

最適制御装置に関する研究

松 岡 秀 雄

Practical Optimum Feedback Controller

By

Hideo MATSUOKA

Abstract: A computer system adapted to a practical processor of an optimum controller is investigated, in which the optimal control signal derived from L. S. Pontryagin's maximum principle is calculated in real time. Iterative algorithms implemented as a software in the processor are at first explained, which constitute a convergence process required for solving a two-point boundary value problem. Engineering considerations of these computing procedures show that the digital hybrid computer system is most suitable and practical as a hardware for carrying out this method.

The simulator with the same logical structure as that of this computer system is organized by using resources on hand to simulate the generation process of the optimizing control signal and to refine the algorithms so as to bring a rapid convergence with high precision. The 2nd and the 3rd order system, the 2nd order system with bounded energy, and the rocket steering problems are studied by using this simulator. Convergence processes are displayed graphically. Main results of the simulation are as follow: (a) The rapid convergence is practically possible for given problems. (b) There appears no great dependency upon the arithmetic precision in convergent circumstances except speed. Convergence speed is, therefore, accelerated still more by the computation control in the processor that will make the relative arithmetic precision constant in overall control process.

In the feedback system, the optimum controller centered with this hybrid processor must repeatedly re-evaluate the optimum process for the ever-changing environmental condition. Frequent feedback given by the increased computation speed bring much efficiency and effect to the feedback control system, which behaves practically in a sub-optimal fashion.

概 要

これは L. S. Pontryagin の最大原理から導かれる最適制御を実時間で発生させ利用する最適フィードバック制御装置の実用化研究である。まず最大原理による最適制御を高速に発生させるアルゴリズムを設定し、この手順を分析して、このアルゴリズムを内部処理プロセスとして機械化する制御装置には、その中央決定機構として D. D. A. を高速演算部に

もつデジタル・ハイブリッド・システムが実用技術上最適であることを論じる。これと同一形式の計算システムをシミュレータとして手持の資材をつかって組織し、これで最適制御発生のプロセスをシミュレートして、高速高精度の制御信号をつくり出すアルゴリズムを確立した。これは繰り返し計算法であり、収れんの状況が演算精度にあまり依存しないことが判明した。二次および三次の系、エネルギーに制限のある系、およびロケット運動についてのシミュレーションの結果を図で示す。実際の制御系の構成では、フィードバック構造をもたせて、現実の状況が反映するように刻々最適制御過程を計算し直すことになるが、収れん状況が演算精度にあまり依存しないところから、この再計算における演算の相対精度が制御の進行に際して、一定となるように演算を制御して収れん速度を高めることによりフィードバックの効果を向上する。これによる実用的な制御はサブ・オプティマルな制御となる。なお、シミュレータにはオン・ラインの機能が強化されていて、制御モデルと人との交渉を容易にして研究機能を高めている。

1. 序

最適制御理論の展開はいくつかの Mathematical Programming を最適制御決定の手法として生み出した。これらのいずれもがかなりの計算量をとらない、オンライン・コントローラ向きに実時間制御へ適用するには幾多の問題を提起する。本研究では L. S. Pontryagin の最大原理 [1] に基づくアルゴリズムから最適制御信号を実時間でつくり出すことをとりあげ、これを最適制御装置として実用化することを目的とする。

まず最大原理による最適制御を高速に発生させるアルゴリズムを設定して、これを内部で実施する制御装置に課せられる要求を検討する。制御装置には複雑な数値処理が必要となるので計算制御が主体となり、D. D. A. (Digital Differential Analyzer) [5] を高速演算部として含むデジタル・ハイブリッド・システムが提案される。これと同一形式の計算機システムがシミュレータとして組織され、提案されたデジタル・システムによる最適制御発生のプロセスをシミュレートして高速高精度の制御信号をつくり出す最適制御発生アルゴリズムを確立し、演算方式、演算速度、演算精度などの関係が調べられた。最適制御発生アルゴリズムは非線型2点境界値問題の解法であって、解を定めるプロセスには人間の介入が特に望まれるので、シミュレータにはオンライン研究向きの機能が強化されている。

最大原理は制御系に関する情報が一切既知であり、決定論的である場合に限って、最適過程を生み出す制御を制御系の随伴系 (Adjoint System) の微分方程式の解の形で必要条件として数学的に定式化する。したがって最大原理により最適制御を発生させる実用的な制御装置を設計するにあたっては、次の二つの問題が工学的に解決されねばならない。一つは制御系が含む情報に関することである。最適制御は未来のある時点までの間であらかじめ定められた評価を最適にするように決められるもので、これには予測が必要となる。最大原理はこの予測に基づき最適制御を決定する。そこで実用的には最適制御過程は時間の経過にしたがって繰り返し決定されねばならないし、制御系にはフィードバック構造が必要になる。提案されたデジタル・システムをフィードバック・ループに含めて最適閉ループ制御系を構成することにより、サブオプティマルな制御が実現できることも述べられる。第2の問題点は最適制御信号を具体的に決定することのそれである。最大原理は最適制御にあづかる随伴系

の初期値を未知のまま残すので、このための実用的な算法が必要である。最近これらの初期値決定の算法が、最大原理とは別の概念に基づいて反復法という形で若干提案されてきた。本研究では、その適用領域の広さから L. W. Neustadt により提案された繰り返し計算法 [2], [3], [4] を用いて最適制御を具体的に決定することを試み、その実時間計算への適用の可否を調べる。

L. W. Neustadt の反復法は、随伴系の初期値ベクトル η を独立変数とする多変数関数 $F(\eta)$ を考え、この関数がこれらの初期値が最適制御を生み出すときに最大とるように設定される。この関数の最大化を最急こう配法による繰り返し計算法により、仮定された初期値ベクトルから行なうのである。反復時の初期値ベクトル η の更新 (反復則) は次式で行なわれる。

$$\eta^{i+1} = \eta^i + K \cdot \nabla F(\eta^i)$$

$\nabla F(\eta^i)$ は関数 $F(\eta^i)$ の点 η^i におけるこう配であり、 K は反復則のゲイン (ステップ) である。この解法は 2~3 の数値計算の例題に対して結果が示されただけであって、オンライン・コントローラの内部処理アルゴリズムとして適用されたという報告はない。この算法の実用化には、考慮すべき問題があった。反復法の収束状況にまつわること、すなわち収れんに要する反復数とその収れん精度である。最適制御発生シミュレーションのオンライン研究で明らかになったことであるが、収れんが困難になる場合があり、収れんに時間がかかったり、解くプロセスで現われる振動が大きくなり機械計算にいうオーバーフローをおこしてしまうことが生じる。本研究ではこの問題の解決を、反復則に現われるゲイン K をそのときの境界値の誤差 ΔE および最適値 F で制御することに求める。このゲイン・コントロールは、L. W. Neustadt の算法の幾何学的解釈を背景として、オンライン・シミュレーションにより経験的に定められた。

この最適制御発生方式は、解析解の知られている二次系および三次系の最短時間問題でシミュレートされ、高速収れんを得さしめた。解析解のない場合 (エネルギーに制限のある系) に対しても容易に解の得られたことが示される。更に人工衛星の軌道への投入とか、その会合などに起るロケットの推力角制御の問題に対して適用されたが、用いられた研究用シミュレータでも、実時間に対比する速さで解が得られている。

ここで制御系の最適化の問題をふりかえてみると、従来は位相面法 [6] を用いて研究されてきた。これは非線型最適化制御と称され、最初の定式化は D. W. Bushaw [7] による。彼は二次の線型振動系の最短時間問題の解を位相面における最適切替線という形で与えた。R. Bellman ら [8] は n 次の定数係数の線型系で、この系の固有値が負の実数値の場合についての解析を行ない、最短時間を与える最適制御が、Bang-bang 形式になることを示した。これら位相面による設計法では、これら自体がフィードバック構造を示すのであるが、系のパラメータが時間と共に変化するような系は扱えず、位相面での展開も三次どまりであるなど適用に限度があり、また厳密性も十分でない。一方最適制御系の構成に関する数学的な意味あいをもつ接近として、古典変分法による手法 [9] も用いられてきた。フィードバック制御装置のゲインなどを偏差に関するある種の評価が極小となるように決める手法である。この方法が適用されていた問題では、制御装置の動作法則を前提としているので、変分法を用

いて若干の係数を決定するというで解決が与えられていた。この種の問題を用いて、先の非線型最適化制御の問題に数学的な厳密さを与え、より一般的に展開しようとする、古典変分法の適用限界が問題を提起する。この問題は、L. S. Pontryagin らにより解決された。彼らは古典変分法を拡張して、きわめて一般的な最適制御のみたすべき必要条件を、最大原理という形で定式化することに成功した。最大原理は制御系を状態量で表現し、その状態量間の時間的な関係を一次の連立微分方程式で規定し、多次元の状態空間（位相空間）で制御系の状態変化を扱うことにより、広範囲の制御系に現われる決定論的な制御過程の最適化の問題を統一的に論ずるものである。線型・非線型を問わずすべての決定論的な制御過程に適用でき、今まで個々別々に展開されていた最適制御理論の統一をはかる。現在までのところ最大原理に関しては数学的な理論、展開が多く実用に供した例は知られていない。

最大原理自体は、最適制御の満たすべき必要条件を与えるだけで、これを算出するアルゴリズムを与えるわけではない。これには非線型 2 点境界値問題の数値解法を必要とする。このために L. W. Neustadt は時変係数をもつ線型制御系の最適制御を決定する繰り返し計算法を提案した。H. K. Knudsen [10] は定数係数の線型系における最短時間問題に対する繰り返し計算法を提案した。この方法は対象がよりせまいものであるが、L. W. Neustadt のそれよりも収束が速いといわれている。YU-CHI-HO [11] は実数係数の線型系に対して時間を指定して、この時間内において、ある種のノルムを最小にするような問題の数値解法を与えた。H. Halkin [12] は L. W. Neustadt の算法の非線型系への拡張として Convex Ascent 法を提案した。これは最適制御を決定するのに L. W. Neustadt の算法の反復使用が更に必要となる。大規模な電子計算機を前提とした解法として、R. Bellman [13] の組織した動的計画法が広く知られているが、これはぼう大な計算時間とメモリーを必要とする。

本研究で採用した L. W. Neustadt の反復法は理論では収れんが示されるが、十分な精度で初期値ベクトルを算定するための繰り返しの数が不合理なほど大きいということが認められ、E. J. Fadden [14] および Paiewonsky [15] により一部報告されている。また計算時間を減少するという見地から、系の動的挙動をアナログ計算機で処理するハイブリッド計算方式が E. J. Gilbert [16] により提案された。Paiewonsky [17] はこれとは別に二次および三次の系を例にとり、アナログ・ハイブリッド計算機でその収れん性を調べたが、三次の簡単な系では収束が得られなかった。彼はこれをアナログ計算機の比較器の誤差と繰り返し時のゲインの定め方によると報告している。

本研究はこのような背景のもとに遂行されてきた。以下本文で L. W. Neustadt の反復法を幾何学的に解釈して紹介し、収れんを加速するために使われたゲイン・コントロールが述べられる。次いでこれらで構成される最適制御発生アルゴリズムをオンライン・コントローラとして機械化するには、デジタル・ハイブリッド・システムが最適であることが述べられる。高速演算部は D. D. A. である。この制御方式をシュミレートするシュミレータが同一形式のデジタル・システムで組織され、シミュレーションが行なわれた。シミュレーション結果が与えられ、最後に結論として最適フィードバック制御系が論じられる。

2. 最適制御発生アルゴリズム

最適制御装置の内部で自動化されるべき最適制御発生アルゴリズムとして、L. W. Neustadt により提案された反復法と、この発生プロセスを加速するためのゲイン・コントロールが用いられる。ここではまず最適制御決定に関する L. W. Neustadt の理論を幾何学的に解釈し、数学的な厳密さをぬきにして以下に展開する。次いでこれによるシミュレーションのオンライン研究の結果と得られたゲイン・コントロールが述べられる。最適性の評価基準として最短時間がとってあるが、L. W. Neustadt の理論自体は最短時間問題にその適用が限定されるわけではない。

2.1 L. W. Neustadt の理論

研究対象とされた n 次元の制御系は、その n 次元の状態量—— $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ——のベクトル $\mathbf{x}(t)$ で規定され、またこれらの動的挙動（時間 t に対する変化）が次の形のベクトル微分方程式で一般的に表示されると仮定された。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{u}, t) \quad (2.1)$$

