

# 太陽熱ロケットにおける低推力飛しょう 径路の最適化

——太陽電池のふく射による劣化を考慮して——

上杉邦憲\* 長友信人

## Trajectory Optimization of Solar-electric Spacecrafts for Near-earth Mission

——Considering the Radiation Damage of Solar Cells——

By

Kuninori UESUGI, Makoto NAGATOMO

**Abstract:** The transfer orbit of a solar powered spacecraft from an inclined parking orbit to the synchronous orbit is optimized to give the maximum payload weight, under the assumptions that the thrust magnitude is constant and that the in-plane thrust direction is tangential.

In addition, the case is considered where the silicon solar cells are used for the energy converter, taking account of the influence of the radiation protector on the payload weight.

In the computation, the simplified model of proton flux contours in the Van-Allen radiation belt is used and it is assumed that the degradation of the solar cell is proportional to the time-integrated flux during the mission time. The required protector weight is determined on the base of 25% degradation.

The trajectory of the solar powered spacecraft must be optimized, taking account of the influence of the radiation protector weight.

### 概 要

ある軌道傾斜角をもった出発軌道上にある飛しょう体を、電気推進によるらせん飛しょう(準円軌道を仮定する)で徐々に軌道を拡大させると共に、軌道傾斜角を変化させて、赤道面上の静止衛星軌道に遷移させるための最適遷移径路を求める。ただし飛しょう体の推力は一定とし、推力の軌道面内成分の方向が、速度ベクトルの方向と一致しているとき、与えられた初期重量から出発して、静止衛星軌道にのるペイロード重量が最大になるような飛しょう径路を見いだすことを最適化の対象とした。

次に飛しょう体のエネルギー源を太陽熱とし、エネルギー変換器として太陽電池を使用

---

\* 東京大学大学院学生

した場合、太陽電池のふく射による劣化を考慮にいれて操舵の最適化を行なった。その際バンアレン帯中の陽子のフラックス形状の近似式を作ると共に、太陽電池の表面に必要なカバーガラスの重量を、飛しょう体が全遷移期間中に沿びる放射線粒子の総個数に比例するとして、最適化問題にくりこんだ。

結果は、太陽電池を用いた電気推進による軌道遷移においては、電池の耐放射線性がペイロード最大化という問題で果たす役割は比較的大きく、飛しょう体の操舵計画も耐放射線性によってかなり左右されることを示している。

		記 号		
$A_1$	(3-9) 式中の比例定数	$W$	軌道面に垂直な方向の推力成分	(図 2-1)
$A(a, i)$	$=\alpha_2(\partial G(a, i)/\partial a)$			
$B(a, i)$	$=\alpha_2(\partial G(a, i)/\partial a)$	$W$	電源出力	
$D$	太陽電池にあたる陽子数 [protons/cm <sup>2</sup> ]	$a$	軌道の半長径長さ	
$E$	陽子のエネルギー [MeV]	$e$	軌道の離心率	
$E$	第2種完全楕円積分	$f$	$=\theta-\omega$ (true anomaly)	
$E_{critical}$	太陽電池出力を初期出力の75%にするために必要なふく射エネルギー [MeV/cm <sup>2</sup> ]	$g_0$	重力加速度 (地上)	
$E_{total}$	全飛しょう期間中太陽電池があびるふく射エネルギー [MeV/cm <sup>2</sup> ]	$g(a, i, \theta)$	単位時間に太陽電池表面にあたる陽子数 [protons/cm <sup>2</sup> -sec]	
$G(a, i)$	$=dD/dP$ [protons/cm <sup>2</sup> -sec]	$i$	軌道傾斜角 (軌道面と赤道面との成す角)	
$I_{sp}$	比推力	$k$	(2-20) 式中で定義される量	
$J$	性能指標	$k'$	(2-20) "	
$K$	第1種完全楕円積分	$n$	$=(a^3/\mu)^{-1/2}$	
$M$	飛しょう体質量	$p(x)$	$=D$ (3-13) 式	
$M_{glass}$	太陽電池カバーガラス質量	$r$	軌道半径	
$M_L$	ペイロード質量	$t$	時間	
$M_{pp}$	電源質量	$v$	速度	
$M_{pr}$	燃料質量	$v_e$	有効排気速度 ( $=I_{sp}g_0$ )	
$N(E)$	陽子エネルギースペクトル [protons/cm <sup>2</sup> -sec-MeV]	$x$	カバーガラス厚さ [g/cm <sup>2</sup> ]	
$P$	飛しょう体の一周を単位にとった時間 [sec]	$\alpha$	$=\alpha'/\eta$	
$R$	推力の軌道半径方向成分	$\alpha'$	電源の重量-出力比 [kg/kW]	
$S$	推力の速度ベクトル方向の成分	$\alpha_1$	燃料消費率	
$S_1$	太陽電池表面積 [m <sup>2</sup> ]	$\alpha_2$	(2-15) 式中の比例定数	
$T$	推力	$\beta$	推力と軌道面とのなす角 (図 2-1)	
		$\gamma$	推力の軌道面内成分と速度ベクトルとのなす角 (図 2-1)	

$\lambda_1$	ラグランジェ乗数 (2-18) 式	$\theta$	昇交点から測った飛しょう体の位置 (図 2-1)
$\lambda_2$	" "		
$\lambda$	$=\lambda_2/a\lambda_1$	$\tau$	近地点通過時刻
$\lambda_a$	ラグランジェ乗数 (2-30) 式	$\eta$	加速器推進効率
$\lambda_i$	" "	$\omega$	近地点引数
$\lambda_m$	" "	$\Omega$	昇交点経度
$\mu$	地球重力定数 ( $=398600 \text{ km}^3/\text{sec}^2$ )		
$\varphi_1$	(2-29) 式中で定義される量	添	字
$\varphi_2$	"	o	initial
$\varphi_3$	"	f	final
$\phi$	赤道面と地磁気赤道面とのなす角	opt.	optimal
$\sigma$	$=n\tau$ (2-2) 式		

## 1. 序 論

我々がここで考えるのは、ある軌傾斜角をもった出発軌道 (円軌道とする) から、赤道面上の静止衛星軌道への低推力による軌道遷移において、飛しょう体の初期重量と電源および加速器の性能 (出力, 出力-重量比, 比推力など) が与えられている場合に静止衛星軌道にのるペイロード重量を最大にするためには、いかなる遷移径路をとればよいかという問題である。このような軌道間遷移に電気推進を使用すると、ペイロード可搬能力という点で大きな利点を有するが、その際のエネルギーとして近い将来もっとも実現性の強いと思われるのは太陽熱利用、特にエネルギー変換器として太陽電池を用いたものであろう。ところで太陽電池を用いる場合飛しょう体の重量という観点からみると、もっとも重要なのは、宇宙空間に存在する各種のエネルギーふく射による太陽電池の劣化、すなわち出力の低下を防止あるいは緩和するために必要なカバーガラスの重量が、有効なペイロード重量を減少させるという問題である。従来このカバー重量は、飛しょう体の軌道が決定してから算出されるといういわば受身の立場から求められてきたが、ここではこの付加重量を軽減するべく軌道を選定するという立場から問題をとらえていく。

ところで我々が目ざすのは、あくまで静止衛星軌道にのるペイロードの最大化であるから、最適化に際しての性能指標 (performance index) としてはまず最初に燃料消費量を、次にふく射を考慮して燃料消費量と、太陽電池カバーガラス重量の和を考えてそれぞれ最小化をめざし、その結果を比較検討する。

以上の問題を解くにあたり、2. では軌道の最適化問題を Edelbaum の手法を経て変分問題として定式化し、3. では太陽電池とふく射の関連について記述して、これを変分問題にくりこむことにする。

