

錐体上の気体吹き出しを伴う層流境界層

松 野 謙 一・河 村 龍 馬

Laminar Boundary Layer with Gas Injection on a Conical Body

By

Ken-ichi MATSUNO and Ryuma KAWAMURA

Abstract: The present paper deals with the theory of laminar boundary layer on a nonaxisymmetric conical body at supersonic flight with special reference to the effect of gas injection on the body surface. The Moore's method of solving boundary layer flow on a supersonic circular cone at small angles of attack is extended to the case of a conical body with nearly circular but otherwise arbitrary cross-section and further to the case of boundary layer with gas injection. The outer edge conditions are determined by the inviscid conical flow solution around the body obtained by an extension of the Stone's method for a circular cone. It is found that an exact similar solution to the first order perturbation equations of the boundary layer with gas injection on the conical body as stated above exists at a specific distribution of the rate of the gas injection. In case of air injection into air stream over isothermal conical body surface similarity of the boundary layer holds at the injected mass flux rate inversely proportional to the square root of the meridional distance from the body apex.

The effects of mass injection on boundary layer characteristics are discussed for the cases of several shapes of conical bodies at $M_\infty = 5.0$ and Prandtl No. $P_r = 0.738$. The results show that the injection effects on heat transfer and skin friction are more significant at the leeward side than at the windward side in the cross flow plane.

概 要

非軸対称錐体上の吹き出しを伴う相似層流境界層に対して、微小擾乱法による1次オーダーの厳密解が提示される。以前に、本報告において、小迎角円錐上の層流境界層に対する Moore の理論を、円に近い任意断面形状をもつ錐体の場合に適用できる様に拡張した。本報告においては、境界層内への気体吹き出し (gas injection-transpiration cooling) のある場合も含め、更に理論が発展せられ、相似境界層方程式に対する厳密解が、与えられ、解の数表化が、可能となる。この場合、多孔質錐体表面か

ら吹き出される気体の質量流束分布は、境界層が相似となる様に、錐体頂点からの距離の平方根の逆数に比例する様に与えられる。境界層外縁条件としての非粘性錐状流の解についても、Stone の小迎角円錐に対する解析法が、一般断面形状をもつ錐体の場合へと拡張される。

応用例として、 $M_\infty = 5.0$ における4種類の錐体を例にとり、境界層内諸特性に対する気体吹き出しの効果について議論が、なされる。その結果、気体吹き出しによる冷却効果については、交叉流面で考えると、風上側よりも、風下側における方が、より著しいことが示される。

記 号

- a : 音速
- C : 温度-粘性率関係の比例定数 ((24) 式参照)
- c_p : 定圧比熱
- c_v : 定容比熱
- D_p : (33.5) 式参照
- E_n : フーリエ係数 ((3) 式参照)
- f : 流れ関数
- f_w : 吹き出し率パラメーター
- g : 流れ関数
- h : エンタルピー
- h_a : (46) 式参照
- \bar{h}_e : 非粘性流解析における零迎角基準円錐上のエンタルピー
- k : 熱伝導率
- l^* : 有次元参照長さ
- M_∞ : 一様流マッハ数
- P_r : プラントル数
- p : 圧力
- q : 物体表面への熱伝達量
- q_0 : 零迎角基準円錐上への吹き出しなし熱伝達量
- S : エントロピー
- s : 境界層座標 (図1 参照)
- T : 温度
- $T_{t\infty}$: 一様流貯気槽温度
- U_∞ : 一様流速度
- u : x 方向または、極座標系方射方向の速度成分
- \bar{u}_b : 非粘性流における零迎角基準円錐面上の速度
- v : y 方向または θ 方向速度成分
- w : s 方向または φ 方向速度成分
- x : 境界層座標 (図1 参照)

y : 境界層座標 (図 1 参照)

α : 迎角

γ : 比熱比 ($=c_p/c_v$)

ε_n : フーリエ係数 (3)式参照)

θ : 極座標系天頂角

$\bar{\theta}_b$: 基準円錐の半頂角

λ : プラジウス相似変数

μ : 粘性係数

ρ : 密度

φ : 極座標系方位角

τ : 摩擦応力

τ_0 : 零迎角基準円錐上の吹き出しなし摩擦応力

()^{*} : 有次元量

()_r^{*} : 有次元参照状態

()⁻ : 非粘性流零次オーダーの解 (Taylor-Maccoll の解)

()_b : 非粘性物体表面上の状態

()_e : 境界層外縁の状態

()_w : 境界層流れ物体面上の状態

()_∞ : 一様流の状態

1. 序 論

高速で航行する飛行体においては、とりわけ空力加熱が問題となり、熱防御法を含めて、物体への熱負荷の評価は、重要な問題である。高レイノルズ数流れにおけるこのような問題は、境界層近似を用いて解析するのが、普通であり、本質的である。取扱い方としては、一般には、鈍頭物体、又は円錐が、モデルとして用いられ、軸対称問題として、二次元境界層が、従来から精力的に研究がなされている。現実の問題として、物体自体が、必ずしも零迎角で飛行するとはかぎらないことから、三次元境界層を取扱うのが、望ましいのは当然のことである。三次元境界層を取扱うにあたり、解析的には、外部非粘性流が容易に求められないこと、基礎方程式中における独立変数の増加による複雑化、剥離の定義等の問題点や困難さが、あるように思われる。このような困難さは、円錐まわりの三次元境界層を解く場合には、幾分緩和される。外部非粘性流は、双曲型方程式となり、境界層も放物型であるので、両領域とも、煩雑さをいとわなければ、下流方向に、行進積分 (marching integration) により数値的に解けるからである。しかしながら、数値計算上の制約もあって、三次元境界層を解いたものは多くなく、また、数値解析以外に厳密解が未だ求められていないのが現状である。

さて、一般に有迎角錐体まわりの流れは、次の様な理由から空気力学研究の興味ある対象のひとつとなる。錐体自体が高揚力形状物体であり、もし外部流を錐状流と仮定すると、解

析の面で強力な簡略化を与える。またその境界層は、本質的に三次元性をもち、幾多の三次元境界層の特性を含んでいる。したがって、錐体上の境界層の解明は、より一般の三次元境界層の解明のひとつの手がかりを与えられ考えられる。

この様な、錐体上の三次元層流境界層の取扱いは、特に円錐をモデルとして研究が行なわれている。最近の研究は、差分法を用いて流線方向に行進積分して解く手法のものが主流を占めている [1] ~ [3]。数値的手法は積分開始のための初期条件（出発値）が必要であり、非軸対称錐体の場合、行進（marching）開始点の設定等の問題があり、個々の問題に依存するため一般的でない欠点がある。更に、円錐問題に限っても、小迎角の場合を除いて、風下対称面に於ける double-valued solution の存在が指摘され [4]、未解決の問題も多い。円錐に限らず、錐体自体が実際の飛行体のひとつのモデルとしての意味をもつことから、錐体まわりの流れの取扱いは、できる限り解析的にかつ厳密に取扱われるのが望ましい。

錐体まわりの境界層を厳密に取扱ったものに、小迎角円錐を対象として、微小擾乱の手法を用いた Moore の理論 [5] がある。相似境界層方程式を、プラントル数 $P_r = 1$ 、断熱壁の場合について解かれたもので、解が数表化されている。著者らは、文献 [6] に於いて、一般の非軸対称錐体の物体面への熱伝達を評価することを目的として、Moore の理論を、Fourier 級数表示された円に近い任意断面形状をもつ錐体の場合に適用できる様に拡張し、その基礎方程式を導出した。

上記論文では、物体への熱伝達について、三次元効果（交叉流効果）の評価解析を目的としたもので、境界層内への気体吹き出し等の何らかの冷却法が講じられた場合については考慮されていない。ここで実際問題として、熱防御のための強制冷却が加えられた時、熱伝達特性にどの程度の効果を現すのか、三次元境界層として評価解析することも重要な問題である。冷却のため、境界層内に同種気体が吹き出された場合を考えると、吹き出しの効果は、低温の冷却気体が物体表面付近を覆うことによって、また同時に、境界層内の質量増加により境界層厚さの増加をはかり、更に、境界層内各種物性量のプロファイルを変えることによって、物体への熱伝達を小さくするように現れる。三次元境界層においては、気体吹き出しによる冷却効果に、交叉流の効果が付加される。例えば、円錐について考えた場合、極限流線（limiting streamline）がすべて風下対称面に集まることから、吹き出された気体が、すべて風下対称面に集まり、境界層厚さが、風上側よりも更に増加せしめられ、そこでのより大きな冷却効果が考えられる。このように、三次元境界層内への気体吹き出しのある場合の境界層諸特性の評価解析は、実際的にも重要な問題であるが、ほとんど文献が見当たらないのが現状である。

本論文の目的は、一般断面形状をした錐体上の同種気体吹き出しを伴う層流境界層の熱伝達等の諸特性を評価解析することである。このため、文献 [6] の理論を気体吹き出しのある場合も含む様に、更に発展させる。相似境界層を対象とするので、吹き出される気体の mass flux は、錐体頂点からの距離の平方根の逆数に比例する場合を取扱う。

境界層外縁条件として必要な非粘性錐状流についても高マッハ数領域でも適用できる様に、一次オーダーのエントロピー変化も考慮して、Stone の理論 [7] を、一般断面形状の錐体の場合へと拡張することを試みる。

境界層方程式の解については、基礎方程式系から流れのパラメータを消去し、厳密解の数表化を試みる。

応用として、まず円錐の場合を例にとり、気体吹き出しの、熱伝達等の境界層諸特性に及ぼす影響について議論し、次に、3種の非軸対称錐体の場合について、議論する。

2. 錐体面の表示および無次元化

2.1 錐体面の表示

非軸対称錐体表面の表示は、body fixed polar coordinate system (r, δ, ϕ) で表示すると次の様に Fourier 級数表示される：

$$\delta = \delta_b = \bar{\theta}_b + \sum_n (\epsilon_n \cos n\phi + E_n \sin n\phi) \quad (1)$$

ここでは、 $|n\epsilon_n/\bar{\theta}_b|$, $|nE_n/\bar{\theta}_b| \ll 1$ なる円に近い断面形状をもつ錐体を取り扱い $n\epsilon_n/\bar{\theta}_b$, $nE_n/\bar{\theta}_b$ の大きさのオーダーを " ϵ " とする。本論文中においては、 $O(\epsilon^2)$ 以上の高次微小量はすべて無視する。(1)式で表わされる錐体は、小迎角 α の状態で一様流におかれた時、 $\alpha/\bar{\theta}_b = O(\epsilon)$ のもとに、wind fixed polar coordinate system (r, θ, φ) では、

$$\theta = \theta_b = \bar{\theta}_b + \sum_n (\epsilon_n \cos n\varphi + E_n \sin n\varphi) + \alpha \cos \varphi \quad (2)$$

と表示される。 ϕ と φ は、同等に考えられるので、迎角 α の効果は、 ϵ_1 に含まれると考えると、 (r, δ, ϕ) 系でも、 (r, θ, φ) 系でも同等で、 ϵ_1 を $(\epsilon_1 + \alpha)$ と考えると、一般には、非軸対称錐体面は、 (r, θ, φ) 系で、次の様に表示される。(補遺A参照)

$$\theta = \theta_b = \bar{\theta}_b + \sum_n (\epsilon_1 \cos n\varphi + E_n \sin n\varphi) \quad (3)$$

なお、 $\bar{\theta}_b$ は、問題としている錐体と等断面積の円錐の半頂角に対応する。以下の微小擾乱法による解析では、零次オーダーの基本解に対応するので、半頂角 $\bar{\theta}_b$ の円錐を、問題とする錐体に対する基準円錐と呼ぶことにする。

2.2 無次元化

各々、有次元物理量は、参照状態 (reference condition) により次の様に無次元化される。

$$\left. \begin{aligned} u &= u^*/u_r^*, \quad v = v^*/u_r^*, \quad w = w^*/u_r^* \\ a &= a^*/u_r^*, \quad \rho = \rho^*/\rho_r^*, \quad p = p^*/(\rho_r^* u_r^{*2}) \\ T &= T^*/(u_r^{*2}/2c_{pr}^*), \quad h = h^*/u_r^{*2} \\ x &= x^*/l_r^*, \quad y = y^*/l_r^* \quad (l_r^*: \text{参照長さ}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3. 非粘性錐状流——境界層外縁条件

