

有限要素法による板翼の超音速フラッタに関する一解析

名 取 通 弘・砂 川 恵

An Analysis of Supersonic Flutter of Plate Wings
by the Finite Element Method

By

Michihiro NATORI and Megumi SUNAKAWA

Abstract: The supersonic flutter of canti-levered plate wings is analyzed using the finite element method and the quasi-steady aerodynamic theory. The influences of the decrease in the length of a fixed root on flutter characteristics are clarified. It is shown that if the length of a fixed root is above 70% of a wing root chord, flutter characteristics do not change so much, but under 70% , they change markedly and complicatedly. The mechanism of the change of flutter characteristics is clearly explained through the investigation of natural vibration modes and frequency changes due to the aerodynamic force.

概 要

本研究は低アスペクト比片持板翼の翼固定部減少の影響に着目して、その超音速フラッタ特性を有限要素法により解析したものである。翼付根翼弦の7割以上を固定した場合その影響は僅かであるが、それ以下になると複雑かつ大きな影響が現れること、及びそれらの機構について明らかにしている。

記 号

- D 板の曲げ剛性
 h 翼の板厚
 l_R スパン長さ
 M 一様流のマッハ数
 n 翼後縁の分割数
 Q 一様流の動圧
 $q \equiv 4 Q l_R^3 / (D_R \sqrt{M^2 - 1})$, 動圧パラメタ
 ρ 板の密度
 ω 円振動数
 $\omega_0 \equiv \sqrt{D_R / (\rho h_R l_R^4)}$

添 字

F フラッタ

R 代表値

1. ま え が き

小型観測ロケットのフィンや航空機の可動尾翼等においては翼付根が完全に固定されることは少なく、固定部分についても有限な剛性を持つバネで支持されていると考えられる場合が殆んどである。このような複雑な支持条件を持つ翼の挙動は有限要素法により解析するのが有利である。有限要素法は Olson [1] や Kariappa 等 [2] によってパネルフラッタの解析に用いられたのを始めとして、フラッタ解析に取り入れられてきた。Olson [3] はアスペクト比の小さな三角翼の超音速フラッタを多くの自由度を持つ適合要素により解析し、少い分割数で精度のよい解を得ている。Rao [5] は構造翼の振動モードを有限要素法により求め、モード法によるフラッタ解析を行った。超音速の空気力としては Box 法, Kernel Function 法, 有限要素法等のより厳密な空気力の導き方があるが、以上の解析は全て超音速準定常理論により空気力のマトリックスを導いている。Yang [6] は厳密な線型理論により空力マトリックスを導いて低超音速域でのパネルフラッタを解析した。市川 [7] は梁要素を使ってアスペクト比の大きな翼を持つ航空機のフラッタ解析法を示し、Turner & Bartley [8] はフラッタを考慮した SST の構造最適化の問題において、有限要素法, 亜音速揚力面理論及び Box 法を用いて大きな成功を収めた。又 Bon & Geradin [9] はこれらフラッタ解析に現れる大きな行列の固有値問題の数値解法につき検討している。

本報告においては、片持板翼の超音速フラッタについて固定部の減少の影響を超音速準定常空気力を用いて有限要素法により明かにする。

2. 解析理論の概要

解析は面積座標を用いた通常の三角形有限要素 [10] により行う。第1図のように座標をとり、一般歪 $\{\varepsilon\}$ 、及び一般応力 $\{\sigma\}$ を次のように定義する。

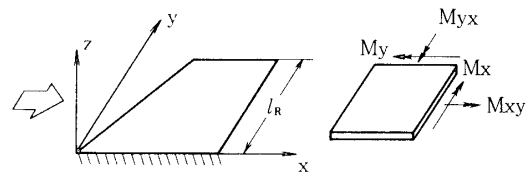
$$\left. \begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [-w, x x \quad -w, y y \quad 2w, x y]^T \\ \{\sigma\} &= [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 w は z 方向変位、 $w, x x$ 等は $\partial^2 w / \partial x^2$ 等を表し、 M_x 等は合

モーメントである。又、 $[\]^T$ は転置行列を表す。線型の歪一変位関係式及び等方性材料の応力一歪関係式を用いて、

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad [D] = D_0 \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

である。ここで、 D_0 及び ν は板の曲げ剛性及びポアソン比である。翼に働く分布荷重 q は空



第1図 座標系

気力に超音速準定常理論を用いて、

$$p = -\rho h w_{,tt} - \frac{4Q}{\sqrt{M^2-1}} (w_{,x} + \frac{1}{U} \frac{M^2-2}{M^2-1} w_{,t}) \quad (3)$$

である。ここで、 ρ 及び h は板の密度及び厚さ、 Q 、 M 及び U は夫々一様流の動圧、マッハ数及び速度であり、 t は時間である。或る要素内の変位 w がその要素の節点変位 $\{w^e\}$ と補間関数 $[N]$ によって

$$w = [N] \{w^e\} \quad (4)$$

と表されるとする。本報告において用いる三角形有限要素では、

$$\{w^e\} = [w_k \ w_{,yk} - w_{,xk} \ w_l \ w_{,yl} - w_{,xl} \ w_m \ w_{,ym} - w_{,xm}]^T \quad (5)$$

であり、 $[N]$ には非適合及び適合(HCT要素)函数の場合を扱う[10]。ここで、 k, l, m は夫々三角形の頂点を表す。一般歪は(4)式によって

$$\{\varepsilon\} = [B^e] \{w^e\} \quad (6)$$

と表される。以上を用いると、仮想仕事の原理は

$$\begin{aligned} \delta W &= \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz - \iint p \delta w dx dy \\ &= \sum_{\text{全要素}} \delta \{w^e\}^T \left(\iint [B^e]^T [D] [B^e] dx dy \{w^e\} + \iint [N]^T \rho h [N] \times \right. \\ &\quad \left. dx dy \{\ddot{w}^e\} + \iint \frac{4Q}{\sqrt{M^2-1}} [N]^T [N_{,x}] dx dy \{w^e\} + \iint \frac{4Q(M^2-2)}{U(M^2-1)^{3/2}} \times \right. \\ &\quad \left. [N]^T [N] dx dy \{\dot{w}^e\} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

