B$	短時間輻射の時の輻射時間
$D$	$1 - (v \cos \theta_1)/c$
$\tilde{\omega}$	$\omega_0 - (\omega D)/\sqrt{\phi}$
$\omega_i, \omega_j$	それぞれ、相対論、非相対論で求めた瞬時角周波数

## 序章 基礎の方程式

### 1. 波源と遠方界との関係式 [2]

$g(x, y, z, t)$  を波源の関数とする方程式

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g(x, y, z, t) \quad (1)$$

の解は

$$\psi(x', y', z', t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} g(x, y, z, t - \frac{r}{c}) dv \quad (2)$$

$$\text{ただし} \quad r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \quad (3)$$

### 2. Lorentz 変換

図1のように、プライム系がアンプライム系に対して  $x'$  方向に速度  $v$  で動いて行く時、独立変数の変換は次の様である。

$$x' = \frac{1}{\sqrt{\phi}}(x - vt) \quad (4)$$

$$y' = y \quad (5)$$

$$z' = z \quad (6)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (7)$$

$$\text{ここに, } \phi = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad (8)$$

(4), (7) より, 次式が導ける.

$$x = \frac{1}{\sqrt{\phi}} (x' + vt') \quad (9)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (10)$$

(4) より, プライム系の原点はアンプライム系で見ると,  $x = vt$  で動いて行く. その点は,  $t = 0$  の時,  $x = 0$  にあるので両系の原点が一致するのは  $t = 0$  の時である.

同様に (9) より, 両系の原点が一致するのは  $t' = 0$  の時でもある.

### 第 1 部 短時間輻射の場合のスペクトル

図 2 の様に, プライム系の原点に輻射源があり, その系の  $t' = 0$  から  $t' = B$  までの間だけ,  $\text{Exp}(j\omega_0 t')$  の振動があるものとする.

プライム系での, 輻射界と波源の関数との関係は, (2) より次の様になる.

$$\psi(x', y', z', t') = \frac{1}{4\pi r'} g\left(0, 0, 0, t' - \frac{r'}{c}\right) \quad (11)$$

$$\text{ただし, } r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (12)$$

また,

$$g(0, 0, 0, t') = P(t' - 0, t' - B) e^{j\omega_0 t'} \quad (13)$$

(13) の  $P$  は,  $t' = 0$  から  $t' = B$  の間だけ 1 である矩形関数を示す.

(13) を (11) に代入すれば,

$$\psi(x', y', z', t') = \frac{1}{4\pi r'} P\left(t' - \frac{r'}{c} - 0, t' - \frac{r'}{c} - B\right) e^{j\omega_0 \left(t' - \frac{r'}{c}\right)} \quad (14)$$

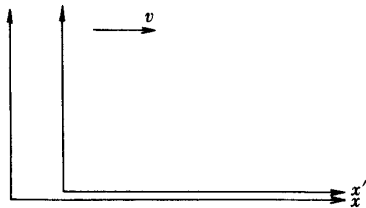


図 1 プライム, アンプライム両系の相対関係

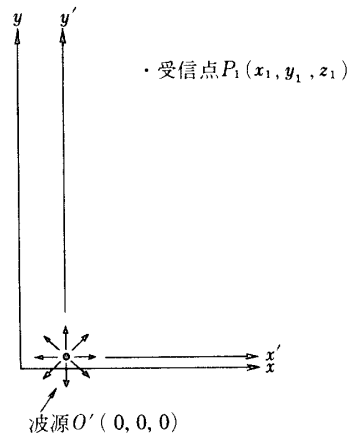


図2 プライム系の原点に波源があり，アンプライム系の点 $P_1$ に受信点がある．波源は，短時間 $B$ 秒だけ輻射する．

(14) の右辺は，プライム系で見た波動である．これを，アンプライム系で見る波動に直すには，Lorentz 変換 (4)～(7) を行えばよい．

すなわち，

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi r'} P(s-0, s-B) e^{j\omega_0 s}$$