錐体上の境界層を取扱う為には、境界層外縁における境界条件として、非粘性流の、とくに物体表面上の速度成分と熱力学的状態量が必要である。著者らは、文献[8]において、

円からわずかに偏った任意断面形状をもつ錐体まわりの超音速非粘性流に対する近似解を等エントロピ流仮定のもとに簡便な形で与えた。更に高いマッハ数の流れになると、等エントロピ仮定はもはや現実的ではなく、円周方向のエントロピ変化も考慮しなければならない。周方向のエントロピ変化を考慮した解析はいくつかなされている。ここでは、小迎角円錐に対する Stone の解析結果 [7] を、(3)式で表示された非軸対称錐体に適応できる様に拡張する。基本的には、半頂角 $\bar{\theta}_b$ の基準円錐まわりの流れ（零次オーダー）が、円からの歪み量（偏り量） ε_n, E_n (Stone [7] では α) により擾乱を受けていると仮定した一次オーダーの微小擾乱法に基づいている。なお、任意断面形状をした錐体まわりの流れに対する解析は、Ferri ら [9] によりなされているが、次の点で、本解析と異なる。本解析では、錐体の円錐からの変形により流れが擾乱を受けているとして解析を進めているのに対し、Ferri らは、衝撃波形状の円錐形よりの変形をもとに、流れの擾乱を定めて解析している。また、従属変数についても、Ferri らは、エントロピ S を用いているので、使用する基礎方程式も異なる。しかしながら、両方とも、一次オーダーの微小擾乱流理論で、最終結果は、本質的に、同一と考えられる。

3.1 基礎方程式

解析の便宜上、無次元化の参照状態として、一様流の貯気槽状態および極限速度を採る。このとき、非粘性錐状流に対する基礎方程式は極座標系では次の様になる。

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho w) + 2\rho u \sin \theta = 0 \quad (5.1)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 - w^2 = 0 \quad (5.2)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + uv - w^2 \cot \theta = 0 \quad (5.3)$$

$$v \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + uw + vw \cot \theta = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{2}{r-1} a^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 1 \quad (5.5)$$

$$a^2 = \frac{r p}{\rho} \quad (5.6)$$

$$2h + (u^2 + v^2 + w^2) = 1 \quad (5.7)$$

(5) 式より p および ρ を消去すると、

$$\begin{aligned} u \left(2 - \frac{v^2 + w^2}{a^2} \right) + v \cot \theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \\ + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \left(1 - \frac{w^2}{a^2} \right) - \frac{vw}{a^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

3.2 微小擾乱法

(3) 式によって Fourier 級数表示された錐体上の流れは, 半頂角 $\bar{\theta}_b$ の零迎角基準円錐上の流れ (零次オーダー) が偏り ε_n , E_n により擾乱を受けていると考える. 各物理量を次の様に表わす.

$$u(\theta, \varphi) = \bar{u}(\theta) + \sum_n (\varepsilon_n u_n(\theta) \cos n\varphi + E_n U_n(\theta) \sin n\varphi) \quad (7.1)$$

$$v(\theta, \varphi) = \bar{v}(\theta) + \sum_n (\varepsilon_n v_n(\theta) \cos n\varphi + E_n V_n(\theta) \sin n\varphi) \quad (7.2)$$

$$w(\theta, \varphi) = \sum_n (\varepsilon_n w_n(\theta) \sin n\varphi - E_n W_n(\theta) \cos n\varphi) \quad (7.3)$$

$$p(\theta, \varphi) = \bar{p}(\theta) + \sum_n (\varepsilon_n p_n(\theta) \cos n\varphi + E_n P_n(\theta) \sin n\varphi) \quad (7.4)$$

$$\rho(\theta, \varphi) = \bar{\rho}(\theta) + \sum_n (\varepsilon_n \rho_n(\theta) \cos n\varphi + E_n R_n(\theta) \sin n\varphi) \quad (7.5)$$

$$h(\theta, \varphi) = \bar{h}(\theta) + \sum_n (\varepsilon_n h_n(\theta) \cos n\varphi + E_n H_n(\theta) \sin n\varphi) \quad (7.6)$$

ここで, 零次オーダー ($\bar{\quad}$) で表示) は, Taylor-Maccoll の解に相当する.

(5) および (6) 式に (7) 式を代入し, 零次オーダー, および ε_n , E_n に関する一次オーダーを整理すると, 次の常微分方程式系が得られる. ($(\quad)' = d(\quad)/d\theta$)

零次オーダー :

$$\bar{u}'' = -\bar{u} + \frac{a^2(\bar{u} + \bar{v} \cot \theta)}{\bar{v}^2 - \bar{a}^2} \quad (8.1)$$

$$\bar{u}' = \bar{v} \quad (8.2)$$

$$\bar{\rho}' = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{v}} (\bar{v}' + \bar{v} \cot \theta + 2\bar{u}) \quad (8.3)$$

$$\bar{a}^2 = \frac{r-1}{2} (1 - \bar{u}^2 - \bar{v}^2) \quad (8.4)$$

$$\bar{h} = \frac{1}{2} (1 - \bar{u}^2 - \bar{v}^2) \quad (8.5)$$

$$\bar{p} = \frac{r-1}{r} \bar{\rho} \bar{h} \quad (8.6)$$

一次オーダー :

$$A(\theta)u_n'' + B(\theta)u_n' + C(\theta)u_n + \frac{n}{\sin \theta} w_n = 0 \quad (9.1)$$

$$\bar{v} w_n' + (\bar{u} + \bar{v} \cot \theta) w_n - \frac{n}{\bar{\rho} \sin \theta} p_n = 0 \quad (9.2)$$

$$\bar{v} \sin \theta \rho_n' - \frac{\bar{\rho}' \bar{v} \sin \theta}{\bar{\rho}} \rho_n$$

$$+\bar{\rho}\left[-\frac{\sin\theta(\bar{v}'+2\bar{u})}{\bar{v}}v_n+\sin\theta v'_n+nw_n+2\sin\theta u_n\right]=0 \quad (9.3)$$

$$v_n=u'_n \quad (9.4)$$

$$h_n=-(\bar{u}u_n+\bar{v}v_n) \quad (9.5)$$

$$p_n=\frac{r-1}{r}(\bar{h}\rho_n+\bar{\rho}h_n) \quad (9.6)$$

ここで

$$A(\theta)=1-\frac{\bar{v}^2}{\bar{a}^2} \quad (10.1)$$

$$B(\theta)=-\frac{r-1}{\bar{a}^4}\bar{v}^3(\bar{u}+\bar{v}')-\frac{2\bar{u}\bar{v}}{\bar{a}^2}+\cot\theta-\frac{2\bar{v}\bar{v}'}{\bar{a}^2} \quad (10.2)$$

$$C(\theta)=-\frac{r-1}{\bar{a}^4}\bar{u}\bar{v}^2(\bar{u}+\bar{v}')+2-\frac{\bar{v}^2}{\bar{a}^2} \quad (10.3)$$

大文字 U_n, V_n, \dots についても全く同様であるので省略する。(上述 (9) 式中, $u_n \rightarrow U_n, v_n \rightarrow V_n$ 等と置き換えることにより得られる。以下についても同様。)

3.3 境界条件

(1) 錐体面における境界条件

境界条件として, 流れは, 錐体面に沿うことが要求される。これは, 錐体面 $\theta=\theta_b(\varphi)$ において,

$$v\frac{\partial}{\partial\theta}[\theta-\theta_b]+\frac{w}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}[\theta-\theta_b]=0 \quad (11)$$

が成立することを意味する。(11) 式に (3) 式および (7) 式を代入し, 各項を $\theta=\bar{\theta}_b$ で Taylor 級数に展開する。零次オーダーおよび ε_n, E_n に関する一次オーダーを整理すると, 次の境界条件を得る。

零次オーダー

$$\bar{v}(\bar{\theta}_b)=0 \quad (12)$$

一次オーダー

$$v_n(\bar{\theta}_b)=2\bar{u}_b \quad (-2\bar{u}_b=\bar{v}'(\bar{\theta}_b)) \quad (13)$$

(ii) 衝撃波面における境界条件

衝撃波面の方程式を次の様に仮定する。

$$\theta=\theta_s(\varphi)=\bar{\theta}_s+\theta_{sp}(\varphi) \quad (14.1)$$

$$=\bar{\theta}_s+\sum_n(\varepsilon_n\theta_{sn}\cos n\varphi+E_n\theta_{sn}\sin n\varphi) \quad (14.2)$$

このとき衝撃波面に垂直方向の単位ベクトル \mathbf{n} は,

$$\mathbf{n} = (0, 1, -\frac{1}{\sin \theta_s} \frac{d}{d\varphi} \theta_{sp}(\varphi)) \quad (15)$$

また接線方向の単位ベクトル $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ は,

$$\mathbf{t}_1 = (1, 0, 0) \quad (16.1)$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{n} = (0, \frac{1}{\sin \theta_s} \frac{d}{d\varphi} \theta_{sp}(\varphi), 1) \quad (16.2)$$

である. 今,

$$\nu_I = (U_\infty \cos \theta_s, -U_\infty \sin \theta_s, 0) \cdot \mathbf{n} \quad (17.1)$$

$$\nu_{II} = (u, v, w) \cdot \mathbf{n} \quad (17.2)$$

とおく. ただし, 添字 I および II は, それぞれ, 衝撃波前方および後方を示す. Rankine-Hugoniot の関係式より,

$$(U_\infty \cos \theta_s, -U_\infty \sin \theta_s, 0) \cdot \mathbf{t}_1 = (u, v, w) \cdot \mathbf{t}_1 \quad (18.1)$$

$$(U_\infty \cos \theta_s, -U_\infty \sin \theta_s, 0) \cdot \mathbf{t}_2 = (u, v, w) \cdot \mathbf{t}_2 \quad (18.2)$$

$$\rho_I \nu_I = \rho_{II} \nu_{II} \quad (18.3)$$

$$p_{II} - p_I + \rho_I \nu_I (\nu_{II} - \nu_I) = 0 \quad (18.4)$$

$$\nu_{II} = \frac{1}{\gamma+1} \left\{ (\gamma-1) \nu_I + \frac{2a_\infty^2}{\nu_I} \right\} \quad (18.5)$$

が成立する. (18) 式に (7) 式および (14) 式を代入し, 各項を $\theta = \bar{\theta}_s$ で Taylor 級数展開して, 零次, 一次各オーダーに整理すると, 衝撃波面における境界条件を得る.

