

L-3H-1, 2, 3 および L-4S-1, 2 の性能計算

——三次元 6 自由度のロケット軌道計算——

秋葉鎧二郎・松尾弘毅*・佐伯信吾

1. 序 論

東大の開発してきたロケットも L-3 により高度 1000 km, 水平距離 2000 km にも達したので、これに改良を加えた L-3H, 更に最終段に球形ロケットをのせた L-4S では、もはやロケットの運動を単純な二次元運動とみなすことができなくなってきた。また、ロケットの燃焼する高度が高くなるにつれ、推力が飛しょう径路に沿って働くという従来の仮定は実情に即しなくなり、ロケットの姿勢をくわしく知る必要がでてきた。

そこで筆者らは、M, L 計画の進ちょくに歩調を合わせ、大型計算機により、地球の自転、風など従来考慮されなかった因子を考慮したできるだけ厳密な三次元 6 自由度の運動方程式を解くことを計画し、L-3H-1 で始めてこれによる完全な計算を行なうことができた。

当初はこの計算を宇宙研に設置された HIPAC 103 を用いたハイブリッド計算機で行なう予定でしたが、始めての試みであって技術的問題がいくつかあり実用化が多少おくれたので、途中より OKITAC 5090 による計算の段階を経て HITAC 5020 を用いて始めて実用された。現在では、諸般の事情を考慮し CDC 3600 にてこれを行なっている。その後、宇宙研のハイブリッド計算機も幾多の技術的問題点を克服し、実用化の域に達したが、これについては別の報告を参照されたい。

この計算は、標準軌道を正確に予測するのにつかわれるのみならず、高層までの風の影響を厳密に考慮することができるため風に対する発射角の補正係数を求めるのにもつかわれる。また従来、別途計算されていたスピンドルとかデスピンの特性の計算が同時になされるのも便利な点である。風に対する発射角の補正法については別報を参照されたい。

2. 座 標 系

ここで使う座標系としては、慣性系 (X, Y, Z), ロケットと共に運動する座標系 (L, P, R) および機体軸 (ξ, η, ζ) 系である。

i) 慣性系 (X, Y, Z)

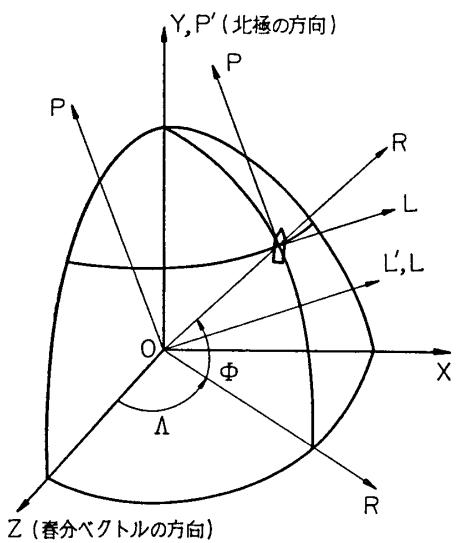
第 1 図に示すように、原点を地球の中心にもち、春分ベクトルの方向（春分時の太陽方向）を Z 軸に、北極の方向を Y 軸に、これらに直角に右手系を形成するように X 軸とする。春分ベクトルは赤道面内にあるから XZ 平面は赤道面となる。

ii) ロケットと共に運動する座標系 (L, P, R)

第 1 図に示すような二つの座標軸の回転を慣性系に対して行なったもので、(XYZ) 系と

*東大大学院学生

は次の関係で結ばれる。



第1図

$$\begin{pmatrix} L \\ P \\ R \end{pmatrix} = M_1(\Lambda, \Phi) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M_1^{-1}(\Lambda, \Phi) \begin{pmatrix} L \\ P \\ R \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここに、 $M_1^{-1}(\Lambda, \Phi)$ は $M_1(\Lambda, \Phi)$ の転置行列 $M_1'(\Lambda, \Phi)$ に等しく、

$$M_1(\Lambda, \Phi) = \begin{pmatrix} \cos \Lambda & 0 & -\sin \Lambda \\ -\sin \Phi \sin \Lambda & \cos \Phi & -\sin \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda & \sin \Phi & \cos \Phi \cos \Lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