ただし，

$$r' = \sqrt{\frac{1}{\phi} (x-vt)^2 + y^2 + z^2}$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) - \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{\phi} (x-vt)^2 + y^2 + z^2}$$

ゆえに，点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  における振動は，

$$\psi(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{1}{4\pi r'_1} P(s-0, s-B) e^{j\omega_0 s} \quad (15)$$

ただし，

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{\phi} (x_1-vt)^2 + \rho_1^2} \quad (16)$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left( t - \frac{v}{c^2} x_1 \right) - \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{\phi} (x_1-vt)^2 + \rho_1^2} \quad (17)$$

ここに，

$$\rho_1^2 = y_1^2 + z_1^2 \quad (18)$$

とおいた．

前述のように、輻射時間  $B$  が小であるとすれば、その間の  $r_1'$  の変化は小であるとし、

$$\begin{aligned} r_1' &\doteq \sqrt{\frac{1}{\phi} x_1^2 + \rho_1^2} \\ &= R \end{aligned} \quad (19)$$

とする.

点  $P_1$  における周波数スペクトルは、(15) より、

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, y_1, z_1) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_1'} P(s-0, s-B) e^{j\omega_0 s} e^{-j\omega t} dt \\ &\doteq \frac{1}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} P(s-0, s-B) e^{j\omega_0 s} e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、(17) を用いて、(20) の積分変数  $t$  を  $s$  に変換する. 輻射時間は次のように小であるとする.  $B$  (または、 $s$ ) 対  $R/c$  の比は、 $v/c$  以下である. そして、全体の計算で  $v/c$  の 2 次のオーダーまでは残し、3 次以上は捨てる近似計算を行う.

(17) より、

$$\frac{1}{\sqrt{\phi}} \left( t - \frac{v}{c^2} x_1 \right) - s = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{\phi} (x_1 - vt)^2 + \rho_1^2} \quad (21)$$

(21) の両辺を 2 乗し、(8) を用いて整理すると、次式が得られる.

$$t^2 - \frac{2s}{\sqrt{\phi}} t - \frac{1}{c^2} \left( r_1^2 - \frac{2svx_1}{\sqrt{\phi}} - c^2 s^2 \right) = 0 \quad (22)$$

$$\text{ただし, } r_1^2 = x_1^2 + \rho_1^2 \quad (23)$$

(22) より、 $t$  を求めると、

$$\begin{aligned} t &= \frac{s}{\sqrt{\phi}} + \sqrt{\frac{s^2}{\phi} + \frac{1}{c^2} \left( r_1^2 - \frac{2svx_1}{\sqrt{\phi}} - c^2 s^2 \right)} \\ &= \frac{s}{\sqrt{\phi}} + \frac{r_1}{c} \sqrt{1 - \left( \frac{2svx_1}{\sqrt{\phi} r_1^2} - \frac{s^2 v^2}{\phi r_1^2} \right)} \end{aligned} \quad (24)$$

(24) の平方根の中の項を考えるに、 $r_1 = cT_1$  とおくと、式(20) の下の記述によって、

$$\left. \begin{aligned} \frac{2svx_1}{\sqrt{\phi} r_1^2} &= \frac{2}{\sqrt{\phi}} \frac{v}{c} \frac{s}{T_1} \frac{x_1}{r_1} = O\left[\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] \\ \frac{s^2 v^2}{\phi r_1^2} &= \frac{1}{\phi} \frac{s^2}{T_1^2} \frac{v^2}{c^2} = O\left[\left(\frac{v}{c}\right)^4\right] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

したがって、 $v/c$  の2次まで残す計算では、(24) の平方根の中の第3項は無視し、平方根のTaylor展開の第1項まで求めればよいことになる。すなわち、

$$\begin{aligned} t &\doteq \frac{s}{\sqrt{\phi}} + \frac{r_1}{c} \left( 1 - \frac{svx_1}{\sqrt{\phi}r_1^2} \right) \\ &= \frac{r_1}{c} + \frac{s}{\sqrt{\phi}} D \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、

