M-4Sロケットの最適操舵について

松尾　弘毅・佐伯　信吾

1. 序　　論

本稿は，与えられたロケットを用いて与えられた高度の衛星軌道にペイロードを送り込むのに際し，推力の方向制御を行なうことによって，gravity turn trajectory に比べてどれだけのペイロード増が見込めるか，すなわち初期設計の段階で飛しょう性能の評価を gravity turn trajectory で行なうことが妥当であるかどうかを検討することを目的として書かれたもので M-4S 計画の一環をなすものである．本来ならば“Mロケットの飛しょう計画”の一節を構成すべきものであるが，先んじてここに掲載することとした．

さて，この種のいわゆる操舵の問題では，いずれも変分問題に固有の二点境界値問題を解かねばならないが，一般に二点境界値問題は，初期条件と終端条件の分離がはなはだしい場合には多次元の trial and error を行なわねばならず解くことが困難である．この点を回避あるいは解決するために gradient method, method of second variation, generalized Newton-Raphson method, dynamic programming 等が提案されているが，当然のことながらこれらの方法では直接的な trial and error method に比べてプログラムは複雑となりまた大記憶容量が要求される．ここでは HIPAC 103 の使用を前提として trial and error method を用いたが，gravity turn trajectory が相当良好な第一次近似を与えるであろうことを手掛りとして，数回の一次元の捜索で解を収束させることに成功した．

2. 運 動 方 程 式

平面内での質点としてのロケットの運動方程式は次のようになる．

$$\frac{dV}{dt}=\frac{T\cos\alpha-D}{W/g_0}-\frac{\mu}{r^2}\sin\theta \tag{1}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{T\sin\alpha}{VW/g_0}-\frac{\mu}{r^2V}\cos\theta \tag{2}$$

$$\frac{dr}{dt}=V\sin\theta \tag{3}$$

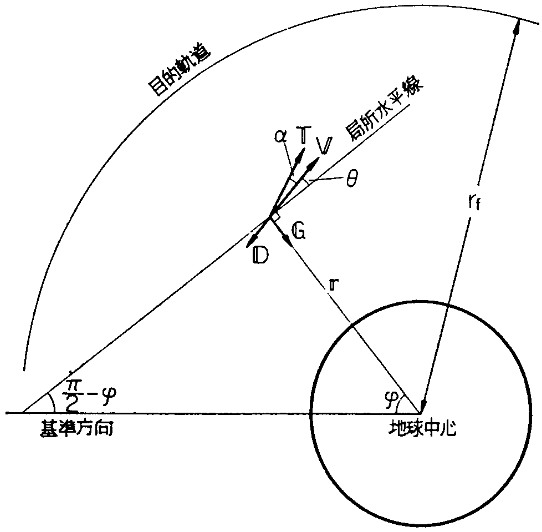
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{V\cos\theta}{r} \tag{4}$$

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{T}{I_{sp}} \tag{5}$$

C_D: 抵抗係数

D: 空気抵抗　$=1/2\,\rho\,V^2\,C_D\,S$

g_0: 地上での重力加速度



第1図

I_{sp}: 比推力

r: 地球中心からの距離

S: ロケット胴体断面積

T: 推力

W: ロケット重量

α: $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{T}$ のなす角

θ: 局所水平面と $\boldsymbol{V}$ のなす角

μ: 重力常数

ρ: 空気密度

φ: 基準方向と動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ のなす角

上の運動方程式では次のような簡略化がなされている．すなわち地球の自転の影響は無視され，揚力の横方向の運動におよぼす影響も推力の影響に比べて無視されている．また推力 T は一般には，

$$T=T_0+A_e(P_{a0}-P_a) \tag{6}$$

T_0: 地上試験での推力

A_e: ノズル出口面積

P_{a0}: 地上での大気圧

P_a: 大気圧

で与えられ外気圧 P_a したがって高度の関数であるが，この問題では，T_0 は一定とし各段飛しょう中の平均外気圧 $\bar{P}_a$ を仮定して，T もまた各段ごとに次式で示される一定値をとるものとした．

$$T=T_0+A_e(P_{a0}-\bar{P}_a) \tag{7}$$

したがって，ロケット各段の燃焼開始および切断の秒時が与えられている場合には，T は W, S と共に時間の関数として与えられる．

3. 変分方程式

一般に関数系

$$y_k(t),\quad k=1,\ \cdots\cdots,\ n \tag{8}$$

が，微分方程式

$$f_j(t,\ y_k,\ \dot{y}_k)=0,\quad j=1,\cdots\cdots,\ p<n \tag{9}$$

および境界条件

$$\omega_r(t_i,\ y_{ki})=0,\quad r=1,\cdots\cdots q \tag{10}$$

$$\omega_r(t_f, y_{kf})=0,\quad r=q+1,\cdots\cdots s\ \leq 2n+2 \tag{11}$$

i: 初期条件

f: 終端条件

を満たして，しかも

$$\phi\equiv\int_{t_i}^{t_f}H(t,\ y_k,\ \dot{y}_k)dt \tag{12}$$

を極大にするための条件は，次のようである [1].

