

円筒曲面板の有効幅 (I) —解析—

平野陽一・林 毅*

Effective Width of Curved Plates (I)—Analysis—

By

Yoichi HIRANO and Tsuyoshi HAYASHI

Abstract: The post-buckling behavior of curved plates is investigated in this paper. The method of the analysis is the same one as Cox used for flat plates. Some assumptions are made in this analysis, but it is found by another method of analysis that the errors due to these assumptions do not seem large. The formula for the effective-width of the curved plates is derived. The numerical calculations are made based on this formula and the results are given in the graphical forms. The characteristics of the curved plates above the buckling stress are clarified by these figures.

概 要

本論文は円筒曲面板の座屈および座屈後の特性を解析により明らかにしたものである。解析方法は平板の場合に Cox が使った手段を適用したものである。本解析を行なうにあたってはいくつかの仮定をしたが、検討の結果この仮定は座屈および座屈後の特性にあまり影響を及ぼさないことが明らかにされた。有効幅を求める計算式を導き、これを図示した。この図より曲面板の座屈後の特性を読みとることができる。

〔記 号〕

b : 曲板の円弧長および直線辺長

r : 曲率半径

t : 板厚

σ_x, σ_y : x 方向, y 方向の応力成分

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$: x 方向, y 方向のひずみ成分

u, v, w : x 方向, y 方向, 半径方向 (内方向正) の変位

f : たわみ波形の波高

$f' = f/t$

p_1 : x 方向の平均圧縮応力

p_2 : y 方向の平均圧縮応力

ε_1 : $y = \pm b/2$ での x 方向の圧縮ひずみ

ε_2 : $x = \pm b/2$ での y 方向の圧縮ひずみ

* 東京大学工学部 航空学科

p_{cr} : 座屈応力
 ϵ_{cr} : 座屈ひずみ
 b_m : 有効幅

1. 序 論

補強円筒殻が軸圧縮荷重を受けて座屈する型式として二通り考えられる。一つは補強材も一体となって座屈するもの、一つは補強材間にある板面が局部座屈するものである。軸方向と周方向の補強材にかこまれた板面は円筒曲面をなしている。この円筒曲面の圧縮座屈および座屈後の特性を本論文で解析する。

軸圧縮荷重を受ける円筒曲面の座屈荷重は微小変形理論により求めることができる。Redshaw [1] はエネルギー法により直線辺が支持されている曲面の座屈荷重を求めた。Timoshenko [2] は円筒殻の微分方程式を使って4辺単純支持の曲面の座屈を論じている。これら両者の求めた座屈荷重は平板としての性質を示す項と曲率の影響を表わす項とよりなっている。また、Levy [3] や Stowell [4] も4辺単純支持の場合の座屈荷重を求めている。Timoshenko の座屈値は Redshaw の求めたものより小さい値を与える。Stowell の求めた座屈荷重は Timoshenko のものと全く同じである。また、直線辺が固定、他の2辺が単純支持の場合については Levy と Stowell が解析している。

平板の圧縮座屈後の解析は多くの研究者がとりあげてきたが、曲面の圧縮座屈後の問題は今まで十分に取扱われていない。Levy [3] と Cox と Pribram [5] の解析があるのみである。Levy の理論は、計算結果と無限長板としての解析ということ以外詳細は著者には不明である。Levy の計算結果は座屈荷重の表示式に疑問があり、また座屈後の特性は $b^2/rt = 5, 10$ の場合のみ調べてある。Cox と Pribram の解析は平板の座屈理論の結果と完全円筒殻の座屈理論の結果を結びつけた半経験的な解析である。Cox と Pribram の式は実用ということを主眼にしたものと考えられる。この二つの研究により曲面の座屈後の特性はつかむことができるが、著者はもう少し詳しく解析を進めてみる必要があると考えてこの問題を取りあげた。

曲面においては、平板の座屈後の解析における一般的解法 [7] では、周辺での変位並びに応力の条件をうまく満足させることが困難である。そこで、平板の座屈後の解析で Cox [6] が使った方法を適用して解析する。この解析方法は σ_x および σ_y はそれぞれ x 方向、 y 方向に一定 (すなわち、 $\tau_{xy}=0$) という仮定と $\nu=0$ という仮定を行なって、適切なたわみ波形のもとでポテンシャルエネルギー極小の原理を適用するものである。さらに、本論文で $\nu=0$ および $\tau_{xy}=0$ と仮定して解析したことに対する検討を行なう。

2. 基 礎 式

直線辺長 b および円弧長 b の第1図に示す円筒曲面を考える。この曲面は曲率が小で、平板に近いものとする。座標 x, y の原点は板の中心からとり、 x 方向に圧縮荷重がかかっているものとする。ここで、 $x=\pm b/2$ の辺で変位 u が一定で、 $y=\pm b/2$ の辺で変位 v が一定という周辺直線保持の条件が u, v に課せられているものとする。また、 w は周辺で

$w=0$ なる条件を満足しているものとする。仮定した w に対応して周辺で $\tau_{xy}=0$ なる条件および変位 u, v に関する境界条件を満足する応力関数を適合条件式より見出すことが曲面の場合非常に困難である。そこで、次のようにして曲面の座屈後を解析してみる。

$\partial\sigma_x/\partial x=0, \partial\sigma_y/\partial y=0$ あるいは $\tau_{xy}=0$, すなわち σ_x は x 方向に, σ_y は y 方向に一定であるとする, σ_x, σ_y の x 方向, y 方向の平均値 $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dx \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_y dy \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

上式の右辺を変位成分で書きあらわすと

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \nu \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{r} \right\} \right] dx \quad (2)$$

ここで, $\nu=0$ と仮定すると

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{b} \{ u(b/2) - u(-b/2) \} + \frac{E}{2b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$y=\pm b/2$ における x 方向の圧縮ひずみ ε_1 を導入すると

$$\bar{\sigma}_x = E \left\{ -\varepsilon_1 + \frac{1}{2b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \quad (4)$$