$$x_1/r_1 = \cos \theta_1 \quad (\text{図3参照})$$

および、 $D = 1 - (v/c)\cos \theta_1$

とおいた。

(26) を (20) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, y_1, z_1) &= \frac{1}{4\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} P(s-0, s-B) e^{j\omega_0 s} e^{-j\omega \left( \frac{r_1}{c} + \frac{sD}{\sqrt{\phi}} \right)} \left( \frac{D}{\sqrt{\phi}} \right) ds \\ &= \frac{1}{4\pi R} \frac{D}{\sqrt{\phi}} e^{-j\omega \frac{r_1}{c}} \int_0^B e^{j\tilde{\omega} s} ds \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、

$$\tilde{\omega} = \omega_0 - \frac{\omega D}{\sqrt{\phi}} \quad (28)$$

(27) の積分を行えば、

$$\Psi(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{\phi}} e^{-j\omega \frac{r_1}{c}} e^{j\frac{\tilde{\omega} B}{2}} \frac{\sin \frac{\tilde{\omega} B}{2}}{\frac{\tilde{\omega} B}{2}} BD \quad (29)$$

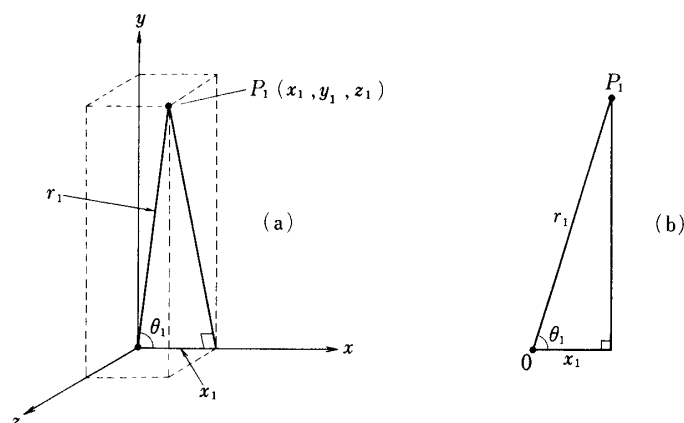
スペクトルの主要部分は、

$$\frac{\sin \frac{\tilde{\omega} B}{2}}{\frac{\tilde{\omega} B}{2}} \quad (30)$$

である。

スペクトルの中心は、

$$\tilde{\omega} = 0 \quad (31)$$

図 3 アンプライム系の  $P_1$  点と角度  $\theta_1$  との関係

より求められ、

零点は、
$$\frac{\tilde{\Omega} B}{2} = \mp n\pi \quad (n \text{ は正整数}) \quad (32)$$

より求められる。

(31) より、
$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{\phi}}{D} \quad (33)$$

(32) より、
$$\omega = \frac{\sqrt{\phi}}{D} \left( \omega_0 \pm \frac{2\pi}{B} n \right) \quad (34)$$

である。

非相対論的解析と比較するに、本文(29)は、前論文〔1〕の附録Aの(A-10)に、本文(33)、(34)はそれぞれ、前論文(A-22)、(A-23)に対応する。

前論文の $\Omega$ は、 $\omega_0 - \omega D$ であり、本文の $\tilde{\Omega}$ は、 $\omega_0 - \omega \frac{D}{\sqrt{\phi}}$ である。この違いだけ異っている。

中心および零点の角周波数に関して、本文のものは前論文のものに $\sqrt{\phi}$ を乗じた形となっている。

図4に、本論文のスペクトルと、非相対論による前論文のスペクトルとの違いを示している。

## 第2部 長時間輻射の場合の瞬時周波数

図5に示すように、プライム系の $x'=0$ ,  $y'=h$ ,  $z'=0$ なる点に波源があり、 $t'=-\infty$ から $t'=\infty$ まで、輻射し続ける。