である。

また、 Λ は次のように地球経度 λ と関係する。

$$\Lambda = \lambda + \Lambda_{G0} + \omega_e t \quad (5)$$

ここに、 t は発射後の時間、 ω_e は地球の回転角速度、 Λ_{G0} は $t=0$ でのグリニッジの inertial longitude である。

したがって、

$$\begin{aligned} \omega_e &= 2\pi \left(1 + \frac{1}{365.242\ldots} \right) \text{rad/day} \\ &= 2.5068447 \times 10^{-1} \text{ deg/min} \end{aligned} \quad (6)$$

Julian date (略して、J. D.) はグリニッジの正午から正午をもって1日とし、4713 BC の1月1日より数えた日付であるが、これを用いると発射日の（発射日が午前ならば前日の）正午のグリニッジの inertial longitude Λ_{G0} は次式で与えられる。

$$\Lambda_{G0} = 99.6909833^\circ + 3600.7689^\circ T_v + 0.00038708^\circ T_v^2$$

ただし

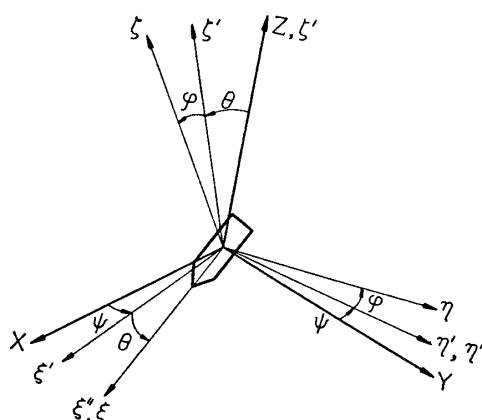
$$T_v = \frac{\text{J. D.} - 2415020.0}{365.25} \quad (7)$$

これより (6) を用いれば Λ_{G0} が計算されるわけである。

iii) 機体軸 (ξ, η, ζ)

ロケットの軸をとる場合、これを機体の三つの慣性主軸とする場合と幾何学的な軸をとる場合がある。ここでは、通常両者がほとんど一致するので前者をとった。もし後者とするならば後の Euler 方程式が変る程度のこととで容易に変更される。

(ξ, η, ζ) 軸の慣性系 (X, Y, Z) 軸に対する相対位置を示すのに第2図に示すような Euler 角 (ϕ, θ, φ) をもつてする。すなわち、まず Z 軸まわりに ψ だけまわし、($\xi', \eta', \zeta' = Z$) 系とし、次に η' 軸まわりに θ だけまわし ($\xi'', \eta'' = \eta', \zeta''$) 系とし最後に ξ'' 軸まわりに ϕ だけ



第2図

まわし ($\xi = \xi''$, η , ζ) 系とする。この三つの回転により慣性系成分と機体軸成分は次の関係で結ばれる。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = M_2(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M_2^{-1}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここに $M_2^{-1}(\phi, \theta, \psi) = M_2'(\phi, \theta, \psi)$ で ('は転置行列)

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \cos\psi & \sin\phi \sin\theta \sin\psi & \sin\phi \cos\theta \\ -\cos\phi \sin\psi & +\cos\phi \cos\psi & \\ \cos\phi \sin\theta \cos\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi & \cos\phi \cos\theta \\ +\sin\phi \sin\psi & -\sin\phi \cos\psi & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (10)$$

これらと (1), (2), (3) より L, P, R 成分と ξ, η, ζ 成分を結ぶ関係は次のとくなる。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = M_3 \begin{pmatrix} L \\ P \\ R \end{pmatrix} \quad (11) \quad \begin{pmatrix} L \\ P \\ R \end{pmatrix} = M_3^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで $M_3^{-1} = M_3'$

$$M_3 = M_2(\phi, \theta, \psi) M_1'(\lambda, \Phi) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (13)$$

3. 空気との相対運動

後での空力的諸量算出の際の便宜のために、ここで空気との相対速度 \mathbf{U} および迎え角 α を求めておく、

自転している地球からみたロケットの相対速度 \mathbf{V} の L, P, R 成分は

$$V_L = r\dot{\lambda} \cos\Phi, \quad V_P = r\dot{\Phi}, \quad V_R = \dot{r} \quad (14)$$