## 2. 最適化問題の定式化

### 2.1 軌道要素の時間変化式

我々は飛しょう体の運動の記述および軌道の最適化に関し、Edelbaum の手法 [1], [2] を

採用する。この手法の詳細に関しては、本号別稿 [3] において詳しく述べられているので、本稿では省略することとし直ちに本論にはいる。

飛しょう体の推力が微小 ( $10^{-4}g$  程度) であることから、その運動を摂動法 (perturbation technique) を用いて、軌道要素の時間変化式によって記述する。すなわち図 2-1 に示したように、単位質量あたりの推力を  $R, S, W$  とすると

$$\begin{aligned} R &= (T/M) \sin \gamma \cos \beta \\ S &= (T/M) \cos \gamma \cos \beta \\ W &= (T/M) \sin \beta \\ T/M &= (R^2 + S^2 + W^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2-1)$$

したがって各軌道要素の時間変化式は

$$\begin{aligned} da/dt &= (2e \sin f / n \sqrt{1-e^2}) \\ &\quad R + (2a \sqrt{1-e^2} / rn) S \\ de/dt &= (\sqrt{1-e^2} \sin f / na) \\ &\quad R + (\sqrt{1-e^2} / a^2 ne) \{ [a^2(1-e^2) \\ &\quad - r^2] / r \} S \end{aligned} \quad (2-2)$$

$$\begin{aligned} di/dt &= (r \cos(\omega + f) / a^2 n \sqrt{1-e^2}) W \\ d\Omega/dt &= (r \sin(\omega + f) / a^2 n \sqrt{1-e^2} \sin i) W \\ d\omega/dt &= -(\sqrt{1-e^2} \cos f / a n e) R + (\sqrt{1-e^2} \sin f / a n e) \{ 1 + [r/a(1-e^2)] \} S \\ &\quad - (r \sin(\omega + f) \cot i / a^2 n \sqrt{1-e^2}) W \\ d\sigma/dt &= \{ [(1-e^2) \cos f / a n e] - [2r/a^2 n] \} R - [(1-e^2) \sin f / a n e] \\ &\quad \{ 1 + [r/a(1-e^2)] \} S \end{aligned}$$

ただし  $n = (a^3/\mu)^{-1/2}$ ,  $\sigma = n\tau$

さてここで次のような仮定を設定する。

- (1) 一定推力とする。 ( $T = \text{const.}$ )
- (2) 遷移は準円軌道とする。 (quasi-circular transfer)

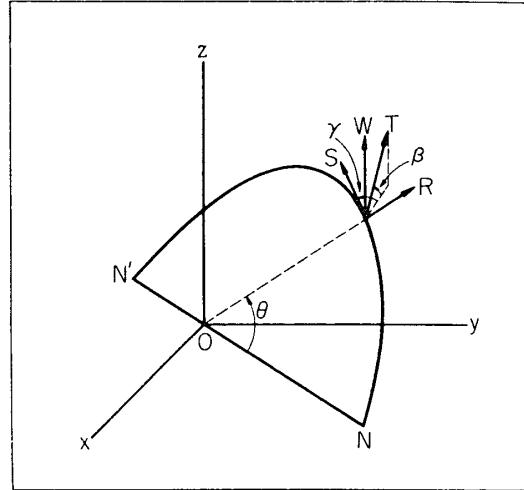
この (2) の仮定は、出発軌道が円軌道である場合 (2-1) 式において、 $\gamma = 0$  すなわち推力の軌道面内成分は、速度ベクトルの方向に一致するということに対応する。この仮定は、ここで考えているようなミッションすなわち静止衛星軌道を達成するために、軌道半径および軌道傾斜角をかえていくような場合には妥当なものとされている。ただし、その間非常に大きな軌道傾斜角の変化を必要とする場合には、遷移軌道を一たん楕円軌道にした方が有利になるという傾向がある [2] が、ここでは、 $\gamma = 0$  の仮定を採用することにした。

以上の仮定のもとに (2-2) 式は、 $e_0 = 0$ ,  $a_0 = r_0$  を考慮して

$$da/dt = 2(a^3/\mu)^{1/2} (T/M) \cos \beta \quad (2-3)$$

$$di/dt = (a/\mu)^{1/2} (T/M) \sin \beta \cos \theta \quad (2-4)$$

$$de/dt = 0 \quad (2-5)$$



第 2-1 図 推力ベクトルの成分

$$d\Omega/dt = (a/\mu)^{1/2} (T/M) \sin \beta \operatorname{cosec} i \sin \theta \quad (2-6)$$

(準円軌道であるから  $\omega, \tau$  については考えない)

ここで  $\Omega$  は最適化に際して、なんらの役割も果たさないから除外して、これ以降は (2-3), (2-4) 式のみを取り扱う。

我々は今じょう乱力として飛しょう体の推力のみを考えたが、実際の飛しょう体は、地球が完全な球でないことや、地球大気あるいは月や太陽の引力などによって種々の摂動をうける。これら摂動のうち、いわゆる secular perturbation と呼ばれるものは、軌道要素の変化を累積する形になりもっとも重大であるが、これは主として  $\omega, \Omega$  の変化に著しくあらわれるので、ここでは一応これらの摂動を考慮しなくてよいと思われる。

さて Edelbaum の手法では、飛しょう体の運動を各軌道要素の一周ごとの微小変化を積み重ねる方法で記述するので、独立変数としては、 $t$  を用いるよりも  $\theta$  を採用した方が便利である。そこで

$$d/dt = (d\theta/dt)(d/d\theta) = (a^3/\mu)^{-1/2} (d/d\theta) \quad (2-7)$$

の関係を用いて、 $t$  を  $\theta$  に変換すると (2-3), (2-4) 式は

$$da/d\theta = 2(a^3/\mu)(T/M) \cos \beta \quad (2-8)$$

$$di/d\theta = (a^2/\mu)(T/M) \sin \beta \cos \theta$$

ここで飛しょう体が一周する間の軌道要素の変化は微小であることから、 $\theta$  の変化は  $t$  に関し線型であるとすれば、一周における  $a, i$  の変化は

$$\Delta a/\text{rev.} = (4a^3/\mu) \int_0^\pi (T/M) \cos \beta d\theta \quad (2-9)$$

$$\Delta i/\text{rev.} = (2a^2/\mu) \int_0^\pi (T/M) \sin \beta \cos \theta d\theta$$

となる。

## 2.2 最適化の対象

本節では、ペイロード最大化という問題で考える性能指標 (performance index) について検討を加える。まず飛しょう体に関して質量保存則は

$$M_0 = M_L + M_{pp} + M_{pr} (+M_{\text{glass}}) \quad (2-10)$$

太陽電池を用いる場合、カバーガラス質量  $M_{\text{glass}}$  は通常  $M_{pp}$  に含まれるが、我々は  $M_{\text{glass}}$  を軌道要素の関数としてあらわし、これを軽減することを目ざすので、 $M_{pp}$  とは別個に記述しておく。ここで初期質量  $M_0$  のほかに電源の出力  $W$ , 出力-重量比  $\alpha'$ , および加速器の比推力  $I_{sp}$ , 推進効率  $\eta$  を与えると  $M_{pp} = \alpha' W$  によりパワープラント質量は定まる。一方

$$T = M\dot{v} = \dot{M}v_e \quad (v_e = I_{sp} \cdot g_0) \quad (2-11)$$

$$\text{および} \quad \eta W = (1/2) \dot{M}v_e^2 \quad (2-12)$$

を用いて推力および燃料消費率は

$$\begin{aligned} T &= 2\eta W / I_{sp} \cdot g_0 && (\text{const.}) \\ -\dot{M} &= \dot{M}_{pr} = T / I_{sp} \cdot g_0 \triangleq \alpha_1 && (\text{const.}) \end{aligned} \quad (2-13)$$