零次オーダー

$$\bar{u}(\bar{\theta}_s) = U_\infty \cos \bar{\theta}_s \quad (19.1)$$

$$\bar{u}'(\bar{\theta}_s) = \bar{v}(\bar{\theta}_s) = -U_\infty \sin \bar{\theta}_s \frac{(r-1)M_\infty^2 \sin^2 \bar{\theta}_s + 2}{(\gamma+1)M_\infty^2 \sin^2 \bar{\theta}_s} \quad (19.2)$$

$$\bar{\rho}(\bar{\theta}_s) = (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \frac{(\gamma+1)M_\infty^2 \sin^2 \bar{\theta}_s}{(\gamma-1)M_\infty^2 \sin^2 \bar{\theta}_s + 2} \quad (19.3)$$

一次オーダー

$$u_n(\bar{\theta}_s) = -K_1 \theta_{sn} \quad (20.1)$$

$$v_n(\bar{\theta}_s) = K_2 \theta_{sn} \quad (20.2)$$

$$w_n(\bar{\theta}_s) = \frac{nK_1}{\sin \bar{\theta}_s} \theta_{sn} \quad (20.3)$$

$$\rho_n(\bar{\theta}_s) = K_3 \theta_{sn} + K_4 v_n(\bar{\theta}_s) \quad (20.4)$$

ここに,

$$U_\infty = \left(1 + \frac{2}{r-1} \cdot \frac{1}{M_\infty^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (21.1)$$

$$K_1 = \bar{v}(\bar{\theta}_s) + U_\infty \sin \bar{\theta}_s \quad (21.2)$$

$$K_2 = -\bar{v}'(\bar{\theta}_s) - \bar{v}(\bar{\theta}_s) \cot \bar{\theta}_s - 2 \frac{r-1}{r+1} U_\infty \cos \bar{\theta}_s \quad (21.3)$$

$$K_3 = -\frac{1}{\bar{v}(\bar{\theta}_s)} \{ \rho_\infty U_\infty \cos \bar{\theta}_s + \bar{\rho}'(\bar{\theta}_s) \bar{v}(\bar{\theta}_s) + \bar{\rho}(\bar{\theta}_s) \bar{v}'(\bar{\theta}_s) \} \quad (21.4)$$

$$K_4 = -\frac{\bar{\rho}(\bar{\theta}_s)}{\bar{v}(\bar{\theta}_s)} \quad (21.5)$$

3.4 境界層外縁条件

(8) および (9) 式を, (19), (20) 式の境界条件のもとに解くと, 非粘性解が得られる. 境界層外縁条件としては, 特に, 錐体面上の値が必要とされる. 次章の境界層解析に於ける無次元化によって表示すると, 次の様に境界層外縁条件が与えられる.

$$u_e(\varphi) = 1 + \sum_n (\varepsilon_n u_{en} \cos n\varphi + E_n U_{en} \sin n\varphi) \quad (22.1)$$

$$w_e(\varphi) = \sum_n (\varepsilon_n w_{en} \sin n\varphi - E_n W_{en} \cos n\varphi) \quad (22.2)$$

$$h_e(\varphi) = \bar{h}_e + \sum_n (\varepsilon_n (-u_{en}) \cos n\varphi + E_n (-U_{en}) \sin n\varphi) \quad (22.3)$$

$$p_e(\varphi) = \bar{p}_e + \sum_n (\varepsilon_n p_{en} \cos n\varphi + E_n P_{en} \sin n\varphi) \quad (22.4)$$

ここで, 本章で用いた u_n 等との関連は,

$$\left. \begin{aligned} u_{en} &= u_n(\bar{\theta}_b) / \bar{u}_b, \quad w_{en} = w_n(\bar{\theta}_b) / \bar{u}_b, \\ \bar{h}_e &= \bar{h}(\bar{\theta}_b) / \bar{u}_b^2, \quad \bar{p}_e = \bar{p}(\bar{\theta}_b) / (\bar{\rho}(\bar{\theta}_b) \bar{u}_b^2) \\ p_{en} &= \frac{r-1}{r} \left(\bar{h}_e \frac{\rho_n(\bar{\theta}_b)}{\bar{\rho}(\bar{\theta}_b)} - u_{en} \right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

である.

4. 境界層方程式

本章に於いては、解析の便宜上、無次元化の参照状態として、非粘性流零次オーダーの錐体面上の状態、すなわち、零迎角基準円錐上の境界層外縁状態を採る。

温度-粘性率の関係は、

$$\frac{\mu^*}{\mu_r^*} = C \frac{T^*}{T_r^*} \quad (C = \text{const.}) \quad (24)$$

で与えられると仮定する。参照長さ l_r^* は、

$$l_r^* = \frac{\mu_r^* C}{\rho_r^* u_r^*} \quad (25)$$

とする。比熱 c_p, c_v およびプラントル数 $Pr (= c_p^* \mu^* / k^*)$ は、一定と仮定する。

4.1 基礎方程式

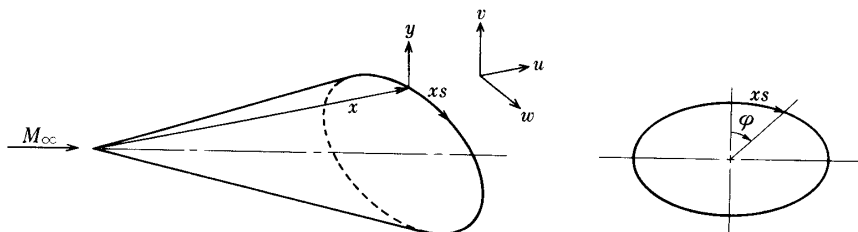
錐体上の層流境界層に対する基礎方程式は、図1に示す様な座標系 (x, y, s) により表すと、無次元化した状態で次の様になる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho x u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho x v) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial s}(\rho x w) = 0 \quad (26.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{x} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{x} w^2 \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T}{T_r} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (26.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{w}{x} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{x} u w \right) = - \frac{1}{x} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T}{T_r} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (26.3)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{w}{x} \frac{\partial h}{\partial s} \right) \\ &= u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{w}{x} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{T}{T_r} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T}{T_r} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (26.4)$$



第1図 境界層座標系

$$p = \frac{r-1}{r} \rho h \quad (26.5)$$

(26) 式に、次の三段階の変数変換を施す。流れ関数 Ψ , Φ は、(26.1) 式より、

$$\rho x u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (27.1)$$

$$\rho x v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (27.2)$$

$$\rho x w = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (27.3)$$

で定義される。

第一段階 Howarth 変換

$$X = x \quad (28.1)$$

$$Y = \left(\frac{p}{p_e} \right)^{-1/2} \int_0^y \rho dy \quad (28.2)$$

$$S = s \quad (28.3)$$

$$\Psi = \left(\frac{p}{p_e} \right)^{-1/2} \psi \quad (28.4)$$

$$\Phi = \left(\frac{p}{p_e} \right)^{-1/2} \phi \quad (28.5)$$

第二段階 Mangler 変換

$$\xi = L^2 \int_0^X x^2 dX = \frac{1}{3} L^2 X^3 \quad (29.1)$$

$$\eta = LXY \quad (29.2)$$

$$\zeta = S \quad (29.3)$$

$$F = L\Psi \quad (29.4)$$

$$G = L\Phi \quad (29.5)$$

第三段階 Blasius 変換

$$\lambda = \xi^{-1/2} \eta \quad (30.1)$$

$$\zeta = \zeta \quad (30.2)$$

$$f(\lambda, \zeta) = \xi^{-1/2} F \quad (30.3)$$

$$g(\lambda, \zeta) = \xi^{-1/2} G \quad (30.4)$$

ここで, L は, 任意定数である. 第一段階の変換は, 陽的な密度の寄与を除くためであり, 第二段階は, 連続の式における x の効果を除き, 平面流型に変えるためのものである. 外部非粘性流を錐状流 ($\partial p / \partial x = 0$) と仮定することにより, 第三段階で, 相似型に変換する. 以上の一連の変換により, 境界層方程式は, 次の様に与えられる [10]. ($p'(\zeta) = dp/d\zeta$)

$$\left(f + \frac{1}{3} \frac{p'(\zeta)}{p} g + \frac{2}{3} g_\zeta\right) f_{\lambda\lambda} - \frac{2}{3} g_\lambda f_{\lambda\zeta} + \frac{2}{3} (g_\lambda)^2 + 2f_{\lambda\lambda\lambda} = 0 \quad (31.1)$$

$$\left(f + \frac{1}{3} \frac{p'(\zeta)}{p} g + \frac{2}{3} g_\zeta\right) g_{\lambda\lambda} - \frac{2}{3} g_\lambda g_{\lambda\zeta} - \frac{2}{3} f_\lambda g_\lambda - \frac{2}{3} \frac{p'(\zeta)}{\rho} + 2g_{\lambda\lambda\lambda} = 0 \quad (31.2)$$

$$\begin{aligned} &\left(f + \frac{1}{3} \frac{p'(\zeta)}{p} g + \frac{2}{3} g_\zeta\right) h_\lambda - \frac{2}{3} g_\lambda h_\zeta + \frac{2}{3} \frac{p'(\zeta)}{\rho} g_\lambda \\ &+ 2[(f_{\lambda\lambda})^2 + (g_{\lambda\lambda})^2] + \frac{2}{P_r} h_{\lambda\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (31.3)$$

$$p = \frac{r-1}{r} \rho h \quad (31.4)$$

ここで,

$$u = f_\lambda, w = g_\lambda \quad (32.1) \quad (32.2)$$

$$v = -\frac{1}{\rho \sqrt{3x}} \left(\frac{p}{p_e}\right)^{1/2} \left[\frac{3}{2} f - \frac{1}{2} \lambda f_\lambda + g_\zeta\right] - \frac{Y_s}{x} \left(\frac{p}{p_e}\right)^{1/2} g_\lambda \quad (32.3)$$

さらに, (3) 式により Fourier 級数表示された錐体の場合に適する様に ζ を φ に変換すると, $O(\epsilon^2)$ 以上の高次微小項を無視するとき, 次の様になる. ($p'(\varphi) = dp/d\varphi$).

$$\begin{aligned} &\left(f + \frac{1}{3 \sin \bar{\theta}_b} \frac{p'(\varphi)}{p} g + \frac{2}{3 \sin \bar{\theta}_b} g_\varphi\right) f_{\lambda\lambda} - \frac{2}{3 \sin \bar{\theta}_b} g_\lambda f_{\lambda\varphi} + \frac{2}{3} (g_\lambda)^2 \\ &+ 2f_{\lambda\lambda\lambda} + D_p \left[\left(-\frac{p'(\varphi)}{p} g - 2g_\varphi \right) f_{\lambda\lambda} + 2g_\lambda f_{\lambda\varphi} \right] = 0 \end{aligned} \quad (33.1)$$

$$\begin{aligned} &\left(f + \frac{1}{3 \sin \bar{\theta}_b} \frac{p'(\varphi)}{p} g + \frac{2}{3 \sin \bar{\theta}_b} g_\varphi\right) g_{\lambda\lambda} - \frac{2}{3 \sin \bar{\theta}_b} g_\lambda g_{\lambda\varphi} - \frac{2}{3} f_\lambda g_\lambda \\ &- \frac{2}{3 \sin \bar{\theta}_b} \frac{p'(\varphi)}{\rho} + 2g_{\lambda\lambda\lambda} + D_p \left[\left(-\frac{p'(\varphi)}{p} g - 2g_\varphi \right) g_{\lambda\lambda} + 2g_\lambda g_{\lambda\varphi} \right. \\ &\left. + 2\frac{p'(\varphi)}{\rho} \right] = 0 \end{aligned} \quad (33.2)$$

$$\left(f + \frac{1}{3 \sin \bar{\theta}_b} \frac{p'(\varphi)}{p} g + \frac{2}{3 \sin \bar{\theta}_b} g_\varphi\right) h_\lambda - \frac{2}{3 \sin \bar{\theta}_b} g_\lambda h_\varphi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3 \sin \bar{\theta}_b} \frac{p'(\varphi)}{\rho} g_\lambda + 2[(f_{\lambda\lambda})^2 + (g_{\lambda\lambda})^2] + \frac{2}{P_r} h_{\lambda\lambda} \\
& + D_p \left[\left(-\frac{p'(\varphi)}{p} q - 2g_\varphi \right) h_\lambda + 2g_\lambda h_\varphi - 2\frac{p'(\varphi)}{\rho} g_\lambda \right] = 0 \quad (33.3)
\end{aligned}$$

$$p = \frac{r-1}{r} \rho h \quad (33.4)$$

ここに

$$D_p = \frac{\cot \bar{\theta}_b}{3 \sin \bar{\theta}_b} \sum_n (\varepsilon_n \cos n\varphi + E_n \sin n\varphi) \quad (33.5)$$

4.2 境界条件

(1) 物体面上の境界条件

物体面上は、吹き出し気体温度が一定という条件を課し、等温壁とする。また気体は、物体面上で滑らない、またはベクトル的な吹き出しでないという条件を課す。すなわち、

$$\begin{cases} u_w = w_w = 0 \\ (\rho v)_w > 0 \end{cases} \quad (34)$$

(32.3) 式より、

$$\begin{aligned}
(\rho v)_w &= -\frac{1}{\sqrt{3x}} \left(\frac{p}{p_e} \right)^{1/2} \left[\frac{3}{2} f + g_\zeta \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3x}} \left(\frac{p}{p_e} \right)^{1/2} \left[\frac{3}{2} f + \frac{1}{\sin \bar{\theta}_b} q_\varphi + 3D_p q_\varphi \right] \quad (35)
\end{aligned}$$