同様に $\bar{\sigma}_y$ は

$$\bar{\sigma}_y = E \left\{ -\varepsilon_2 + \frac{1}{2b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy - \frac{1}{br} \int_{-b/2}^{b/2} w dy \right\} \quad (5)$$

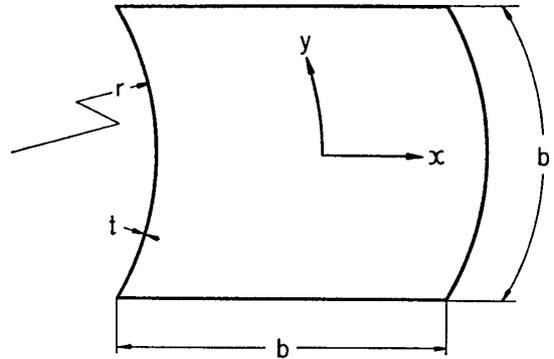
ここで, ε_2 は $x=\pm b/2$ における y 方向の圧縮ひずみである。上式で明らかのように, $x=\pm b/2$ における x 方向の変位 u は $\mp \varepsilon_1 \cdot b/2$ であり, $y=\pm b/2$ における y 方向の変位 v は $\mp \varepsilon_2 \cdot b/2$ となっている。また, 応力を適合条件式を介して求めないで上のように仮定したことになる。

伸びのひずみエネルギー (V_1) は応力に関する仮定と $\nu=0$ という仮定を考えると次のようになる。

$$V_1 = \frac{bt}{2E} \left(\int_{-b/2}^{b/2} \bar{\sigma}_x^2 dy + \int_{-b/2}^{b/2} \bar{\sigma}_y^2 dx \right) \quad (6)$$

(6) 式に (4) 式と (5) 式を代入すると

$$V_1 = \frac{Ebt}{2} \left[\int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \varepsilon_1 - \frac{1}{2b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\}^2 dy \right.$$



第1図 円筒曲面

$$+ \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \varepsilon_2 - \frac{1}{2b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{br} \int_{-b/2}^{b/2} w dy \right\}^2 dx \quad (6')$$

曲げのひずみエネルギー (V_2) は次式で与えられる.

$$V_2 = \frac{Et^3}{24} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (7)$$

ひずみエネルギーはすべて w で表示されたから適切なたわみ波形 w を仮定して V_1 , V_2 に代入し, 波形のパラメタに関し $V_1 + V_2$ が停留値を持つようにしてやれば座屈後の平衡位置を求めることができる.

3. 周辺単純支持の場合

4 辺を単純支持した平板の座屈波形と同様な波形がこの曲面板が座屈した時生じ, 座屈後も波形は変わらず, ただ波高が変化していくものとする. w として仮定する波形は次式である.

$$w = f \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} \quad (8)$$

上式は $x = \pm b/2$ で $w = 0$, $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ を, $y = \pm b/2$ で $w = 0$, $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ を満足している. (8) 式を (6') 式と (7) 式に代入して積分すると, V_1 , V_2 はそれぞれ次のように書ける.

$$V_1 = \frac{E}{2} b^2 t \left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \frac{\pi^2}{4b^2} f^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_2 \frac{\pi^2}{4b^2} f^2 + \varepsilon_2 \frac{8}{\pi^2 r} f + \frac{3\pi^4}{64b^4} f^4 - \frac{4}{3b^2 r} f^3 + \frac{2}{\pi^2 r^2} f^2 \right) \quad (9)$$

$$V_2 = \frac{Et^3}{24} \frac{\pi^4}{b^2} f^2 \quad (10)$$

いま変位を一定として平衡位置を求めることにすると, 平衡位置は $\partial(V_1 + V_2) / \partial f = 0$ より求まる.

$$-\varepsilon_1 f - \varepsilon_2 f + \varepsilon_2 \frac{16b^2}{\pi^4 r} + \frac{3\pi^2}{8b^2} f^3 - \frac{8}{\pi^2 r} f^2 + \frac{8b^2}{\pi^4 r^2} f + \frac{\pi^2 t^2}{3b^2} f = 0 \quad (11)$$

ここで, $y = \pm b/2$ の辺は直線状を保って y 方向に自由に変位できる場合を考えると, y 方向の平均圧縮応力 p_2 は 0 となる.

$$-p_2 = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \bar{\sigma}_y dx = 0 \quad (12)$$

(12) 式を (5) 式を使って書き直して, (8) 式を代入すると

$$\varepsilon_2 = \frac{\pi^2}{8b^2} f^2 - \frac{4}{\pi^2 r} f \quad (13)$$

(13) 式を (11) 式に代入すると

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{cr} - \frac{2}{\pi^2 r} f + \frac{\pi^2}{4b^2} f^2 \quad (14)$$

ここに, ε_{cr} は座屈時の x 方向の圧縮ひずみをあらわしており, 次式で与えられる.

$$\epsilon_{cr} = \frac{\pi^2 t^2}{3b^2} + \frac{(8\pi^2 - 64)}{\pi^6 r^2} \tag{15}$$

x 方向の平均圧縮応力を p_1 であらわすと, (4) 式より

$$p_1 = p_{cr} + E \left(-\frac{2}{\pi^2 r} f + \frac{\pi^2}{8b^2} f^2 \right) \tag{16}$$

ここで, $p_{cr} = E \epsilon_{cr}$ である. $y = \pm b/2$ の辺での圧縮ひずみは ϵ_1 であるから, 辺での圧縮応力を p_e とすると $p_e = E \epsilon_1$ で与えられる. 有効幅を b_m であらわすと, 定義により $b_m p_e = b_1 p_1$ である. これより b_m/b は

$$\frac{b_m}{b} = \frac{p_1}{p_e} = \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_1} - \frac{2}{\pi^2 r} \frac{f}{\epsilon_1} + \frac{\pi^2}{8b^2} \frac{f^2}{\epsilon_1} \tag{17}$$