となる。 $\{\dot{\quad}\}$ は時間微分を表す。ここで要素の剛性マトリックス、質量マトリックス及び空力マトリックスを夫々、

$$\left. \begin{aligned} [K^e] &= \frac{l_R^2}{D_R} \iint [B]^T [D] [B] dx dy, \\ [M^e] &= \frac{h}{l_R^2 h_R} \iint [N]^T [N] dx dy, \\ [A^e] &= \frac{1}{l_R} \iint [N]^T [N_{,x}] dx dy \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

と表し、翼全体の夫々のマトリックスを $[K]$ 、 $[M]$ 、 $[A]$ で表す。ここで、 l_R はスパン長さであり、 h_R 及び D_R は翼の板厚及び曲げ剛性の代表値を表す。全要素の節点変位を $\{w\}$ として

$$\{w\} = \{\bar{w}\} e^{i\omega t} \quad (9)$$

とすると、(7)式は次のような固有値問題に帰着する。ここで ω は円振動数、 i は虚数単位である。

$$([\mathbf{K}] + q[\mathbf{A}] - \frac{1}{\lambda}[\mathbf{M}])\{\bar{w}\} = 0, \quad (10)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{4Ql_R^2}{D_R\sqrt{M^2-1}}, \quad \frac{1}{\lambda} = -ig\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \\ g &= \frac{\sqrt{2\rho_\infty}(M^2-2)\sqrt{Q}}{(M^2-1)^{3/2}\rho h_R\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D_R}{\rho h_R l_R^4}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

であり、 q は動圧パラメタ、 g は空力的な減衰項の影響を表す。(10)式は実非対称行列 $[\mathbf{M}](\mathbf{K} + q\mathbf{A})^{-1}$ の固有値 λ を求める問題になっている。 $q=0$ の場合(10)式は振動問題の解を与える。 q が0から増加するに従って実数で与えられる(10)式の固有値のうち二つが徐々に近づいていき、或る q の値より大きくなると複素固有値を持つようになる。この固有値の実部及び虚部を λ_R 及び λ_I とすると、フラッタを起す条件、即ち ω の虚部が丁度0になる条件は、

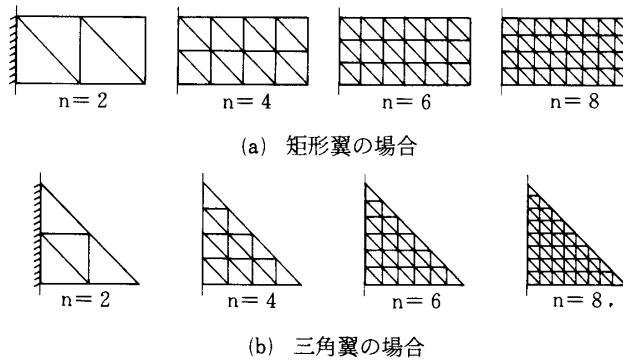
$$g = \frac{|\lambda_I|}{\sqrt{(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)}\lambda_R} \quad (12)$$

である。この g の値を使って(11)式により計算される動圧 Q と、固有値問題を解く際に与える q に含まれる動圧 Q とが一致するように繰返し計算することによって、フラッタ動圧 Q_F が求められる。フラッタに及ぶ減衰項の影響は複雑である[11]が、通常の場合その影響はそれ程大きくない。そこで以下の計算においては、(10)式の固有値の虚部 λ_I が丁度0となる動圧パラメタ q 、及び円振動数比 ω/ω_0 を求めることとし、これらを夫々フラッタ動圧パラメタ q_F 及びフラッタ円振動数比 ω_F/ω_0 と呼ぶことにする。(10)式の固有値問題を解くにはQR法を使用した。

3. 板翼のフラッタ特性

3.1 計算精度の検討

アスペクト比2、一定板厚の矩形翼及び三角翼の場合について、分割数の振動特性及びフラッタ特性に及ぼす影響を検討する。第2図に翼面の分割の様子を示す。図に示した n は翼後縁の分割数を表す。第1表に矩形翼の振動特性を、第2表に三角翼の振動及びフラッタ特性を示す。これらの表より振動特性の収束の様子を見たものが第3図である。適合要素及び非適合要素共に収束していく様子が良く示されている。適合要素による振動数は上界を与えているが、その収束は遅く少しの分割数では適合要素による剛性マトリックスが相当剛に見積られていることが分る。第4図が三角翼のフラッタ特性である。フラッタ動圧パラメタ q_F 及びフラッタ円振動数比 ω_F/ω_0 の収束の様子が良く示されている。その様子は第3図(b)に示した振動特性の収束の様子とほぼ同じである。 q_F については、Olson [3]が18自由度の適合要素を用いて得た結果が172.51であり、本報告の場合もほぼこの値に収束している。又、