すなわちあらたに Lagrange の乗数

$$P_j(t),\quad j=1,\cdots\cdots,n \tag{13}$$

を導入し，F を

$$F\equiv H+\sum_{j=1}^{p}P_j f_j \tag{14}$$

で定義すると，$y_k(t)$ は（9）式に加えて次の Euler-Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_k}\right)-\frac{\partial F}{\partial y_k}=0,\quad k=1,\cdots\cdots,n \tag{15}$$

および，境界条件として (10)，(11) 式に加えて下記の横断性条件

$$\left[\left(F-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_k}\dot{y}_k\right)dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_k}dy_k\right]_i^f=0 \tag{16}$$

を満たすことが必要である．また，$y_k(t)$ に有限個の有界な不連続を許すと，その不連続点では下記のいわゆる Erdmann-Weierstrass の条件

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_k}\right)_-=\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_k}\right)_+,\quad k=1,\cdots\cdots,n \tag{17}$$

$$\left(-F+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_k}\dot{y}_k\right)_-=\left(-F+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_k}\dot{y}_k\right)_+,\quad k=1,\cdots\cdots,n \tag{18}$$

が満たされねばならない．ここに $-$，$+$ は不連続の両側の条件を示す．

さて以上の準備のもとにわれわれの問題を定式化する．まず目的は，与えられたロケットで与えられた高度の円軌道に最大のペイロードを送り込むことであるが，最終段ロケットは遠地点で水平に噴射することとすると，このことは下段ロケットの軌道の遠地点速度を最大にすることと同一である．下段ロケット各段の切り離しおよび燃焼開始の秒時を与えると，**2.** で述べたように T, W, S は時間の関数となり，また（4）式は幾何学的関係を与えるだけの式であるからこれを除外すると，（9）式に対応する式は（1）～（3）式から次のよ

うになる．すなわち $y_1=V$, $y_2=\theta$, $y_3=r$, $y_4=\alpha$ とおくと，

$$f_1\equiv\dot{V}-\left(\frac{T\cos\alpha-D}{W/g_0}-\frac{\mu}{r^2}\sin\theta\right)$$
$$\equiv\dot{V}-f_V(V,\theta,r,\alpha,t)=0 \tag{19}$$

$$f_2\equiv\dot{\theta}-\left(\frac{T\sin\alpha}{VW/g_0}-\frac{\mu}{r^2V}\cos\theta\right)$$
$$\equiv\dot{\theta}-f_\theta(V,\theta,r,\alpha,t)=0 \tag{20}$$

$$f_3\equiv\dot{r}-V\sin\theta$$
$$\equiv\dot{r}-f_r(V,\theta,r,\alpha,t)=0 \tag{21}$$

次に Euler-Lagrange の式 (15) は，この場合 $H=\dot{V}$ とおくと，V, θ, r に対応して

$$\dot{P}_V+P_V\frac{\partial f_V}{\partial V}+P_\theta\frac{\partial f_\theta}{\partial V}+P_r\frac{\partial f_r}{\partial V}=0 \tag{22}$$

$$\dot{P}_\theta+P_V\frac{\partial f_V}{\partial\theta}+P_\theta\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta}+P_r\frac{\partial f_r}{\partial\theta}=0 \tag{23}$$

$$\dot{P}_r+P_V\frac{\partial f_V}{\partial r}+P_\theta\frac{\partial f_\theta}{\partial r}+P_r\frac{\partial f_r}{\partial r}=0 \tag{24}$$

α に対応して

$$P_V\left[\frac{-T\sin\alpha}{W/g_0}\right]+P_\theta\left[\frac{T\cos\theta}{VW/g_0}\right]=0 \tag{25}$$

すなわち

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{1}{V}\frac{P_\theta}{P_V}\right) \tag{26}$$

となる．したがって問題は (26) 式で与えられる α を用いて，V, θ, r, P_V, P_θ, P_r に関する微分方程式 (19)～(24) を以下に述べる境界条件のもとで解くことになる．