$f = f' t$ とおくと, 曲面の形状パラメータ b^2/rt で整理することができ, 以上の式は次のように書き直すことができる.

$$\epsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{(8\pi^2 - 64)}{\pi^6} \left(\frac{b^2}{rt} \right)^2 \tag{18}$$

$$\epsilon_1 \frac{b^2}{t^2} = \epsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} - \frac{2}{\pi^2} \frac{b^2}{rt} f' + \frac{\pi^2}{4} f'^2 \tag{19}$$

$$p_1 \frac{b^2}{t^2} = p_{cr} \frac{b^2}{t^2} + E \left(-\frac{2}{\pi^2} \frac{b^2}{rt} f' + \frac{\pi^2}{8} f'^2 \right) \tag{20}$$

$$\frac{b_m}{b} = \frac{p_1}{p_e} = \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_1} \cdot \frac{p_1}{p_{cr}} \tag{21}$$

$$\frac{p_1 - p_{cr}}{\epsilon_1 - \epsilon_{cr}} = \frac{-\frac{2}{\pi^2} \frac{b^2}{rt} + \frac{\pi^2}{8} f'}{-\frac{2}{\pi^2} \frac{b^2}{rt} + \frac{\pi^2}{4} f'} E \tag{22}$$

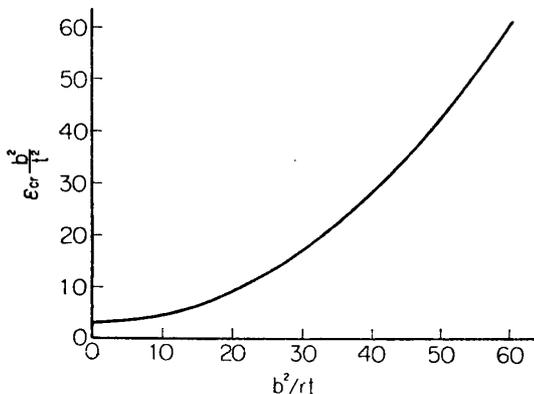
$f' \rightarrow \infty$ のときは

$$\frac{b_m}{b} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{p_1 - p_{cr}}{\epsilon_1 - \epsilon_{cr}} \rightarrow \frac{E}{2} \tag{23}$$

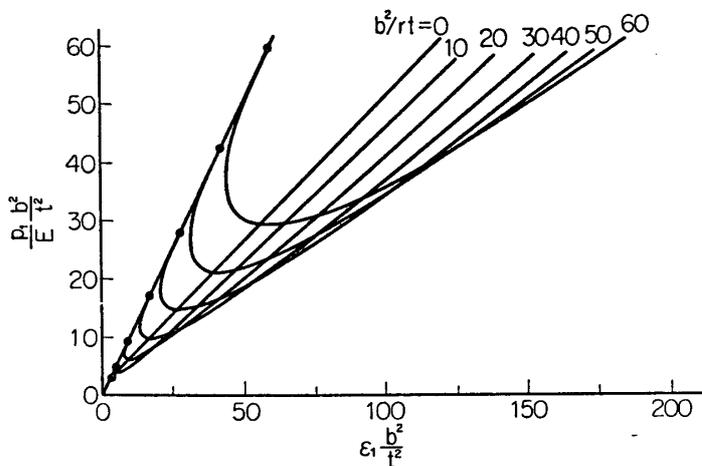
すなわち, f' が大きくなると有効幅は $1/2$ に, 座屈後の剛性もまた座屈前の $1/2$ に近づくことがわかる. また, $b^2/rt = 0$ は平板の場合に相当し, $\epsilon_{cr}(b^2/t^2)$ は Marguerre [7] の結果

で $\nu = 0$ としたものに一致し, 座屈後の関係式は Marguerre の式と一致する.

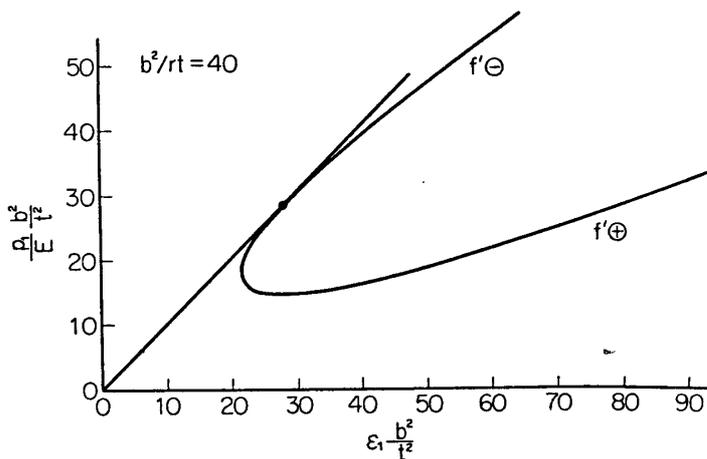
数値計算した結果を第 2 図 ~ 第 6 図に示した. まず座屈ひずみ ϵ_{cr} を b^2/rt に対して描くと第 2 図となる. 第 3 図は平均圧縮応力 p_1 をヤング率 E で割ったものを縦軸に, 圧縮ひずみ ϵ_1 を横軸にとって座屈後の挙動を示したものである. 数値計算のとき f' に + (内方向のたわみ) と - が考えられるが, + の方がエネルギーレベルが低いので + を取っている. f' が - の場合は座屈点より上方に