第2図 翼の分割

第1表 分割数と振動特性, 矩形翼の場合

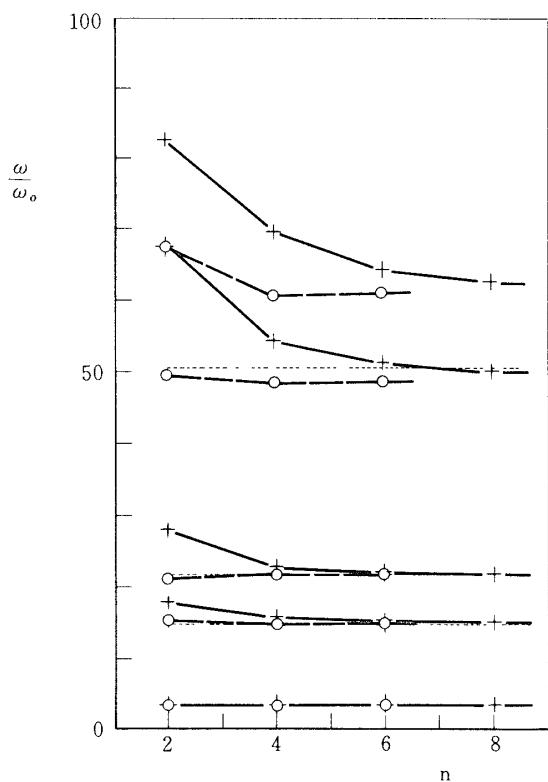
	非適合要素 分割数 n			適合要素 分割数 n				エネルギー法*
	2	4	6	2	4	6	8	
	$\frac{\omega}{\omega_0}$							
1	3.389	3.437	3.441	3.532	3.476	3.462	3.458	3.472
2	15.30	14.76	14.86	17.90	15.82	15.30	15.09	14.93
3	21.16	21.61	21.58	28.08	22.76	22.01	21.76	21.69
4	49.44	48.27	48.52	68.03	54.18	51.15	49.94	50.57
5	67.44	60.54	60.81	82.59	69.56	64.07	62.31	—

* 10項近似 [12]

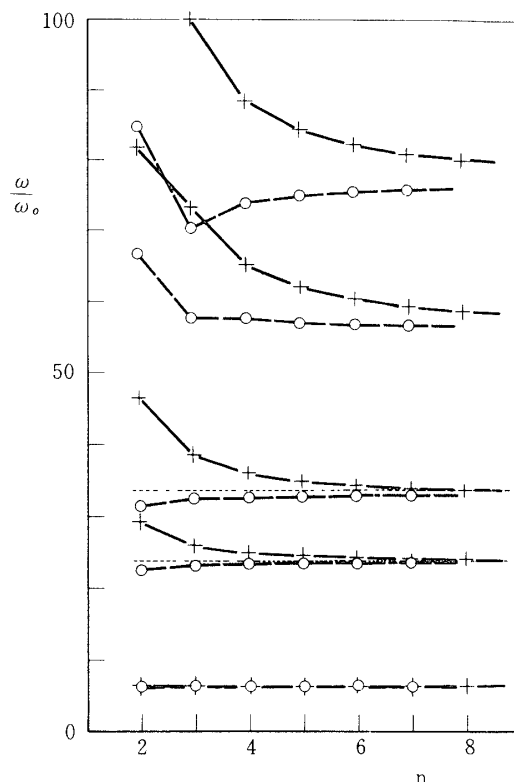
第2表 分割数と振動及びフラッタ特性, 三角翼の場合

	非適合要素 分割数 n						適合要素 分割数 n								エネルギー法*
	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	8		
	$\frac{\omega}{\omega_0}$														
1	6.079	6.112	6.133	6.124	6.149	6.152	6.505	6.327	6.259	6.227	6.209	6.198	6.192	6.193	
2	22.50	23.08	23.17	23.24	23.29	23.33	29.20	25.90	24.92	24.43	24.15	23.98	23.85	23.94	
3	31.36	32.31	32.48	32.53	32.56	32.58	46.63	38.50	35.97	34.77	34.11	33.71	33.45	33.79	
4	66.65	57.57	57.36	56.76	56.46	56.32	81.72	73.21	65.06	51.90	60.19	59.15	58.42	74.42	
5	84.68	70.16	73.65	74.62	75.10	75.40	100.9	99.89	88.34	84.14	81.88	80.48	79.49	87.74	
q_F	163.3	182.6	176.8	174.6	173.5	173.0	315.3	234.9	208.6	196.1	189.0	184.7	—	** 172.51	
$\frac{\omega_F}{\omega_0}$	17.94	19.20	18.86	18.75	18.68	18.73	23.26	20.79	19.94	19.53	19.31	19.09	—	—	

* 10項近似 [12] ** 有限要素法, 適合要素, n = 3 [3]