ここで、相似境界層の条件より、

$$(\rho v)_w \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (36)$$

が課せられる。\$f(0, \varphi)\$ および \$q_\varphi(0, \varphi)\$ に値を与えることにより、\$(\rho v)_w\$ を定めるわけであるが、この場合、次式で、置き換えることができる (補遺B参照)。

$$f(0, \varphi) = f_w \quad (f_w: \text{吹き出し率パラメータ}) \quad (37.1)$$

$$g(0, \varphi) = 0 \quad (37.2)$$

吹き出し率パラメータ \$f_w (< 0)\$ により、吹き出しの mass flux の強さが決定される。以上より物体面上の境界条件は次の様になる。

$$\lambda = 0, \quad f(0, \varphi) = f_w, \quad f_\lambda(0, \varphi) = 0 \quad (38.1)$$

$$g(0, \varphi) = g_\lambda(0, \varphi) = 0 \quad (38.2)$$

$$h(0, \varphi) = h_w \quad (38.3)$$

(ii) 境界層外縁における境界条件

境界層外縁では、非粘性流解になることから、

$$\lambda = \infty ; f_\lambda(\infty, \varphi) = u_e(\varphi) \quad (39.1)$$

$$g_\lambda(\infty, \varphi) = w_e(\varphi) \quad (39.2)$$

$$h(\infty, \varphi) = h_e(\varphi) \quad (39.3)$$

4.3 微小擾乱法

(3) 式により Fourier 級数表示された錐体上の境界層流れを考える場合、半頂角 $\bar{\theta}_b$ の零迎角基準円錐上の流れが、 $O(\varepsilon)$ の偏り $\sum_n (\varepsilon_n \cos n\varphi + E_n \sin n\varphi)$ により擾乱を受けていると考える。このとき零迎角基準円錐に対する解（零次オーダー）を $f_0(\lambda)$ および $h_0(\lambda)$ とすると、 $f(\lambda, \varphi)$, $g(\lambda, \varphi)$ および $h(\lambda, \varphi)$ は、境界層外縁条件 ((22) 式) を考慮して、次の様に表示される。

$$f(\lambda, \varphi) = f_0(\lambda) + \sum_n (\varepsilon_n u_{en} f_n(\lambda) \cos n\varphi + E_n U_{en} F_n(\lambda) \sin n\varphi) \quad (40.1)$$

$$g(\lambda, \varphi) = \sum_n (\varepsilon_n w_{en} g_n(\lambda) \sin n\varphi - E_n W_{en} G_n(\lambda) \cos n\varphi) \quad (40.2)$$

$$h(\lambda, \varphi) = h_0(\lambda) + \sum_n (\varepsilon_n h_{en} h_n(\lambda) \cos n\varphi + E_n H_{en} H_n(\lambda) \sin n\varphi) \quad (40.3)$$

(33) 式に (40) 式を代入し、零次オーダーおよび ε_n , E_n に対する一次オーダーを整理すると、次の常微分方程式系が得られる。()' = d()/dλ

零次オーダー

$$f_0 f_0'' + 2f_0''' = 0 \quad (41.1)$$

$$f_0 h_0' + 2(f_0'')^2 + \frac{2}{P_r} h_0'' = 0 \quad (41.2)$$

一次オーダー

$$f_0' f_n'' + f_0'' f_n' + 2f_n''' + \frac{2n}{3 \sin \bar{\theta}_b} \cdot \frac{w_{en}}{u_{en}} f_0'' g_n = 0 \quad (42.1)$$

$$3f_0' g_n'' - 2f_0' g_n' + 6g_n''' + \frac{2}{h_e} h_0' = 0 \quad (42.2)$$

$$h_0' f_n + 4f_0'' f_n'' + \frac{2n}{3 \sin \bar{\theta}_b} \frac{w_{en}}{u_{en}} g_n h_0' - f_0' h_n' - \frac{2}{P_r} h_n'' = 0 \quad (42.3)$$

大文字 F_n, G_n, H_n についても、 $f_n \rightarrow F_n$ 等対応する大文字変数に変えるだけで同一の

形であるので，省略する．

境界条件は，

$$f_0(0)=f_w, f_0'(0)=0, f_0'(\infty)=1 \quad (43.1)$$

$$h_0(0)=h_w, h_0(\infty)=\bar{h}_e \quad (43.2)$$

$$f_n(0)=f_n'(0)=0, f_n'(\infty)=1 \quad (44.1)$$

$$g_n(0)=g_n'(0)=0, g_n'(\infty)=1 \quad (44.2)$$

$$h_n(0)=0, h_n(\infty)=1 \quad (44.3)$$

4.4 流れパラメーターの消去——解の数表化

方程式 (41), (42) の解に含まれる流れパラメーター ($h_w, \bar{h}_e, u_{en}, w_{en}, \bar{\theta}_b$ および n) を除去し，解の数表化を行なう．

今，

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= h_w - h_a, \quad A_2 = \frac{1}{\bar{h}_e}, \quad A_3 = A_1 A_2 \\ A_4^n &= \frac{2n}{3 \sin \bar{\theta}_b} \frac{w_{en}}{u_{en}}, \quad A_5^n = A_2 A_4^n, \quad A_6^n = A_3 A_4^n \\ A_7^n &= A_1 A_4^n, \quad A_8^n = A_1 A_6^n \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

ここで，

$$h_a = \bar{h}_e + I_{01}(0) \quad (46)$$

とおき， $h_0(\lambda), f_n(\lambda), g_n(\lambda)$ および $h_n(\lambda)$ を次の様に，入の関数の線型結合に分割する．

$$f_0(\lambda) = f_0(\lambda) \quad (47.1)$$

$$h_0(\lambda) = \frac{1}{A_2} + I_{01}(\lambda) + A_1 I_{02}(\lambda) \quad (47.2)$$

$$f_n(\lambda) = I_{f1}(\lambda) + A_4^n I_{f2}(\lambda) + A_5^n I_{f3}(\lambda) + A_6^n I_{f4}(\lambda) \quad (47.3)$$

$$g_n(\lambda) = I_{g1}(\lambda) + A_2 I_{g2}(\lambda) + A_3 I_{g3}(\lambda) \quad (47.4)$$

$$\begin{aligned} h_n(\lambda) &= I_{h1}(\lambda) + A_1 I_{h2}(\lambda) + A_4^n I_{h3}(\lambda) + A_5^n I_{h4}(\lambda) \\ &\quad + A_6^n I_{h5}(\lambda) + A_7^n I_{h6}(\lambda) + A_8^n I_{h7}(\lambda) \end{aligned} \quad (47.5)$$

このとき， $I_{01}(\lambda), I_{02}(\lambda), I_{f1}(\lambda) \dots \dots I_{h7}(\lambda)$ を決定する方程式および境界条件は，(41), (42), (43) および (44) 式より次の様になる．

$$f_0 f_0'' + 2 f_0''' = 0 \quad (48.1)$$

$$(f_0(0)=f_w, f'_0(0)=0, f'_0(\infty)=1)$$

$$I''_{01} + \frac{P_r}{2} f_0 I'_{01} + P_r (f''_0)^2 = 0 \quad (48.2)$$

$$(I'_{01}(0)=0, I_{01}(\infty)=0)$$

$$I''_{02} + \frac{P_r}{2} f_0 I'_{02} = 0 \quad (48.3)$$

$$(I_{02}(0)=1, I_{02}(\infty)=0)$$

$$f'' I_{f1} + f_0 I''_{f1} + 2I'''_{f1} = 0 \quad (48.4)$$

$$(I_{f1}(0)=I'_{f1}(0)=0, I'_{f1}(\infty)=1)$$

$$f''_0 I_{f2} + f_0 I''_{f2} + 2I'''_{f2} + f''_0 I_{g1} = 0 \quad (48.5)$$

$$(I_{f2}(0)=I'_{f2}(0)=I'_{f2}(\infty)=0)$$

$$f''_0 I_{f3} + f_0 I''_{f3} + 2I'''_{f3} + f''_0 I_{g2} = 0 \quad (48.6)$$

$$(I_{f3}(0)=I'_{f3}(0)=I'_{f3}(\infty)=0)$$

$$f''_0 I_{f4} + f_0 I''_{f4} + 2I'''_{f4} + f''_0 I_{g3} = 0 \quad (48.7)$$

$$(I_{f4}(0)=I'_{f4}(0)=I'_{f4}(\infty)=0)$$

$$3f_0 I''_{g1} - 2f'_0 I'_{g1} + 6I'''_{g1} + 2 = 0 \quad (48.8)$$

$$(I_{g1}(0)=I'_{g1}(0)=0, I'_{g1}(\infty)=1)$$

$$3f_0 I''_{g2} - 2f'_0 I'_{g2} + 6I'''_{g2} + 2I_{01} = 0 \quad (48.9)$$

$$(I_{g2}(0)=I'_{g2}(0)=I'_{g2}(\infty)=0)$$

$$3f_0 I''_{g3} - 2f'_0 I'_{g3} + 6I'''_{g3} + 2I_{02} = 0 \quad (48.10)$$

$$(I_{g3}(0)=I'_{g3}(0)=I'_{g3}(\infty)=0)$$

$$I'_{01} I_{f1} + 4f''_0 I''_{f1} - f_0 I'_{h1} - \frac{2}{P_r} I''_{h1} = 0 \quad (48.11)$$

$$(I_{h1}(0)=0, I_{h1}(\infty)=1)$$

$$I'_{02} I_{f1} - f_0 I'_{h2} - \frac{2}{P_r} I''_{h2} = 0 \quad (48.12)$$

$$(I_{h2}(0)=I_{h2}(\infty)=0)$$

$$I'_{01}I_{f2} + 4f''_0 I''_{f2} + I'_{01}I_{g1} - f_0 I'_{h3} - \frac{2}{P_r} I''_{h3} = 0 \quad (48.13)$$

$$(I_{h3}(0) = I_{h3}(\infty) = 0)$$

$$I'_{01}I_{f3} + 4f''_0 I''_{f3} + I'_{01}I_{g2} - f_0 I'_{h4} - \frac{2}{P_r} I''_{h4} = 0 \quad (48.14)$$

$$(I_{h4}(0) = I_{h4}(\infty) = 0)$$

$$I'_{01}I_{f4} + I'_{02}I_{f3} + 4f''_0 I''_{f4} + I'_{01}I_{g3} + I'_{02}I_{g2} - f_0 I'_{h5} - \frac{2}{P_r} I''_{h5} = 0 \quad (48.15)$$

$$(I_{h5}(0) = I_{h5}(\infty) = 0)$$

$$I'_{02}I_{f2} + I'_{02}I_{g1} - f_0 I'_{h6} - \frac{2}{P_r} I''_{h6} = 0 \quad (48.16)$$

$$(I_{h6}(0) = I_{h6}(\infty) = 0)$$

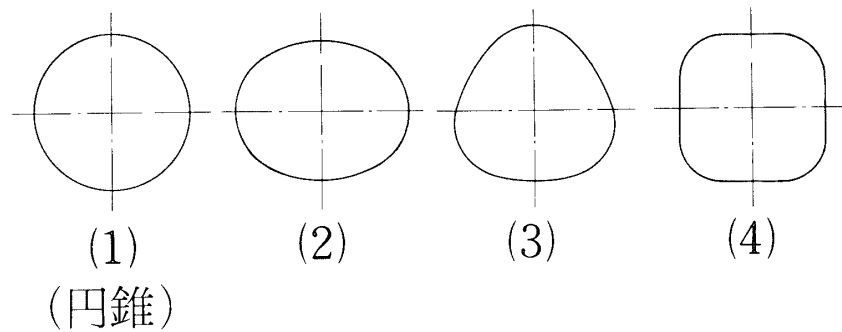
$$I'_{02}I_{f4} + I'_{02}I_{g3} - f_0 I'_{h7} - \frac{2}{P_r} I''_{h7} = 0 \quad (48.17)$$

$$(I_{h7}(0) = I_{h7}(\infty) = 0)$$

上記(48)式は、問題に付随した流れパラメーターに関せず解くことができる。したがって、上記(48)式を一度解けば(数表化)、すべての問題について解かれたことになる。吹き出し率パラメーター f_w の若干の値について、対応した、 $I_{01}(\lambda), I_{02}(\lambda) \cdots \cdots I_{h7}(\lambda)$ の関数の零以外の初期値を、補遺 C に示す。