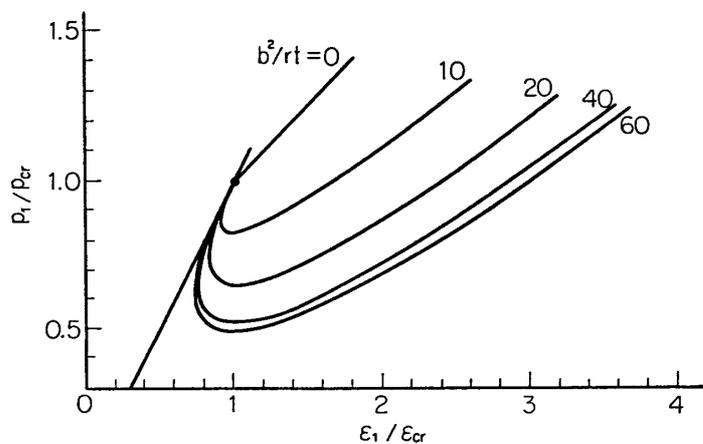
第 2 図 座屈ひずみ



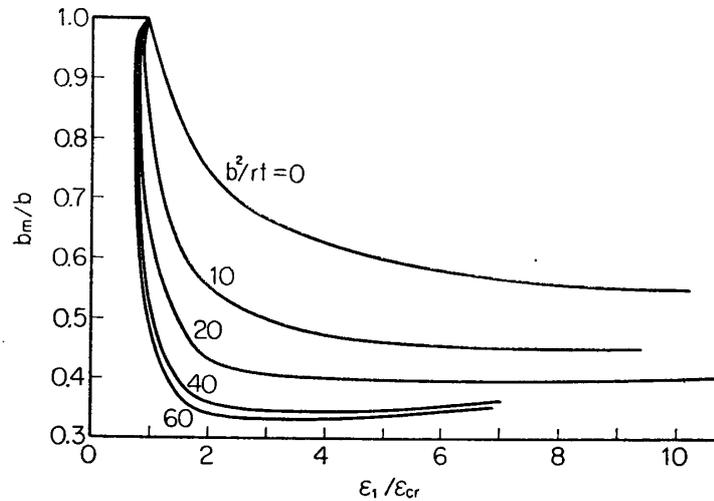
第3図 平均応力 p_1 ~ ちぢみひずみ ϵ_1



第4図 f' の正負による座屈後の特性



第5図 $p_1/p_{cr} \sim \epsilon_1/\epsilon_{cr}$

第6図 有効幅 b_m

伸びる平衡位置を与える。これを第4図に示した。 b^2/rt による座屈後の特性の差を比較したものが第5図である。 b^2/rt が大きくなると座屈後の応力低下の割合が大きくなることがわかる。これらの曲線形状を見ると座屈は完全円筒殻の軸圧縮座屈と同様に飛び移り現象となることが推測される。有効幅は(21)式で与えられるが、これを第6図に示した。曲面の場合の特徴は $\epsilon_1/\epsilon_{cr} < 1$ の領域に解が存在するため曲線が $\epsilon_1/\epsilon_{cr} < 1$ のところへくいこんでくることである。座屈前は $b_m/b = 1$ をたどってきて、座屈後は飛び移った ϵ_1/ϵ_{cr} のところからこの有効幅の曲線をたどると考えられる。

(18)式で与えられる座屈ひずみ ϵ_{cr} を Levy と Stowell の単純支持の場合の計算結果と比較してみる。

$$(18)式; \quad \epsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} = 3.29 + 1.56 \times 10^{-2} \left(\frac{b^2}{rt} \right)^2$$

$$\text{Levy}; \quad \epsilon_{rc} \frac{b^2}{t^2} = 3.66 \left(\frac{b^2}{rt} = 0 \text{ のとき} \right)$$

$$4.9 \leq \epsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} \leq 5.1 \left(\frac{b^2}{rt} = 5 \text{ のとき} \right)$$

$$6.2 \leq \epsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} \leq 8.1 \left(\frac{b^2}{rt} = 10 \text{ のとき} \right)$$

$$\text{Stowell}; \quad \epsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} = 3.66 + 2.53 \times 10^{-2} \left(\frac{b^2}{rt} \right)^2$$

Levy と Stowell の結果は文献 [12] からとったものである。本解析の第1項が他の結果より低いのは $\nu = 0$ としたことによるものである。また、第2項の係数が小なのは $\partial \sigma_x / \partial x = 0$, $\partial \sigma_y / \partial y = 0$ と仮定したこと、すなわち τ_{xy} のひずみエネルギー成分を無視したことに主として起因すると考えられる。

4. 周辺固定支持の場合

4辺を固定支持した平板の座屈波形 [2] と同様な波形が、周辺固定支持の曲面の座屈お

よび座屈後に生ずるものとする。仮定するたわみ形は次式で与えられる。

$$w = \frac{f}{4} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{b}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \quad (24)$$

上式は $x = \pm b/2$ で $w = 0$, $\partial w / \partial x = 0$ を, $y = \pm b/2$ で $w = 0$, $\partial w / \partial y = 0$ を満足している。前節と同様に計算を進めると

$$\varepsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} = \frac{8\pi^2}{9} + \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{b^2}{rt}\right)^2 \quad (25)$$

$$\varepsilon_1 \frac{b^2}{t^2} = \varepsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} - \frac{1}{4} \frac{b^2}{rt} f' + \frac{13\pi^2}{48} f'^2 \quad (26)$$

$$p_1 \frac{b^2}{t^2} = p_{cr} \frac{b^2}{t^2} + E \left(-\frac{1}{4} \frac{b^2}{rt} f' + \frac{15\pi^2}{96} f'^2 \right) \quad (27)$$