と定められる。結局与えられた  $M_0, W, I_{sp}, \alpha', \eta$  に対しペイロード  $M_L$  を最大にするためには

$$J \triangleq M_{pr} + M_{\text{glass}}$$

を最小にすればよい。(2-13) 式より

$$M_{pr} = \int_0^{t_f} \dot{M}_{pr} dt = \int_0^{t_f} \alpha_1 dt \quad (2-14)$$

また太陽電池を用いた場合について、 $M_{\text{glass}}$  を飛しょう体が、全遷移期間中にあびる放射線粒子の総個数に比例するとすれば

$$M_{\text{glass}} = \alpha_2 \int_0^{t_f} g(a, i, \theta) dt \quad (2-15)$$

ここで  $g(a, i, \theta)$  は、単位時間に太陽電池の単位表面積にあたる放射線粒子数を与え、飛しょう体の位置の関数としてあらわされる(詳しくは 3. において述べる)。(2-14)、(2-15) 式より性能指標  $J$  は、

$$J = \int_0^{t_f} [\alpha_1 + \alpha_2 \cdot g(a, i, \theta)] dt \quad (2-16)$$

### 2.3 一周中における最適操舵

本節では、Edelbaum の低推力軌道最適化に関する方法にしたがって、まず最適化の第一段階として、飛しょう体の任意の一周をとり出して、その間において(2-9)式で表わされる二つの付帯条件のもとで、次なる量を最小化することを考える。

$$\Delta J / \text{rev.} = 2(a^3/\mu)^{1/2} \int_0^\pi [\alpha_1 + \alpha_2 \cdot g(a, i, \theta)] d\theta \quad (2-17)$$

(この任意の一周中で、 $\Delta J$  を最小にするという問題が(2-16)式の  $J$  を最小にするという本来の最適化問題と矛盾するものでないことは[3]で述べられている。)

まずラグランジュ乗数  $\lambda_1, \lambda_2$  (定数) を導入すると、最小化をめざすのは次のような積分となる。

$$I = 2 \int_0^\pi \{ (a^3/\mu)^{1/2} [\alpha_1 + \alpha_2 g(a, i, \theta)] + 2\lambda_1 (a^3/\mu) (T/M) \cos \beta + \lambda_2 (a^2/\mu) (T/M) \sin \beta \cos \theta \} d\theta \quad (2-18)$$

Miele [4], Edelbaum [2] が述べているように、この問題は変分問題ではなく、通常 of 最小問題として解くことができ、(2-18) 式の被積分関数を制御変数 (control variable)  $\beta$  で偏微分したものを 0 とおくことにより、一周中での最適操舵角  $\beta_{\text{opt.}}$  が得られる。すなわち

$$\beta_{\text{opt.}} = \arctan [(\lambda/2) |\cos \theta|] \quad (2-19)$$

ただし  $\lambda = \lambda_2/a\lambda_1$

(2-19) 式でラグランジュ乗数入が未定であるが、これは各一周中は一定値をとり、その一周中での  $a$  と  $i$  の変化をいかに配分するかを与えるものである。その物理的な意味は、飛しょう体が昇交点を通過する際 ( $\theta=0$  のとき) の舵角の正接を 2 倍したものになっており、次節で述べる最適化の第 2 段階すなわち飛しょう体の回転の進行に伴った最適化を行なう際に、 $a, i, M$  などと共に必然的に決定されるのである。

各一周中に、舵角を  $\beta_{\text{opt.}}$  にとったときの各軌道要素の一周あたりの変化は(2-9)、(2-19) 式より

$$\Delta a/\text{rev.} = 8(a^3/\mu)(T/M)\sqrt{1-k^2}K \quad (2-20)$$

$$\Delta i/\text{rev.} = 4(a^2/\mu)(T/M)[E - (1-k^2)K]/k$$

ここで

$$k = k'/\sqrt{1+k'^2}, \quad k' = \lambda/2$$

$K$ ; 第 1 種完全楕円積分

$E$ ; 第 2 種完全楕円積分

またこの各一周に要する時間  $\Delta P$  は

$$\Delta P/\text{rev.} = 2\pi(a^3/\mu)^{1/2} \quad (2-21)$$

一方質量  $M$  はこの間に

$$\Delta M/\text{rev.} = -\alpha_1 \Delta P \quad (2-22)$$

だけ変化し、この一周中に飛しょう体があびる放射線粒子の個数は

$$\Delta D/\text{rev.} = (a^3/\mu)^{1/2} \int_0^{2\pi} g(a, i, \theta) d\theta \quad (2-23)$$

である。

ここでおもしろい現象は、現実の飛しょうでは、推力一定でその方向だけを変化させるといった計画の方が簡単であるが、軌道の最適化を行なう際には (2-20) 式に見るごとく軌道要素の一周分の変化が初等関数であらわせず、推力可変の場合 (軌道要素の変化は初等関数であらわせる [1], [2]) にくらべて、その取り扱いが困難になるという点である。

#### 2.4 回転の進行に伴う最適化

本節では、最適化の第 2 段階として、飛しょう体の各一周について (2-20) 式で表わされたような変化をする軌道要素の回転の進行に伴う変化を求め、最終軌道への遷移が遂行された時、ペイロードを最大にする操舵角の計画を定める問題を変分法を用いて定式化する。まず後の便宜のために (2-21) 式を用いて、独立変数を  $P$  に変換すると (2-20)~(2-23) 式は

$$da/dP = (4/\pi)(a^3/\mu)^{1/2}(T/M)\sqrt{1-k^2}K \quad (2-24)$$

$$di/dP = (2/\pi)(a/\mu)^{1/2}(T/M)[E - (1-k^2)K]/k \quad (2-25)$$

$$dM/dP = -\alpha_1 \quad (2-26)$$

$$dD/dP = (1/2\pi) \cdot f(a, i) \triangleq G(a, i) \quad (2-27)$$

ただし

$$f(a, i) = \int_0^{2\pi} g(a, i, \theta) d\theta$$

したがって我々がここで扱うのは (2-24)~(2-26) 式という拘束条件のもとで

$$J = \alpha_1 P_f + \int_0^{P_f} \alpha_2 \cdot G(a, i) dP \quad (2-28)$$

を最小化するという変分問題となる。(2-28) 式の  $G(a, i)$  は 3. において定めることとし、また電源として太陽電池を用いない場合ないしは太陽電池を用いてもふく射を考慮せず燃料消費量最小だけをめざす場合には、(2-28) 式で  $\alpha_2 = 0$  とおけばよいから、本節では、性能指標の一般式として (2-28) 式を考えてゆく。

$$\begin{aligned} \text{まず} \quad \varphi_1 &\triangleq (da/dP) - (4/\pi)(a^3/\mu)^{1/2}(T/M)\sqrt{1-k^2}K = 0 \\ \varphi_2 &\triangleq (di/dP) - (2/\pi)(a/\mu)^{1/2}(T/M)[E - (1-k^2)K]/k = 0 \\ \varphi_3 &\triangleq (dM/dP) + \alpha_1 = 0 \end{aligned} \quad (2-29)$$

とおき, 新たにラグランジュ乗数  $\lambda_a, \lambda_i, \lambda_m$  を導入して augmented function を

$$F = \alpha_2 G(a, i) + \lambda_a \varphi_1 + \lambda_i \varphi_2 + \lambda_m \varphi_3 \quad (2-30)$$

とすれば, オイラー方程式は (2-31)~(2-34) 式のようになる.