5. 応 用

境界層諸特性に対する気体吹き出しおよび交叉流の相互効果を調べるため、図2に示す様



第2図 錐体モデル横断面の概略図

な断面をもつ錐体を例にとり、本理論を適用する。各モデルは、それぞれ次式で表わされる。

$$\text{モデル(1)}: \theta = \bar{\theta}_b \quad (\text{円錐}) \quad (49.1)$$

$$\text{モデル(2)}: \theta = \bar{\theta}_b + \varepsilon_2 \cos 2\varphi \quad (49.2)$$

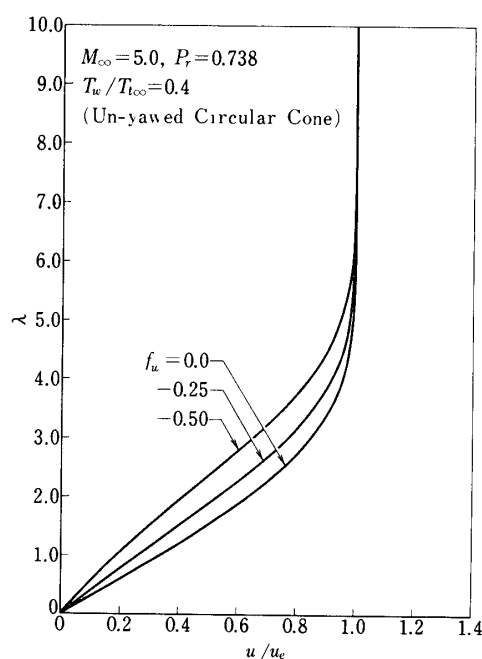
$$\text{モデル(3)}: \theta = \bar{\theta}_b + \varepsilon_3 \cos 3\varphi \quad (49.3)$$

$$\text{モデル(4)}: \theta = \bar{\theta}_b + \varepsilon_4 \cos 4\varphi \quad (49.4)$$

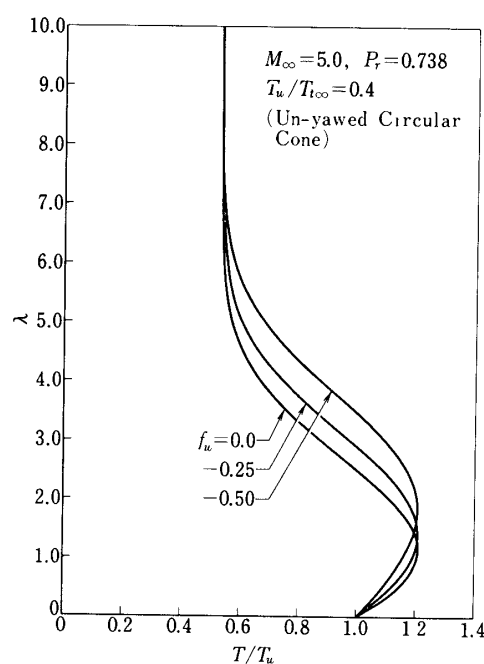
各ケースとも、一様流マッハ数 $M_\infty = 5.0$ 、プラントル数 $P_r = 0.738$ 、物体表面温度 $T_w/T_{t\infty} = 0.40$ 、そして、錐体形状 $\bar{\theta}_b = 10^\circ$ 、 $\varepsilon_2 = -1.0^\circ$ 、 $\varepsilon_3 = 0.75^\circ$ 、 $\varepsilon_4 = -0.5^\circ$ とする。

5.1 結果と考察

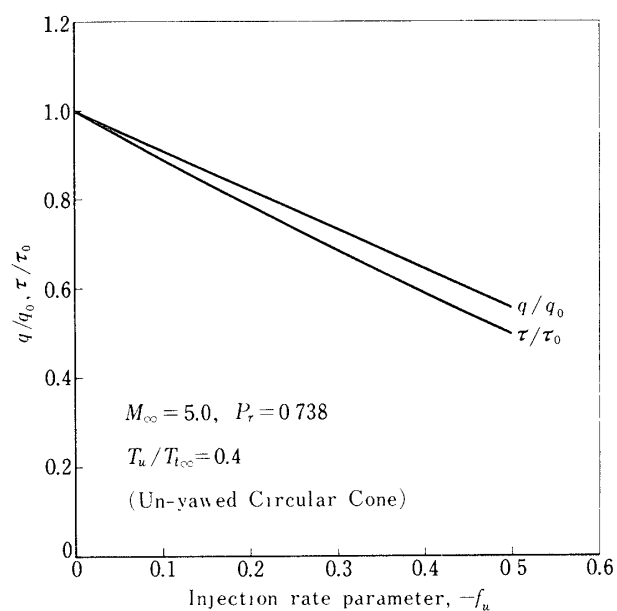
気体吹き出しのみの効果を見るために、まず、零迎角円錐についての結果（零次オーダー解）を図3～5に示す。図3は、境界層内の速度プロファイルを示したものである。吹き出しなし（ $f_w = 0.0$ ）の場合と比べ、吹き出しが、強くなる程速度境界層が厚くなるのがみられる。また u 自体単調増加であるが、 $f_w = -0.25$ 、 -0.5 の場合一度変曲点が現れ、それは吹き出しが強い程顕著である。図4は、温度プロファイルを示したもので、吹き出しの影響で、温度境界層が厚くなるのがみられる。それによって、壁面付近の温度勾配が小さくなり、熱伝達が小さくなる。なお、中間域（ $\lambda \approx 3.0$ ）に於ける温度勾配および境界層内の最大温度 $(T/T_w)_{\max}$ は、吹き出しにより、ほとんど影響を受けないのがわかる。図5は、



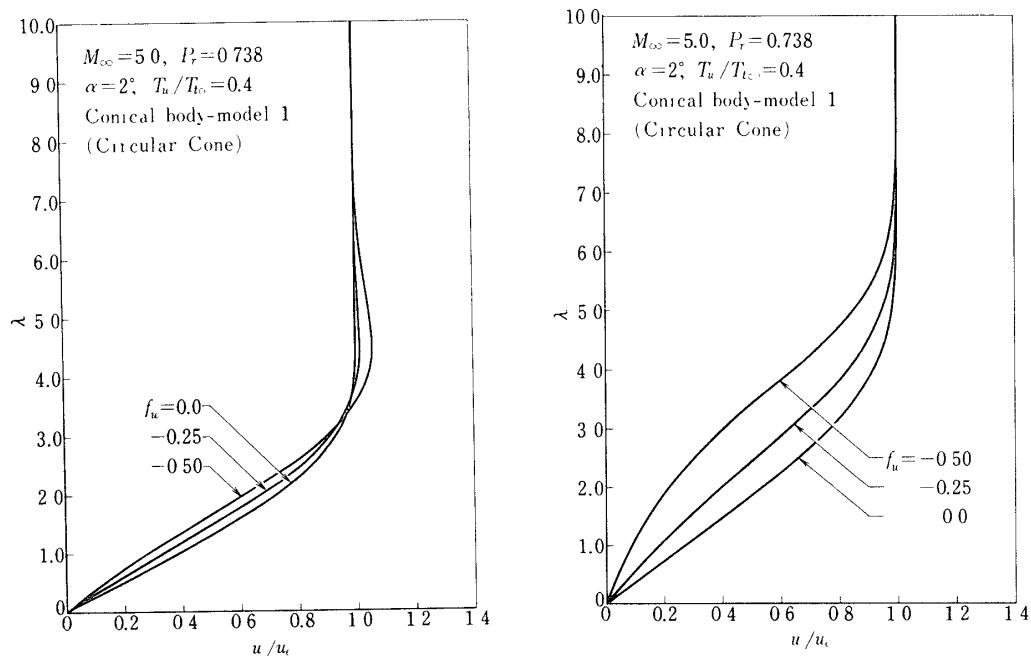
第3図 速度プロファイルに及ぼす吹き出しの効果（ 10° 円錐：零迎角）



第4図 温度プロファイルに及ぼす吹き出しの効果（ 10° 円錐：零迎角）



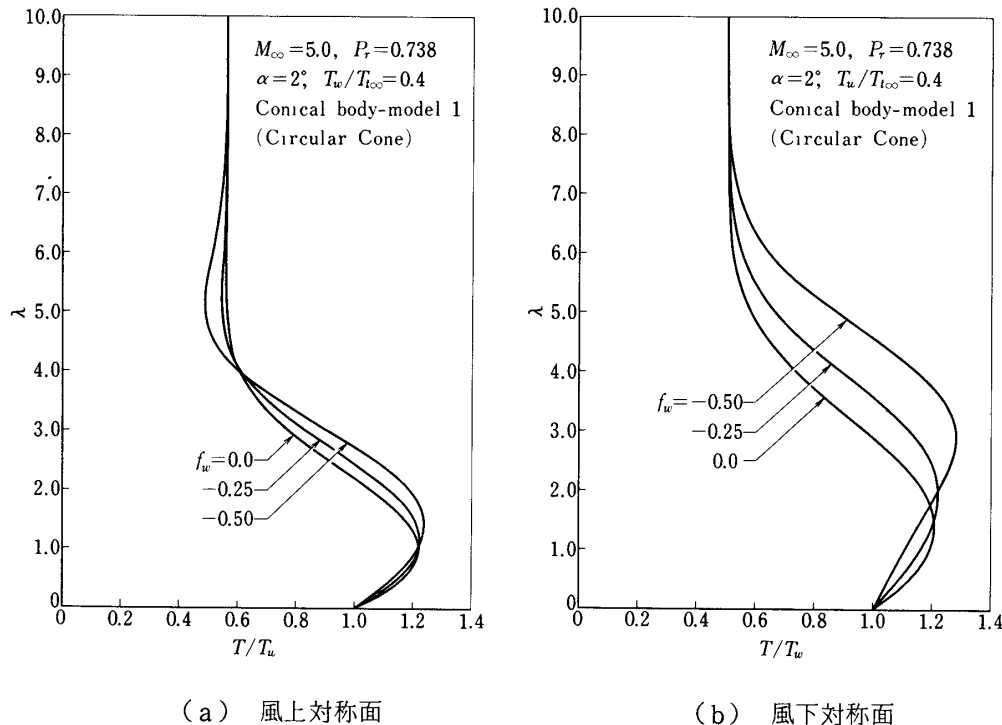
第5図 熱伝達および表面摩擦応力に及ぼす吹き出し強さの影響 (10° 円錐：零迎角)