プライム系での、輻射界と波源の関数との関係は、(2)より、次のようになる。

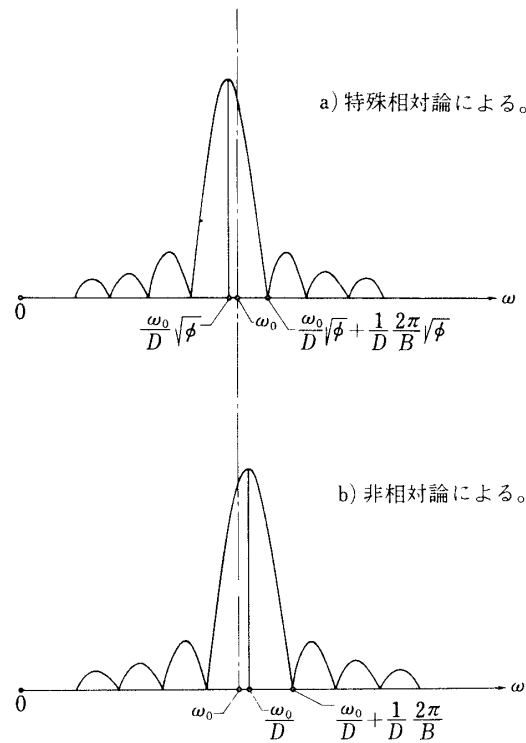


図4 角周波数  $\omega_0$  の電磁波を短時間  $B$  秒だけ輻射した場合の遠方界の周波数スペクトル,  
 (a) 特殊相対論 (b) 非相対論  
 $(D=1-(v/c)\cos\theta, \sqrt{\phi}=\sqrt{1-(v/c)^2})$   
 なお, 図はおおよそ  $D=0.95, \sqrt{\phi}=0.9$  として描かれてある)

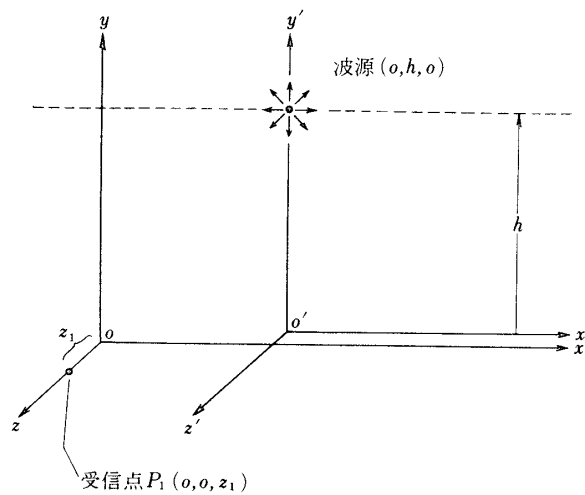


図5 プライム系の  $(0, h, 0)$  に波源があり, アンプライム系の  $P_1(0, 0, z)$  に受信点がある. 波源は長時間輻射し続ける.



$$\psi(x', y', z', t') = \frac{1}{4\pi r'} g\left(0, h, 0, t' - \frac{r'}{c}\right) \quad (35)$$

ただし,

$$r' = \sqrt{x'^2 + (y' - h)^2 + z'^2} \quad (36)$$

波源の関数は,

$$g(0, h, 0, t') = e^{j\omega_0 t'} \quad (37)$$

(37) を (35) に代入すれば,

$$\psi(x', y', z', t') = \frac{1}{4\pi r'} e^{j\omega_0 \left(t' - \frac{r'}{c}\right)} \quad (38)$$

(38) は, プライム系で見た波動である. これをアンプライム系で見るには, Lorentz 変換 (4)~(7)を行えばよい.

(36) は,

$$r' = \sqrt{\frac{1}{\phi}(x - vt)^2 + (y - h)^2 + z^2} \quad (39)$$

となり,

$$t' - \frac{r'}{c} = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) - \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{\phi}(x - vt)^2 + (y - h)^2 + z^2} \quad (40)$$

アンプライム系の点  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = z_1$  では,

(39) は,

$$r' = \frac{v}{\sqrt{\phi}} \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} \quad (41)$$

となる.

$$\text{ただし, } \rho_1^2 = h^2 + z_1^2 \quad (42)$$

また, (40) より,

$$t' - \frac{r'}{c} = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left[ t - \frac{v}{c} \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} \right] \quad (43)$$

となる.