$$\begin{aligned} d\lambda_a/dP &= A(a, i) - (1/\pi)(a/\mu)^{1/2}(T/M) \{6\lambda_a \sqrt{1-k^2} K \\ &\quad + (\lambda_i/a) [E - (1-k^2)K]/k\} \end{aligned} \quad (2-31)$$

$$d\lambda_i/dP = B(a, i) \quad (2-32)$$

$$\begin{aligned} d\lambda_m/dP &= (2/\pi)(a^3/\mu)^{1/2}(T/M^2) \{2\lambda_a \sqrt{1-k^2} K \\ &\quad + (\lambda_i/a) [E - (1-k^2)K]/k\} \end{aligned} \quad (2-33)$$

$$\lambda_i/\lambda_a = 2ak/\sqrt{1-k^2} \quad (2-34)$$

$$\text{ここで} \quad A(a, i) = \alpha_2 (\partial G / \partial a)$$

$$B(a, i) = \alpha_2 (\partial G / \partial i)$$

augmented function は独立変数  $P$  を陽に含んでいないから, いわゆる第一積分 (first integral) が存在して

$$\begin{aligned} -\alpha_2 \cdot G(a, i) + (2/\pi)(a^3/\mu)^{1/2}(T/M) \{2\lambda_a \sqrt{1-k^2} K \\ + (\lambda_i/a) [E - (1-k^2)K]/k\} - \alpha_1 \lambda_m = C_1 \end{aligned} \quad (2-35)$$

$C_1$  は積分定数

これに対応する横断性条件 (transversality condition) は

$$[(\alpha_1 - C_1)dP + \lambda_a da + \lambda_i di + \lambda_m dM]_0^f = 0 \quad (2-36)$$

となるが, ここでは

$$da, di]_0^f = 0, \quad dP, dM]_0 = 0$$

であるから (2-36) 式より

$$C_1 = \alpha_1 \quad (2-37)$$

$$\lambda_m = 0 \quad (2-38)$$

(2-37) 式を (2-35) 式に代入して

$$\lambda_m = (2/\pi)(a^3/\mu)^{1/2}(T/M) (E\lambda_i/\alpha_1 k) - \alpha_2 \cdot G(a, i)/\alpha_1 - 1 \quad (2-39)$$

したがって (2-33) 式は

$$d\lambda_m/dP = (\alpha_1/M) [1 + \lambda_m + \alpha_2 \cdot G(a, i)/\alpha_1] \quad (2-40)$$

以上によりこの変分問題は, 次の二点境界値問題に変換されたことになる.

『初期条件  $a_0, i_0, M_0$  given

終期条件  $a_f, i_f, \lambda_{mf}$  given

$$d\lambda_a/dP = A(a, i) - (1/\pi)(a/\mu)^{1/2}(T/M) \{6\lambda_a \sqrt{1-k^2} K + (\lambda_i/a) [E - (1-k^2)K]/k\}$$

$$d\lambda_i/dP = B(a, i)$$

$$d\lambda_m/dP = (\alpha_1/M)(1 + \lambda_m + \alpha_2 \cdot G(a, i)/\alpha_1)$$

$$da/dP = (4/\pi)(a^3/\mu)^{1/2}(T/M) \sqrt{1-k^2} K$$

$$di/dP = (2/\pi)(a/\mu)^{1/2}(T/M) [E - (1-k^2)K]/k$$



$$dM/dP = -\alpha_1$$

$$\text{ただし } \lambda_{a_0} = (\sqrt{1 - k_0^2} / 2a_0 k_0) \lambda_{i_0}$$

$$\lambda_{i_0} = \{ [1 + \alpha_2 \cdot G(a, i) / \alpha_1 + \lambda_m] / (2/\pi)(a^3/\mu)^{1/2}(T/M)/(E/\alpha_1 k) \}_{P=0}$$

$$A(a, i) = \alpha_2 (\partial G(a, i) / \partial a), \quad B(a, i) = \alpha_2 (\partial G(a, i) / \partial i) \quad \text{』}$$

### 3. 太陽電池とエネルギーふく射

ここではまず静止衛星軌道に遷移させるというミッションにおいて、飛しょう体がうけるふく射をすべて取り上げて検討し、次にバンアレン帯をモデル化して、その形状の近似式を作り、最後にこのミッションに必要な太陽電池カバーガラスの重量を(2-28)式の第2項のような形であらわされることを示して、これを前節で述べた変分問題にくこりむことにする。

#### 3.1 宇宙環境

現在宇宙空間には、3種類のエネルギーふく射が存在することが知られている。

##### (I) Galactic cosmic radiation

これは銀河系のあらゆる方向から飛来する、陽子およびより重いイオンによるふく射で、ときとしては、高エネルギーの粒子を含む場合もあるが、概してその強度は低い。その平均的な線量率(dose rate)を表3-1に示した。(〔5〕による)

##### (II) Solar cosmic radiation

これは太陽表面のフレア(flare)に伴って生ずる一時的なエネルギーの陽子のシャワーである。地球に到達する陽子流の強度は、場合によっては非常に強く数日間にわたって存在

表 3-1 宇宙での放射線被曝量推定値(銀河宇宙線によるもの)

	全線量	一次衝突回数	
		しゃへいなし	H <sub>2</sub> O (20 g/cm <sup>2</sup> )
太陽活動期	0.45~1.0 rem/week	6/cm <sup>2</sup> /day	2/cm <sup>2</sup> /day

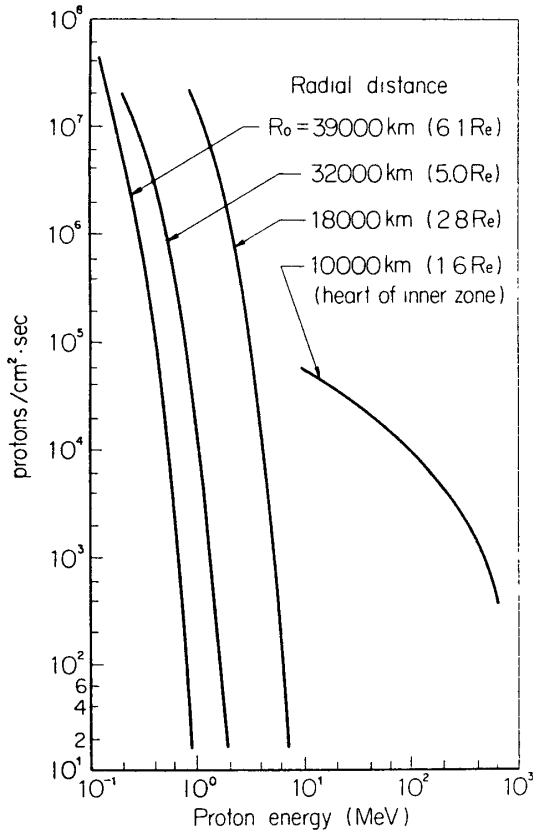
表 3-2 宇宙での放射線被曝量推定値(太陽宇宙線によるもの)

	球形しゃへの厚さ(自己しゃへい効果無視)	
	H <sub>2</sub> O, 2 g/cm <sup>2</sup>	H <sub>2</sub> O, 25 g/cm <sup>2</sup>
低エネルギー 1959年5月7日	2,500~15,000 rad	6~25 rad
中エネルギー 1960年11月	600~800 rad	6~19 rad
高エネルギー 1956年2月	80~400 rad	25~50 rad

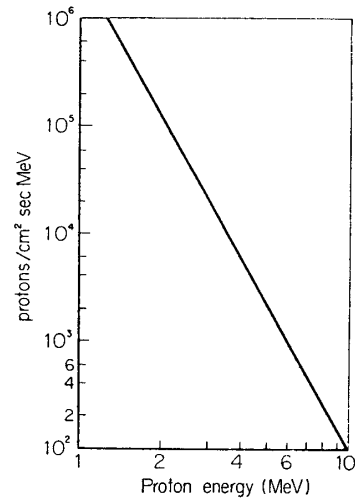
することもある。表3-2に代表的なフレアの際の線量率をかかげた。(表は〔5〕による)