(a) 風上対称面

(b) 風下対称面

第6図 対称面に於ける速度プロファイルに及ぼす吹き出しの効果



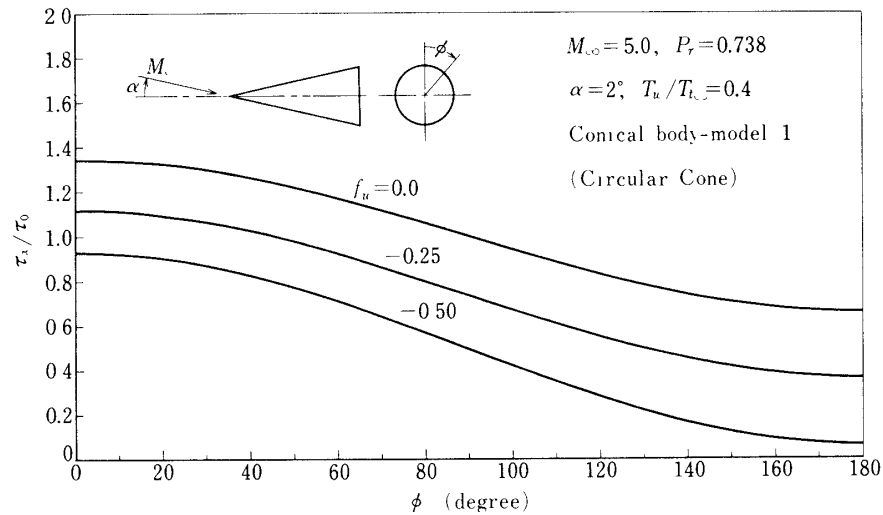
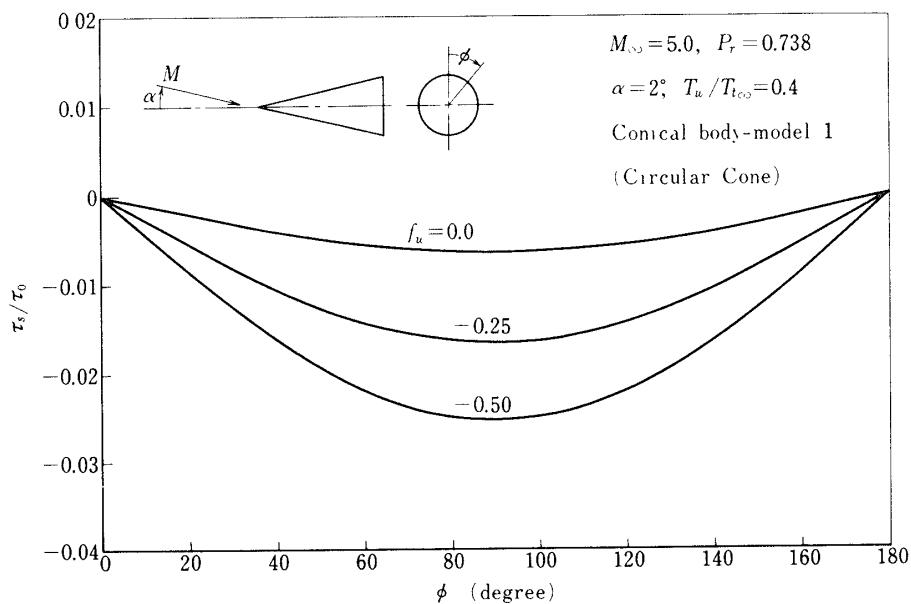
第7図 対称面に於ける温度プロファイルに及ぼす吹き出しの効果

物体面上における熱伝達および摩擦応力の、吹き出しパラメーターによる変化を示したもので、それぞれ、吹き出しなしの場合の熱伝達 q_0 、および摩擦応力 τ_0 により無次元化されている。これより、熱伝達、摩擦応力とも、わずかに下に凸ながらも、吹き出し率パラメーターに、ほとんど線型的に低下するのがわかる。

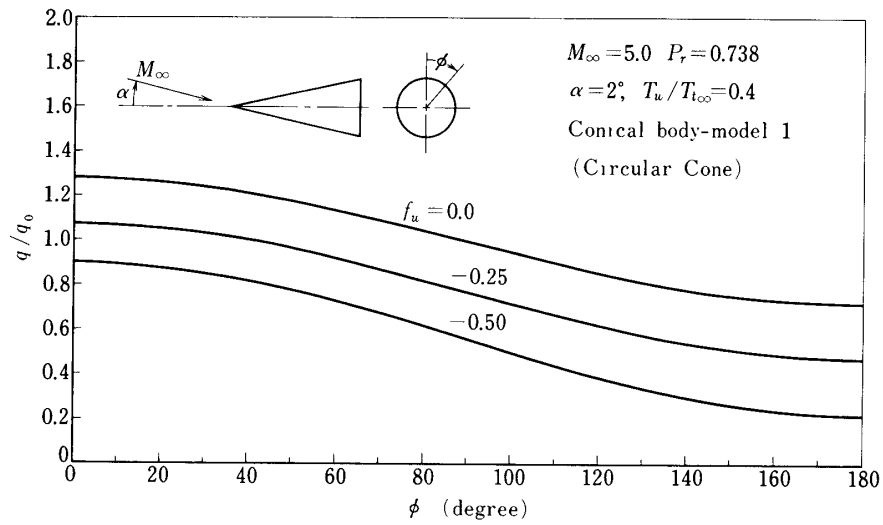
次に、有迎角円錐ケースを例にとり、交叉流効果（三次元流効果）が加わったときの、吹き出しの効果について議論を行なう。図6および図7に、風上、風下両対称面における速度および温度プロファイルを示す。交叉流効果が加わることにより、風下側において、より吹き出しの効果が、著しく現われているのがわかる。交叉流面で考えると、流線はすべて風下対称面側に集まるため、それだけ、吹き出された気体が多く集まり、より境界層厚さが増大するのである。逆に、風上対称面側においては、境界層厚さが、風下側程に増加せず、そのために、吹き出された気体を流そうとして、 $u/u_e > 1$ となり、同時に密度も増加する現象が、 $\lambda \approx 4$ でみられる。温度プロファイルについてみると、境界層内最大温度 $(T/T_w)_{\max}$ が、 $-f_w$ の増加と共に、増大する現象がみられる。その増大の程度は、風下側においてより著しい。これは、交叉流効果が加わった場合の著しい特徴である。図8に、 x 方向および s 方向の表面摩擦応力成分の円錐周方向の変化の様子を示す。 τ_0 は、同一円錐の零迎角時の吹き出しなしの場合の摩擦応力を表わす。 τ_x は、

$$\tau_x/\tau_0 = A + \alpha B \cos \phi \quad (50)$$

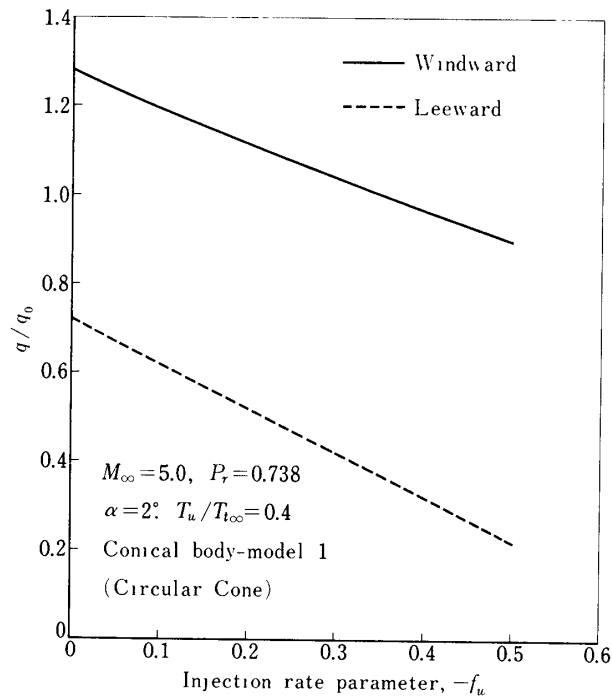
の様に变化するが、吹き出しにより、 A が小さくなるだけでなく、 B ，すなわち $[\partial(\tau_x/\tau_0)/\partial\alpha]\phi=0$ ，も大きくなる。そのため、風下側 ($\phi=\pi$) で、 τ_x は、より減少する。一方 τ_s 自体は、 τ_x に比べると、“ ε ” のオーダーであるから、もともと小さいが、吹き出しの効

(a) x 方向摩擦応力成分(b) ϕ 方向摩擦応力成分

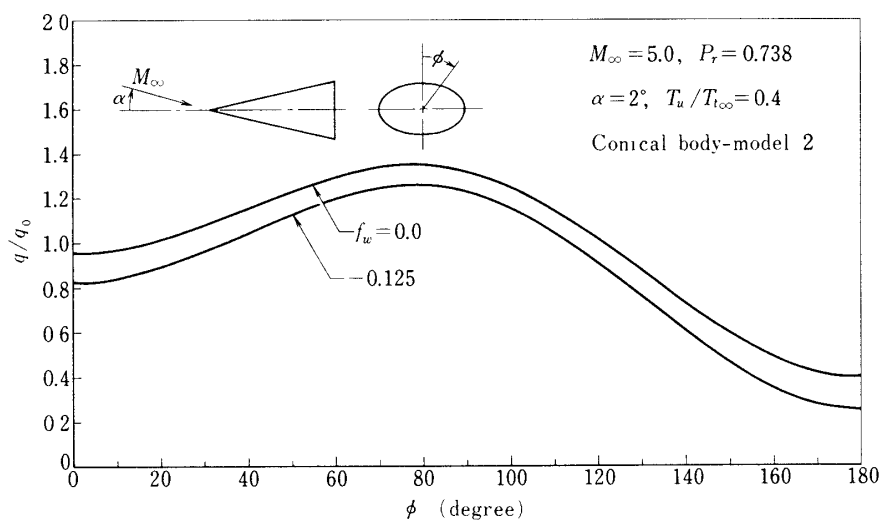
第8図 円周方向表面摩擦応力分布に及ぼす吹き出しの効果



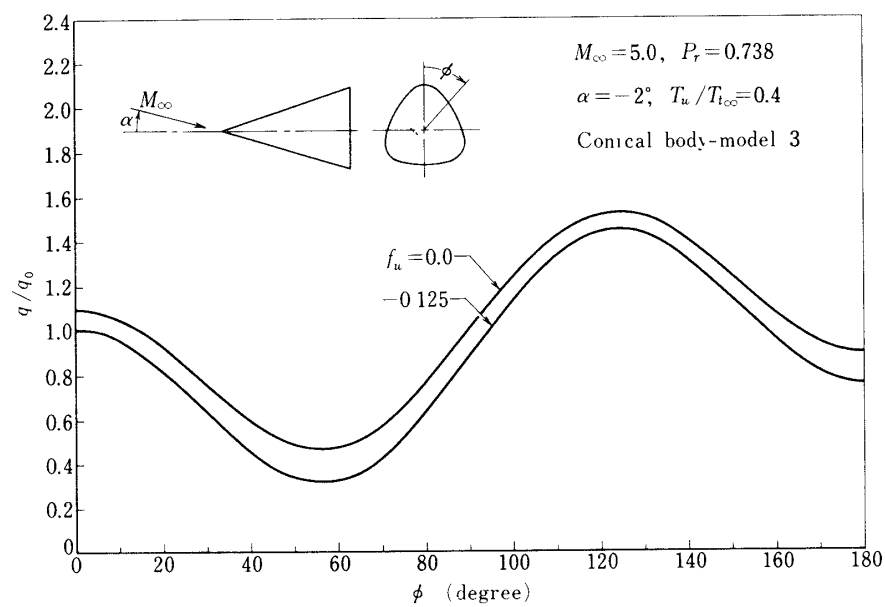
第 9 図 局所熱伝達に及ぼす吹き出しの効果



第10図 対称面に於ける熱伝達に対する吹き出し強さの影響



第11図 局所熱伝達（錐体モデルー2）



第12図 局所熱伝達（錐体モデルー3）

果は、逆に $|\tau_s|$ を大きくする様に現れる。次に図9に熱伝達の円錐周方向の変化の様子を示す。 q_0 は、零迎角時、吹き出しなしの場合の熱伝達である。図10に、風上、風下両対称面における熱伝達の、吹き出し量の増加による変化の様子を示す。図9および図10から、風下対称面側で、熱伝達のより大きな減少が期待されるのがわかる。