ここで $\mathbf{A}(t)$ は、 $n \times n$ 次元の行列、 $\mathbf{B}(t)$ は $n \times p$ 次元の行列、 $\mathbf{a}(t)$ は n 次元のベクトル、 $\mathbf{C}(\mathbf{u}, t)$ は p 次元のベクトルであって、いずれもその変数に関して連続な関数である。 \mathbf{u} は r 次元のベクトルであって系に外から加えられる制御であり、 $\mathbf{u} \in U$ なる拘束条件を満す断片的に連続な関数である。 U は r 次元空間でのある閉じた集合を表わす。

(2.1) の方程式を積分方程式の形に直すと

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \left[\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{X}(\sigma)^{-1} \cdot \mathbf{a}(\sigma) d\sigma + \int_0^t \mathbf{X}(\sigma)^{-1} \cdot \mathbf{B}(\sigma) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{u}, \sigma) d\sigma \right] \quad (2.2)$$

となるが目標値を $\mathbf{r}(t)$ とし $\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t)$ として展開し直すと、

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}(0)^{-1} \cdot \mathbf{r}(t) - \int_0^t \mathbf{X}(\sigma)^{-1} \cdot \mathbf{a}(\sigma) d\sigma - \int_0^t \mathbf{X}(\sigma)^{-1} \cdot \mathbf{B}(\sigma) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{u}, \sigma) d\sigma \quad (2.3)$$

となる。 $\mathbf{x}(0)$ は系の初期値である。 $\mathbf{X}(t)^{-1}$ は $n \times n$ 次元の行列であって次の微分方程式の解である。

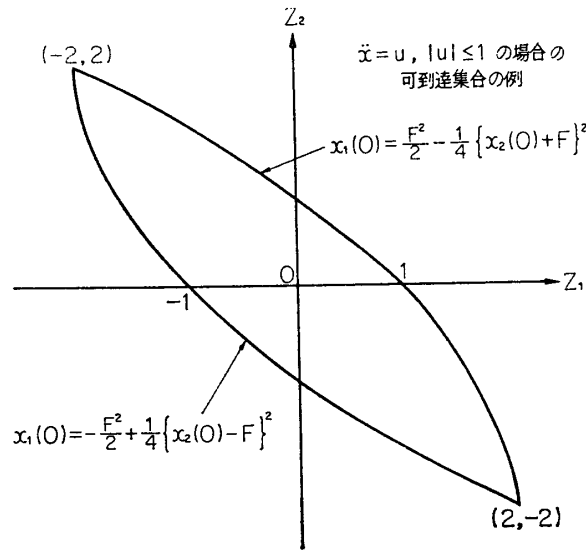
$$\dot{\mathbf{X}}(t)^{-1} = -\mathbf{X}(t)^{-1} \cdot \mathbf{A}(t); \quad \mathbf{X}(0)^{-1} = \mathbf{I} \quad (2.4)$$

(2.3) 式の右辺を $\mathbf{Z}(t)$ と呼ぶと、これは $\mathbf{u} \in U$ を満すすべての \mathbf{u} により、時間 t を固定すると点 $\mathbf{X}(t)^{-1} \cdot \mathbf{r}(t) - \int_0^t \mathbf{X}(\sigma)^{-1} \cdot \mathbf{a}(\sigma) d\sigma$ のまわりに可到達集合 (Set of Attainability, Reachable Event) を定義する。すなわち、

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}(t)^{-1} \cdot \mathbf{r}(t) - \int_0^t \mathbf{X}(\sigma)^{-1} \cdot \mathbf{a}(\sigma) \cdot d\sigma - \int_0^t \mathbf{X}(\sigma)^{-1} \cdot \mathbf{B}(\sigma) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{u}, \sigma) \cdot d\sigma \quad (2.5)$$

である。 U に課せられた制限からこの集合は閉じたものとなる。第 1 図は制御系 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$; $|\mathbf{u}| \leq 1$ を最短時間 $F=2$ で原点に静止させる場合の可到達集合を示す。この制御系を状態量 (x_1, x_2) で示すと (2.1) 式に対応した方程式は $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u$ となり $\mathbf{a}(t) \equiv 0$ である。目標値 $\mathbf{r}(t)$ も 0 である。

可到達集合は時間 t に対して更に集合を形成する。この可到達集合の中で、点 $\mathbf{x}(0)$ を含む可到達集合の集合を $R(t)$ とすると、 $R(t)$ の中に時間 t を最小にする可到達集合がある。



この二つの曲線弧よりなる閉曲線の内部が $F=2$ に対する可到達集合である。

第 1 図 可到達集合

もしなければ与えられた問題には最適解はない。時間 t を最小にする集合の内部での点 $\mathbf{Z}(0)$ ($=\mathbf{r}(0)$) から始まって $\mathbf{Z}(0)=\mathbf{x}(0)$ を満す点で終る経路は z 空間での最高軌道である。この経路を作り出す制御関数 $\mathbf{u}(t)$ が求めている最適制御である。この最適制御 $\mathbf{u}(t)$ は、(2・2) 式で定義される状態空間では始点 $\mathbf{x}(0)$ から終点 $\mathbf{r}(0)$ に至る最高軌道をつくり出す。 z 空間での最適軌道は、時間 t を最小とする可到達集合の境界で終る。この事実は、この集合の時間 t に対する成長を波動工学にいうホイゲンスの原理に基き考察すると直感される。

さて、最適制御自体の定式化は、以上の事実とは無関係に L. S. Pontryagin の最大原理で与えられるものを用いる。最大原理によれば、最適制御は対象となる制御系の随伴系の解の形で与えられるが、この解は n 個の実数よりなるベクトル $\boldsymbol{\eta}$ (随伴系の初期値) で規定されるので、結局最適制御は $\boldsymbol{\eta}$ をパラメータとしてもつものとなる。区間 $t=0$ から $t=F$ までの最適制御を決定するという問題はベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を決定するという問題におきかわる。この事実を次の形式で表わす。

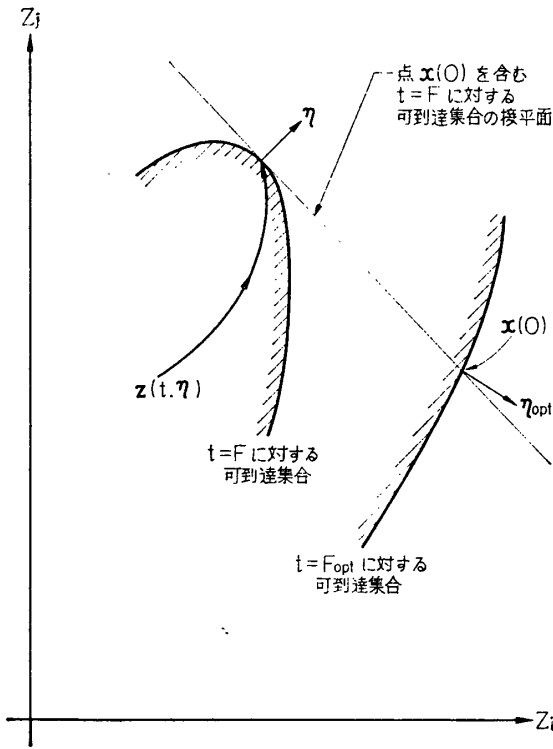
$$\mathbf{u}(0) \equiv \mathbf{u}(t, \boldsymbol{\eta}) \quad (2 \cdot 6)$$

$\mathbf{u} \in U$ を満す制御のうち、最大原理から導かれる最適制御 $\mathbf{u}(t, \boldsymbol{\eta})$ のみを用いると、(2・5) 式は可到達集合の境界面のみを定義し、かつベクトル $\boldsymbol{\eta}$ は最適軌道の終端 $\mathbf{x}(0)$ での可到達集合の外向き法線ベクトルとなる。可到達集合の境界面は、ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ で規定される最適制御 $\mathbf{u}(t, \boldsymbol{\eta})$ でのみ与えられるので、次の形式が境界面に対して成り立つ。

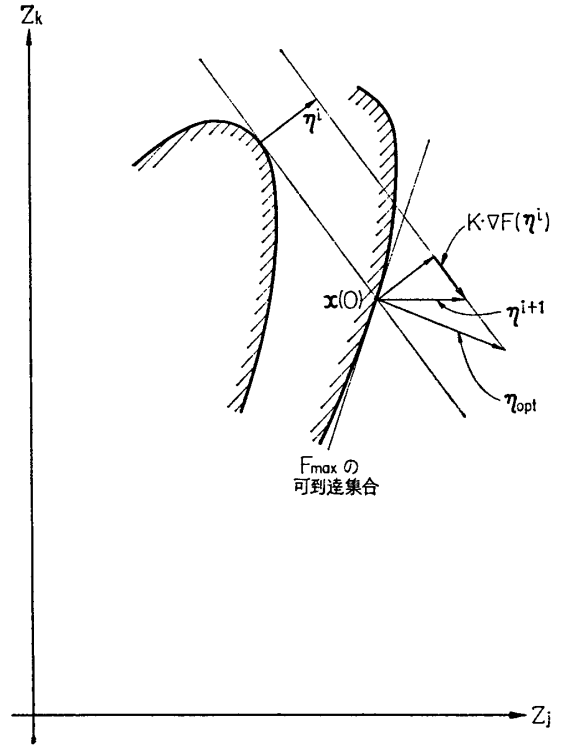
$$\mathbf{Z}(0) \equiv \mathbf{Z}(t, \boldsymbol{\eta}) \quad (2 \cdot 7)$$

適当な条件のもとで、集合 $\mathbf{Z}(0)$ は有界で凸の開集合となる。このような場合、最大原理のいう必要条件は十分条件ともなる。本論文で対象とするような物理的な最適値があることが明確な場合、かかる条件が満されていることが多い。

第 2 図は \mathbf{Z} 空間での点 $\mathbf{x}(0)$ とベクトル $\boldsymbol{\eta}$ に対応した経路 $\mathbf{Z}(t, \boldsymbol{\eta})$ の 2 次元への投影を



第 2-1 図 可到達集合と随伴系の初期値ベクトル



ベクトル η の更新 (反復則)

$$\eta^{i+1} = \eta^i + K \cdot \nabla F$$

K には最適値が予想される。

第 2-2 図 反復則と可到達集合

示し, L. W. Neustadt の算法の概念を与える. 目的は点 $x_{(0)}$ を通る可到達集合の境界面の点 $x_{(0)}$ での法線ベクトル, すなわち最適ベクトル η_{opt} を求めることである. まずこのベクトルを η と仮定し随伴系を解いて $u(t, \eta)$ を, したがって $Z(t, \eta)$ を t の関数として計算していくと, 点 $Z(t, \eta)$ から点 $x_{(0)}$ をみるベクトル $x_{(0)} - Z(t, \eta)$ がベクトル η と直交する点に達することができる. この時刻 t を F と呼ぶ. 時刻 F はベクトル η の関数なので, $F(\eta)$ とかく.

$$f(t, \eta) \equiv \eta \cdot [x_{(0)} - Z(t, \eta)] \tag{2.8}$$

を定義すると, η が最適であるならば, 可到達集合の凸の性質により最適制御 $u(t, \eta_{opt})$ は $f(t, \eta_{opt}) = 0$ とする時間 F を最大にする. こうすれば問題は多変数関数 $F(\eta)$ の最大値をみるものとなり, この関数の単峰性を考慮すれば最急こう配法をつかって, 最適の η をみつける繰り返し計算法を設定することが可能になる.