(a) 矩形翼の場合

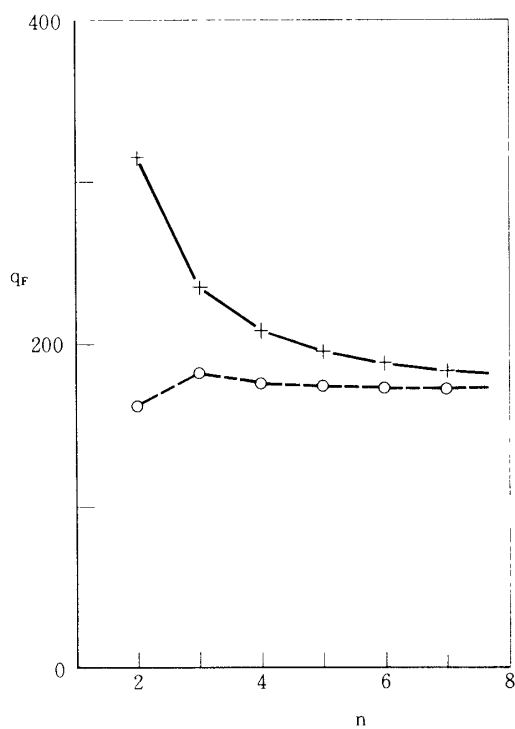


(b) 三角翼の場合

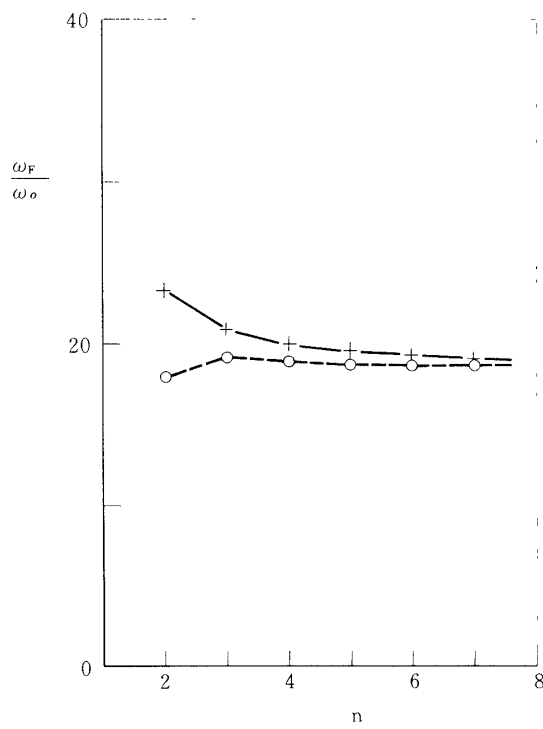
第3図 分割数と振動特性

実線：適合要素，破線：非適合要素，

点線：エネルギー法 [12]



(a) フラッタ動圧パラメタ



(b) フラッタ円振動数比

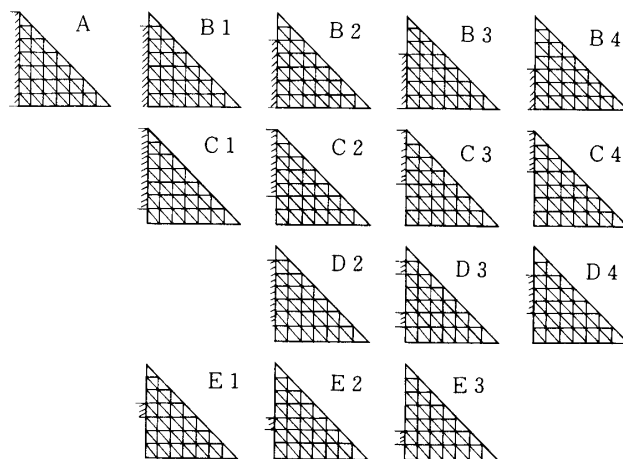
第4図 分割数とフラッタ特性

実線：適合要素，破線：非適合要素

本計算例では非適合要素でも十分なフラッタ限界値を与えていることが示されている。

3.2 三角翼のフラッタに及ぼす固定部分の影響

アスペクト比2，一定板厚の三角翼の場合について，第5図のように固定部分の減少による影響を明らかにする。計算は $n=7$ の場合について適合要素により行った。第5図から分るようにBのシリーズは翼前縁部分を自由に，Cのシリーズは後縁部分を自由にしたもので，



第5図 部分固定三角翼

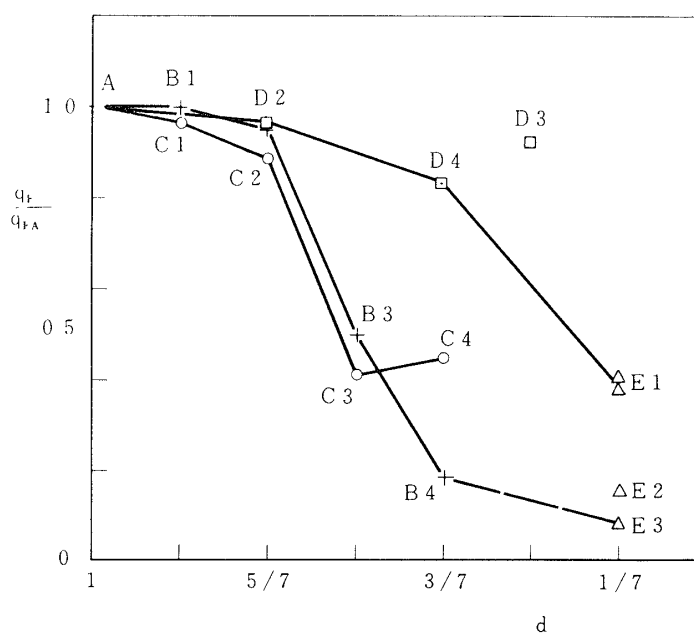
B, Cの記号の次の数字は夫々翼付根での自由な節点の数を表す。Dのシリーズは翼付根中央部に向って前縁及び後縁の両方を同時に自由にしたものである。D3は小型観測ロケットに良く見られるような固定方法を想定したもので，D2との比較の為の計算モデルである。Eのシリーズは翼付根の一要素分のみを固定した計算モデルで，その固定位置の影響を調べる為のものである。E1は翼付根中央部が固定されていけばD5に相当し，E3は翼付根後縁部が固定されればB5に相当している。第3表に夫々のモデルの振動及びフラッタ特性を示す。固定部分の減少によって振動特性が変化し，それに応じてフラッタ特性も大きく変化する。フラッタ動圧パラメタが夫々のモデルでどの程度低下するかをモデルAを基準として第6図に示す。

図の横軸の d は翼付根での固定辺の割合を示し， $d=1$ が翼付根を完全に固定した場合である。B及びCのシリーズでは $d=5/7$ から急激に q_F が低下していく様子が良く分る。Cのシリーズは翼後縁が振動し易くなっており， q_F の低下は当然予想されるが，Bの場合にも翼前縁部の翼弦方向変形が影響してCと同じような q_F の低下が見られる。又，C3及びC4の場合は2-3次連成フラッタ（第3表）で，その値もC4の方が高くなっている。この様に固定部分の割合が小さくなると複雑な連成フラッタの様相を示してくる。Dのシリーズでは q_F の低下はずっとなだらかである。又D2とD3とは僅かな差があるだけである。これらの結果の理解の一助として，幾つかのモデルについて第7図に動圧パラメタによる固有振動数の変化の様子を，第8図に真空中での固有振動モードを示す。第7図(a)はモデルAの固有振動数変化であり，1-2次連成フラッタの代表的なものである。(b)図はモデルB3の場合で，固定部の減少による剛性低下から q_F の値そのものはAの約50%に低下している。図にあるように，モデルAに比べ $q=0$ で高次の振動数が接近してきているが，これも1-2