(41), (43) を (38) に代入すると,

$$\psi(0, 0, z_1, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\frac{v}{\sqrt{\phi}} \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}}} e^{j\frac{\omega_0}{\sqrt{\phi}} \left[ t - \frac{v}{c} \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} \right]} \quad (44)$$

(44) の位相項を  $\Phi$  とすれば,

$$\Phi = \frac{\omega_0}{\sqrt{\phi}} \left[ t - \frac{v}{c} \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} \right] \quad (45)$$

である.

$\partial \Phi / \partial t$  を瞬時周波数  $\omega_t$  とすれば,

$$\omega_t = \frac{\omega_0}{\sqrt{\phi}} \left[ 1 - \frac{v}{c} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}}} \right] \quad (46)$$

(46) は, 非相対論で行った結果を,  $\sqrt{\phi}$  倍したものになっている. [本論文の附録の式 (A-17) 参照]

すなわち,

$$\omega_t = \sqrt{\phi} \omega_j \quad (47)$$

(46) より,

$$t = -\infty \text{ の時は, } \omega_t = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{c}} \sqrt{\phi} \quad (48)$$

$$t = \infty \text{ の時は, } \omega_t = \frac{\omega_0}{1 + \frac{v}{c}} \sqrt{\phi} \quad (49)$$

また, 非相対論の解析では,  $\omega_j = \omega_0$  となる時刻,  $t = \frac{\rho_1}{c}$  では,

$$\omega_t = \omega_0 \sqrt{\phi} \quad (50)$$

となる.

## 結 言

直線運動する波源による遠方界に関して, 特殊相対論を用いて, 第1部では, 短時間輻射の場合の周波数スペクトルを  $v/c$  の2次近似で求め, 第2部では, 長時間輻射の場合の瞬時周波数を求め, それぞれ非相対論で求めた結果と比較した. 第2部の結果は, 人工衛星よりの輻射, 天体よりの輻射の場合のドップラ・シフトを考える際に参考になるであろう.

1975年12月20日 計測部

## 参 考 文 献

- [1] 飯口真一, “ドップラ・アレイ・アンテナによる遠方界の周波数スペクトル”, 東大宇宙航空研究所報告, 11巻, 4号(A) pp 839-856, 1975年11月

[ 2 ] J. A. Stratton, "Electromagnetic Theory," P.424, McGraw-Hill, 1941.

### 附録：長時間輻射の場合の瞬時周波数の非相対論による解析

ここでは、図 6 に示すように、波源が  $y=h$ ,  $z=0$  の線上を  $x$  が  $-\infty$  から  $+\infty$  まで、速度  $v$  で  $+x$  方向に一様に動きながら輻射する場合の遠方界の瞬時周波数を非相対論的に求め、特殊相対論的解析の本文第 2 部との比較に便ならしめる。受信点  $P_1$  は、 $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=z_1$  とする。

(波源を人工衛星のアンテナ上の電流、 $y=0$  を地面と考えれば、あまり長時間に亘らぬ時は適用可能であろう。)

受信点  $P_1$  における界は、本文 (2) より次のようになる。

$$\phi(0, 0, z_1, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} g(x, h, 0, t - \frac{r}{c}) dv \quad (\text{A-1})$$