L. W. Neustadt は関数 $F(\eta)$ のこう配 $\nabla F(\eta)$ がベクトル $x_{(0)} - Z(F(\eta), \eta)$ であることを示した. 反復時のベクトル η の更新則は次式である. 第 i 番目の仮定ベクトル η^i から第 $i+1$ 番目の仮定ベクトル η^{i+1} の決定法を与える.

$$\eta^{i+1} = \eta^i + K \cdot \nabla F(\eta^i) \tag{2.9}$$

$\nabla F(\eta)$ に等しいベクトル $x_{(0)} - Z(F(\eta), \eta)$ は境界点 $x_{(0)}$ における誤差を与えるのでこれを

ベクトル $\Delta E(F(\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta})$ と呼ぶ。(2・9) 式は次式となる。

$$\boldsymbol{\eta}^{i+1} = \boldsymbol{\eta}^i + K \cdot \Delta E^i(F(\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta}) \quad (2 \cdot 10)$$

K は最大値接近へのステップであり、本論文ではゲインと呼ぶ。

2.2 ゲイン・コントロール

L. W. Neustadt の反復法をそのままの形で機械化すると、一般には収れんが困難である。収れんに時間がかかり過ぎるか、または大きな振動が発生してオーバーフローを起す。スイッチングのおこる問題では特に著しい。ここでいう収束が困難であるというのは、最適値を得ることのそれを指すのではない。収束が困難なのは、最適制御問題の解法を2点境界値問題として定式化したとき、他端での境界値を合理的な演算精度で求めることのそれである。この困難さの特徴はきわめて一般的であると考えられ、本研究のすべてに通じて共通に現われた解の性質である。この困難さを克服するために、(2・10) 式のゲイン K を制御する簡単な算法であるゲイン・コントロールを用いた。

反復法に扱われる初期値 $\boldsymbol{\eta}$ の更新則は最急こう配法に基づくが、ゲイン (ステップ) は最急こう配法からは与えられない。L. W. Neustadt は理論的な扱いでゲインを十分小さな定数としたが実用的ではない。 $\boldsymbol{\eta}$ を二次元ベクトルとして考えると、(2・10) 式は、 F の最適値のつくる単調な山 (一つしかない) を初点 $\boldsymbol{\eta}^0$ からステップ K の間隔で最も急しゅんこう配をめざして登っていくことである。こう配 $\nabla F(\boldsymbol{\eta}^i)$ の絶対値にもよるが、 K が小さすぎると頂上につくのに必要な反復数が多くなる。三次元以上の問題となると、この山の模様は単峰性であることは保たれるが複雑となり、更にこの様子が系の初期値 $\boldsymbol{x}_{(0)}$ により変化しているようである。ステップ K の値の選択は、高速収れん性をもたらすためにはきわめて重要なものとなる。

$\boldsymbol{\eta}$ 空間での $F(\boldsymbol{\eta})$ の変化状況から、 K の値は一定の固定値よりも反復ごとにそのときすでに得られた情報に基づき、再評価した方が収れんの高速化をはかるものと考えられる。この再評価の仕方を定めるのがゲイン・コントロールである。

ゲイン K の第1試値 K^0 は、0.5~1 と定められたがこれは次の理由による。量大原理により最適制御を発生させるための条件として $\boldsymbol{\eta}$ に課されることは、その方向についてだけであって、その絶対値については何ら言及しない。 $\boldsymbol{\eta}$ の第1試値 $\boldsymbol{\eta}^0$ としては、系の初期値 $\boldsymbol{x}_{(0)}$ に比例した量を選び、その絶対値を1と定めた。L. W. Neustadt の理論から $\boldsymbol{x}_{(0)}$ と最適の初期値 $\boldsymbol{\eta}_{opt}$ とは、互に逆向きの成分をもつことがないのは明らかなので、 $\boldsymbol{\eta}^0$ を軸とする立体角 $\pi/2$ の超円錐の内部に $\boldsymbol{\eta}_{opt}$ があることになる。したがって第1回目の $\boldsymbol{\eta}$ の修正は、 $\boldsymbol{\eta}^0$ と $\boldsymbol{\eta}_{opt}$ を含む面内で再 $\pi/4$ の回転が望ましい。 $|\boldsymbol{\eta}^0|=1$ にしてあるのでゲイン K は $1 = \tan \pi/4$ またはこの近傍が適当であろう。

ゲイン・コントロール定式化の基本構想は次のごとくである。反復が進むにつれて $F(\boldsymbol{\eta})$ のつくる山または峯を横切ることになるが、このときゲインを半分にして $\boldsymbol{\eta}^{i+1}$ を決定しなおし、 $\boldsymbol{\eta}^{i+1}$ の値の確立は峯と山または峯の手前で行なうようにする。山または峯を横切ることにならなければステップが不足していたとして、ゲインを増すようにゲインをコントロールするのである。ゲイン・コントロールを行なう場合の $\boldsymbol{\eta}$ の更新方法 (反復則) は、境界値における誤差 $\Delta E(\boldsymbol{\eta}^i)$ として、以下のごとくに改められる。

$$\boldsymbol{\eta}^T = \boldsymbol{\eta}^i + K \cdot \Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i) \quad (2 \cdot 11)$$

i 番目の反復結果から仮のベクトル $\boldsymbol{\eta}^T$ を定め、これを次の試行の初期ベクトルとして一連の計算を実行する。 $F(\boldsymbol{\eta}^T)$ が $F(\boldsymbol{\eta}^i)$ に対して山または峯を横切ったかどうかの決定は、 $F(\boldsymbol{\eta})$ の値自身および境界値における誤差 $\Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^T)$ で行なわせる。すなわち、

$$(1) \quad F(\boldsymbol{\eta}^T) < F(\boldsymbol{\eta}^i)$$

$$(2) \quad \Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^T) \cdot \Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i) < 0$$

以上の条件の一つが成立するとき、峠越えが起ったと判断した。 $\boldsymbol{\eta}^T$ を $\boldsymbol{\eta}^{i+1}$ として定めるのは、各ゲイン・コントロールに依存する。用いられたゲイン・コントロールは、ゲインを変化しない場合を含めて 10 通りが考案された。ゲイン・コントロールは、G.C.n ($n=0 \sim 9$) をその名として以下で参照する。

ゲイン・コントロール

G.C.0: ゲインを変化させない。二次の振動系に対してのみ良好な収れん特性を得た。この場合 L. W. Neustadt の方法そのものとなる。

G.C.1: $F(\boldsymbol{\eta}^T) < F(\boldsymbol{\eta}^i)$ なるときにはゲインを 1/2 倍して再び $\boldsymbol{\eta}^T$ を決定し、これ以外るときは $\boldsymbol{\eta}^T$ を $\boldsymbol{\eta}^{i+1}$ として K を変えない。二次系に適用され収れんを加速した。

G.C.2: G.C.1 の $F(\boldsymbol{\eta})$ の条件に等号を追加したもので、結果的には G.C.1 と同じであった。

G.C.3: $F(\boldsymbol{\eta}^T) < F(\boldsymbol{\eta}^i)$ かまたは $\Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^T) \cdot \Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i) < 0$ のどちらかの条件が成立する際は、ゲインを 1/2 倍し $\boldsymbol{\eta}^T$ を再評価する。これ以外るときは $\boldsymbol{\eta}^T$ を $\boldsymbol{\eta}^{i+1}$ として次の反復に進む。二次系に対しては G.C.1 によるよりも更に収れんを加速した。

G.C.4: $\Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^T) \cdot \Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i) < 0$ のときゲインを 1/2 倍する。 $\boldsymbol{\eta}^T$ は常に $\boldsymbol{\eta}^{i+1}$ として次の反復に進む。収れん状況への影響は G.C.3 とほぼ同様であった。

G.C.5: 最大原理により最適の $\boldsymbol{\eta}$ に課せられる条件は、その方向についてだけであって絶対値は規定しない。(2・11) 式による反復則では、必ず $\boldsymbol{\eta}$ の絶対値を反復ごとに成長させることになるので、これをさけるために $|\boldsymbol{\eta}|=1$ として $\boldsymbol{\eta}$ を $\boldsymbol{\eta}$ 空間内の超球に沿って動かすように反復則を改めて、 $\boldsymbol{\eta}$ の更新はこの球内の回転で行なうことにした。この方向は三次元以上の問題では G.P.C. のメモリーの関係で適用が不可能となったので二次系のみになされた。二次元の問題ではこれは平面内の回転となり、角度 K ラジアン回転により $\boldsymbol{\eta}^T$ を定めることとした。回転方向は境界値の誤差ベクトル $\Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i)$ と初期値ベクトル $\boldsymbol{\eta}^i$ の方向の関係で定められた。このような場合最適の $\boldsymbol{\eta}$ の決定はバイナリー探索となり、ゲインは反復ごとに 1/2 倍された。収れん速度は探索の際の誤差の精度で一意的に定まった。 $\boldsymbol{\eta}$ の絶対値の成長をきらうのは、機械内の演算が固定小数点方式だからである。

G.C.6: $F(\boldsymbol{\eta}^T) \leq F(\boldsymbol{\eta}^i)$ かまたは $\Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^T) \cdot \Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i) < 0$ のどちらかが成り立てばゲインを半分とし、どちらも成立しなければ K を 2 倍にする。 $\boldsymbol{\eta}^T$ は常に $\boldsymbol{\eta}^{i+1}$ とした。これは三次系で G.C.3 を用いたときゲインを増加する過程が必要となったため採用した方式である。 K を不必要に増加するので収れんは発散することが多かった。

G.C.7: $\Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^T) \cdot \Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i) < 0$ のときにはゲインを半分とし、 $\Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^T) \cdot \Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i) > 1/2 \{ \Delta \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i) \}^2$ のときはゲインを 2 倍にする。 $\boldsymbol{\eta}^T$ は常に $\boldsymbol{\eta}^{i+1}$ として用いる。三次系へ G.C.6 で接近するよりも収れん特性を良好にした。

G. C. 8: $\Delta E(\eta^T) \cdot \Delta E(\eta^i) < 0$ のときは, ゲインを 1/2 倍し η^T を再評価し, これ以外のときは η^T を η^{i+1} として次の反復に進む. ロケット運動の問題へ適用したところゲインが小さすぎて単調に F_{\max} の山へ登っていくのがみられた.

G. C. 9: $\Delta E(\eta^T) \cdot \Delta E(\eta^i) < 0$ のときに, ゲインを 1/2 倍とし η^T を再び評価し直し, これ以外ではゲインを 2 倍して η^T を η^{i+1} とし次の反復へ進む. エネルギーに制限のある二次系およびロケット運動の場合きわめて良好な収れん特性を得た.

以上のゲイン・コントロールを種々適用した結果, 最適関数値 $F(\eta)$ の値そのものによる評価は, 境界値の誤差 $\Delta E(\eta)$ に比べると効果が小さく, 一般化したゲイン・コントロールは次のような形式が良好であると考えられる.

" $\Delta E(\eta^T) \cdot \Delta E(\eta^i) < 0$ のときゲインを 1/2 倍し, η^T を再評価する. $\Delta E(\eta^T) \cdot \Delta E(\eta^i) > L \cdot \Delta E(\eta^i) \cdot \Delta E(\eta^i)$ のときはゲインを 2 倍とし, η^T を η^{i+1} とする. これら以外のときは単に η^T を η^{i+1} として次の反復試行へ進む. ただし L は問題ごとに定めた 0 または正の定数である."

これらゲイン・コントロールを機械内部で実施するときにはやはり簡単な算法が望ましいので, 問題ごとによっては $F(\eta)$ による評価のみを用いた G. C. 1 のようなものも有効となるであろう.

3. ハイブリッド計算方式

オンライン・コントローラの中核は, 制御指令をつくり出す計算機であって, これに課せられる機能的な要求は, 高速高精度の演算を行なうことである. 前章で述べた算法は随伴系の初期値 η を仮定して, 最適制御 $u(t, \eta)$ を定め, $Z(t, \eta)$ を $f(t, \eta) = 0$ となるまで計算し, この点でゲイン K を再評価し, η の値を $\eta + K \cdot \nabla F$ として更新し, このプロセスを繰り返して $Z(F(\eta), \eta) = x_{(0)}$ とし, 制御対象へ加えるべき動作信号である最適制御 $u(t, \eta_{opt})$ を決定することであった. 最適制御は時間 t の関数として制御過程の形で与えられるが, 制御系の Identification の不完全さ, その変化および外乱などの影響があり, 現実の系とのずれが大きくなるうちに短時間で制御過程を再評価する必要がある. また制御の目的は制御信号をつくり出すということよりも制御対象を指定された状態に移すこと, すなわち, 現実の系において, $Z(F(\eta), \eta) = x_{(0)}$ とすることである. この条件を指定された精度で満すには, η の値として境界値の 2 倍 (けた数で) 以上の精度が要求されることが知られている. 本章では, これらの要求を満す最適制御発生演算プロセスを実時間で実施し, ベクトル計算を効率よく処理する計算機として, いかなる方式, 構造のものがオンラインコントローラ向きであるかを論じ, D. D. A. を高速演算部としてもつデジタル・ハイブリッド・システムが望ましいものであることを述べる.