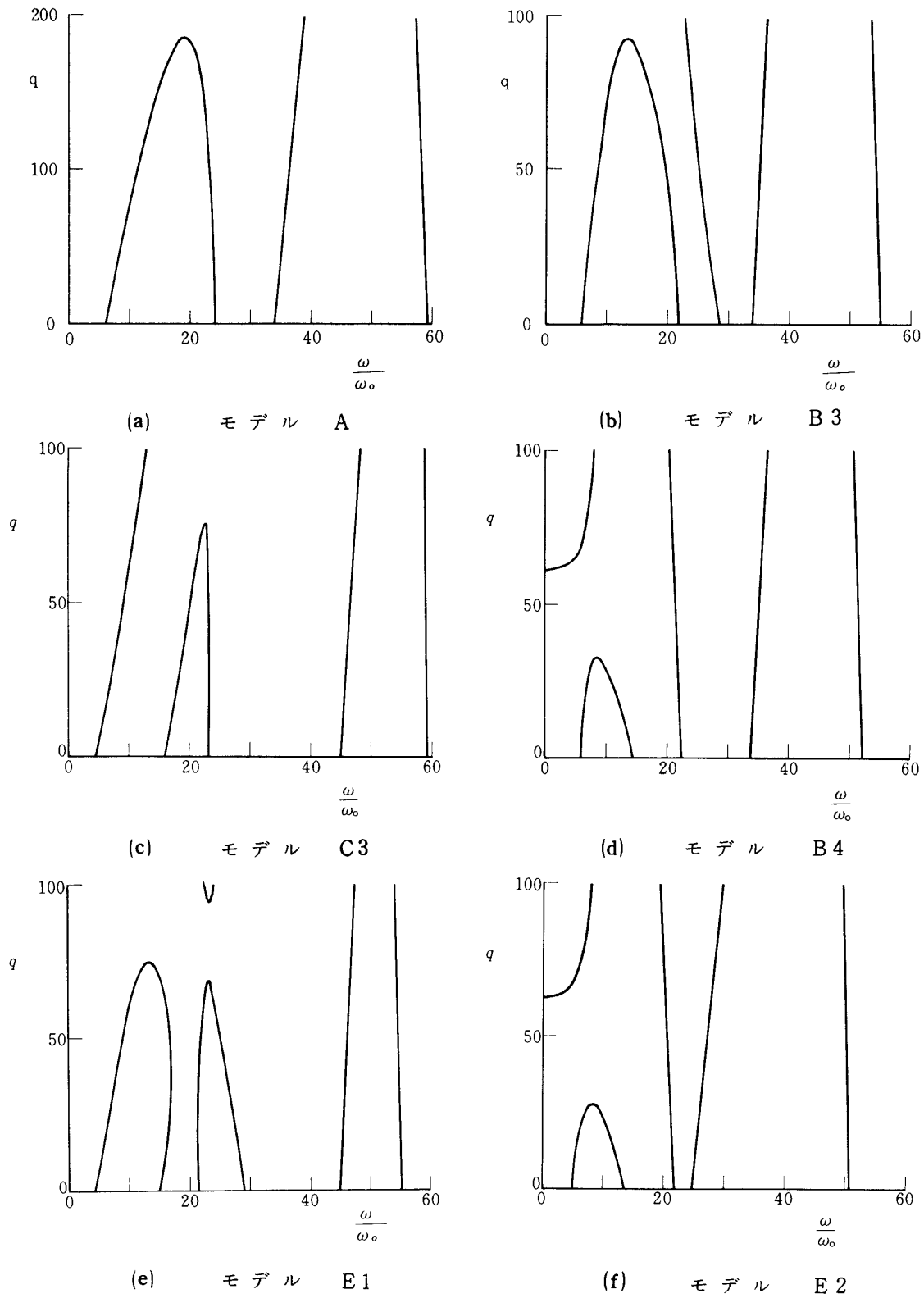
第3表 部分固定三角翼の振動及びフラッタ特性

	$\frac{\omega}{\omega_0}$					q_F	$\frac{\omega_F}{\omega_0}$
A	6.198	23.98	33.71	59.14	80.48	184.69	19.06
B 1	6.196	23.94	33.70	59.01	80.35	184.01	19.01
B 2	6.180	23.61	33.57	56.57	67.99	175.02	18.46
B 3	6.094	21.72	28.63	33.91	54.88	91.97	13.10
B 4	5.847	14.35	22.28	33.40	51.94	32.63	8.33
C 1	6.054	23.86	31.54	58.96	79.37	178.19	18.99
C 2	5.508	22.99	24.66	55.91	61.94	163.28	18.90
C 3	4.642	16.06	23.15	44.90	59.25	75.62	22.17 *
C 4	3.661	11.23	21.96	39.42	58.08	81.49	19.86 *
D 2	6.053	23.83	31.53	58.83	79.26	177.51	18.93
D 3	5.796	21.86	31.43	55.37	77.88	169.75	17.47
D 4	5.493	22.57	24.65	54.42	60.57	153.20	18.26
E 1	4.534	15.03	21.62	28.97	44.67	74.18	13.22
						69.04	23.07 **
E 2	5.160	13.56	21.73	24.62	50.58	27.80	8.34
E 3	5.183	8.827	20.44	31.34	49.74	12.85	5.96