風のベクトル \mathbf{w} の L, P, R 成分を w_L, w_P, w_R とすると空気に対しロケットがもつている相対速度 \mathbf{U} の L, P, R 成分は、

$$U_L = r\dot{\lambda} \cos\Phi - w_L, \quad U_P = r\dot{\Phi} - w_P, \quad U_R = \dot{r} - w_R \quad (15-a)$$

その機体軸成分 (U_ξ, U_η, U_ζ) は

$$\begin{pmatrix} U_\xi \\ U_\eta \\ U_\zeta \end{pmatrix} = M_3 \begin{pmatrix} U_L \\ U_P \\ U_R \end{pmatrix} \quad (15-b)$$

空力的迎え角 α は機軸と \mathbf{U} のなす角で定義されロケットの幾何学的中心軸と ξ 軸が一致すれば

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_\xi}{U} \quad (16)$$

となる。この量は多くの場合後述のように直接計算につかうことはないが空力的姿勢角を直観的に知る上に便利である。

4. 運動方程式

i) 重心の運動方程式

(5) 式から $\dot{\lambda} = \dot{\lambda} + \omega_e, \ddot{\lambda} = \ddot{\lambda}$ を用いて、

$$\ddot{\lambda} = \left[\frac{F_L}{m} - 2\dot{r}(\dot{\lambda} + \omega_e) \cos \Phi + 2r\dot{\Phi}(\dot{\lambda} + \omega_e) \sin \Phi \right] / r \cos \Phi \quad (17-a)$$

$$\ddot{\Phi} = \left[\frac{F_P}{m} - r(\dot{\lambda} + \omega_e)^2 \sin \Phi \cos \Phi - 2\dot{r}\dot{\Phi} \right] / r \quad (17-b)$$

$$\dot{r} = \frac{F_R}{m} + r\dot{\Phi}^2 + r(\dot{\lambda} + \omega_e)^2 \cos^2 \Phi \quad (17-c)$$

ここに $\mathbf{F} = (F_L, F_P, F_R)$ は外力であり、これを通じて重心の運動が重心回りの運動と関連していく。

ii) 重心まわりの運動方程式

(ξ, η, ζ) 系の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\phi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{e}_\eta' + \dot{\varphi} \mathbf{e}_\xi \\ &= (\dot{\phi} - \dot{\varphi} \sin \theta) \mathbf{e}_\xi + (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi) \mathbf{e}_\eta \\ &\quad + (\dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \mathbf{e}_\zeta \\ &= \omega_\xi \mathbf{e}_\xi + \omega_\eta \mathbf{e}_\eta + \omega_\zeta \mathbf{e}_\zeta \end{aligned} \quad (18)$$

また $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ を $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ をもってあらわせば、

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega_\xi + \tan \theta \sin \varphi \omega_\eta + \tan \theta \cos \varphi \omega_\zeta \\ \dot{\theta} &= \cos \varphi \omega_\eta - \sin \varphi \omega_\zeta \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} \omega_\eta + \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \omega_\zeta \end{aligned} \quad (19)$$

$\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ に関しては次の Euler の方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_\xi - (B-C)\omega_\eta\omega_\zeta &= N_\xi \\ B\dot{\omega}_\eta - (C-A)\omega_\zeta\omega_\xi &= N_\eta \\ C\dot{\omega}_\zeta - (A-B)\omega_\xi\omega_\eta &= N_\zeta \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、 $N(N_\xi, N_\eta, N_\zeta)$ は重心まわりのモーメント、 A, B, C は ξ, η, ζ 軸まわりの慣性能

率である。

5. 外 力

ロケットに働く力としては非常に多くのものが考えられるが、その中で現在データを与えるものでしかもその影響の大きいものを考慮に入れた。すなわち、

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{C} \quad (21)$$

ここで、 \mathbf{G} : 重力 \mathbf{T} : 推力 \mathbf{D} : 空気抵抗 \mathbf{L} : 揚力 \mathbf{C} : 制御力

i) 重力 \mathbf{G}

重力としては、差し当たり逆二乗則

$$G_L = 0, \quad G_P = 0 \quad G_R = -mg_0 \left(\frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2 \quad (22)$$