次に境界条件は，(10)，(11) 式に対応して V_i, r_i, t_i, θ_f, r_f が与えられている．発射台の長さを一定と考えているので V_i は一定となるが発射角 θ_i は自由である．横断性条件 (16) はこの場合

$$\left[-(P_V\dot{V}+P_\theta\dot{\theta}+P_r\dot{r})dt+(1+P_V)dV+P_\theta d\theta+P_r dr\right]_i^f=0 \tag{27}$$

となるが，V_f の極大値を求めているのであるから $dV_f=0$ であること，遠地点であるから $\dot{V}_f=\dot{r}_f=0$ であることを考慮すると上式から

$$P_{\theta,i}=0 \tag{28}$$
$$P_{\theta,f}=0 \tag{29}$$

を得る．また，$P_{V,i}$ は不定であるが，P に関する微分方程式 (22)～(24) が斉次であることおよび α を決定する (26) 式のかたちから，あらたに $P_V/P_{V,i}$ を P_V, $P_\theta/P_{V,i}$ を P_θ, $P_r/P_{V,i}$ を P_r とおいても一般性は失われない．したがって

$$P_{V,i}=1 \tag{30}$$

としてよい．以上の境界条件をまとめて第1表に示す．

第1表 境 界 条 件

変　数	初期条件	終端条件
V (km/sec)	V_i	最　大
θ (deg)	未　知	0
r (km)	r_i	r_f
P_v (—)	1	未　知
P_θ (km/sec)	0	0
P_r (1/sec)	未　知	未　知
t (sec)	0	未　知
α (deg)	0	0

4. 数　値　解

3. の結果に基づいて，第2表に示す諸元を有するロケットに関して解を求めた．境界条件としては次の値を用いた．

第2表

項目 ＼ エンジン	第 1 段	補助ブースタ	第 2 段	第 3 段	第 4 段
総 重 量 (ton)	25.000	2.667	7.627	2.144	0.371
燃料重量 (ton)	20.000	2.000	6.300	1.771	0.319
構造重量 (ton)	5.000	0.667	1.327	0.373	0.052
ペイロード (kg)	—	—	200	100	184
質 量 比 ($W_T/W_{b.o.}$)	2.287	—	2.485	2.876	3.099
推 力 (ton)	100.500	100.000	38.660	19.130	6.176
比 推 力 (sec)	230	220	270	270	290
燃焼時間 (sec)	44.0	4.4	44.0	25.0	15.0

$r_i = 6378$ km

$V_i = 0.03$ km/sec

$r_f = 6878$ km (高度 500 km)

$\theta_f = 0$ degree

第1表によれば，微分方程式 (19)～(24) の積分に際して θ_i, $P_{r,i}$ を仮定し，適当な時間 t_f で θ, r, P_θ が定められた値になるようにしなければならないが，ここでは次のような方法によった．

i)　gravity turn trajectory を第1次近似として用いることとし，$\alpha=0$ として種々の θ_i に関して運動方程式 (19)～(21) を独立に解いて，θ_i と遠地点高度 r_f との関係を求めた．その結果 $r_f=6878$ km に対応する値として $\theta_i=69.4°$, $V_f=5.181$ km/sec を得た．

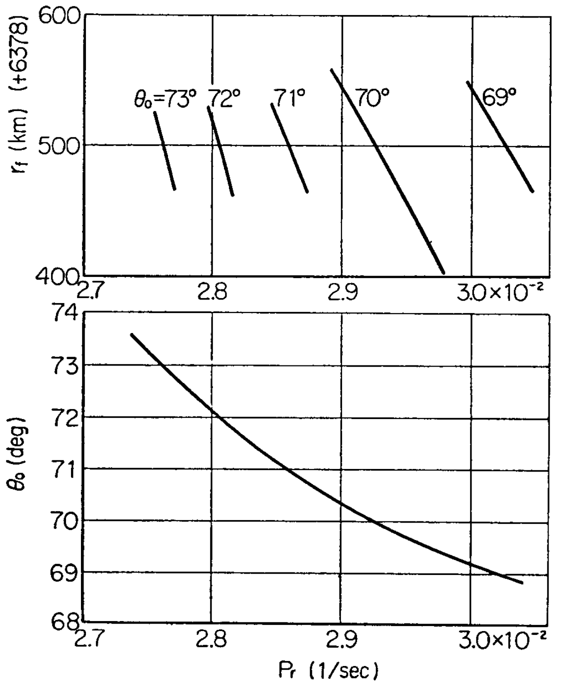
ii)　i) の結果，求める θ_i は 69.4° の近傍にあるものとして，まず $\theta_i=70°$ として $P_{r,i}$ を種々与えて $P_{r,i}$ とそれに対応する遠地点高度 r_f および速度 V_f の関係を求めた．