最適制御を用いて可到達集合の境界 $Z(F, \eta)$ を作り出すことを, 通常の G. P. C. (汎用のデジタル型計算機) で実現させることを考えてみる. G. P. C. では演算の進行にともない. メモリーに置かれたプログラムを構成する命令を逐一呼び出し, 更に必要ならばデータも読み出して一つの演算装置を時分割につかって処理を行ない, 結果をメモリーに戻すというプロセスで演算処理が進行する. $Z(t, \eta)$ の計算で主要な演算は, 非線型の微分方程式を解く

ということである。G.P.C.では数値積分法を用いて、これを加減乗除の順序づけられた演算として実現する。プログラムにある個々の命令がどのような機能を有するか、すなわち、回路的にどのような仕事が行なわれるかにもよるが、 $Z(t, \eta)$ の評価にはかなりの演算時間が必要となる。しかも一つの決定を行なうのに、このアルゴリズムでは、更新される η に対して $Z(t, \eta)$ を幾度も評価する必要がある。更に非線型微分方程式の内容をみると、最適制御発生のプロセスでは、高精度のスイッチング、連続的に変化する量の比較操作を高速に行なう必要が出てくる。G.P.C.による数値解法ではその速度を高めるために積分ステップを可能な限り大きくとるが、精度を必要とする比較条件が、このステップ上で成立することは少ない。ステップ幅を境界条件近くで制御するにしても、現用の大型計算機(ex. HITAC 5020)でも実時間応用には不十分であろう。回路的に微分方程式が組織的に解ければ、演算時間の短縮化は大いに期待できる。もっともG.P.C.の基本命令として微分方程式を解くというような命令を用意するのは望ましいものではない。微分方程式を高速高精度で解く専用機(S.P.C.)が望まれるわけである。 $Z(t, \eta)$ の発生にあづかる演算およびデータの性質を考慮すると、演算は時間に対する関数値を求めることに集約され、取り扱う量がほとんど連続的に変化するデータでは、初期値と変化分のみをおさえおけば十分であって、G.P.C.が扱うように値全体(Whole Number)を評価しなければならないということはない。望まれるS.P.C.はインCREMENT(微小変化分)形式のデータを高速に処理できればよい。

さて、最適制御発生の算法の計算時間の大部分を占める $Z(t, \eta)$ の計算には、インCREMENT形式の計算機を用いるが、各反復時の η の値の更新のための代数演算とか、インCREMENT計算機の初期値設定のような値全体のデータの処理は、インCREMENT計算機では非効率であり、このようなことはG.P.C.が得意であり処理も速い。したがってオンライン・コントローラの中核として、G.P.C.とインCREMENT計算機よりなるハイブリッド・システムを用いると、高速高精度の処理が期待できる。ハイブリッド計算機では相互の計算機のオペレーションの制御が必要となるが、この際にもG.P.C.が効果的な役割を演ずるのである。

ハイブリッド計算機を構成するインCREMENT計算機として、アナログ型計算機(以後アナコンと略称する)[18]とD.D.A.との二つが考えられる。現在までのところ、他の目的につかわれるにしろ、ハイブリッド計算機の高速度演算担当の計算機としてアナコンが用いられてきたが[19]、これはただ計算機工学発達の経過によるのであって、D.D.A.が不適であったということではない。

まずG.P.C.とのハイブリッド計算機を構成するという面で両者を考える。アナコンでは取り扱うデータ交換の際に変換器が必要となる。これには現用のアナログ・ハイブリッド計算機では、一部門となるほどの装置が必要である。D.D.A.ではG.P.C.とのデータ形式が同じであり、G.P.C.とD.D.A.とのデータ交換を特に意識しないような、すなわち、これを単一計算機の内部的なものとして計算機を組織することが可能であり、互に共通する装置は省略することもできる。

次に最適制御装置の一部として用いた場合、アナコンとD.D.A.とをそれぞれ単体として、速さ、演算精度、演算機能、信頼性、長時間運転性、取り扱いの容易さ、大きさなどから比較を試みる。

現用のアナコンがもつ高速性は、すべての演算が同時に行なわれることおよび基本演算である積分が回路素子の時定数を利用した回路網による演算であるところからくる。更にまた、アナコン本来の機能である積分演算などのほかに非線型演算なども、この関数値を比較的高速に発生する素子または素子系が開発され、その利用性が高まっているようである。しかし、すべての演算を同時に処理することは、同一の演算装置がその数だけ必要であるということであって、回路網も複雑となり、信頼性を下げ、形状を大型化し、経費の増大をまねく。また積分演算は回路網による近似演算であり、完全な積分を行なうわけではなく、演算精度を10進4けた以上とするのは実用的な見地からいって無理な期待であり、非線型要素の精度は更に悪いと考えられる。本研究の対象とする問題では比較器が基本的に重要な非線型要素であり、しかも0に近い二つの量を比較するのでかなりの精度が必要なのであるが、アナログの信号にはノイズが重なっていて十分な精度が達成できるとは期待できない。また、アナコンでは構成素子に対しては、線型演算が行なわれるものもあるので、素子の値の変化が直接結果に影響を及ぼす。長時間運転の際には、直流電圧の変動(ドリフト)が現われ、これを正確に制御するのは困難であろう。

一方D. D. A. は現在までのところ、アナコンほど用いられてはいないが、素子の値の変化などに対する信頼性とか、長時間運転性とかは、D. D. A. のすべての演算が内部素子に対しては非線型演算であり、素子の値の若干の変動は演算結果に直接の変化をもたらさない。内部における処理も時分割に行なうことが可能であり、このことが信頼性保守性を更に高める。演算精度は演算速度とのかねあいもあるが、デジタル量なので、必要となるだけの精度を実現することが可能である。演算速度も現在の素子開発の状況からいってもかなりの速さを実現可能であろう。D. D. A. がもつ優位性は、演算精度に加えて算演機能のもつ柔軟な適用性およびデータ処理性にある。D. D. A. の基本演算である積分は、その独立変数がアナコンとは異なり任意に設定制御できるが、アナコンでは現実に経過していく時間しかとれないので、独立変数は一つであり、これを制御するのは困難である。D. D. A. では、プログラムをストアプログラム形式にすることが可能であり、ハイブリドの場合G. P. C. のプログラムでD. D. A. のプログラムを処理することもできる。演算器の乗数なども内部データの形でもっているのが精度が高くなり、プログラムと同様G. P. C. のプログラムで処理の対象となる。D. D. A. のもつ非線型演算は単純であるが強力であって、サーボ論理をつかって陰関数を発生させることができ、レゾルバーも高精度に実現しうる[21]。したがって制御対象のシミュレートも精度の高いものが高速に可能となる。またG. P. C. で問題となった積分のステップを小さくとっても、高速性は失なわれない。

以上からオンライン・コントローラの中央演算装置として、D. D. A. を高速計算部としてもつデジタル・ハイブリドシステムが望ましいものであると考えられる。

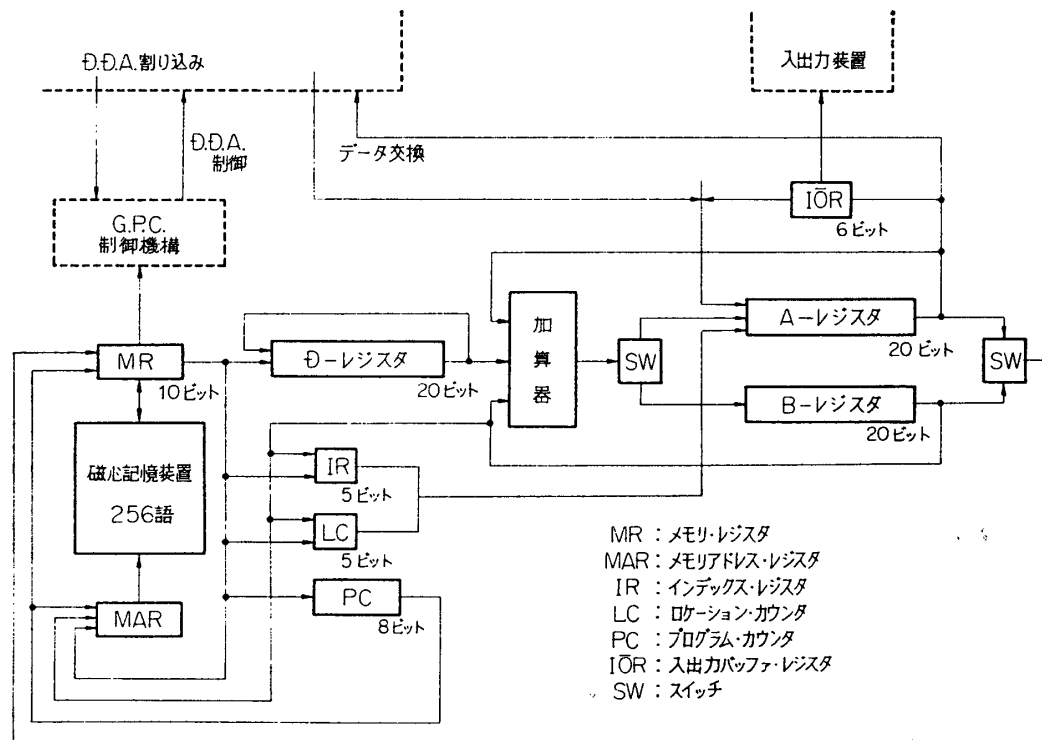
4. オンライン研究用のハイブリド・システム

デジタル・ハイブリド・システムにより最適制御を実時間で発生させる際に必要となる諸条件を規定し、その適否を論じるために、最適制御装置のシミュレータとしてD. D. A. を含むハイブリド計算機が組織された。直接オンライン・コントローラとして使うことを意図

したのではないが、これに適当な情報交換装置を付加すれば、このままの形で現実の制御装置の中央決定機構となりうるものである。この研究システムの意図および構成につき述べる。

シミュレーションは電子計算センタなどにある大型計算機でも実施可能であるが、この論文で対象とするようなシステムのダイナミクスの研究では、速度、経費、使いやすさ（いらいらだつほど長い Turn Around Time など）からいって望ましいものではない。非線型とか時変係数を含む微分方程式で支配される複雑なシステムの研究には、実験的な数値解法とか試行錯誤的な手法が必要となることが多い。演算プロセスへ人間が積極的に介入し、判断をただちに計算機系へフィードバックし、しかもこれが容易に行なえるようなオンラインの機能を持ち、安価でかつ大型計算機なみの速さと精度をもつ計算システムが、この種の研究には望ましいものとなる。

デジタル・ハイブリッド・システムに含まれる D. D. A. は、高速演算部として制御系のダイナミクスをシミュレートするものであるが、同時にデジタル・ディスプレイに接続され、G. P. C. の制御により最適制御を生み出す際の反復法の収束状況を時々刻々計算機の出力として表示し、図形によるシステムとの交信を可能にして強力なオンライン機能を実現する。図形以外の情報はコンソールタイプライタおよびコントロール・パネルを通してシステムとやりとりされる。精度については、設定値で最大 20 ビット、演算経過時で 30~40 ビットである、速度は $560 \mu s$ に一つのインCREMENTが発生するのでかなり高速である。また手持の装置、材料をフルに用いてシステムが構成されているので、経費の低減が可能にな



第 3 図 G. P. C. 概念図

っている。

デジタル・ハイブリッド・システムは、小型の G.P.C. と D.D.A. とよりなり、特にこれら二つの結合装置なるものは存在しない。D.D.A. については、その構造は別に報告されているので [20] 省略する。ここでは結合装置としての機能を含む小型の G.P.C. の構造について述べる。第3図に G.P.C. の一般構成が示される。

メモリーは磁心記憶を用い、1語 10 ビットで 256 語よりなる。サイクルタイムは演算論理との関連で $20 \mu s$ に同期される。メモリーアクセサリのレジスタは、1Mc に同期するフリップフロップでつくられる。演算論理方式はシリアルで 1 ビット 1Mc で動作する同期式である。演算レジスタは 4 本の 20 ビット長の LC 遅延線で作られ、二つのアキュムレータ、インデックス・カウンタ、プログラム・カウンタ、バックアップに用いるデータ・レジスタを構成する。演算制御用のレジスタ類はフリップフロップからなる。機械命令語は約 40 種あって、シングルアドレスのストア・プログラム方式になっている。入出力装置としては紙テープ機器とタイプライタが G.P.C. に直結している。