##### (III) バンアレン帯(the Van Allen belt radiations)

これは地球の磁場にとらえられた荷電粒子(ほとんど陽子と電子)によるふく射であり、



第 3-1 図 陽子エネルギー分布 (高低エネルギー)



第 3-2 図 陽子エネルギー分布 (中エネルギー)

地球を帯状にとりまいて 2 個存在することで知られており、それぞれ内帯 (inner belt) および外帯 (outer belt) と呼ばれている。現在までに得られた観測結果から、内外帯における陽子、電子の最高強度、エネルギースペクトル、強度分布をまとめて表 3-3, 3-4 および図 3-1, 3-2, 3-3 (以上 [6] より) および図 3-4 ([7] より) に示した。

### 3.2 バンアレン帯のモデル

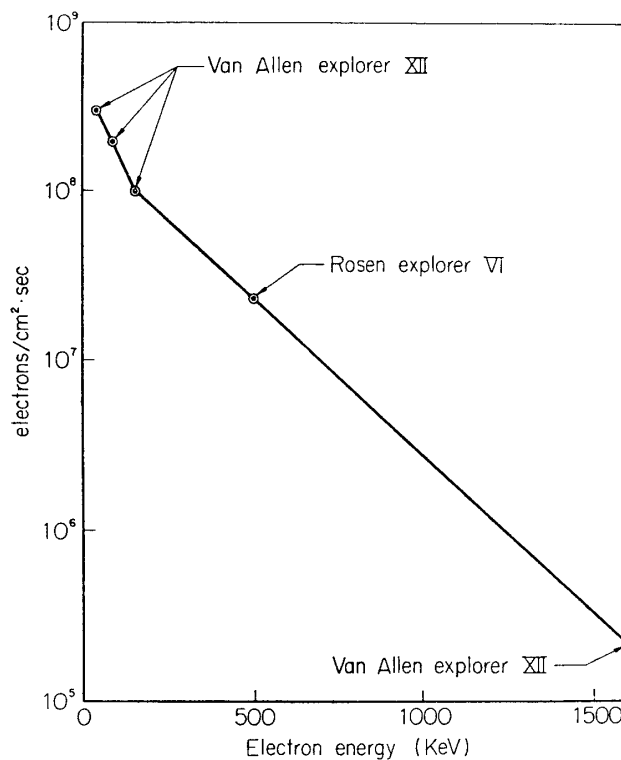
ここでこれらのふく射を、太陽電池の劣化という観点からとらえてみると、(I) はその強度が低いこと、また (II) は一時的かつ偶発的なものであるから、一応除外してよいと思われる。また太陽電池の劣化に関し、電子の放射線損傷能は陽子の  $10^{-3}$  程度であり [8]、バンアレン帯中の陽子は数百 MeV のエネルギーのものまで存在するのに対し、電子は高々数 MeV であるから、電池表面に施すカバーガラスは、結局バンアレン内帯の陽子のみを考えて決定すればよいだろう。このカバーガラス重量を、前節で述べた最適化問題に繰り込んで決定するために、我々は図 3-4 の陽子フラックス形状を (3-1) 式を用いて近似した。このモデルを図 3-5 に示す。

$$g(a, i, \theta) = 6.102(a \times 10^{-3} - 6378) \times \exp[-1.914 \times 10^{-7} \times (a \times 10^{-3} - 9279)^2 + 10.0 \sin^2(i + \phi) \sin^2 \theta] \quad (3-1)$$

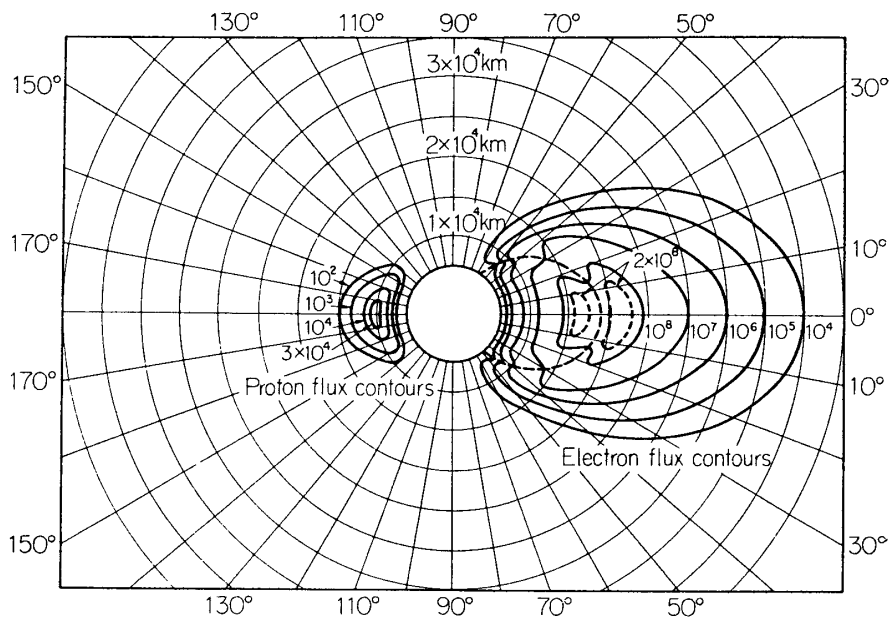
ただし

$$g(a, i, \theta); [\text{protons/cm}^2\text{-sec}]$$

$$a; [\text{m}]$$



第 3-3 図 外領域の電子エネルギー分布



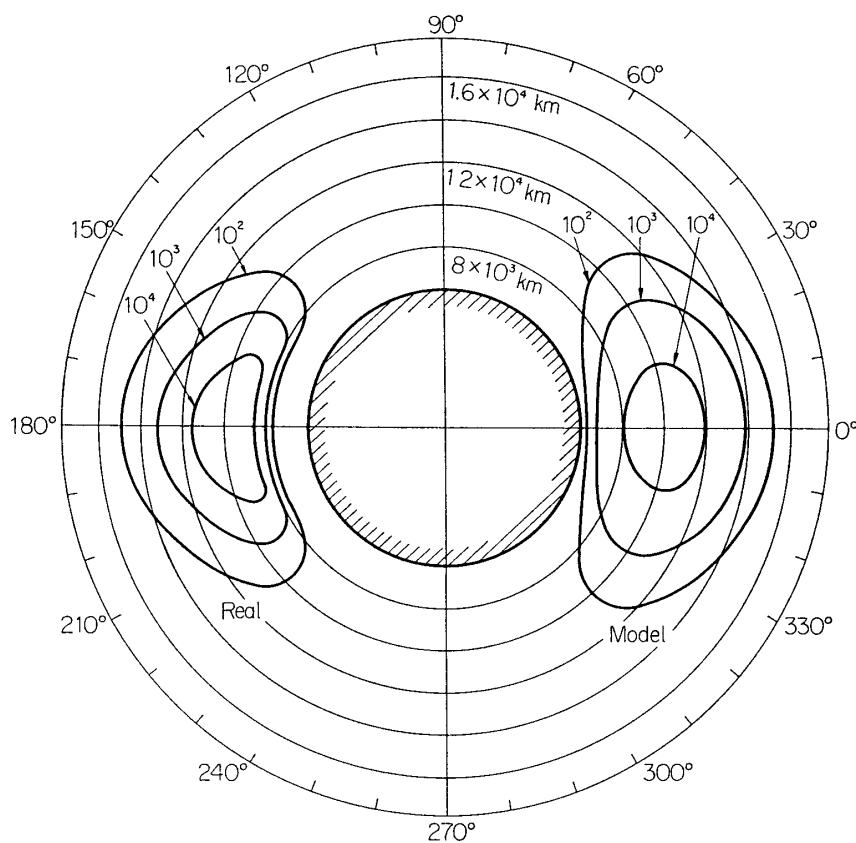
第 3-4 図 地磁気座標にあらわした放射線帯の構造

表 3-3 内放射線帯中の陽子線の状態

	束密度尖頭値 ( $\text{cm}^{-2}\cdot\text{sec}^{-1}$ )	エネルギー分布式
高エネルギー ( $E > 40 \text{ MeV}$ )	$2 \times 10^4$	$E^{-2.72}$ (図 3-1 参照)
中エネルギー ( $1 \text{ MeV} < E < 40 \text{ MeV}$ )	$1 \times 10^7$	$\sim E^{-4}$ (図 3-2 参照)
低エネルギー ( $0.5 \text{ keV} < E < 1 \text{ MeV}$ )	$3 \times 10^8$	不明