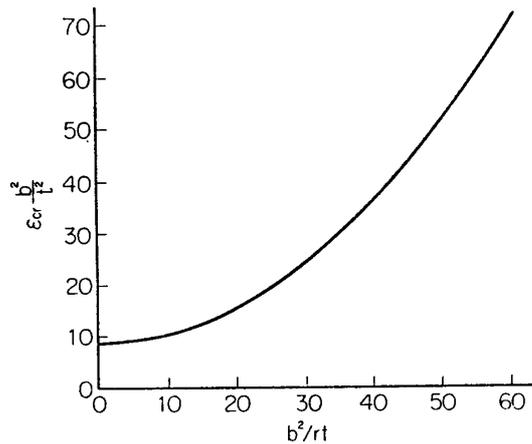
$f' \rightarrow \infty$ のときは

$$\frac{b_m}{b} \rightarrow \frac{15}{26}, \quad \frac{p_1 - p_{cr}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_{cr}} \rightarrow \frac{15}{26} \quad (28)$$

上式の数値計算結果を単純支持の場合と同様に図示したものが第7図～第10図である。

5. 本解析法に対する検討—(1)

これまで述べた解析法は $\nu = 0$ という仮定と $\tau_{xy} = 0$ という仮定を含んでいる。さらに、応力状態は適合条件式を満足していない形のままで、ひずみエネルギー極小の原理により解析を行なった。ここでは、変位状態と応力状態を同時に仮定した場合に使われる Reissner の変分原理 [8], [9], [10], [11] を使って、 $\nu = 0$ という近似的取り扱いについての検討を行なう。4辺単純支持の場合に仮定したたわみ形およびそれに対応する応力状態は次のようなものであった。



第7図 座屈ひずみ

$$w = f \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} \quad (29)$$

$$\sigma_x = E \left\{ -\varepsilon_1 + \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \right\} \quad (30)$$

$$\sigma_y = E \left\{ -\varepsilon_2 + \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{b}\right) - \frac{2f}{\pi r} \cos \frac{\pi x}{b} \right\} \quad (31)$$

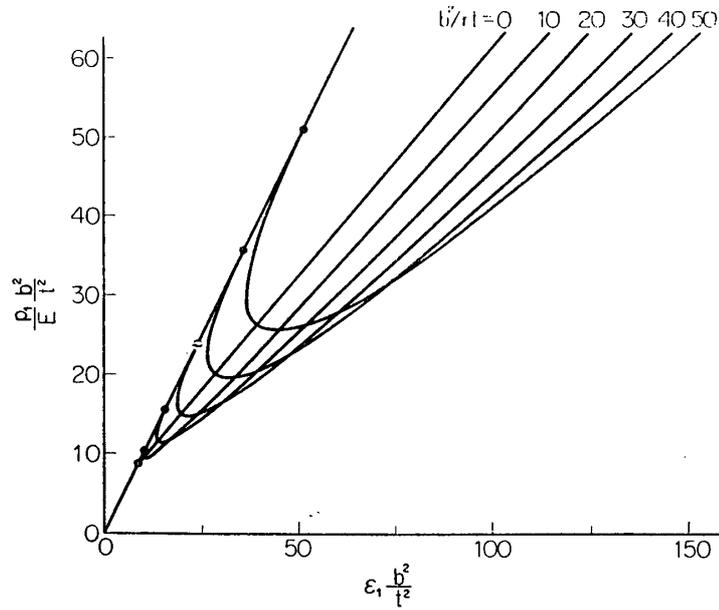
$$\tau_{xy} = 0 \quad (32)$$

たわみ形 w および応力関数 F を無次元化して次のように書くことにする。

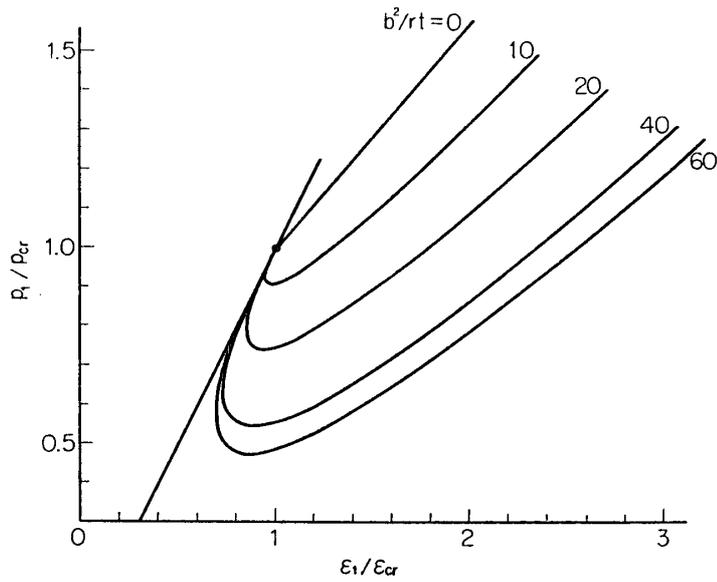
$$w = \bar{w} \cdot t \quad (33)$$

$$F = \bar{F} \cdot Et^2 \quad (34)$$

また, $x/b = \xi$, $y/b = \eta$ と書くことにすると, (29) 式は



第 8 図 平均応力 p_1 ~ ちぢみひずみ ϵ_1



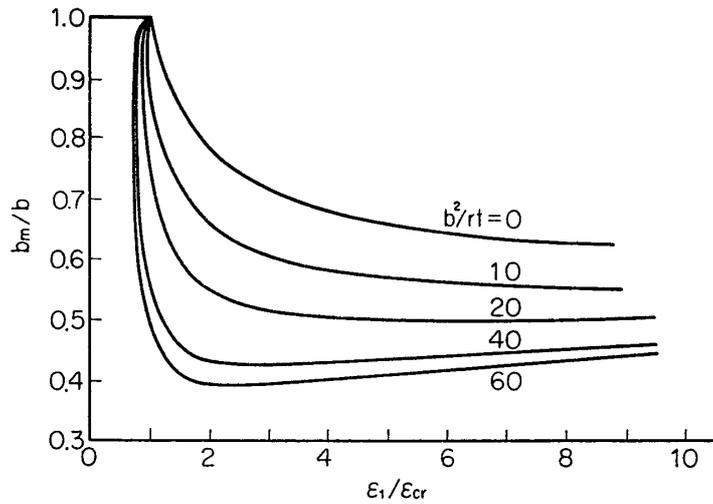
第 9 図 $p_1/p_{cr} \sim \epsilon_1/\epsilon_{cr}$