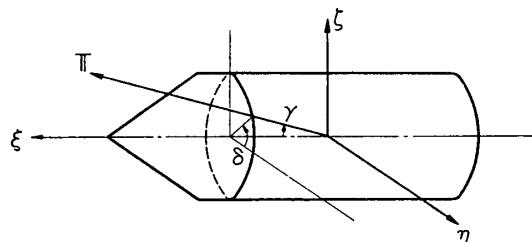
で与えているが、目的によっては更に厳密な形

$$\mathbf{G} = D \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin\phi) \right\}$$

(ただし μ, J_n は定数、 P_n は Legendre 多項式、 R は赤道半径) で与えるのも本質的に困難なことではない、

ii) 推力 \mathbf{T}

第3図に示す malalignment angle γ, δ を用いると、



第3図

$$\begin{aligned} T_{\xi} &= T \cos \gamma, & T_{\eta} &= T \sin \gamma \cos \delta, \\ T_{\zeta} &= T \sin \gamma \sin \delta \end{aligned} \quad (23-a)$$

L, P, R 成分が必要だから次の変換をする。

$$\begin{pmatrix} T_L \\ T_P \\ T_R \end{pmatrix} = M_3^{-1} \begin{pmatrix} T_{\xi} \\ T_{\eta} \\ T_{\zeta} \end{pmatrix} \quad (23-b)$$

iii) 空気抗力 \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = -D \frac{\mathbf{U}}{U}$$

$$\text{すなわち}, \quad D_L = -D \frac{U_L}{U}, \quad D_P = -D \frac{U_P}{U}, \quad D_R = -D \frac{U_R}{U} \quad \}$$

(24)

ここに

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 C_D(M, \alpha) S$$

C_D としてはもちろん更に別の無次元量の関数として与えることもできるが、実際上あまり詳しいデータが与えられないのが実情であるから多くの場合マッハ数 M のみの関数として与える。また S は胴体の最大断面積である。

iv) 揚力 \mathbf{L}

機体がほぼ軸対称であり、空気力はゼロ揚力方向に関し軸対称に働くとすると、ゼロ揚力方向の ξ, η, ζ 軸に関する方向余弦を l, m, n として、

$$L = L \frac{[U \times (le_\xi + me_\eta + ne_\zeta)] \times U}{U^2 \sin \alpha}$$

ここに

$$L = \frac{1}{2} \rho U^2 C_{L\alpha} \alpha S = L_\alpha \alpha \quad (25-a)$$

今 α が非常に小さいと考えると、これはまた

$$L = L_\alpha (le_\xi + me_\eta + ne_\zeta) - L_\alpha \frac{U}{U} \quad (25-b)$$

となり α は直接式の中に入ってこない。成分で書くと、

$$L_\xi = L_\alpha \left(l - \frac{U_\xi}{U} \right), \quad L_\eta = L_\alpha \left(m - \frac{U_\eta}{U} \right), \quad L_\zeta = L_\alpha \left(n - \frac{U_\zeta}{U} \right)$$

やはり L, P, R 成分を必要とするから

$$\begin{pmatrix} L_L \\ L_P \\ L_R \end{pmatrix} = M_3^{-1} \begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} \quad (25-c)$$

v) 制御力 C

機体軸に関して与えられることが多く、 L, P, R 系への変換を必要とするであろうが、通常この影響は小さく省略しても差しつかえなかろう。

6. モーメント M

以下に述べる六つのモーメントを考慮した。

$$M = M_R + M_D + M_l + M_{lp} + M_J + M_c$$

i) 空力的静安定モーメント M_R

揚力と同じくゼロモーメント方向を $le_\xi + me_\eta + ne_\zeta$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} M_R &= -M_R \frac{U \times (le_\xi + me_\eta + ne_\zeta)}{U \sin \alpha} \\ M_R &= \frac{1}{2} \rho U^2 l' C_{m\alpha} \alpha S = M_{R\alpha} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (26-a)$$