表 3-4 放射線帯の電子線の状態

	束密度 ( $\text{cm}^{-2}\cdot\text{sec}^{-1}$ )	エネルギー分布
内帯	$10^7 \sim 10^8$	不明
外帯	$\sim 10^8$	(図 3-3 参照)



第 3-5 図 束密度分布のモデルと実際のデータの比較

この (3-1) 式により、飛しょう体が任意の位置においてうけるふく射が求められる。なおその際、これまでに得られた観測結果から、バンアレン内帯の時間変動はないとした。

この  $g(a, i, \theta)$  が (2-15) 式中にあらわれた量であるが、ここで 2. において  $g(a, i, \theta)$  から派生した  $f(a, i)$ ,  $G(a, i)$ ,  $A(a, i)$ ,  $B(a, i)$  も求めておく。まず  $f(a, i)$  は、飛しょう体が一周する間の  $a$  と  $i$  の変化は微小であるから  $a, i$  を一周中一定とすれば、 $g(a, i, \theta)$

を  $\theta$  に関し一周積分することによって得られる。(3-1)式から明らかなごとくこの積分は初等関数では表わせないので、数値積分により定積分

$$I(i) = \int_0^{\pi/2} \exp[10.0 \sin^2(i+\phi) \sin^2 \theta] d\theta$$

を求め近似式

$$I(i) \approx (\pi/2) - 1.25 \sin(i+\phi) \quad (3-2)$$

を導いた。(3-2)式より

$$f(a, i) = 24.408 [(\pi/2) - 1.25 \sin(i+\phi)] (a \times 10^{-3} - 6378) \times \exp[-1.914 \times 10^{-7} \times (a \times 10^{-3} - 9279)^2] \quad (3-3)$$

$$G(a, i) = (12.204/\pi) [(\pi/2) - 1.25 \sin(i+\phi)] (a \times 10^{-3} - 6378) \times \exp[-1.914 \times 10^{-7} \times (a \times 10^{-3} - 9279)^2] \quad (3-4)$$

$$A(a, i) = \alpha_2 \cdot G(a, i) \times 10^{-3} \{ [1/(a \times 10^{-3} - 6378)] - 3.828 \times 10^{-7} (a \times 10^{-3} - 9279) \} \quad (3-5)$$

$$B(a, i) = [-1.25 \alpha_2 \cdot G(a, i) \times \cos(i+\phi)] / [(\pi/2) - 1.25 \sin(i+\phi)] \quad (3-6)$$

### 3.3 比例定数 $\alpha_2$

本節では、(2-28)式中の  $\alpha_2$ 、すなわち太陽電池のカバーガラス重量が、飛しょう体のあびる放射線粒子の総個数に比例するとしたときの比例定数を求める。

荷電粒子が種々の材料(厚さ  $dx$ )を通過する間に失うエネルギー( $dE$ )は、エネルギー損失がすべていわゆるクーロン衝突によるときには近似的に

$$dE = -(C/E)dx \quad (3-7)$$

と表わされる[7]。ここで  $C$  は阻止材による定数である。

次にエネルギースペクトルが  $N(E_i)$  [particles/cm<sup>2</sup>-sec-MeV] であるような荷電粒子に対し、厚さ  $x$  [g/cm<sup>2</sup>] の阻止材を用いたとき、これを通過してくる粒子のエネルギースペクトル  $N(E)$  は、

$$N(E) = N(E_i)(dE_i/dE) = N(E_i)E/(E^2 + 2Cx)^{1/2} \quad (3-8)$$

で与えられる[7]。(添字  $i$  は阻止材にはいる前の状態を示す)

ここで表 3-3 から  $N(E_i) = A_1 E_i^{-2}$  であり、バンアレン内帯中での陽子のエネルギースペクトルは一定と仮定すると、単位時間に単位面積あたりに照射する陽子の数は、

$$G(a, i) = \int_{40}^{\infty} A_1 E^{-2} dE = A_1/40 \quad (3-9)$$

一方単位時間にカバーガラスを貫通した陽子の単位面積あたりのエネルギーの総和  $E_s$  は

$$E_s = \int_0^{\infty} N(E)E dE \quad (3-10)$$

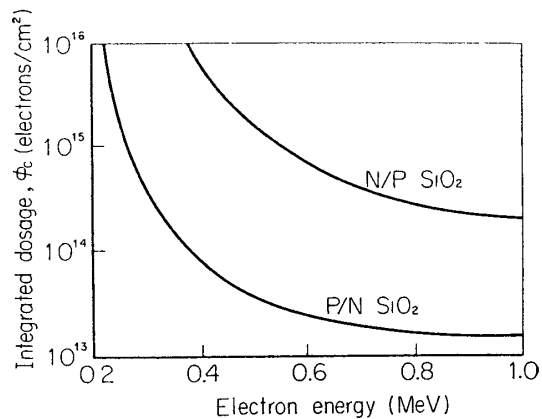
であるから(3-8)~(3-10)式より

$$E_s(x) = 40 \times G(a, i) \times [-E/\sqrt{E^2 + 2Cx} + \ln 2(E + \sqrt{E^2 + 2Cx})]_0^{1000} \quad (3-11)$$

(積分上限はバンアレン帯中の陽子のエネルギーはほとんど 1 BeV 以下であることから決定した)

さてカバーガラスによって、バンアレン帯中の陽子を完全に防ぐことは、その重量の点か

らまったく不可能であるから、ここではその厚さを、飛しょう体が軌道間遷移を完了した時の電池出力が、初期出力の75%以下にはならぬようにするという基準によって決定する。その際我々は太陽電池表面に到達する陽子のエネルギーが、ある値  $E_{\text{critical}}$  になった時その出力が初期出力の75%になると考えることにする。その根拠は、図3-6 ([10]より)に示したごとく、荷電粒子のエネルギーが比較的大きい場合には、粒子のエネルギーとそのエネルギーを持った粒子個数の積がある一定値 ( $E_{\text{critical}}$ ) になった時電池出力は75%になるといえるからである。なお図3-6は電子に対するものであるが、陽子の場合にも同様であると考えてよい。(3-11)式の  $E_s$  を飛しょう体の全遷移時間に対して積分することにより



第3-6図 太陽電池の25%性能をもたらす電子総線量とエネルギーの関係

$$E_{\text{total}} = 40 \left[ -E/\sqrt{E^2 + 2Cx} + \ln 2(E + \sqrt{E^2 + 2Cx}) \right]_0^{1000} \times \int_0^{P_f} G(a, i) dP \quad (3-12)$$