最適制御発生の際の G.P.C. の役割の一つとして繰り返し時の η (随伴系の初期値ベクトル) の値の更新とゲインコントロールの際のベクトル計算および D.D.A. をスタートさせるための初期設定、境界値の誤差の評価などがある。いずれの内容ももととなるデータを D.D.A. から取ってきて何らかの演算を施して決定をくださるか、またはこの演算結果を再び D.D.A. に戻すか、あるいは単に G.P.C. 側で用意した値を D.D.A. にセットすることである。ここにあるような D.D.A. とのデータのやりとりとか D.D.A. のオペレーションの制御はすべて G.P.C. の機械命令語のレベルで行なえるようになっている。オペレーションの制御としては、D.D.A. の状態のチェック、スタートとかストップなどがある。D.D.A. から G.P.C. へのサービス要求は割り込み機能をつかって行なわれる。磁心記憶装置と D.D.A. とのデータ交換は、アキュムレータを介して行なわれる。アキュムレータと D.D.A. のライン・レジスタとのデータ交換は、機械命令語で直接実行されるが、ライン・レジスタのアドレスをあらかじめロケーション・カウンタにセットしておく。

このほか、D.D.A. の出力をグラフィカル・ディスプレイする為の制御機能がある。

5. 最適制御発生のシミュレーション

前章で述べたデジタル・ハイブリッド・システムによる最適制御発生の結果が、収束状況を示すグラフをそえてこの章で一括して報告される。まず最適制御発生のアルゴリズムがハイブリッド・システムに適用しやすい形に直され、これを実施する G.P.C. および D.D.A. のプログラムの一般形が明示される。次いでこのシミュレータの能力の範囲内で可能であった 4 種類の場合についての結果を与える。これらの場合に対して、この方式を適用した目的および結果を簡単に述べると以下のごとくなる。

二次系への適用：まず二次のダンピングのない振動系へ適用された。最適制御の解析解が容易に得られる場合なので、最適制御の発生方式のテストを目的にした。ゲイン・コントロールを用いなくてもきわめて容易に高速収れんを得た。次いでダンピングも復元力もない二次の系、単純二次系へ適用された。ゲインコントロールを用いないと、さ

きの振動系の場合ほどの高速収れんは得られなかった。この点で各種のゲインコントロールが開発された。

三次系への適用：二次元の問題には現われない，多次元の問題のもつ収束の困難さを表わす最も簡単な場合として単純三次系が選ばれた。かなり効率のよいゲイン・コントロールを必要とした。

エネルギーに制限のある二次系：解析的に解けない場合として，前述の単純二次系へエネルギーの制限を課したものである。ゲイン・コントロールの適正な決定で高速収れんは容易であった。

ロケットの運動：人工衛星の軌道への打ち上げの最終段階の制御，同じく会合の際の制御を表わす場合を数学的に抽象したもので，比較的に現実の系に近いという意味で選ばれた事例である。時変係数をもつ三次の系として定式化された。スイッチングが起らないので高速収れんはきわめて容易であった。収れん速度はもともと物理系の実時間に対して速くなっていた。

これに続いて単純二次系をつかって，計算機と計算方法の両者の組合せからくる場合の計算誤差および演算精度と収れん状況との関係が実験的に調べられた。

最後にシミュレーションの結果を総括する。

5.1 ハイブリッド計算法

最適制御発生アルゴリズムをハイブリッド計算向きに直し，これを実施する G. P. C. 部および D. D. A. 部のプログラムの一般形を明示する。

最適制御発生演算処理は制御系の方程式を

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{u}, t) \quad (5 \cdot 1)$$

とすると以下の六つの手順よりなる。

i) 随伴系を初期値ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ で解いて最適制御を $\mathbf{u}(t, \boldsymbol{\eta})$ の形で決定する。 (5 · 2)

ii) $\mathbf{Z}(t, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{X}(t)^{-1} \cdot \mathbf{r}(t) - \int_0^t \mathbf{X}(\sigma)^{-1} \cdot \mathbf{a}(\sigma) d\sigma - \int_0^t \mathbf{X}(\sigma)^{-1} \cdot \mathbf{B}(\sigma) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{u}, \sigma) d\sigma$ (5 · 3)

iii) $f(t, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot [\mathbf{x}(0) - \mathbf{Z}(t, \boldsymbol{\eta})]$ (5 · 4)

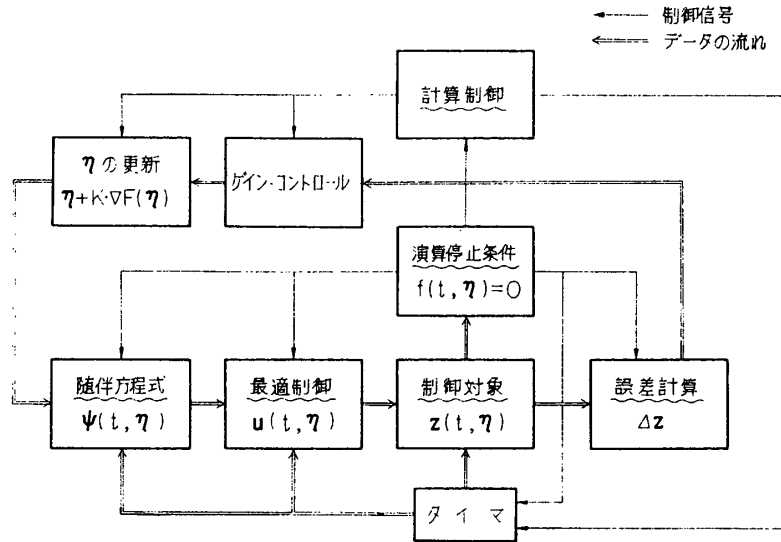
iv) $\Delta \mathbf{E}(t, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{Z}(t, \boldsymbol{\eta})$ (5 · 5)

v) ゲインコントロール (5 · 6)

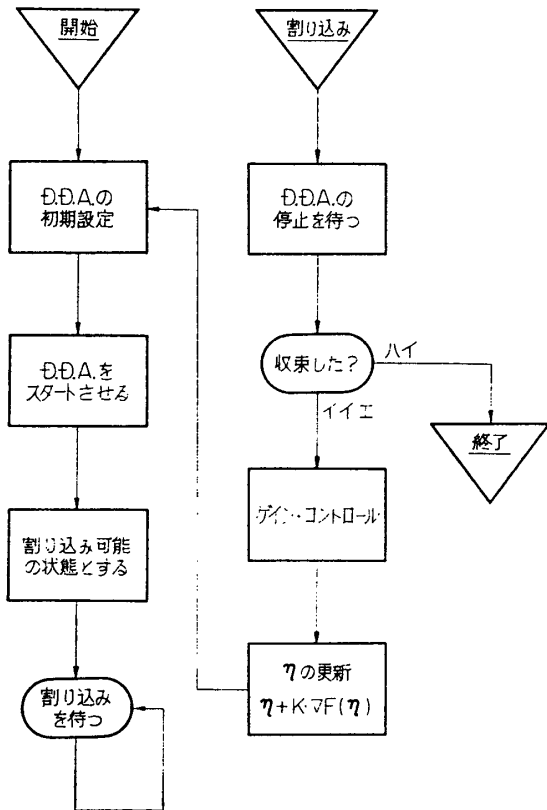
vi) $\boldsymbol{\eta}^T = \boldsymbol{\eta}^i + K \cdot \Delta \mathbf{E}^i(F(\boldsymbol{\eta}^i), \boldsymbol{\eta}^i)$ (5 · 7)

これらの手順または，演算式のうち (5 · 1) および (5 · 3) ~ (5 · 5) は 2.1 節で定義されたものである。(5 · 5) 式の $\Delta \mathbf{E}(t, \boldsymbol{\eta})$ は $t = F(\boldsymbol{\eta})$ のとき境界値における誤差 $\Delta \mathbf{E}(F(\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta})$ を与える。手順 (5 · 2) はポントリャーギンの最大原理により定式化されるもので，問題への依存度が高く統一的に記述することは困難である。 $\boldsymbol{\eta}$ の更新則 (5 · 7) 式は (2 · 11) 式にしたがい改めてある。

手順 (5 · 2) ~ (5 · 5) では連続的に変化するデータを扱うので D. D. A. でその高速性を生かして処理される。(5 · 6) および (5 · 7) は計算の反復時のみに現われる値全体 (Whole Number) の演算を行なうので，G. P. C. で処理される。なお G. P. C. は全体の演算のコントロールも合せて行なう。



第 4 図 ハイブリッド計算ブロック図



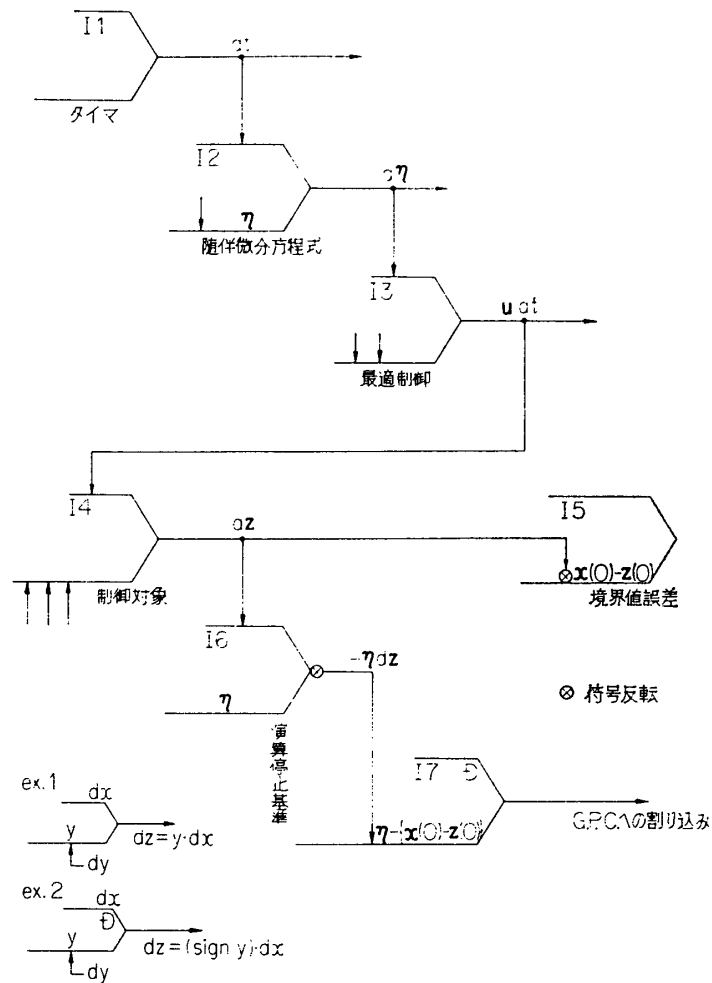
第 5 図 G.P.C. 部のプログラム流れ図

ハイブリッド計算機全体における演算は、第 4 図のブロック図で説明される。まず、 η の値を仮定し D.D.A. をスタートさせる。この η により随伴系の方程式が解かれ、手順 (5・2) により最適制御がつくり出される。これが系のダイナミクスの式 (5・3) に加えられ演算が進行する。 $f(t, \eta) = 0$ のとき、すなわち $t = F(\eta)$ のとき D.D.A. から G.P.C. へ割り込み信号を送り、また D.D.A. 自身をとめる。G.P.C. ではこの割り込み信号を受けて、 ΔE を評価しゲインコントロールを行ない η の値を (5・7) 式により更新し、再度 D.D.A. をスタートさせる。自分自身は割り込み待ちの状態、すなわちダイナミック・ストップの状態に入る。このプロセスが $|\Delta E|$ が十分小さな値をとるまで続行する。

G.P.C. のプログラムの流れ図が第 5 図に示される。これは D.D.A. の演算および制御に必要な初期設定を行なう部分 (開始

→ 割り込み待ち) と、D.D.A. からの割り込み信号を受けて収束状況を調べゲインをコントロールし、随伴系の初期値ベクトルを更新する部分 (割り込み → η の更新) より成る。

D.D.A. のプログラムは、問題に依存するところが多いので概念的に第 6 図に抽象し、第



第 6 図 D. D. A. プログラム概念図

7 図で三次系の場合が示される。D. D. A. ではすべての演算がインCREMENTの形で行なわれる。演算式 (5・3)~(5・5) をインCREMENT演算と初期値との関係に直すと、次のごとくになる。