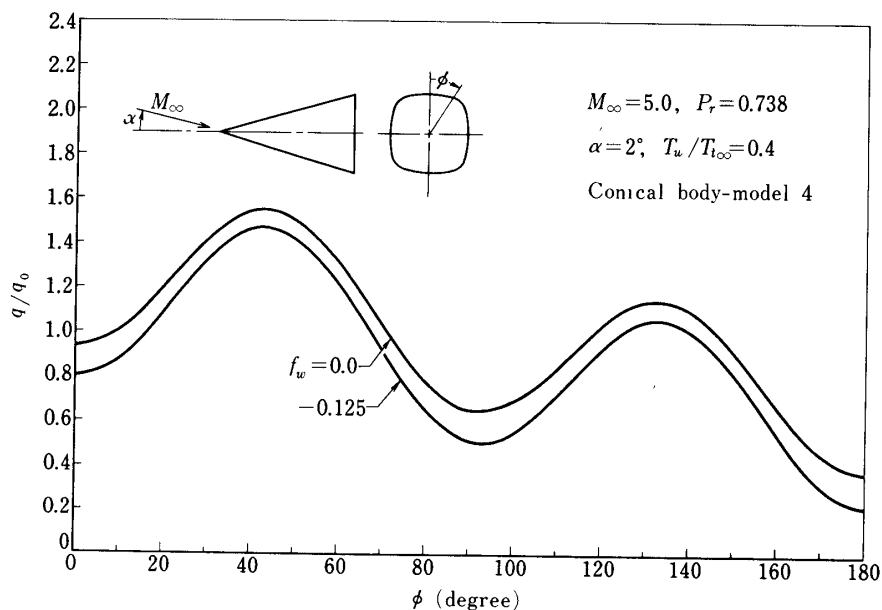
非軸対称錐体ケースとして、図11～13に、各モデル(2)～(4)に対する周方向の熱伝達の変化の様子を示す。 q_0 は、モデルに対応した基準円錐の吹き出しなしの場合の熱伝達である。 $f_w = 0, -0.125$ の場合しか示していないが、 $f_w = -0.25$ では、モデル(3)(4)で $\tau_x < 0$ となる。これは、円錐と異って、迎角 α よりも、 $\varepsilon_n (n \geq 2)$ に対応する項が、より大きく交叉流の影響を受けるからである。基準円錐と比較して、凹状になっている錐体面の部分は、交叉流面では、風下側に対応しており、そこでの熱伝達の減少が著しいのは、円錐ケースで予想されるとおりである。

なお、吹き出しなしの場合について、他の解析法との比較を、補遺Dで行なう。同時に、前報告[6]で不備な点があったので、その訂正も行なう。

6. 結 論

小迎角円錐上の層流境界層に対する Moore の理論が、気体吹き出しを伴う、円からわずかに偏った任意断面形状をもつ錐体に適用できる様に拡張され、その厳密解が得られた。この解は、数表化が可能である。

有迎角円錐を含む4種類の非軸対称錐体に本理論を適用し、気体吹き出しの効果と、交叉



第13図 局所熱伝達（錐体モデル-4）

流の効果相互の境界層諸特性に対する影響について議論された。その結果次のことが結論される。

(1) 零迎角円錐については、気体吹き出しの効果は、吹き出し強さに線型的に、熱伝達および摩擦応力を減少させるように現れる。境界層内の最大温度は、吹き出しにより影響を受けない。

(2) 有迎角円錐ケースについては、交叉流の影響によって、風上側よりも風下側の方が、吹き出しの効果は、強く現れ、境界層がより厚くなる。その結果、熱伝達、表面摩擦応力とも減少する。境界層内最大温度は、交叉流の影響により、吹き出す強さに応じて、増大する。

(3) 非軸対称錐体については、迎角によるよりも、基準円錐からの変形量に帰因する交叉流の方がより、吹き出し効果に強く影響を及ぼす。

謝 辞

本研究を遂行するにあたって適切な助言、示唆をして下さった辛島桂一助教授に、深く感謝の意を表します。

補 遺 A

錐体面の表示と迎角との関係について。

body fixed polar coordinate system を (r, ϑ, ϕ) , wind fixed polar coordinate system を (r, θ, φ) とする。錐体は、

$$\vartheta = \vartheta_b(\phi) = \bar{\theta}_b + \sum_n (\varepsilon_n \cos n\phi + E_n \sin n\phi) \quad (\text{A-1})$$

と表わされる。この錐体が、 $\alpha (=O(\varepsilon))$ だけ、頂点は動かさずに傾けられたときの表示を

$$\theta = \theta_b(\varphi) \quad (\text{A-2})$$

とする。

まず $\varphi = \phi + O(\alpha^2)$ を示す。

図A-1より

$$R \cos \phi = \{\alpha \cos \varphi + R \cos(\varphi - \phi)\} \cos \varphi \quad (\text{A-3})$$

今、 $\varphi = \phi + O(\alpha)$ と仮定しても

$$\cos(\varphi - \phi) = \cos(O(\alpha)) = 1 + O(\alpha^2) \quad (\text{A-4})$$

したがって (A-3) 式は、

$$R \cos \phi = (\alpha \cos \varphi + R) \cos \varphi \quad (\text{A-5})$$

これより

$$\cos \varphi = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4R\alpha \cos \phi}}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ -R + R \left(1 + \frac{2\alpha}{R} \cos \phi \right) \right\} = \cos \phi$$

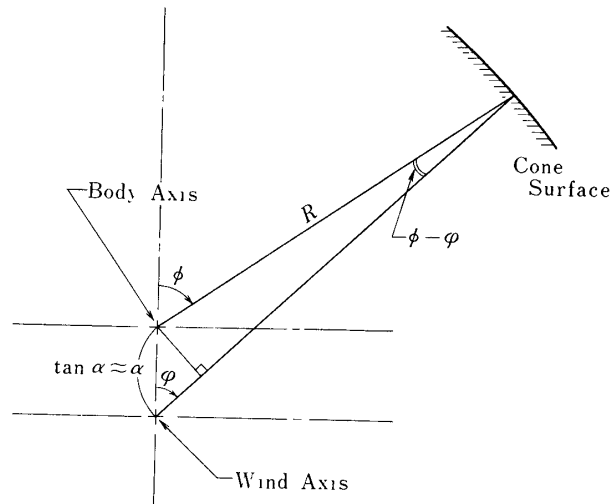


図 A-1 錐体断面

故に

$$\varphi = \phi + O(\alpha^2)$$

(A-6)

(A-7)

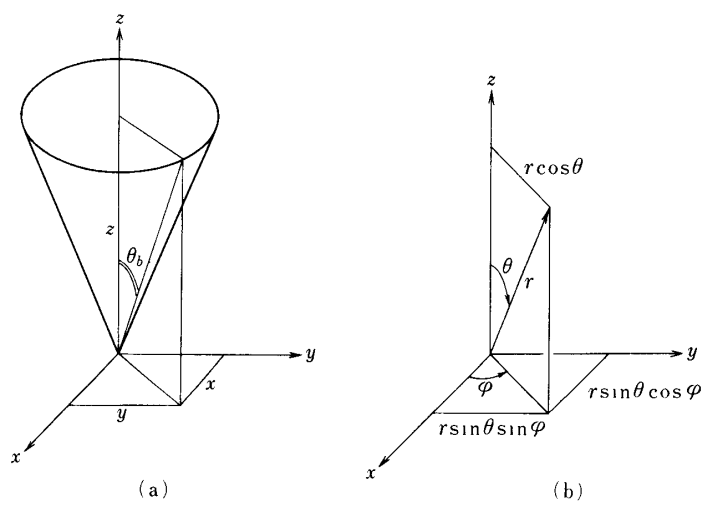


図 A-2 錐体面の表示と極座標系

次に、零迎角では、(A-1) 式と (A-2) 式は一致して、 (x, y, z) 系で表示すると、(図 A-2 参照)

$$z \tan \theta_b = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta_b = \bar{\theta}_b + \Theta_1(\varphi) \quad (\text{A-8})$$

ここで、 (x, y, z) 系を、原点を中心にして、 $x-z$ 面内で α だけ傾ける。上述の錐体 ((A-8) 式) も同時に傾くとして、新しい座標系を (X, Y, Z) とする。 (X, Y, Z) 系に対応した極座標系を (r, ϑ, ϕ) とする。このとき、錐体面の表示は、

$$Z \tan \vartheta_b = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (\text{A-9})$$

(x, y, z) 系と、 (X, Y, Z) 系との関係は、

$$\begin{cases} X = x \cos \alpha - z \sin \alpha \\ Y = y \\ Z = x \sin \alpha + z \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{A-10})$$

(A-10) 式を (A-9) 式に代入すると、 $O(\alpha^2)$ を無視するとき

$$(x\alpha + z) \tan \vartheta_b = \sqrt{(x^2 + y^2) - 2xz\alpha} \quad (\text{A-11})$$

今、

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (\text{A-12})$$

であるから (A-11) 式に代入すると、

$$(\tan \theta \cos \varphi \cdot \alpha + 1) \tan \vartheta_b = \tan \theta (1 - \cot \theta \cos \varphi \cdot \alpha) \quad (\text{A-13})$$

または

$$(\tan \theta \cos \varphi \cdot \alpha + 1) \tan(\bar{\theta}_b + \Theta_1(\phi)) = \tan \theta (1 - \cot \theta \cos \varphi \cdot \alpha) \quad (\text{A-14})$$

これより

$$\tan(\bar{\theta}_b + \Theta_1(\phi)) = \tan(\theta - \alpha \cos \varphi) \quad (\text{A-15})$$

$\phi = \varphi$ であるから、

$$\bar{\theta}_b + \Theta_1(\varphi) = \theta - \alpha \cos \varphi \quad (\text{A-16})$$

故に

$$\begin{aligned} \theta &= \bar{\theta}_b + \Theta_1(\varphi) + \alpha \cos \varphi \\ &= \bar{\theta}_b + \sum_n (\varepsilon_n \cos n\varphi + E_n \sin n\varphi) + \alpha \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

これより ε_1 に α の効果を含ませると, wind fixed coordinate system も, body fixed coordinate system も同等に取り扱える.

補 遺 B

吹き出し速度について,

(27) 式より

$$\rho x u = \Psi_y \quad (\text{A-18.1})$$

$$\rho x v = -\Psi_x - \frac{1}{x} \Phi_s \quad (\text{A-18.2})$$

$$\rho x w = \Phi_y \quad (\text{A-18.3})$$

物体面上での速度成分を考えると,

$$u_w = 0, \quad \text{または,} \quad \Psi_y(x, 0, s) = 0 \quad (\text{A-19.1})$$

$$w_w = 0 \quad \text{または,} \quad \Phi_y(x, 0, s) = 0 \quad (\text{A-19.2})$$

$$\rho x v = -\Gamma(x, s) \quad (\text{吹き出し質量流束}) \quad (\text{A-20})$$

このとき

$$\Psi_x(x, 0, s) + \frac{1}{x} \Phi_s(x, 0, s) = \Gamma(x, s) \quad (\text{A-21})$$

(A-21) 式は, 次式

$$\begin{cases} \Psi(x, 0, s) = \int \Gamma(x, s) dx & \text{又は } \Psi_x(x, 0, s) = \Gamma(x, s) \\ \Phi(x, 0, s) = 0 \end{cases} \quad (\text{A-22.1})$$

$$(\text{A-22.2})$$

でおきかえることができることを示す.

(A-21) 式は, $\Gamma_1(x, s)$ を任意関数としたとき, 次のことを意味している.

$$\Psi_x(x, 0, s) = \Gamma(x, s) - \Gamma_1(x, s) \quad (\text{A-23.1})$$

$$\Psi_s(x, 0, s) = x \Gamma_1(x, s) \quad (\text{A-23.2})$$

これより,

$$\Psi(x, 0, s) = \int \Gamma(x, s) dx - \int \Gamma_1(x, s) dx + \Gamma_2(s) \quad (\text{A-24.1})$$

$$\Phi(x, 0, s) = \int x \Gamma_1(x, s) ds + \Gamma_3(x) \quad (\text{A-24.2})$$

ここで, $\Gamma_2(s), \Gamma_3(x)$ は任意関数である.