が得られる。(3-12)式における  $E_{\text{total}}$  が  $E_{\text{critical}}$  になるときの  $x$  の値をもってカバーガラスの厚さとするわけだから

$$p(x) \triangleq E_{\text{critical}}/40 \left[ -(E/\sqrt{E^2 + 2Cx}) + \ln 2(E + \sqrt{E^2 + 2Cx}) \right]_0^{1000} \\ = \int_0^{P_f} G(a, i) dP \quad [\text{protons/cm}^2] \quad (3-13)$$

$$M_{\text{glass}} = xS_1 \quad (3-14)$$

とするとき  $x$  が  $p(x)$  に比例するならば、すなわち

$$x = (\alpha_2/S_1) \cdot p(x) \quad (3-15)$$

とできるならば (3-12)~(3-15) 式より

$$M_{\text{glass}} = \alpha_2 \cdot p(x) = \alpha_2 \int_0^{P_f} G(a, i) dP \quad (3-16)$$

となり (2-28) 式の第2項が得られたことになる。 $E_{\text{critical}} = 8 \times 10^{12}$  MeV,  $C = 750$  (MeV)<sup>2</sup>/g/cm<sup>2</sup> として (3-13) 式を計算した結果を図3-7に示した。これを見ると  $p(x)$  の範囲を適当にとれば、(3-16) 式が成立することがわかる。

#### 4. 計算およびその結果の解析

##### 4.1 諸数値の決定

2. および 3. の結果に基づいて次の数値および境界条件を与えて解を求めた。

$$(I) \quad a_0 = 6.878 \times 10^6 \text{ m (500 km 高度)} \quad a_f = 4.2178 \times 10^7 \text{ m} \\ i_0 = 31.25^\circ (\psi = 11^\circ) \quad i_f = 0^\circ$$

$$M_0 = 300 \text{ kg} \quad \lambda_{mf} = 0$$

$$(II) \quad T = 0.38415 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{sec}^2,$$

$$\alpha_1 = 4.6117 \times 10^{-5} \text{ kg}/\text{sec}$$

この  $T$  および  $\alpha_1$  は, [9] により遷移時間を 30 日前後としたときの最適出力および比推力  $W = 2 \text{ kW}$ ,  $I_{sp} = 850 \text{ sec}$  を  $O$  次近似として用い (2-13) 式より得た. (ただし  $\alpha' = 50 \text{ kg}/\text{kW}$ ,  $\eta = 80\%$  とした)

$$(III) \quad S_1 = 10 \text{ m}^2$$

$N/P$  タイプのシリコン電池を用いると,  $2 \text{ kW}$  の出力を得るためには効率を  $14\%$  とし  $S_1 = 10 \text{ m}^2$  となる.

(IV) ケース 1;  $M_{pr}$  を最小化する場合

$$\alpha_2 = 0$$

ケース 2;  $M_{pr} + M_{\text{glass}}$  を最小化する場合

$$\alpha_2 = 6 \times 10^{-9}$$

この  $\alpha_2$  の値の使用可能範囲は, かなり限定されており, そのため全遷移期間中に太陽電池にあたる陽子総数をあらかじめ推定しておかねばならない. そこでケース 2 を解くに先だってケース 1 を解き,  $\int_0^{P_f} G(a, i) dP$  を求めたところ約  $8.7 \times 10^9 \text{ protons}/\text{cm}^2$  となった. この結果を用いて図 3-7 の直線の勾配から  $\alpha_2 = 6 \times 10^{-9}$  とした. もしこの値を用いてケース 2 を解いた結果得られる  $\int_0^{P_f} G(a, i) dP$  が比例範囲外にあった場合には,  $\alpha_2$  の値を変えて計算をやり直さなければならないが, 実際には 4-3 で述べるごとくケース 2 では  $\int_0^{P_f} G(a, i) dP = 7.5 \times 10^9$  となりその必要はなかった.

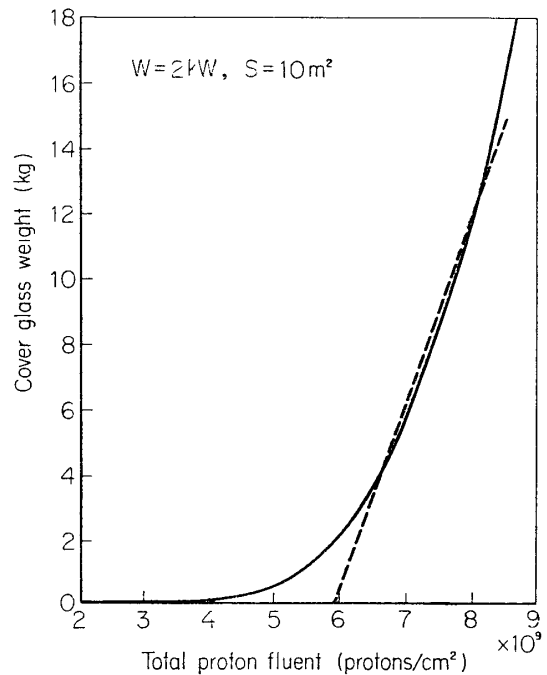
#### 4.2 二点境界値問題の収れん法

2. で述べた二点境界値問題に, 3. で得られた式および 4.1 で与えた数値を代入して行なう数値解法では, Trial and Error の方法によった. この問題では, 初期値に関し二次元の搜索が必要であるが,  $k_0$  および  $\lambda_{m0}$  に関する制限から数回の搜索により解を収れんさせることに成功した. すなわち  $k$  はいわば舵角をあらわす変数であり, その定義式から明らかなく  $-1 \leq k \leq 1$  である. 一方  $\lambda_m$  は物理的な意味をもたないが, (2-40) 式および  $\lambda_{mf} = 0$  から ( $\alpha_1, M$  は共に正だから) ケース 1 では  $-1 < \lambda_{m0} \leq 0$ , ケース 2 では, ほぼ  $1.061 < \lambda_{m0} \leq 0$  でなければならない.

計算は HITAC 5020F によって行なった. なお数値解法の 1 ステップごとに完全楕円積分を実行する必要があるが, これは計算機に記憶させた数表を用いて行なった.

#### 4.3 計算結果

ケース 1, ケース 2 それぞれの場合の計算結果を表 4-1 および図 4-1~4-4 に示した.

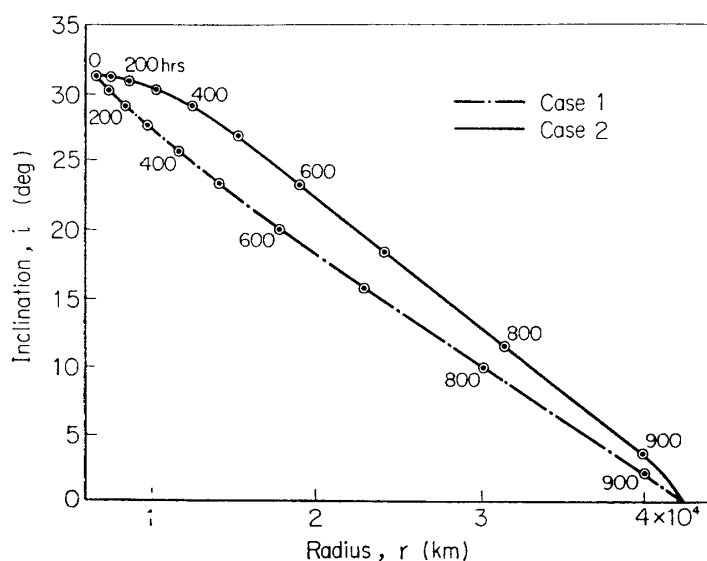


第 3-7 図 カバー重量と陽子流量

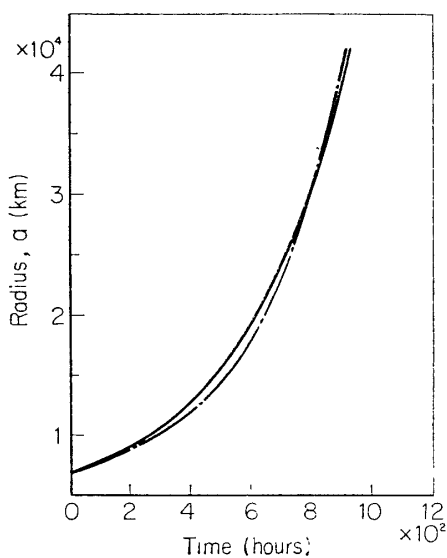
表 4-1 最適化された数値 ( $M_0=300\text{kg}$ ,  $M_{pp}=100\text{kg}$ ,  $M_L=M_0-(M_{pr}+M_{pp}+M_{glass})$ )