同様に α が小さいと仮定すれば

$$\begin{aligned} M_R &= M_{R\xi} e_\xi + M_{R\eta} e_\eta + M_{R\zeta} e_\zeta \\ M_{R\xi} &= -\frac{M_{R\alpha}}{U} (n U_\eta - m U_\zeta) \\ M_{R\eta} &= -\frac{M_{R\alpha}}{U} (l U_\zeta - n U_\xi) \\ M_{R\zeta} &= -\frac{M_{R\alpha}}{U} (m U_\xi - l U_\eta) \end{aligned} \quad (26-b)$$

ii) 減衰モーメント M_D

$$\begin{aligned} M_D &= -M_o (\omega_\eta e_\eta + \omega_\zeta e_\zeta) \\ M_D &= \frac{1}{2} \rho U l'^2 C_{mq} S \end{aligned} \quad (27)$$

iii) 回転モーメント \mathbf{M}_l (舵角によるもの)

$$\mathbf{M}_l = M_l \mathbf{e}_\xi$$

$$M_l = \frac{1}{2} \rho U^2 S_l' C_l \delta_r S_r \quad (28)$$

ここに、 S_r は舵の面積である。また δ_r は舵角をあらわす。

iv) 回転減衰モーメント \mathbf{M}_{lp}

$$\mathbf{M}_{lp} = -M_{lp} \omega_\xi \mathbf{e}_\xi$$

$$M_{lp} = \frac{1}{2} \rho U_l'^2 C_{lp} S \quad (29)$$

v) Jet damping moment \mathbf{M}_J

その成分 $M_{J\xi}$, $M_{J\eta}$, $M_{J\zeta}$ は

$$\left. \begin{aligned} M_{J\xi} &= -K \omega_\xi \\ M_{J\eta} &= (\dot{m} l''^2 - \dot{B}) \omega_\eta \\ M_{J\zeta} &= (\dot{m} l'''^2 - \dot{C}) \omega_\zeta \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ここに K : roll jet damping 係数

l'' : 重心からノズル出口までの距離

これらは、排出される燃焼ガスと機体との間の角運動量の授受により出てくるモーメントである。回転方向についていえば普通ノズルはロケットの中心軸上にあるから円周に近いところで燃えた推薦の燃焼ガスは燃焼室内で一度中心軸に向う。もしも燃焼ガスの運動が内面形状に阻まれないならば中心に近づくほど回転角速度が増すことになる。しかし一般に推薦の内面形状は内面に突起のある複雑なかっこうであるので、ガスがこれにつき当り機体にスピニ方向の角運動量を与える。換言すれば負の減衰モーメントを発生する。これが (30) の第1式の意味であり、実際 L-4S-1 の最終段 480S において顕著にあらわれた。第2式、第3式は直接に角運動量の微分をとることにより得られる。

vi) 制御モーメント \mathbf{M}_c

姿勢制御に対し特に重要であるのみならず、推力のもつモーメントによる分散を議論する際にもつかわれる。

たとえば、補助ブースタが1本点火しない場合の軌道計算がなされた。

7. 初期条件その他

$t=0$ で与えるべき条件は解くべき式の座標系で与えてやらねばならぬ。普通発射方向は上下角 α_0 、方位角 β_0 であらわす。後者は北よりの角度である。

これによれば、

$$\lambda = \lambda_0 \quad (\text{発射点の経度}) \quad \text{または} \quad A = A_0$$

$$\varPhi = \varPhi_0 \quad (\quad " \quad \text{緯度}) \quad (31)$$

$$r = r_0 \quad (\quad " \quad \text{高度})$$

$$\psi = \arctan \frac{y}{x}, \quad \theta = \arcsin(-z) \quad (32)$$

ここに

$$\varphi = \varphi_0$$

$$x = \cos \Lambda_0 \cos \alpha_0 \cos \beta_0 - \sin \Phi_0 \sin \Lambda_0 \cos \alpha_0 \cos \beta_0 \\ - \cos \Phi_0 \sin \Lambda_0 \cos \alpha_0$$

$$y = \cos \Phi_0 \cos \alpha_0 \sin \beta_0 - \sin \Phi_0 \sin \alpha_0$$

$$z = -\sin \Lambda_0 \cos \alpha_0 \cos \beta_0 - \sin \Phi_0 \cos \Lambda_0 \cos \alpha_0 \sin \beta_0 \\ - \cos \Phi_0 \cos \Lambda_0 \sin \alpha_0$$