$$\bar{w} = f' \cos \pi \xi \cos \pi \eta \tag{35}$$

(30)~(32) 式に対応する応力関数 \bar{F} は次のように書き下せる。

$$\bar{F} = A \frac{\eta^2}{2} + B \frac{\xi^2}{2} + \frac{2 b^2}{\pi^3 r t} f' \cos \pi \xi - \frac{1}{32} f'^2 \cos 2\pi \xi - \frac{1}{32} f'^2 \cos 2\pi \eta \tag{36}$$

(35) 式のたわみ形と (36) 式で与えられる応力状態を同時に仮定して平衡状態を求める。それには Reissner の変分原理を使う。面内の変位に関する境界条件が $\xi = \pm 1/2$ で u は一定, $\eta = \pm 1/2$ で v は一定で与えられる場合, 有限変形理論による円筒殻の平衡条件および

第10図 有効幅 b_m

適合条件式は比較関数を \bar{w} と \bar{F} とした次の変分原理により与えられる。

$$\begin{aligned}
 \delta U = & \delta \left[\frac{E \cdot t^5}{24(1-\nu^2) \cdot b^2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right\} \right] d\xi d\eta \right. \\
 & + \frac{E t^5}{2b^2} \iint \left[\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right)^2 - 2 \frac{b^2}{r t} \bar{w} \right\} - 2 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\
 & - \frac{E t^5}{2b^2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \\
 & - \frac{E t^3}{b} \left\{ \int \left[- \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} u \right]_{-1/2}^{1/2} d\eta + \int \left[- \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} v \right]_{-1/2}^{1/2} d\xi \right. \\
 & \left. + \int \left[\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi \partial \eta} u \right]_{-1/2}^{1/2} d\xi + \int \left[\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi \partial \eta} v \right]_{-1/2}^{1/2} d\eta \right\} = 0 \quad (37)
 \end{aligned}$$

境界での条件を $\xi = \pm 1/2$ で $u = \mp \epsilon_1 b/2$, $\eta = \pm 1/2$ で $v = \mp \epsilon_2 b/2$ と記すと

$$\begin{aligned}
 \delta \left(\frac{U}{2b^2} \right) = & \delta \left[\frac{1}{12(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right\} \right] d\xi d\eta \right. \\
 & + \iint \left[\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right)^2 - 2 \frac{b^2}{r t} \bar{w} \right\} - 2 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\
 & - \iint \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \\
 & - \frac{b^2}{t^2} \epsilon_1 \int \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} \right)_{\xi=1/2} + \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \eta^2} \right)_{\xi=-1/2} \right] d\eta \\
 & - \frac{b^2}{t^2} \epsilon_2 \int \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} \right)_{\eta=1/2} + \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} \right)_{\eta=-1/2} \right] d\xi = 0 \quad (38)
 \end{aligned}$$

たわみ形 w として (35) 式を, 応力関数 \bar{F} として (36) 式を仮定して U を計算すると

$$\frac{U}{2b^2} = \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} f'^2 + \frac{\pi^2}{4} f'^2 A + \frac{\pi^2}{4} f'^2 B - A^2 - B^2 + 2\nu AB$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{8\nu b^2}{\pi^2 r t} f' A + \frac{\pi^4}{64} f'^4 - \frac{4 b^2}{3 r t} f'^3 + \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{r t}\right)^2 f'^2 \\
& - \frac{2b^2}{t^2} \varepsilon_1 A - \frac{2b^2}{t^2} \varepsilon_2 B + \frac{8 b^2 b^2}{\pi^2 r t t^2} \varepsilon_2 f'
\end{aligned} \quad (39)$$

$\partial U/\partial A=0$, $\partial U/\partial B=0$, $\partial U/\partial f'=0$ より次の 3 式を得る.

$$\frac{\pi^2}{4} f'^2 - 2A + 2\nu B - \frac{8\nu b^2}{\pi^2 r t} f' - \frac{2b^2}{t^2} \varepsilon_1 = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\pi^2}{4} f'^2 - 2B + 2\nu A - \frac{2b^2}{t^2} \varepsilon_2 = 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} f' + \frac{\pi^2}{4} f' A + \frac{\pi^2}{4} f' B - \frac{4\nu b^2}{\pi^2 r t} A + \frac{\pi^4}{32} f'^3 \\
& - 2\frac{b^2}{r t} f'^2 + \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{r t}\right)^2 f' + \frac{4 b^2 b^2}{\pi^2 r t t^2} \varepsilon_2 = 0
\end{aligned} \quad (42)$$

(40), (41) 式より A , B が求まり, 結局 (42) 式は次のように書ける.

$$\begin{aligned}
& f' \left[\frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} + \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{r t}\right)^2 - \frac{\pi^2 b^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{4 t^2 (1-\nu)} + \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \frac{16}{\pi^4} \left(\frac{b^2}{r t}\right)^2 \right] \\
& + f'^2 \left[-\frac{\nu}{1-\nu} \frac{b^2}{r t} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{b^2}{r t} - 2\frac{b^2}{r t} \right] + f'^3 \left[\frac{\pi^4}{16(1-\nu)} + \frac{\pi^4}{32} \right] \\
& + \frac{4 b^2 b^2 \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1}{\pi^2 r t t^2 (1-\nu^2)} = 0
\end{aligned} \quad (43)$$