ただし、

$$g(x, h, 0, t) = \delta(x - vt) e^{j\omega_0 t} \quad (\text{A-2})$$

で、(A-2) は  $t=0$  の時、 $x=0$  に波源があることを示す。

$$\text{また、} \quad r = \sqrt{x^2 + \rho_1^2} \quad (\text{A-3})$$

$$\text{ただし、} \quad \rho_1^2 = h^2 + z_1^2 \quad (\text{A-4})$$

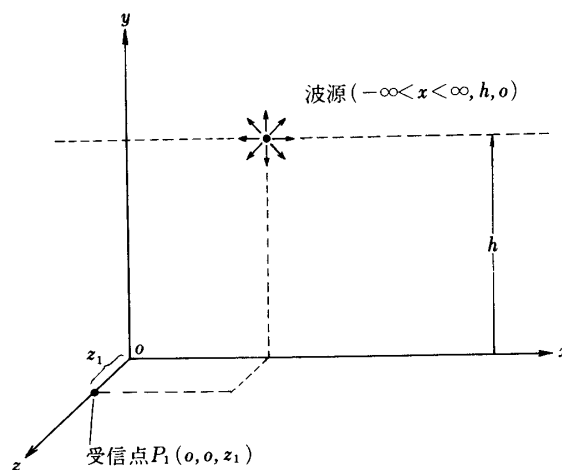


図 6 波源は、 $y=h$ ,  $z=0$  の線上を、 $x$  が  $-\infty$  から  $+\infty$  まで移動する。受信点は、 $P_1(0, 0, z_1)$  にある。

とおいた.

(A-2) を (A-1) に代入すれば,

$$\psi(0, 0, z_1, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \delta \left[ x - v \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] e^{j\omega_0 \left( t - \frac{r}{c} \right)} dv \quad (\text{A-5})$$

(A-5) の計算を行うのに,

$$x = v \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (\text{A-6})$$

のところのみ残る. これより,

$$\frac{x}{v} = t - \frac{r}{c} \quad (\text{A-7})$$

であり, (A-5) は次のようになる.

$$\psi(0, 0, z_1, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} e^{j\omega_0 \frac{x}{v}} \quad (\text{A-8})$$

(A-8) の  $r, x$  は  $t$  の関数で, (A-7) をみたす必要がある.

(A-7) に (A-3) を代入し, 整理すると,

$$t - \frac{x}{v} = \frac{\sqrt{x^2 + \rho_1^2}}{c} \quad (\text{A-9})$$

(A-9) より,

$$t > \frac{x}{v} \quad (\text{A-10})$$

(A-9) の両辺を2乗して整理すると,  $x$  に関する2次方程式が得られる. すなわち,

$$x^2 - \frac{2vt}{\phi} x + \frac{1}{\phi} \left( v^2 t^2 - \frac{v^2 \rho_1^2}{c^2} \right) = 0 \quad (\text{A-11})$$

これより, (A-10) を用いて,

$$x = \frac{vt}{\phi} - \frac{v^2}{c\phi} \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} \quad (\text{A-12})$$

$$\therefore \frac{x}{v} = \frac{1}{\phi} \left[ t - \frac{v}{c} \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} \right] \quad (\text{A-13})$$

(A-7, 13) より,

$$\begin{aligned}
 r &= c \left( t - \frac{x}{v} \right) \\
 &= \frac{v}{\phi} \left[ \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} - \frac{v}{c} t \right]
 \end{aligned} \tag{A-14}$$

(A-13, 14) を (A-8) に代入すれば,

$$\psi(0, 0, z_1, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\frac{v}{\phi} \left[ \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} - \frac{v}{c} t \right]} e^{j \frac{\omega_0}{\phi} \left[ t - \frac{v}{c} \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} \right]} \tag{A-15}$$

位相項は,

$$\Phi = \frac{\omega_0}{\phi} \left[ t - \frac{v}{c} \sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}} \right] \tag{A-16}$$

で, 瞬時周波数  $\omega_j$  は,

$$\begin{aligned}
 \omega_j &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\
 &= \frac{\omega_0}{\phi} \left[ 1 - \frac{v}{c} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \phi \frac{\rho_1^2}{v^2}}} \right]
 \end{aligned} \tag{A-17}$$

$$t = -\infty \text{ の時は, } \omega_j = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{c}} \tag{A-18}$$

$$t = \infty \text{ の時は, } \omega_j = \frac{\omega_0}{1 + \frac{v}{c}} \tag{A-19}$$

となる. これは, 波源が動き観測者が止っている場合に, 非相対論的な初歩的説明に用いられるドップラ・シフトそのものである.

$$\text{なお, } t = \frac{\rho_1}{c} \text{ の時, } \omega_j = \omega_0 \tag{A-20}$$

$$\text{また, } t = 0 \text{ の時, } \omega_j = \frac{\omega_0}{\phi} \tag{A-21}$$

である.