iii)　θ_i の値を 70° の近傍で変化させて ii) の操作を繰り返した．その結果を第2図に示す．

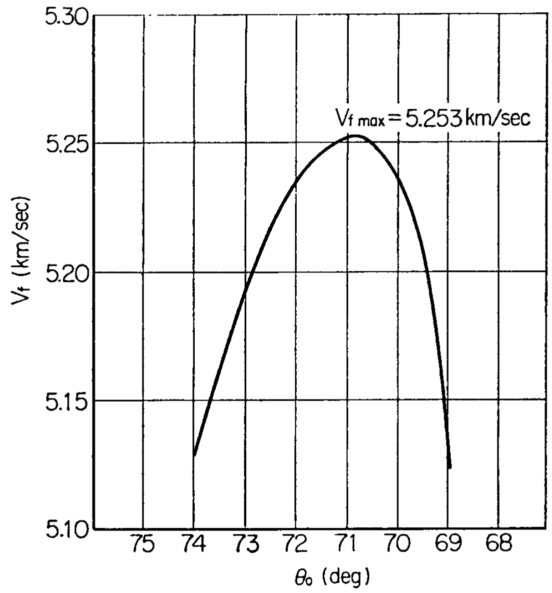
iv)　iii) の結果を用いて，$r_f=6878$ km に対する V_f の値と θ_i の関係を求めた．その結果を第3図に示す．

v)　第3図から $V_{f,\max}=5.253$ km/sec を得るが，これが求める V_f の最大値である．

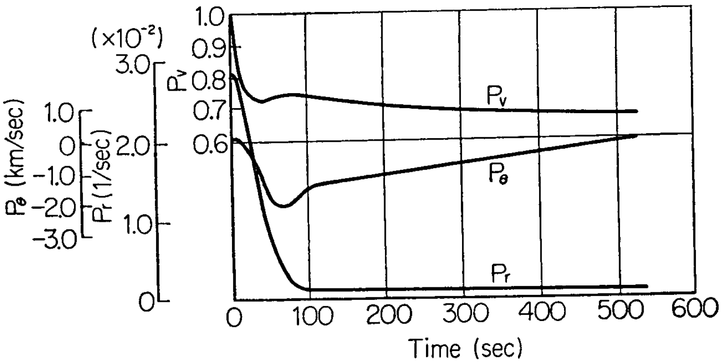
第3図から $V_{f,\max}$ を与える θ_i は 70.9°，さらに第2図からこのときの $P_{r,i}$ は 0.0287 1/sec となる．この値を用いて (19)～(24) 式を積分し，その結果得られた各量の時間変化を第4～8図に示す．ここでは目的量 V_f の最大値を直接に求めたが，第4図に見られるようにこのとき確かに $P_{\theta,f}$ も0となっている．



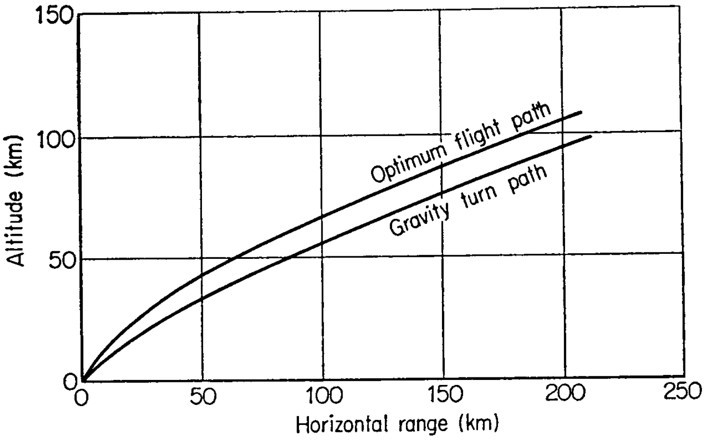
第2図



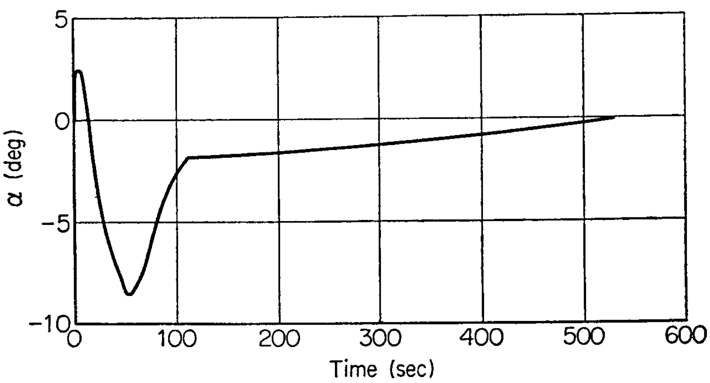
第3図


Pv
Pθ
Pr
Time (sec)
Pθ (km/sec)
Pr (1/sec)
Pv
(×10⁻²)