ここで $y = \pm b/2$ の辺は直線状を保って y 方向に自由に変位できる場合を考えると, y 方向の平均圧縮応力は 0 となる.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \xi^2} d\xi = B - \frac{4 b^2}{\pi^2 r t} f' = 0 \quad (44)$$

(44) 式より ε_2 は次式で表わせる.

$$\varepsilon_2 \frac{b^2}{t^2} = -\nu \frac{b^2}{t^2} \varepsilon_1 + \frac{\pi^2(1+\nu)}{8} f'^2 - \frac{4 b^2}{\pi^2 r t} f' \quad (45)$$

(45) 式を (43) 式に代入すると, 座屈後の平衡状態を表わす次式を得る.

$$\varepsilon_1 \frac{b^2}{t^2} = \varepsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} - \frac{2 b^2}{\pi^2 r t} f' + \frac{\pi^2}{4} f'^2 \quad (46)$$

ここで, ε_{cr} は座屈ひずみで次のように表わせるものである.

$$\varepsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} = \frac{\pi^2}{3(1-\nu^2)} + \frac{8\pi^2 - 64}{\pi^6} \left(\frac{b^2}{r t}\right)^2 \quad (47)$$

$\nu=0$ と仮定して求めた (14) 式は (46) 式と全く一致した. (47) 式で $\nu=0$ とおくと (15) 式と同一となる. したがって, $\nu=0$ と仮定したことによる影響は (47) 式の第 1 項平板の座屈ひずみに相当する項にのみあらわれることがわかった. 結局, $\nu=0$ と仮定したことは大勢に影響を持たないといえる.

なお, 固定支持の場合にも同じ検討を行なったが, 単純支持の場合と同じ結論を得た.

6. 本解析法に対する検討—(2)

上記の解析においては $\tau_{xy}=0$ と仮定した. この仮定に対する検討を周辺の変位条件を平

均的に満足させるという考え方にたつて以下考察してみる。周辺単純支持の場合について考えてみる。(8)式で与えられるたわみ波形を考え、次の適合条件式より応力関数 F を求める。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (48)$$

ここに、 F は次式を満足する。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (49)$$

(8) 式の w に対する F の解として次式を用いよう。

$$F = -E \frac{f^2}{32} \left(\cos \frac{2\pi x}{b} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + E \frac{f}{4r} \frac{b^2}{4\pi^2} \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{2} p_2 x^2 - \frac{1}{2} p_1 y^2 \quad (50)$$

これより、

$$\left. \begin{aligned} F_{xx} &= E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \cos \frac{2\pi x}{b} - E \frac{f}{4r} \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} - p_2 \\ F_{yy} &= E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} - E \frac{f}{4r} \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} - p_1 \\ F_{xy} &= E \frac{f}{4r} \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

(51) 式を検討してみると

$x = \pm b/2$ で

$$F_{yy} = E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} - p_1 \quad (52)$$

$y = \pm b/2$ で

$$F_{xx} = E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \cos \frac{2\pi x}{b} - p_2 \quad (53)$$

$x = \pm b/2$ で

$$\int_{-b/2}^{b/2} F_{xy} dy = 0 \quad (54)$$

$y = \pm b/2$ で

$$\int_{-b/2}^{b/2} F_{xy} dx = 0 \quad (55)$$

(52), (53) 式より p_1, p_2 はそれぞれ $x = \pm b/2, y = b/2$ での平均応力をあらわしていることがわかる。しかし、それ以外のところでは平均応力の意味を持たないことが (51) 式からわかる。また、 F_{xy} は各辺で平均として0になっていることがわかる。板の境界は直線を保持しなければならないとすると、 $u(\pm b/2, y) = \mp \varepsilon_1 \cdot b/2, v(x, \pm b/2) = \mp \varepsilon_2 \cdot b/2$ でなければならない。この点をしらべてみる。ひずみと変位の関係式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ &= \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} - \frac{f}{4r} \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{p_1}{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\nu \left(\frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \cos \frac{2\pi x}{b} - \frac{f}{4r} \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{p_2}{E} \right) \\
& - \frac{1}{2} f^2 \frac{\pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{\pi x}{b} \cos^2 \frac{\pi y}{b}
\end{aligned} \quad (56)$$

$x=b/2$ での変位は $\int_0^{b/2} (\partial u / \partial x) dx$ で与えられる.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{b} \int_0^{b/2} \frac{\partial u}{\partial x} dx &= -\frac{f}{2\pi r} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{p_1}{E} \\
& -\nu \left(-\frac{f}{2\pi r} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{p_2}{E} \right) - \frac{\pi^2 f^2}{8b^2}
\end{aligned} \quad (57)$$

同様に

$$\begin{aligned}
\frac{2}{b} \int_0^{b/2} \frac{\partial v}{\partial y} dy &= -\frac{f}{2\pi r} \cos \frac{\pi x}{b} - \frac{p_2}{E} \\
& -\nu \left(-\frac{f}{2\pi r} \cos \frac{\pi x}{b} - \frac{p_1}{E} \right) - \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} + \frac{2f}{\pi r} \cos \frac{\pi x}{b}
\end{aligned} \quad (58)$$

(57), (58) 式はそれぞれ y 方向, x 方向に変化している. すなわち, 境界での直線性が保持されていない. そこで, 境界での変位の直線性を平均的に満足させることにして, 上式の平均をとって $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の値とすることにする.

$$E\varepsilon_1 = p_1 - \nu p_2 + E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} + E \frac{f}{\pi^2 r} (1 - \nu) \quad (59)$$

$$E\varepsilon_2 = p_2 - \nu p_1 + E \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} + E \frac{f}{\pi^2 r} (-\nu) - E \frac{4f}{\pi^2 r} \quad (60)$$

(8) 式と (50) 式を使って, 伸びのひずみエネルギー V_1 と曲げのひずみエネルギー V_2 を求める.