	飛しょう 時 間 ( $P_f$ )	回 転 数 ( $N$ )	推 進 剤 質 量 ( $M_{pr}$ )	保 護 ガ ラ ス 質 量 ( $M_{glass}$ )	ペ イ ロ ー ド 質 量 ( $M_L$ )	$\int_0^{\tau_f} G(a, i) d\tau$	保 護 ガ ラ ス 厚 さ*
単 位	時 間	回	kg	kg	kg	陽子/cm <sup>2</sup>	mm
ケ ー ス I	918.0	246.4	152.4	18.0	29.6	$8.714 \times 10^9$	0.82
ケ ー ス II	929.5	234.5	154.3	8.5	37.2	$7.502 \times 10^9$	0.39

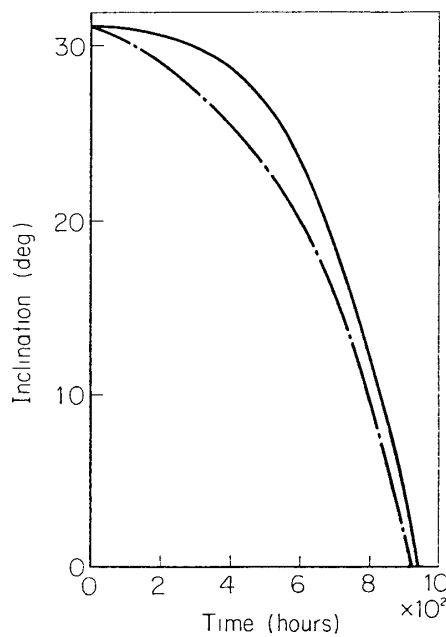
\* ガラスは SiO<sub>2</sub> で密度 2.2 g/cm<sup>3</sup> とした。



第 4-1 図 最適軌道



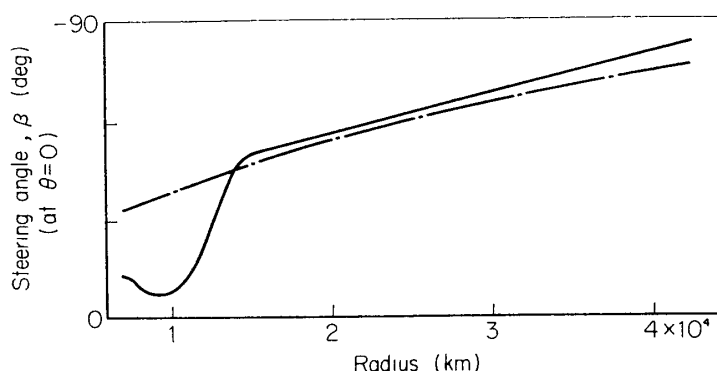
第 4-2 図 軌道半径の時間変化



第 4-3 図 軌道傾斜角の時間変化



表 4-1 より明らかなことは、ケース 1 はケース 2 にくらべ遷移時間、燃料消費量いずれも少なくすむが、その差はごくわずかであるのに対し、ケース 1 ではその遷移径路が図 4-1 および図 4-3 に示されるように、バンアレン帯のふく射の強い部分を通過するので、 $M_{\text{glass}}$  がケース 2 の約 2 倍必要となり、結局有効なペイロード  $M_L$  は 7.6 kg ケース 2 の方が大きくなる。これは太陽電池を用いる場合、バンアレン帯を考慮して最適化を行なえば、ペイロード重量を約 26% 増加し得ることを示している。ただしその際  $E_{\text{critical}}$  の値をいくらにするか、すなわち性能指標中の重み  $\alpha_2$  をいくらにするかによって、この結果は大きな影響をうける。言い換えれば、太陽電池の耐放射性が、ペイロード重量および飛しょう体の操舵計画におよぼす影響は、比較的重大であるといつてよい。



第 4-4 図 操舵角と軌道半径

図 4-4 は  $\theta=0$  (昇交点通過) の時の舵角を  $\beta$  軌道半径  $a$  に対したものであるが、これをみるとケース 2 ではバンアレン帯を避けようという傾向がはっきり示されている。(図 3-5 参照) すなわちケース 2 では  $a=10,000$  km 付近 (バンアレン帯強度のもっとも強い領域) まで舵角を浅くしてゆくことにより、軌道傾斜角の変化を小さくおさえて、おもに軌道半径の増加をはかり、その後急激に舵角を大きくとって、所要の軌道傾斜角変化を達成するという操舵計画が最適となる。

## 5. 結 論

太陽電池を用いた、電気推進による地球近傍の軌道間遷移において、電池の耐放射線性がペイロード最大化という問題で、果たす役割は比較的大きく、したがって飛しょう体の操舵計画も耐放射線性よりかなり影響をうける。

また本稿では、バンアレン帯をモデル化、数式化すると共に、太陽電池の劣化に関し  $E_{\text{critical}}$  という基準を設定して、カバーガラス重量を軌道の最適化という観点から決定し得ることを示した。

なお、 $E_{\text{critical}}$  という基準の設定の妥当性は、今後に残された問題点の一つである。また我々は電源出力や加速器の比推力をあらかじめ与えて問題を扱ったが、今後これらをパラメトリックに変化させて、初期重量の最適重量配分を得ることが必要であろう。

本稿を書くにあたって、佐貫亦男教授、秋葉鎌二郎助教授、松尾弘毅助手から常に適切な

ご指導、示唆をうけた。ここに感謝の意を表する次第である。

1968年3月7日 宇宙工学

#### 参 考 文 献

- [1] Edelbaum, T.N.: "Propulsion requirements for controllable satellites." ARS J., 31, 1079~1089 ('61).
- [2] Edelbaum, T.N.: "Theory of maxima and minima." chap. 1 of Optimization techniques (G. Leitmann, ed.) Academic Press, New York ('62).
- [3] 的川, 松尾: 静止衛星打ち上げのための低推力飛しょう径路の最適化問題. 東大宇宙研報告, 4, No. 2 (1968).
- [4] Miele, A.; "Interrelationship of calculus of variations and ordinary theory of maxima and minima for flight mechanics applications" ARS J., 29, p. 75 ('59).
- [5] Foelsche, T.: Current estimates of radiation dose in space" NASA TN D-1267, July ('62).
- [6] Machol, R. E. ed.: "System engineering handbook" McGraw-Hill 7-8~7-13.
- [7] Stuhlinger, E. and G. Mesmer.: "Space science and engineering" McGraw-Hill p. 176~202 ('62).
- [8] Rogers, S.C.: IEEE NS-10, No. 1, p. 97 ('63).
- [9] 秋葉, 長友, 松尾, 上杉: 太陽ロケットのシステム研究. 第11回宇宙技術講演会講演集, p. 40~43, 昭和42年1月26日, 27日.
- [10] Cherry, W.R.: "Solar cells and the applications engineer" Astron. & Aerospace Engineering. May, p. 54~57 ('63).