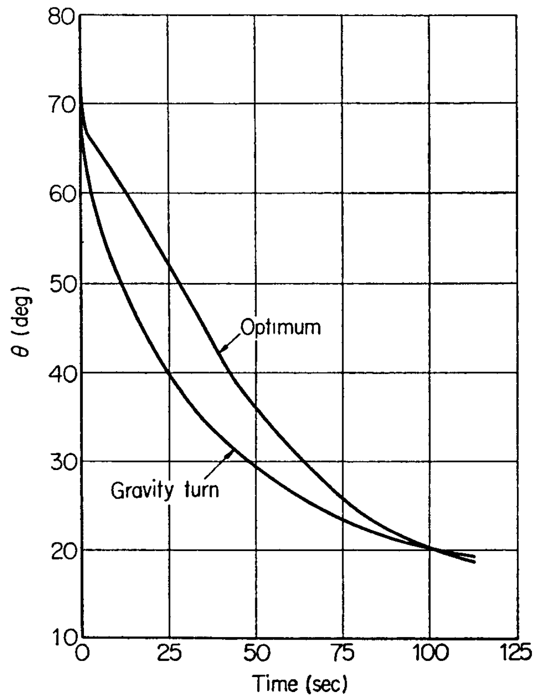
第 4 図


Optimum flight path
Gravity turn path
Altitude (km)
Horizontal range (km)

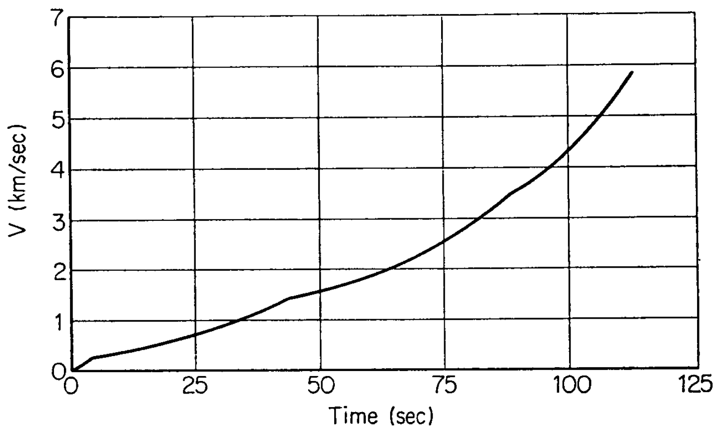
第 5 図


α (deg)
Time (sec)

第 6 図



第7図



第8図

5. 結　　論

結局,操舵によってもたらされる最終速度の増分は, gravity turn trajectory に比べて, 72 m/sec で,約 1.4% の増加となる.この値は,一様な重力場を仮定し2段目のみに操舵を行なった場合を解いた Ross [2] の結果ともよく一致している.最終速度の 1.4% の増加は,第2表の値を用いるとペイロードに関しては約6%の増加にあたり,この限りでは初期設計の段階で飛しょう性能を gravity turn trajectory で評価することは妥当であると考えられる. Kulakowski-Stancil [3] は発射角固定の場合について不定初期値の修正法を扱っているが,出発点としての良好な第一次近似値を得るためには,二次元の捜索を行なわねばな

らない．しかしここで扱った問題のように発射角が自由である場合には，gravity turn trajectory を第一次近似とすることによって初期値探しの問題は大幅に緩和され，**4.** に述べられたように数回の一次元の捜索によって解を収束させることができた．なお，操舵自体の問題としては，更に，運動方程式の厳密化および各段コースティング時間の検討が必要であろう．最後に本稿を書くにあたっての秋葉 助教授のご指導に感謝するしだいである．

1967 年 1 月 30 日　宇宙工学

参 考 文 献

[*1*] Leitmann, G.: "Optimization Techniques" Academic Press, (1962)

[*2*] Ross, S.: "Composite Trajectories Yielding Maximum Coasting Apogee Velocity" ARS J., (November. 1959)

[*3*] Kulakowski, L. J., Stancil, R. T.: "Rocket Boost Trajectories for Maximum Burnont Velocity" ARS J., (July. 1960)

[*4*] 松尾弘毅，佐伯信吾："M-4SH の最適操舵" 東大宇宙研 SES-TN-66-004, (1966)