今, 新しい流れ関数 $\bar{\bar{\Psi}}$ および $\bar{\bar{\Phi}}$ を次の様に定義する.

$$\bar{\bar{\Psi}}(x, y, s) = \Psi(x, y, s) + \int \Gamma_1(x, s) dx - \Gamma_2(s) \quad (\text{A-25.1})$$

$$\bar{\bar{\Phi}}(x, y, s) = \Phi(x, y, s) - \int x \Gamma_1(x, s) ds - \Gamma_3(x) \quad (\text{A-25.2})$$

このとき,

$$\bar{\bar{\Psi}}_y = \Psi_y = \rho x u \quad (\text{A-26.1})$$

$$-\bar{\bar{\Psi}}_x - \frac{1}{x} \bar{\bar{\Phi}}_s = -\Psi_x - \frac{1}{x} \Phi_s = \rho x v \quad (\text{A-26.2})$$

$$\bar{\bar{\Phi}}_y = \Phi_y = \rho x w \quad (\text{A-26.3})$$

したがって, $\bar{\bar{\Psi}}$ および $\bar{\bar{\Phi}}$ は, Ψ, Φ と全く同様に, 速度成分 u, v, w に対応せしめられ, そして, Ψ, Φ と同じ流れ関数の性質をもつ. 物体面上の境界条件は, (A-19), (A-20) および (A-21) 式に対応して,

$$\bar{\bar{\Psi}}_y(x, 0, s) = 0 \quad (v_w = 0) \quad (\text{A-27.1})$$

$$\bar{\bar{\Phi}}_y(x, 0, s) = 0 \quad (w_w = 0) \quad (\text{A-27.2})$$

$$\begin{cases} \bar{\bar{\Psi}}_x(x, 0, s) = \Gamma(x, s) \\ \bar{\bar{\Phi}}(x, 0, s) = 0 \end{cases} \quad ((\rho x v)_w = -\Gamma(x, s)) \quad (\text{A-27.3})$$

となる.

以上より, $\bar{\bar{\Psi}}, \bar{\bar{\Phi}}$ を, 改めて Ψ, Φ と記すと, (A-21) 式を (A-22) 式でおきかえて取扱うことになる.

(A-22) 式によると, 吹き出し質量流束 $\Gamma(x, s)$ は, Ψ にのみ含まれる. したがって 4.1 節の変数変換に対応して, $(\rho v)_w$ は,

$$f(0, \varphi) = f_w \quad (\text{A-28.1})$$

$$g(0, \varphi) = 0 \quad (\text{A-28.2})$$

により設定することができる.

補 遺 D

吹き出しなしの結果について.

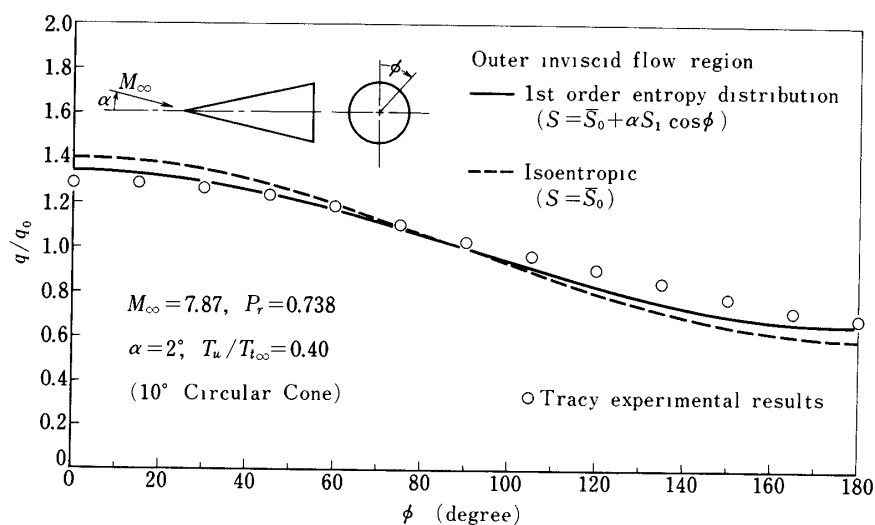
吹き出しなしのケースについて, 本理論を実験および他の解析結果と比較検討する.

まず外部流の取扱いについて: 前報告 [6.図3] では, 外部流を等エントロピと仮定して

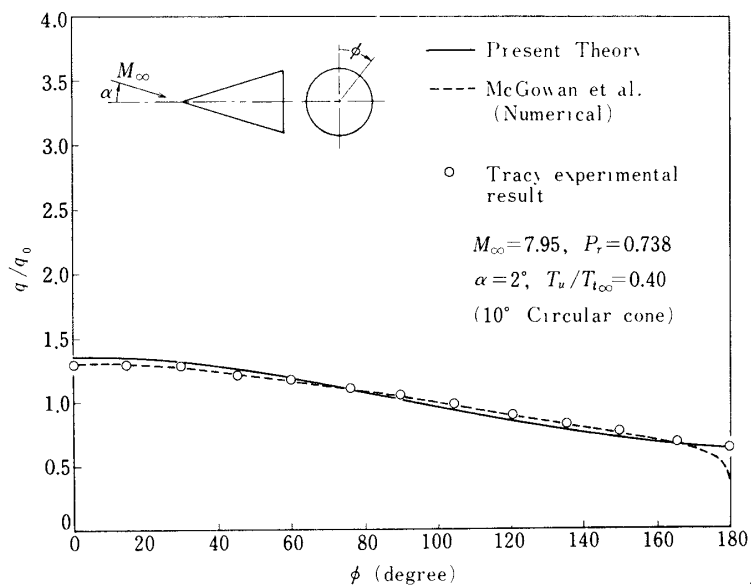
補遺 C 関数の初期値

$f_0(0)=f_w$	0.0 (Noinjection)	- 0.125	- 0.25	- 0.375	- 0.5
$f_0''(0)$	0.332057	0.287576	0.244682	0.203578	0.164491
$I_{01}(0)$	0.429179	0.424045	0.418478	0.412457	0.405934
$I_{02}(0)$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$I_{02}'(0)$	-0.298246	-0.264094	-0.230670	-0.198036	-0.166255
$I_{f1}''(0)$	0.498086	0.453223	0.409059	0.365573	0.322701
$I_{f2}''(0)$	0.261692	0.275541	0.291395	0.309896	0.332025
$I_{f3}''(0)$	0.044073	0.049672	0.056263	0.064125	0.073668
$I_{f4}''(0)$	0.074527	0.085511	0.098827	0.115234	0.135877
$I_{g1}''(0)$	0.760860	0.727070	0.694849	0.664320	0.635643
$I_{g2}''(0)$	0.191026	0.192531	0.193717	0.194543	0.194954
$I_{g3}''(0)$	0.356859	0.366990	0.377649	0.388932	0.400988
$I_{h1}'(0)$	0.042244	0.039413	0.036274	0.032813	0.029026
$I_{h2}'(0)$	0.149123	0.148945	0.148375	0.147346	0.145782
$I_{h3}'(0)$	-0.002546	-0.003843	-0.005151	-0.006444	-0.007683
$I_{h4}'(0)$	-0.001138	-0.001385	-0.001659	-0.001959	-0.002278
$I_{h5}'(0)$	0.035173	0.039618	0.045025	0.051764	0.060434
$I_{h6}'(0)$	0.229610	0.241841	0.256578	0.274835	0.298265
$I_{h7}'(0)$	0.062623	0.072181	0.084060	0.099175	0.119013

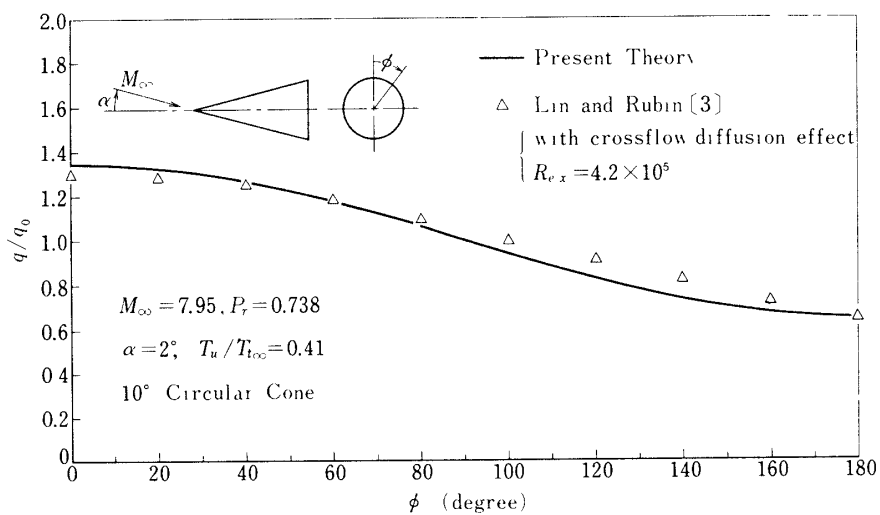
備考 ○ $P_r = 0.738$
 ○ 初期値のうち、零以外のものを、掲げてある。



図A-3 外部非粘性解に対する境界層方程式の解（吹き出しなし）



図A-4 数値計算解と本理論解との比較（吹き出しなし）



図A-5 非相似境界領域解析法による解との比較（吹き出しなし）

取扱った結果を, Tracy の実験結果 [A 1] と比較し議論した. そこでの結果は, 計算機上のミスがあり, 誤っているので, この紙面をかいて訂正する. 正しくは, 図A-3に示す破線の様になって, $M_\infty = 7.87$ の様な極超音速域では, 実験と合わなくなる. 本論文の非粘性流解析を使った結果を, 実線で示す. 実線は, 実験結果と良くあっている.

次に他の解析法との比較を行なう. 図A-4に McGowan ら [A 2] による風上側から風下側へ向って相似境界層方程式を, 行進積分により数値的に解いた結果と, 本結果, および実験 [A 1] との比較を示す. これより, 本理論は, 数値解法と比較して, 十分定量的に実用的であるのがわかる. 図A-5に非相似境界領域解析 (nonsimilar boundary region analysis) による Lin ら [3] の結果との比較を行なう. Lin らの手法は, $u_{\varphi\varphi}$ 等の交叉流散逸 (cross flow diffusion) 項を含む境界層型方程式を, 流線方向に行進積分する方法である. このケースの様な小迎角の場合は, 交叉流散逸の効果も小さく, 本理論値と大差のないのが示されている.

参 考 文 献

- [1] Dwyer, H.A.: Boundary Layer on a Hypersonic Sharp Cone at Small Angle of Attack, AIAA J., Vol. 9 (1971) 277-284.
- [2] Harris, J.E. and Morris, J.: Solution of the Three-Dimensional Compressible, Laminar, and Turbulent Boundary Layer Equations with Comparisons to Experimental Data., Proc. of 4th Int. Conf. on Num. Methods in Fluid Dyn., (1974) 204-211.
- [3] Lin, T.C. and Rubin, S.G.: Viscous Flow over a Cone at Moderate Incidence. Part 2. Supersonic Boundary Layer., J. Fluid Mech., Vol. 59 (1973) 593-620.
- [4] Murdock, J.W.: The Solution of Sharp-cone Boundary-layer Equations in the Plane of Symmetry., J Fluid Mech., Vol. 54 (1972) 665-678.
- [5] Moore, F.K.: Laminar Boundary Layer on a Circular Cone in Supersonic Flow at Small Angle of Attack., NACA TN-2521 (1951).
- [6] 松野謙一・河村龍馬: 錐体上の熱伝達を伴う層流境界層, 東京大学宇宙航空研究所報告, 第13巻 (1977) 53-65.
- [7] Stone, A.H.: On Supersonic Flow past a Slightly Yawing Cone. J. Math. and Phys., Vol. 27 (1948) 67-81.
- [8] 松野謙一・河村龍馬: 錐体まわりの超音速流に対する近似解, 東京大学宇宙航空研究所報告, 第12巻 (1976) 713-735.
- [9] Ferri, A., Ness, N. and Kaplita, T.T.: Supersonic Flow over Conical Bodies without Axial Symmetry., J Aero. Sci., Vol 20 (1953) 563-571.
- [10] Moore, F.K.: Three-Dimensional Compressible Laminar Boundary Layer., NACA TN-2279 (1951).
- [A1] Tracy, R.R.: Hypersonic Flow over a Yawed Circular Cone., Graduate Aeronautical Labs., California Institute of Technology, Memo. No. 69 (1963).
- [A2] McGowan, J.J. III and Davis, R.T.: Development of a Numerical Method to Solve the Three Dimensional Compressible Laminar Boundary-Layer Equations with Application to Elliptical Cones at Angle of Attack. ARL 70-0341 (1970).