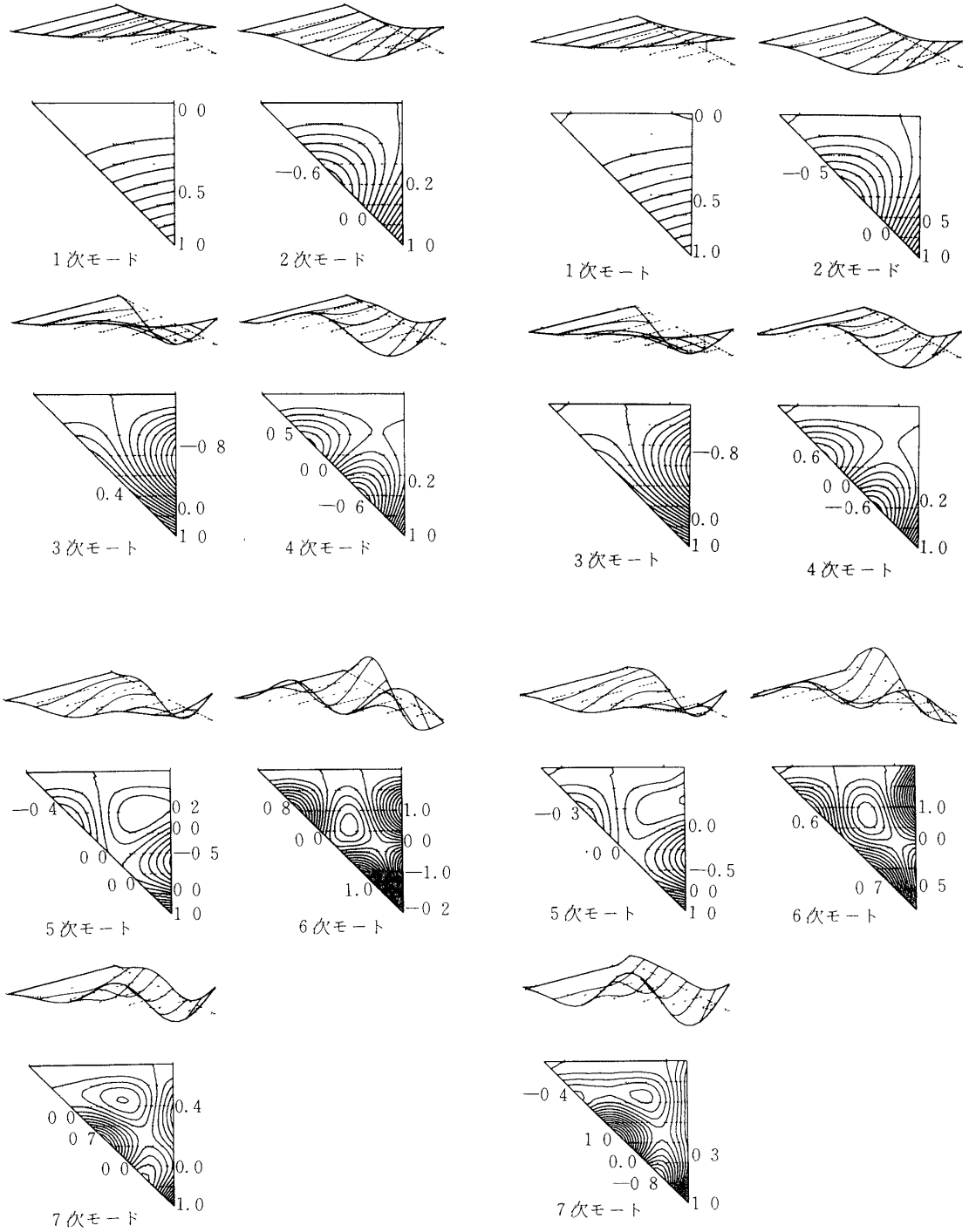
* 2 - 3 次連成, ** 3 - 4 次連成



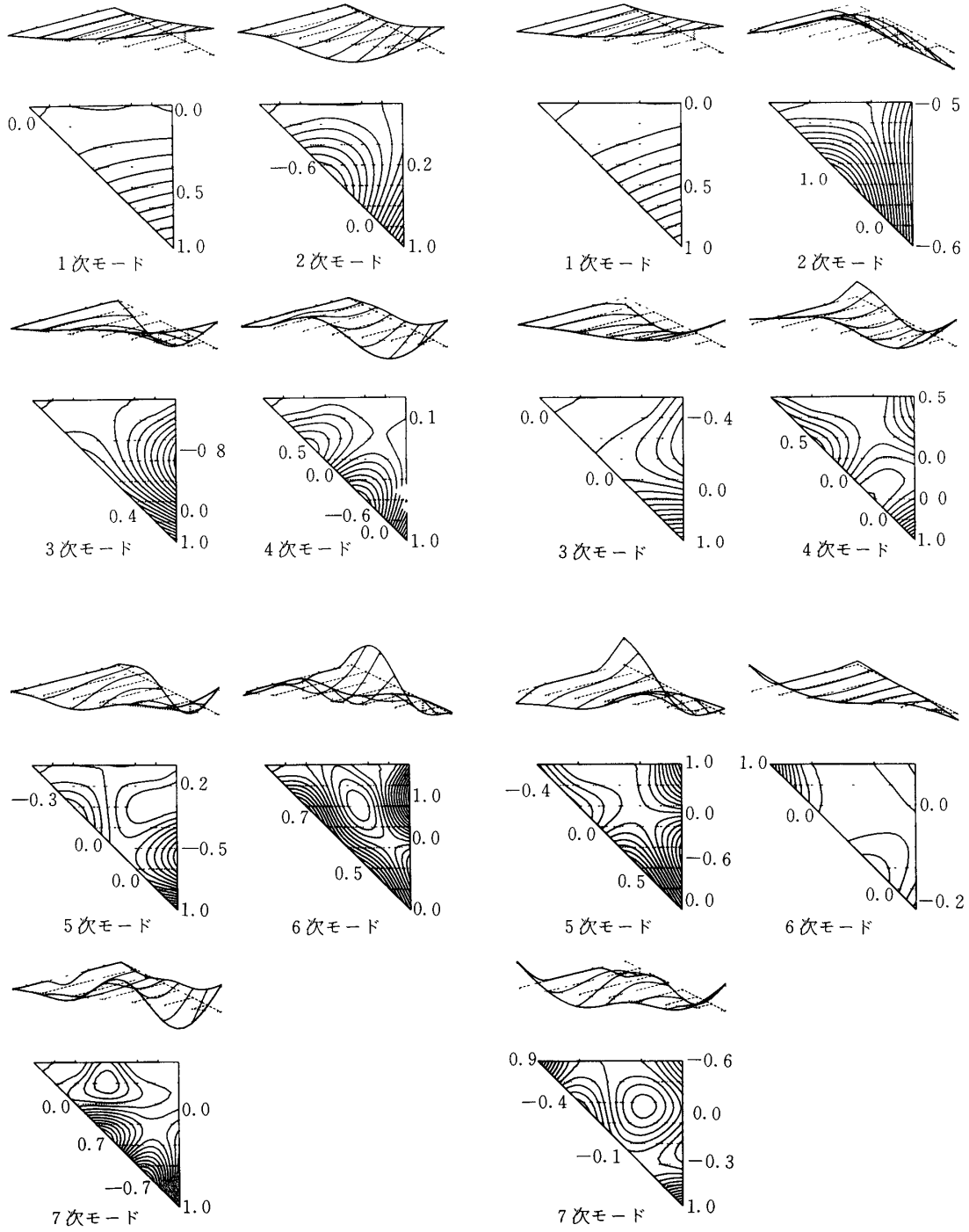