地球の自転角速度や、発射時のじょう乱を無視すれば

$$\dot{\phi} = \dot{\theta} = \dot{\rho} = 0 \quad (33)$$

また、ランチャ長ゼロであれば

$$\lambda = \dot{\phi} = \dot{r} = 0 \quad (34-a)$$

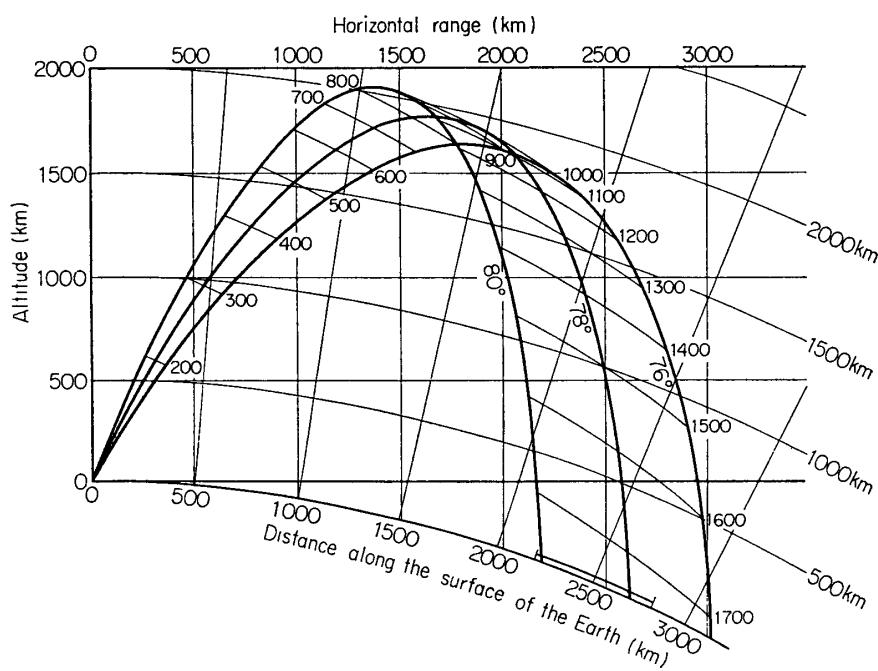
有限長ランチャであれば、離脱時速度 $V_0 (V_{L0}, V_{P0}, V_{R0})$ を用いて、

$$\lambda = \frac{V_{L0}}{r_0 \cos \Phi_0}, \quad \dot{\phi} = \frac{V_{P0}}{r_0}, \quad \dot{r} = V_{R0} \quad (34-b)$$