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{t}{2E} \left[E^2 \frac{\pi^4 f^2}{64b^2} + E^2 \frac{b^2 f^2}{32r^2} - E^2 \frac{f^3}{6r} + b^2 (p_1 + p_2)^2 \right. \\
& + E \frac{4b^2 f}{\pi^2 r} (p_1 + p_2) - E^2 \frac{f^3}{6r} + E^2 \frac{f^2}{32r^2} b^2 \\
& \left. - 2(1 + \nu) \left\{ -E^2 \frac{f^3}{12r} + E \frac{b^2 f}{\pi^2 r} (p_1 + p_2) + p_1 p_2 b^2 \right\} \right] \quad (61)
\end{aligned}$$

$$V_2 = \frac{Et^3}{24(1 - \nu^2)} \frac{\pi^4}{b^2} f^2 \quad (62)$$

(59), (60) 式により (61) 式中の p_1, p_2 を $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ であらわして変位一定として平衡位置を求める. $\partial(V_1 + V_2)/\partial f = 0$ より

$$\varepsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} = \frac{\pi^2}{3(1 - \nu^2)} + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{8(1 + \nu)}{\pi^4} \right\} \left(\frac{b^2}{rt} \right)^2 \quad (63)$$

$$\varepsilon_1 \frac{b^2}{t^2} = \varepsilon_{cr} \frac{b^2}{t^2} - \frac{2}{\pi^2} \frac{b^2}{rt} f' + \frac{\pi^2}{4} f'^2 \quad (64)$$

$$p_1 \frac{b^2}{t^2} = p_{cr} \frac{b^2}{t^2} + E \left(-\frac{3 - \nu}{\pi^2} \frac{b^2}{rt} f' + \frac{\pi^2}{8} f'^2 \right) \quad (65)$$

(63)~(65) 式を (18)~(20) 式と比較すると、座屈ひずみは (63) 式の方が (18) 式より大きいが (b^2/rt によるが)、座屈後の特性自体にはあまり差がないことがわかる。 $\tau_{xy}=0$ と仮定した前の解析と境界条件を平均的に満足させたこの解析とどちらがより正解に近いかわからないが、少なくとも座屈後の挙動に関しては大きな差がないといえる。

7. 結 論

本論文では円筒曲面の座屈後の特性を解析した。計算は 4 辺単純支持と 4 辺固定支持の場合について行ない、座屈後の平均応力 p_1 ~ちぢみ ε_1 の関係および有効幅を求める式を得た。[(18)~(22) 式, (25)~(27) 式] 解析は $\nu=0$ と $\tau_{xy}=0$ という仮定を含んでいるため、これらの仮定に対する検討を行なった。まず、Reissner の変分原理により $\nu=0$ と仮定したことに対する検討を行なった。その結果、第 3 節で求めた座屈値および座屈後の特性 [(18)~(22) 式] は Reissner の変分原理を使った計算結果で $\nu=0$ とおいたものと全く同じであり、 $\nu=0$ と仮定したことによる影響は座屈ひずみの項にのみあらわれ、座屈後の特性には $\nu=0$ の仮定は全然影響を持たないことがわかった。数値的にみても $\nu=0$ と仮定したことにより大きなまちがいを生じていないといえる。次に $\tau_{xy}=0$ と仮定したことに対する検討を周辺の変位条件を平均的に満足すればよいとした解析法により行なった。その結果、座屈ひずみには差異がみられるが、座屈後の特性にはほとんど差が生じなかった。この二つのうらづけにより第 3 節、第 4 節の計算結果は妥当なものといえる。

円筒曲面の座屈および座屈後の特性は、周辺単純支持の場合 (18)~(22) 式、周辺固定支持の場合 (25)~(27) 式より求めることができる。これらの解析結果より次の結論を得た。

- (1) 曲面の軸圧縮座屈および座屈後の特性はパラメタ b^2/rt に左右される。
- (2) 座屈後に完全円筒殻の場合と同様に応力低下域が存在する。したがって、座屈は飛び移り現象になると推論される。
- (3) 応力低下の割合は b^2/rt が大なるほど大きい。
- (4) 有効幅は平板のようにゆっくり低下するのではなく、座屈後急減する。

1967 年 3 月 31 日 航空力学部

参 考 文 献

- [1] Redshaw, S. C.: Elastic Instability of a Thin Curved Panel, ARC R. & M., No. 1565 (1933)
- [2] Timoshenko, S.: Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill (1936)
- [3] Levy, S.: Large Deflection Theory of Curved Sheet, NACA TN No. 895 (1943)
- [4] Stowell, E. Z.: Critical Compressive Stress for Curved Sheet Supported along All Edges and Elastically Restrained against Rotation along the Unloaded Edges, NACA RB No. 3107 (1943)
- [5] Cox, H. L. and Pribram, E.: The Elements of the Buckling of Curved Plates, J. R. A. S., Vol. 52 (1948) p. 551
- [6] Cox, H. L.: The Buckling of Thin Plates in Compression, ARC R. & M., No. 1554 (1933)
- [7] Marguerre, K.: Die mittragende Breite der gedrückte Platte, Lufo., Bd. 14 (1937), p. 121
- [8] 林 毅, 村 外志夫: 変分法, コロナ社 (昭. 36)
- [9] Kobayashi, S.: Flutter of Wings Subjected to Aerodynamic Heating, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol. 5 (1962) p. 57
- [10] Reissner, E.: On a Variational Theorem in Elasticity, J. Math. and Physics, Vol. 29 (1950) p. 90

- [11] Reissner, E. : On a Variational Theorem for Finite Elastic Deformations, J. Math. and Physics, Vol. 32 (1953) p. 129
- [12] Ramberg, W., Levy, S. and Fienup, K. L. : Effect of Curvature on Strength of Axially Loaded Sheet-Stringer Panels, NACA TN No. 944 (1944)