第6図 フラッタに及ぶ固定部分の影響



第7図 動圧パラメタによる固有振動数の変化



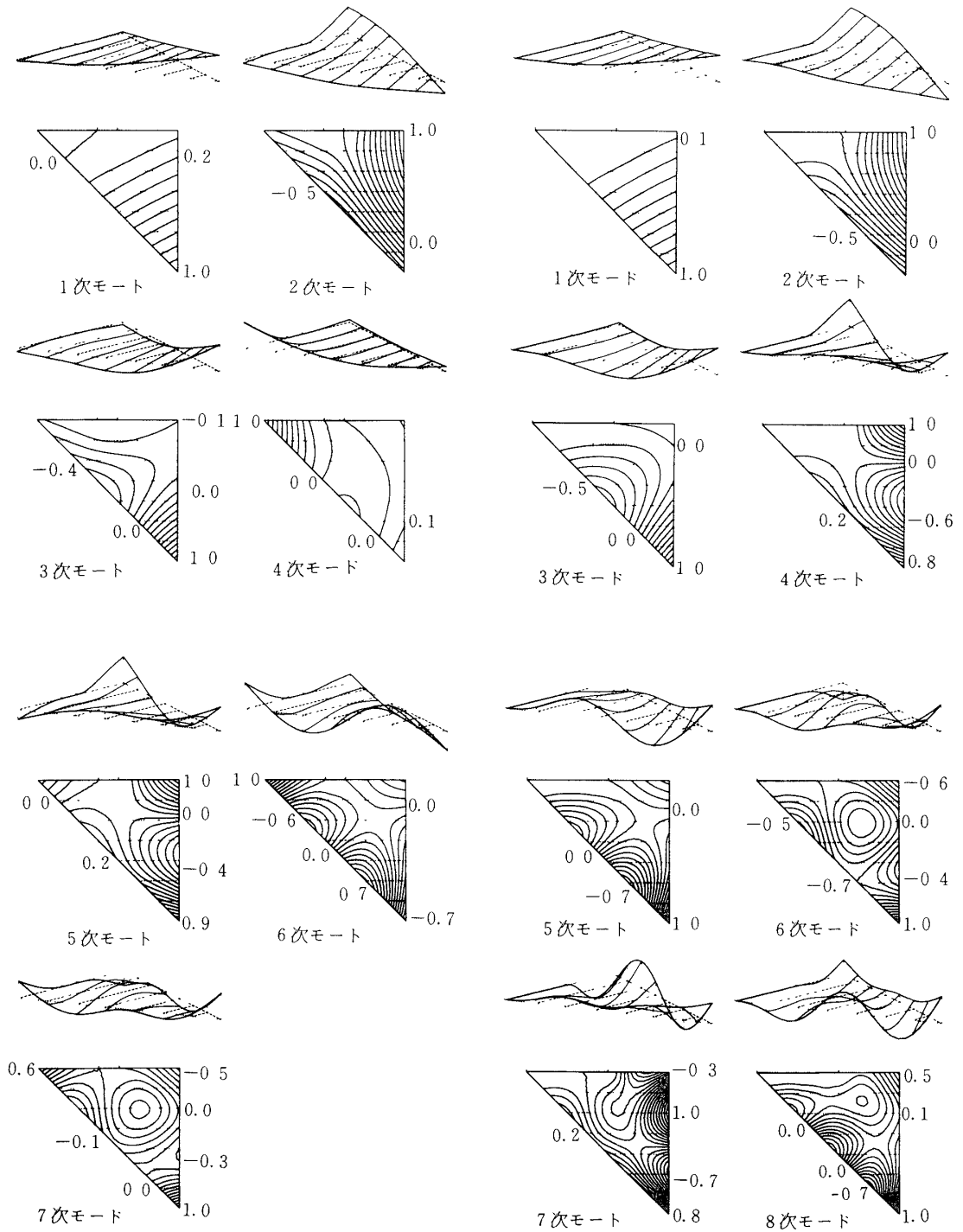
(a) モデル A (b) モデル D2
 第8図 振動モードの概要とその等高線