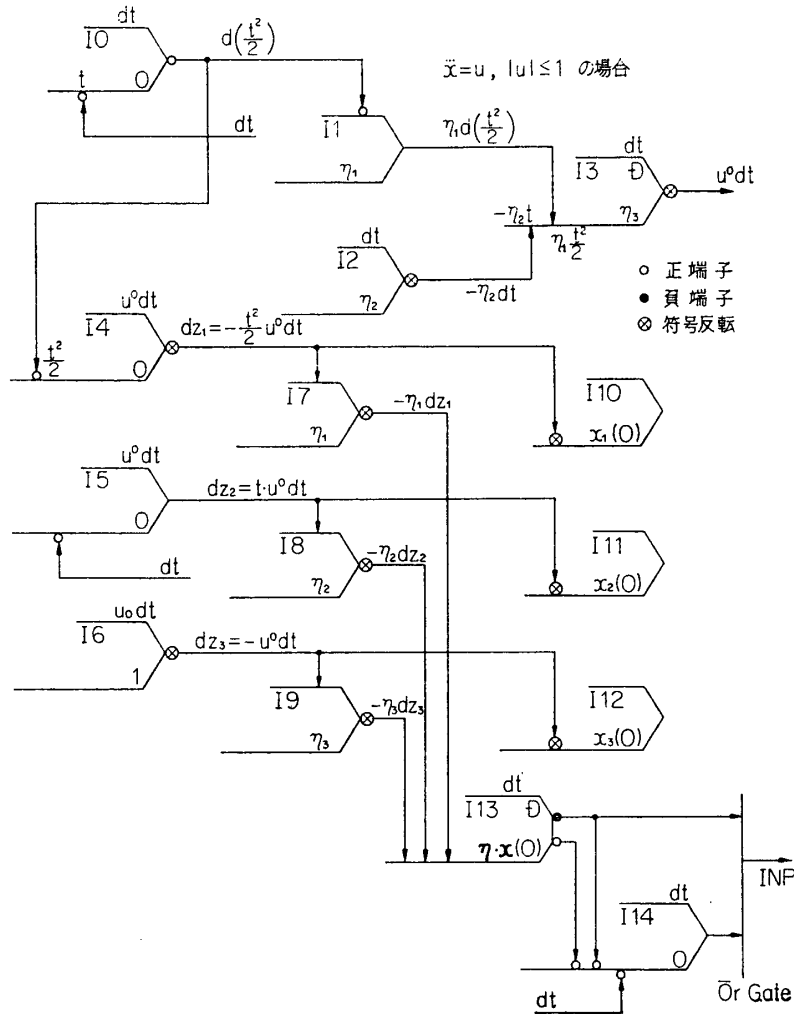
$$dZ = X^{(t)-1} \cdot [\dot{r}^{(t)} - A^{(t)} \cdot r^{(t)} - a^{(t)} - B^{(t)} \cdot C(u, t)] dt; Z^{(0)} = r^{(0)} \quad (5 \cdot 8)$$

$$df = -\eta \cdot dZ; f(0, \eta) = \eta \cdot [x^{(0)} - r^{(0)}] \quad (5 \cdot 9)$$

$$d\Delta E = -dZ; \Delta E(0, \eta) = x^{(0)} - r^{(0)} \quad (5 \cdot 10)$$

第 6 図で (5・8) 式は I4 で、(5・9) 式は I6, I7 で、(5・10) 式は I5 で実施される。必要となる積分器の数は n 次元の場合この演算だけで $4 \times n$ 個である。このほかに (5・8) 式の右辺に含まれる関数値の計算のために更に積分器が必要となる。手順 (5・2) で定まる最適制御の発生には非線型要素、たとえばオンオフスイッチとか飽和とかレゾルバなどが含まれることが多い。これを D. D. A. ではアナログ計算機には不可能な精度で実現するが、これもかなり問題に依存することであり、概括して述べることは不可能である。

$K, F, \Delta E, \eta$ のおのおの第 1 試値 $K^0, F^0, \Delta E^0$ および η^0 はことわりのない限り、 $1/2,$



第 7 図 D. D. A. Mapping 三次系

0, 0, $x(0)$ を用いた。

5.2 二次系への適用

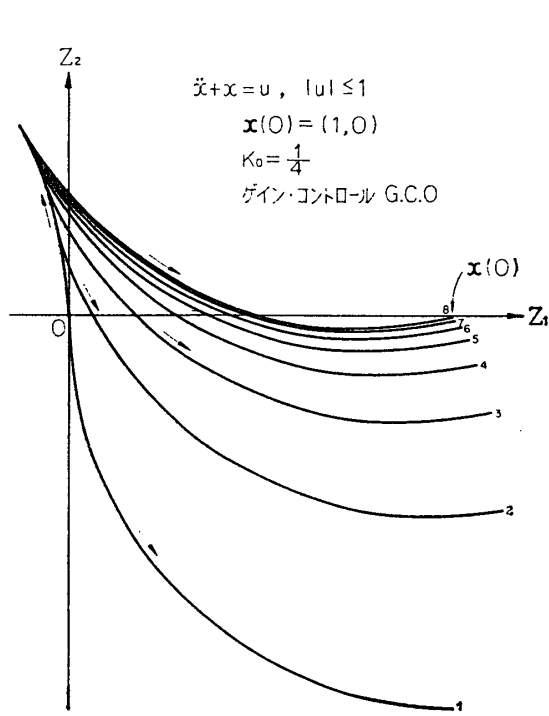
1) 二次の振動系

ハイブリッド計算実施のテストもかねてダンピングのない二次の振動系 ($\dot{x} + x = u$) で収束状況の調査を行なった。この問題は D. W. Bushaw により理論的に解かれた問題である。最大原理および L. W. Neustadt 算法による定式化は、三次系の場合の一部とみなせるので省略するが、取扱った問題の記述は以下のごとくである。

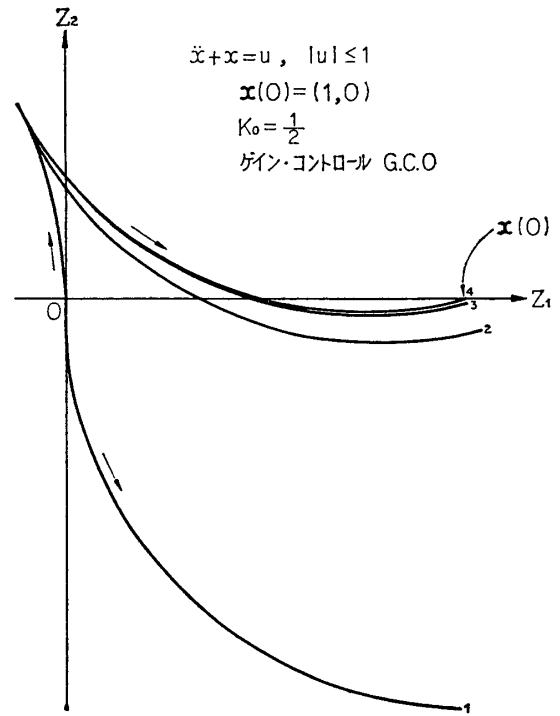
" $|u| \leq 1$ なる条件の基に $x(0) = (1, 0)$ または $(0, 1)$ なる系の状態を, $r(t) \equiv 0$ すなわち静止状態へ最短時間で移す際の収れん過程を調べること。"

ゲイン・コントロールを行なわなくても良好な結果が得られた (G.C.0)。また仮定すべき η の第 1 試値 η^0 にもあまり依存しないことが判明した。

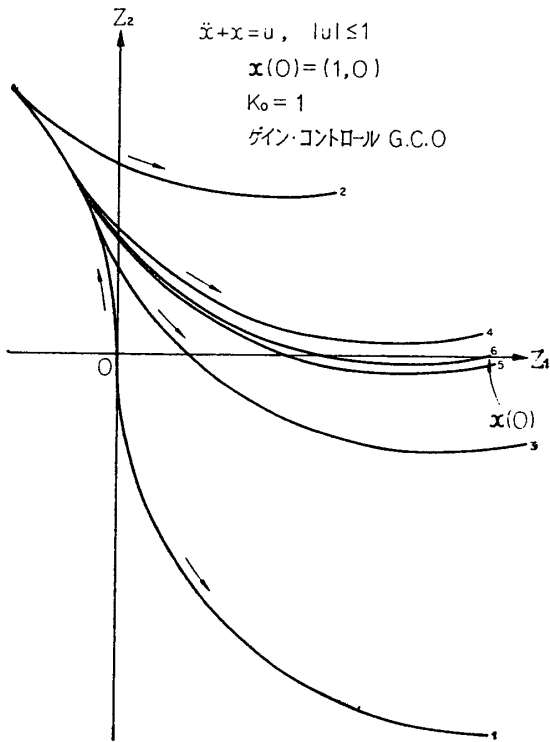
結果の一部を第 8 図～第 13 図に示す。第 8 図～第 12 図までは $Z(t)$ の軌道の終点 $Z(F)$ が点 $x(0)$ へ収れんしていく状況を示す。 $Z(0)$ は原点である。ゲイン K の値を小さくしてお



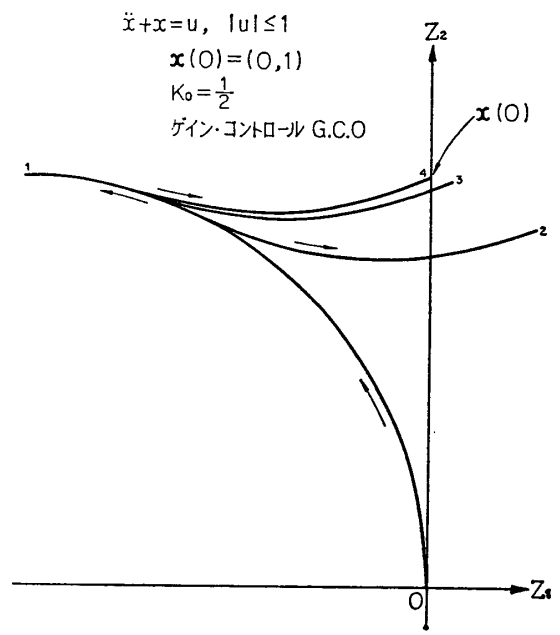
第 8 図 二次の振動系の Z 空間での収れん軌跡



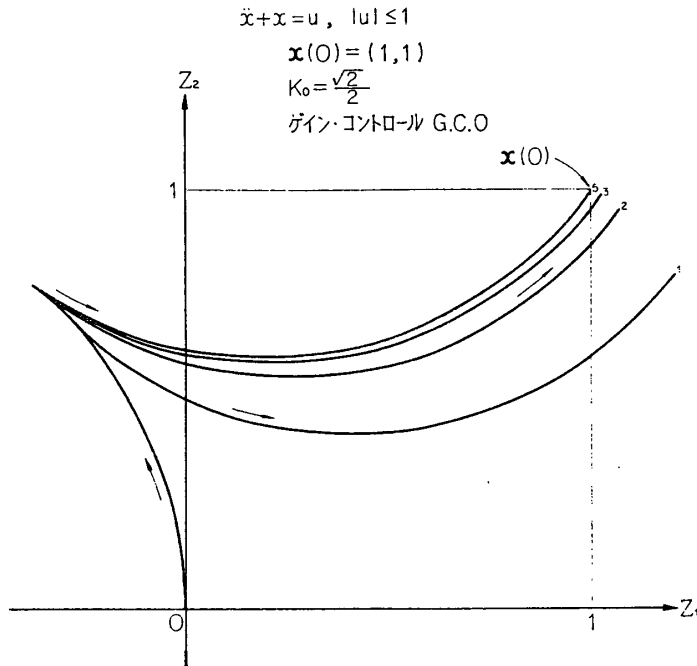
第 9 図 二次の振動系の Z 空間での収れん軌跡



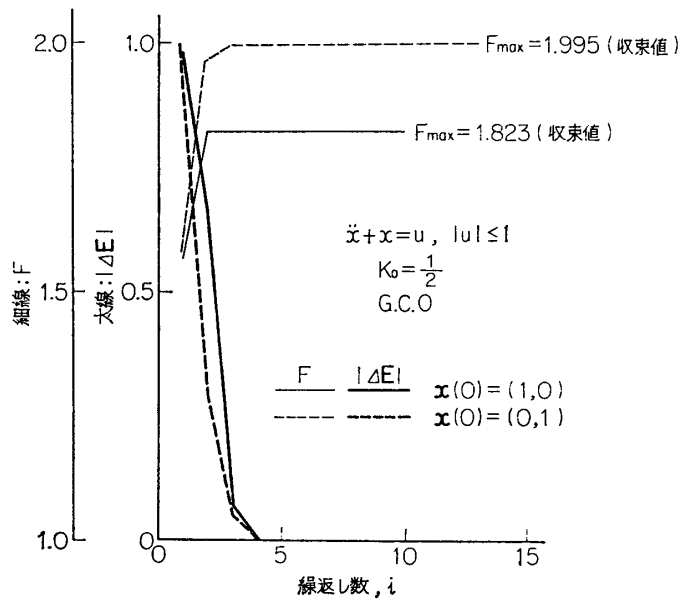
第 10 図 二次の振動系の Z 空間での収れん軌跡



第 11 図 二次の振動系の Z 空間での収れん軌跡



第 12 図 二次の振動系の Z 空間での収れん軌跡



第 13 図 二次の振動系の収束状況

くと、収れんに要する繰返し数は増すが収束は単調に行なわなる (第 8 図)。 K の値を大きくすると振動を伴う (第 9, 10 図)。 以上の場合には $\eta^0 = \mathbf{x}(0)$ として試みたものであるが、 η^0 の値をほかの値 (ただし、 $|\eta^0| = 1$) としても収れん状況には大きな変化をもたらさなかった。 第 9 図 ($\mathbf{x}(0) = (1, 0)$) と第 11 図 ($\mathbf{x}(0) = (0, 1)$) では $K = 1/2$, 第 12 図 ($\mathbf{x}(0) = (1, 1)$) では $K = \sqrt{2}/2$ である。 最後の K の値は計算方法を実際に機械化する際に単純化した