その他与えるべき数値としては従来の計算におけるものと大差ないので省略する。

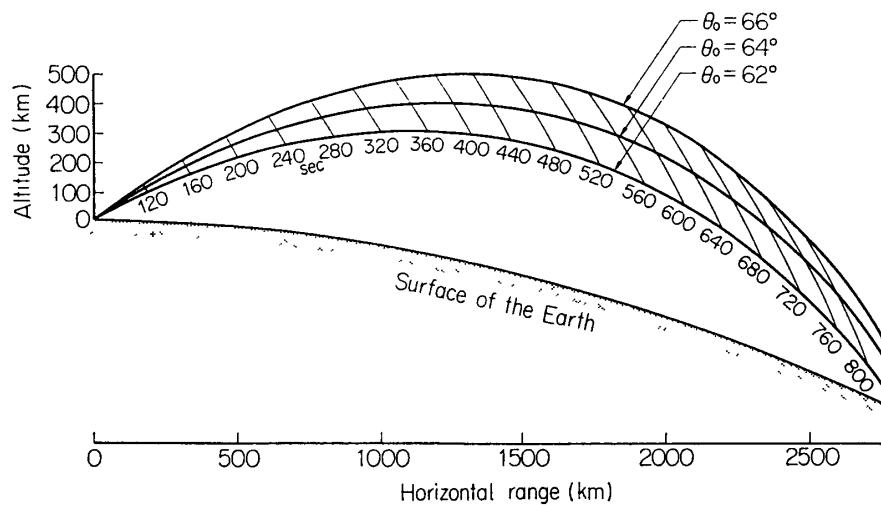
8. 計 算 例

代表例として、L-3H-3, L-4S-2 の飛しょう径路を第4図、第5図に示す。

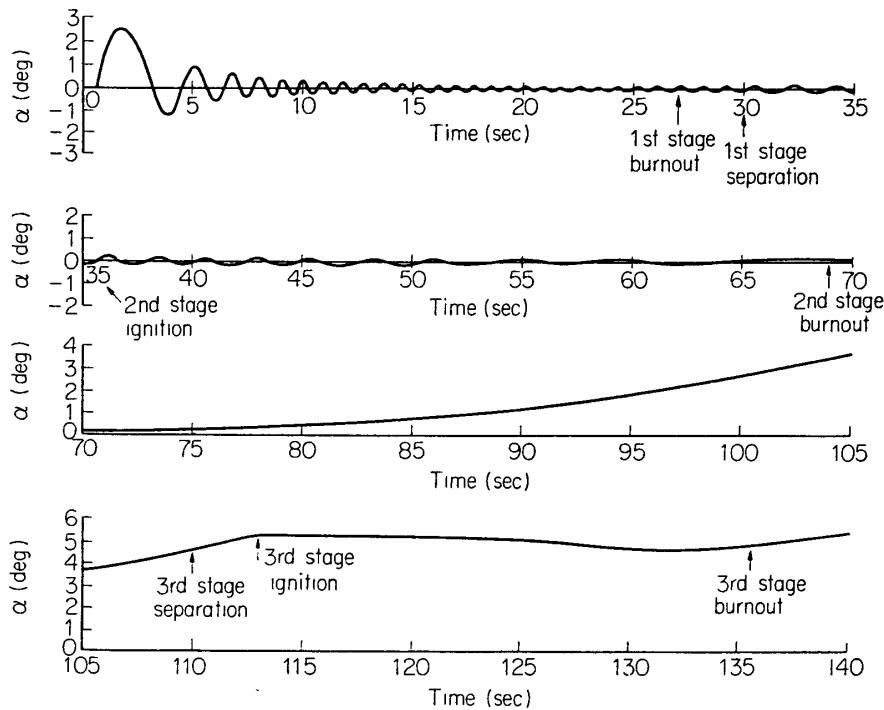


第4図

これを従来の計算によるものと比較すると、特に発射直後、1および3段目燃焼中の径路が大きく異なり、立った軌道となる。L-4S-2について $\alpha \sim t$ の関係を示すと第6図のよう



第5図



第6図

になり、3段目燃焼中はほとんどスピンドル方向すなわち機体軸が変わらないことがわかる。またこの計算では空力的減衰モーメントは考慮していないが、振動が発散するようなことはない。このことは3段目まで制御なしの重力ターン方式で人工衛星をつくろうとするL-4S計画に矛盾がないことを示す意味で重要である。

3段目燃焼終了後、4段目点火までは慣性系に対しては全く橈円軌道なので必ずしも三次元6自由度の式をつかう必要はないので、場合によってはその橈円軌道を座標変換するプログラムによった。

9. 結 び

以上現在までに行なった三次元6自由度の軌道計算のあらましを述べた。切断の際の姿勢変化等、部分的に更に精密化を必要とする部分もあり、今後検討を続ける所存であるが、現在の程度でも十分飛しょう径路のシミュレーションとしての目的は達せられ、飛しょう実験に先立ち、飛しょうのプログラムや機体の特性のチェックを行なうことができた。また、風の影響関数を計算するのにも役立った。

本計算を遂行するに際しては非常に多くの人々のお世話になったが、特に、野村、玉木、渡辺教授を始めとする TC 研究会のメンバー、OKITAC 5090 による計算に際して東大生産研第三部の藤田長子講師、HITAC 5020 による計算に際しての日立製作所徳増氏および CDC 3600 による計算に際しての伊藤忠計算センタの小林氏に紙面をかりて深く感謝の意を表する。

1967年1月30日 宇宙工学

参 考 文 献

- [1] Escobal, P. R., "Methods of Orbit Determination,"
John Wiley and Sons, July (1965).
- [2] 秋葉、松尾, "三次元6自由度のロケット軌道計算式,"
SE TN-64-001-TC, SE TN-64-002-TC (1964)
SE TN-65-003-TC (1965)