(c) モデル D3

(d) モデル D4

第8図 (続き)



(e) モデル E1

(f) モデル C3

第 8 図 (続き)

次連成フラッタとなっている。翼のフラッタは、基本的に曲げと振りの連成フラッタであるから、高次の振動数が互いに接近していても必ずしもそれらのモード間でフラッタが起る訳ではない。(c)図はモデルC3の場合で、2-3次連成フラッタである。これは振動モードの比較から分ることであるが、モデルC3では振りの成分の強いモードが3次モードに相当している為である。(d)図はモデルB4の場合で、1次及び2次固有振動数が接近していることからその q_F も非常に低くなっている。(e)図はモデルE1の場合で、1-2次及び3-4次連成フラッタが起っており、3-4次連成フラッタの方が低い q_F を与えている。これに比べ(f)図のモデルE2では、1-2次連成フラッタが低い動圧パラメタで起っているだけである。第8図は振動モードの概略とその等高線である。夫々モデルA、D2、D3、D4、E1及びC3の場合を示す。モデルAの振動モードを見ると曲げと振りとが連成して複雑な様子を示しているが、2次及び4次の振動モードの節線は翼付根から翼前縁に達しており、振り成分の強いモードといえることができる。モデルA、D2及びD3の振動モードを比較してみると、それらはほぼ同一で翼付根自由辺の影響は高次モードに僅かに見られる丈であり、フラッタ特性への影響は大きくないことが推定できる。D4の場合には2次及び3次の振動モードにも影響が現れてきている。E1の場合には図から分るように振り成分の強い振動モードは3次及び4次であり、これらのモードが曲げ成分の強い1次及び2次のモードと夫々連成する。それが第7図(e)の固有振動数の変化の図に示されている訳で、2-3次の連成フラッタは起らない。第8図(f)のC3の場合には、Aと比較して見ると2次と3次の振動モードが丁度逆になっており、又4次と5次の振動モードも逆になっている。そして振り成分の強いモードは3次と5次である。この為C3の場合には2-3次の連成フラッタが起ることが推定され、第7図(c)の結果はこれを裏付けている。

4. 結 論

本研究は低アスペクト比片持板翼の超音速フラッタを、その固定部の減少の影響に着目して、有限要素法により解析した結果を示したものである。本研究により次の諸点が明らかになった。

- (1) 本研究の範囲内では、非適合要素によるフラッタ解析も工学上十分な結果を与えている。
- (2) 本研究で扱った三角翼の場合、その固定部減少の影響は、翼付根翼弦の70%以上が固定されている場合には僅かであるが、それを超えると固定部の位置により非常に大きくなる。
- (3) 固定部が翼付根翼弦の70%以下の場合には高次連成フラッタが起る可能性があり、その様相を振動モードの検討等から明らかにした。

本研究は板厚一定の片持三角翼の場合にその固定部減少の影響を明らかにしたものであるが、実際の翼の場合には翼付根での支持剛性を考慮すべきであろうし、更にこれらの影響を含めたロケットや航空機全体の自由度を考慮したフラッタ解析が必要でもであろう。これらの点については今後の研究課題としたい。

本研究に際し御配慮戴いた東京大学宇宙航空研究所森大吉郎教授、及び数値計算に際し助言して下さった東京大学大学院学生谷沢一雄君に謝意を表すものである。

昭和51年7月7日 航空力学部

参 考 文 献

- [1] M. D. Olson: Finite Elements Applied to Panel Flutter, *AIAA J.*, 5 (1967), 2267.
- [2] Kariappa & B. R. Somashekar: Application of Matrix Displacement Method in the Study of Panel Flutter, *AIAA J.*, 7 (1969), 50.
- [3] M. D. Olson: Some Flutter Solutions Using Finite Elements, *AIAA J.*, 8 (1970), 747.
- [4] Kariappa, B. R. Somashekar & C. G. Shah: Discrete Element Approach to Flutter of Skew Panels with In-plane Forces under Yawed Supersonic Flow, *AIAA J.*, 8 (1970), 2017.
- [5] S. S. Rao: Finite Element Flutter Analysis of Multi-Web Wing Structures, *J. Sound Vib.*, 38, (1975), 233.
- [6] T. Y. Yang: Flutter of Flat Finite Element Panels in a Supersonic Potential Flow, *AIAA J.*, 13 (1975), 1502.
- [7] 市川輝雄 : 有限要素法の手法を取り入れたフラッタ解析の試み, 日本鋼構造協会第3回大会研究集会マトリックス構造解析講演論文集 (1969), 539.
- [8] M. J. Turner & J. B. Bartlay: Flutter Prevention in Design of the SST, *Dynamic Response of Structures* (edited by G. Herrmann), Pergamon (1972), 95.
- [9] C. Bon & M. Geradin: On the Numerical Solution of Large Eigenvalue Problems Arising in Panel Flutter Analysis by the Finite Element Method, *Computers Structures*, 4 (1974), 1223.
- [10] O. C. Zienkiewicz & Y. K. Cheung: *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill (1967). (吉識雅夫監訳: マトリックス有限要素法, 培風館)
- [11] 名取通弘, 砂川恵: 翼のフラッタに及ぼす減衰特性及び支持剛性の影響, 東京大学宇宙航空研究所報告, 11(1975), 559
- [12] 名取通弘, 小林繁夫: 板翼の超音速フラッタ特性, 日本航空宇宙学会誌, 21, (1973), 407.