結果である。

第 13 図は最適値 F の最大化と境界値に残る誤差 $|\Delta E_{(F)}|$ が反復ごとに変化していく様子を示す。

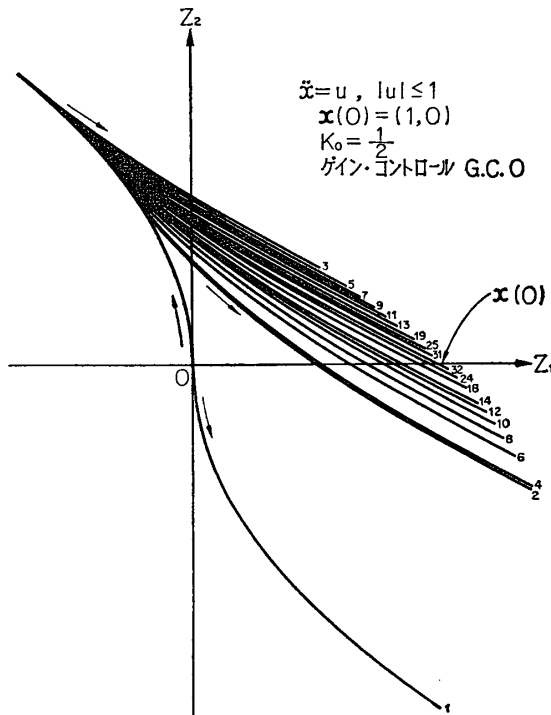
2) 単純二次系

ゲインを一定にして (G.C.0) 収束が困難になる場合の簡単な例として、単純二次系 ($\ddot{x}=u$) の収束状況を示す。この場合もゲインを小さくしていくと、反復数の増加の代償として単調に収束するが、ゲインを大きくして収束の速さを高めようとする、大きな振動が発生して境界値の収束が困難な結果となった。

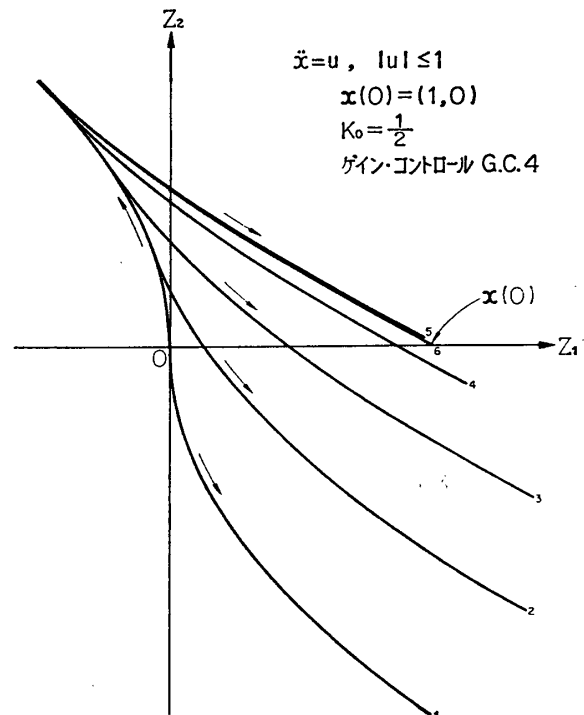
ここで収束を加速するためにゲイン・コントロールが導入された。原理的に二つのアプローチがある。最適値 F を目安にするものと境界値の誤差 $\Delta E_{(F)}$ の方向余弦によるものである。この二つを併用する方式も試みた。演算プロセスの定式化は、やはり三次系の場合の一部とみなし、取り扱った問題の記述は二次の振動系の場合と同一形式になるのでそれぞれ省略する。

結果の一部を第 14 図から第 25 図に示す。第 14 図～第 23 図では、 $Z_{(t)}$ の軌道の終点 $Z_{(F)}$ が点 $x_{(0)}$ へ収束していく状況を示す。 $Z_{(0)}$ は原点である。

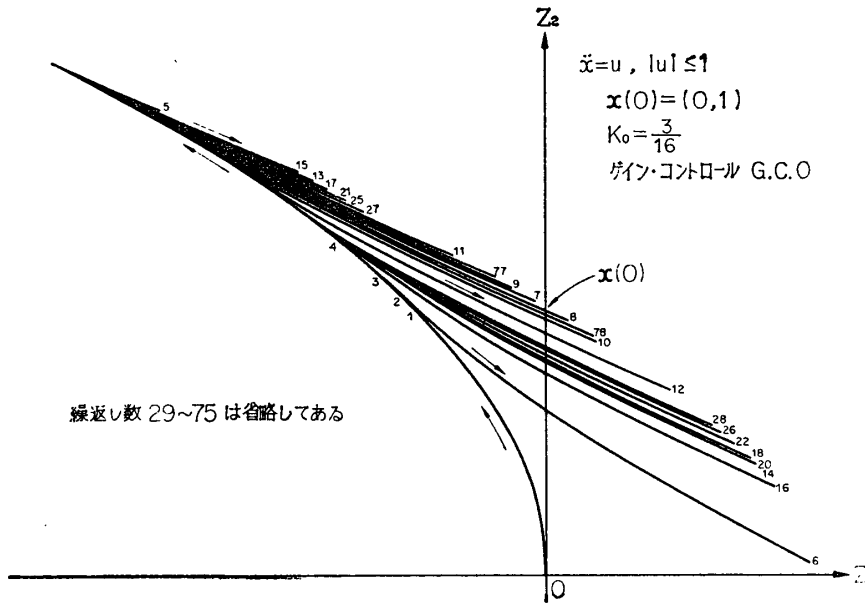
まず $x_{(0)}=(1, 0)$, $K^0=1/2$ の一定ゲインとして試みた (G.C.0)。第 14 図に示すとおり収束は困難である。 $K^0=1/4$ で試みたら (G.C.0), 良好な結果を得た (第 15 図)。 $K^0=1$ の場合はオーバーフローが起った。 $x_{(0)}=(0, 1)$ で一定ゲインとして K の値のいろいろの場合を試みたが、収束には満足のものが見られなかった。 $K^0=3/16$ の場合を第 16 図に示す。初期値により収れん状況が異なるようである。



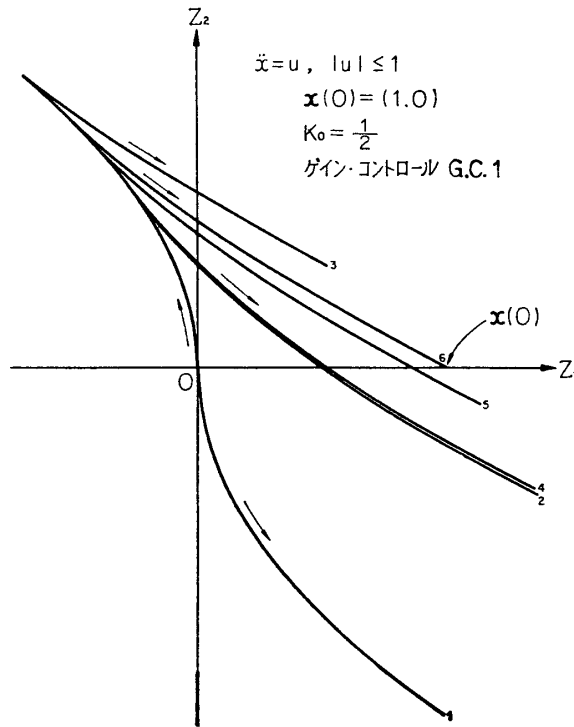
第 14 図 単純二次形の Z 空間での収れん軌跡



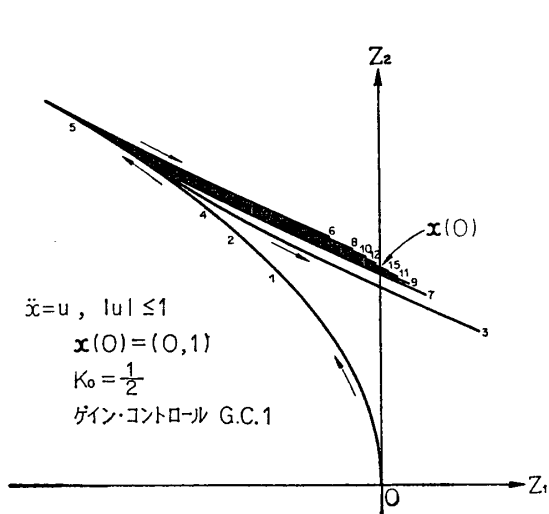
第 15 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡



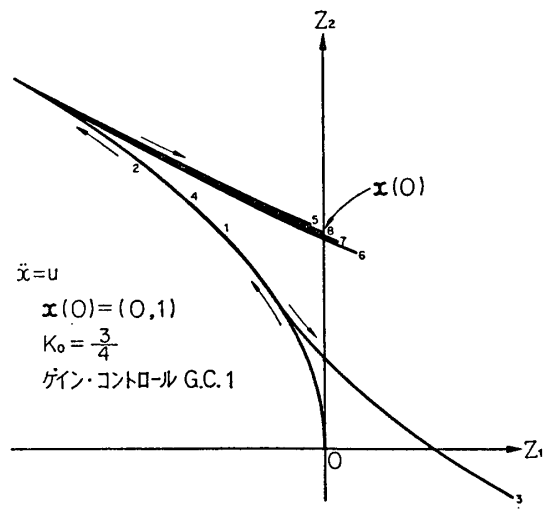
第 16 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡



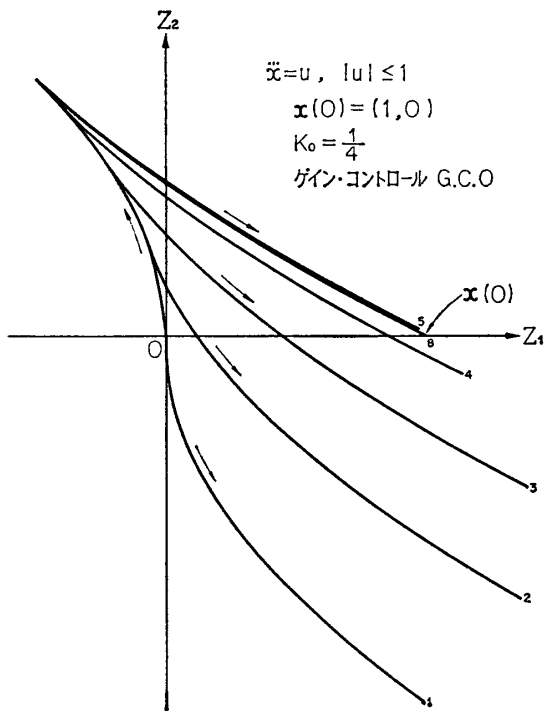
第 17 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡



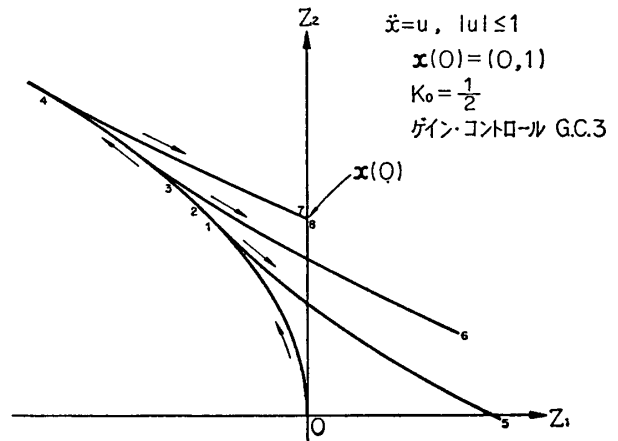
第 18 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡



第 19 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡

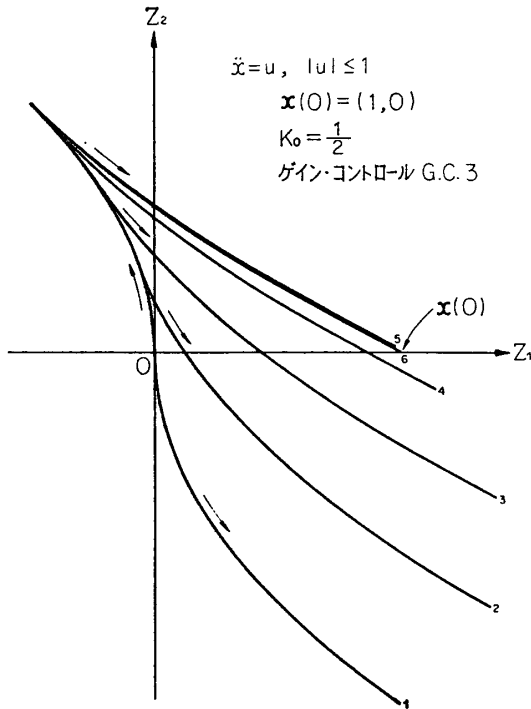


第 20 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡

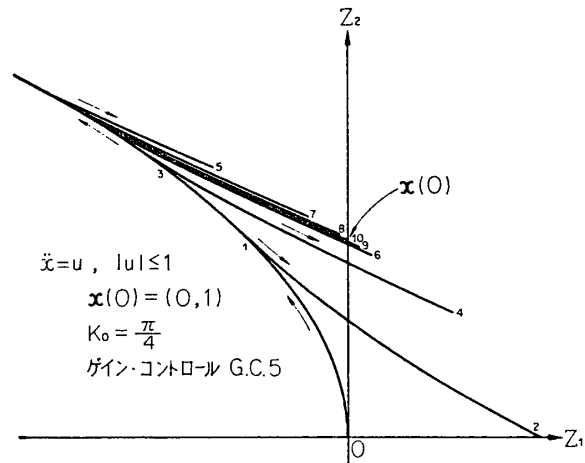


第 21 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡

第 17 図では $x(0) = (1, 0)$ に対してゲイン・コントロール G.C.1 を用いた。 $K^0 = 1/2$ である。 $K^0 = 1$ とするとオーバーフローが起った。 $x(0) = (0, 1)$ に対して G.C.1 の方式で $K^0 = 1/2$ の値で試みたが (第 18 図), 結果は $x(0) = (1, 0)$ の場合に比して好ましくない。 $K^0 = 3/4$ で始めたら満足すべき結果となった (第 19 図)。 $K^0 = 1$ とするとやはりオーバーフローが起った。 G.C.1 の代りに G.C.2 を用いても結果にみるべき影響はなかった。



第 22 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡



第 23 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡

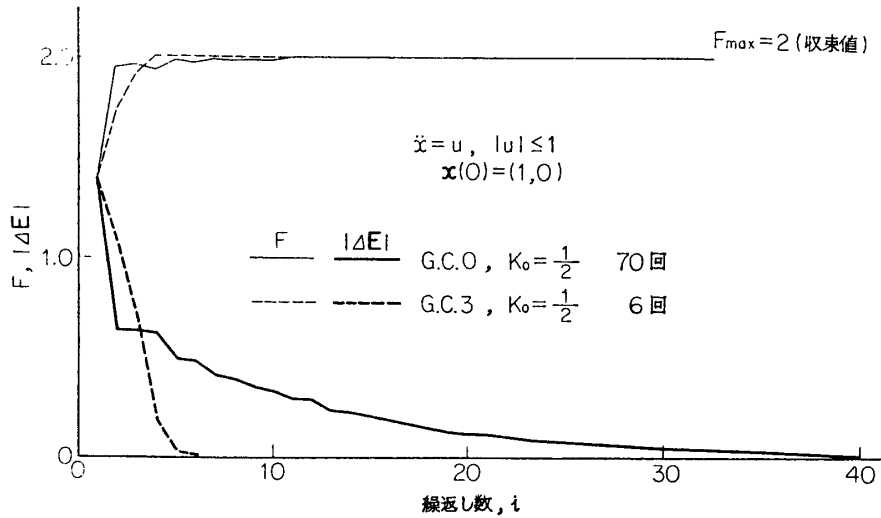
$x_{(0)}$ の値と K° の値に収束状況が依存するのを避けたいので、次いでゲイン・コントロール G.C.3 を考案した。 $x_{(0)} = (1, 0)$ または $(0, 1)$ の場合をそれぞれ第 20 図と第 21 図に示す。いずれも K° の値は $1/2$ である。良好な結果である。 $x_{(0)} = (1, 0)$ でゲイン・コントロール G.C.3 を用い、 $K^\circ = 1/2$ とした場合、 η° の値を $x_{(0)}$ 以外の値、たとえば $(1/64, 1)$ とか、 $(1, -1)$ とかを与えて試みたが特記すべき事柄はない。

G.C.3 の第 1 条件をとりさった G.C.4 で試みたが収束状況には影響がなかった。 $x_{(0)} = (1, 0)$ 、 $K^\circ = 1/2$ のものを第 22 図に示す。

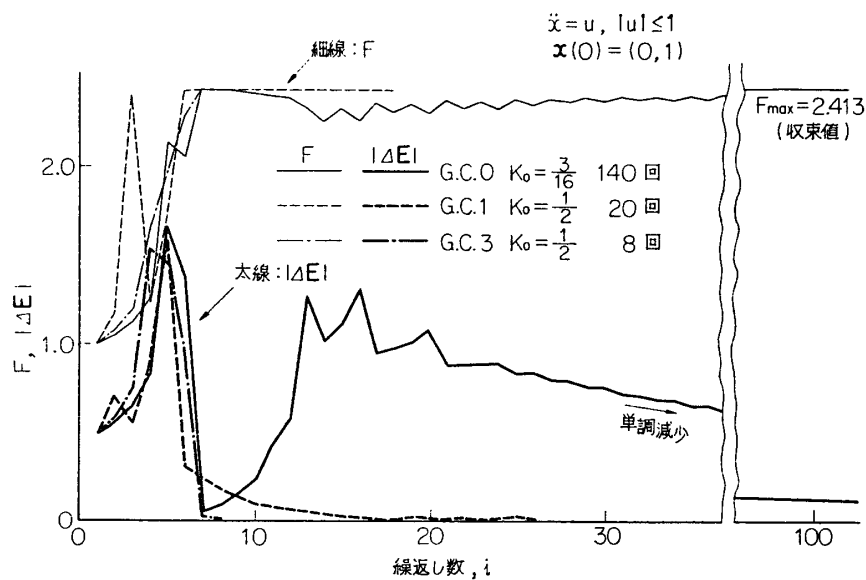
G.C.5 は L. W. Neustadt の算法の幾何学的解釈に直接基づくゲイン・コントロール方式である。 η の更新則に現われるベクトル $\nabla F(\eta)$ は、その方向が最も意味のある量である。 η の更新則自体を変更して、 $\nabla F(\eta)$ の示す方向へあらかじめ定めた角度 K ラジアンだけベクトル η を回転させ、新しい η の値を決定しようという方式である。求めるべき η が $x_{(0)}$ を通る可到達集合の接平面の法線であることおよび可到達集合が凸であることから $K^\circ = \pi/4$ が最も適当であろう。二次元の場合、問題は半径 1 の円周上のバイナリー探索 (Binary Search) となり、一次元の問題となる。 $x_{(0)} = (1, 0)$ の場合は 2 回で収れんしたが、これは例外的なことである。 $x_{(0)} = (0, 1)$ の場合を第 23 図に示す。このゲイン・コントロール方式の三次元以上の問題への適用は計算機の容量制限から困難であった。

第 24 図と第 25 図は最適値 F_{\max} および誤差 $|\Delta E_{(n)}|$ の繰返し数に対する変化を示す。 F の値の収れんは速い。

この問題を用いて計算機と計算方法とから総合して発生する計算誤差が実験的に調査されたが、これは 5.6 で報告される。



第 24 図 単純二次系の収束状況



第 25 図

5.3 三次系への適用

単純三次系

この単純三次系 ($\dot{x}=u$) の特徴は、三次元以上の問題で唯一の解析解が知られていることおよび多次元の問題が一般的にもつ収れんの困難さを示すことである。この収れんの困難さは二次元の問題には現われない。二次元の問題では、初めに仮定した η と求める最適制御をつくり出す η とが同一平面にあってゲイン K を選ぶならば、一度の試行で後者の初期値ベクトル η を定めることができるからである。二次系が本質的には一次元の探索であるということである。この問題をアナログ・ハイブリッドで実施した結果が若干報告されているが、収れんが非常に困難であることが指摘されている。

問題の記述は次のごとくなる。

" $|u| \leq 1$ なる条件のもとに $\ddot{x}=u$ なる方程式で支配される系を $\mathbf{x}(0)=(1, 0, 0)$ から最短時間で原点 $\mathbf{r}(0) \equiv 0$ へうつす際の収れん過程はどうなるか."

これを最適制御発生のアルゴリズムとして、ハイブリッド計算向きに定式化すると次のごとくなる。

$$dZ_1 = -\frac{t^2}{2} \cdot u \cdot dt; \quad Z_{1(0)} = 0 \quad (5 \cdot 11)$$

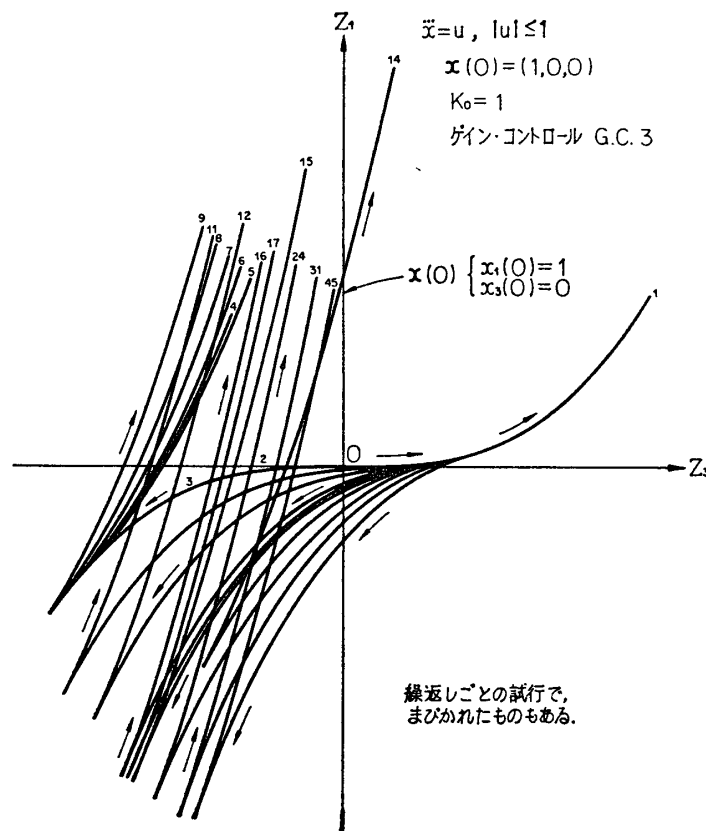
$$dZ_2 = t \cdot u \cdot dt \quad ; \quad Z_{2(0)} = 0 \quad (5 \cdot 12)$$

$$dZ_3 = -u \cdot dt \quad ; \quad Z_{3(0)} = 0 \quad (5 \cdot 13)$$

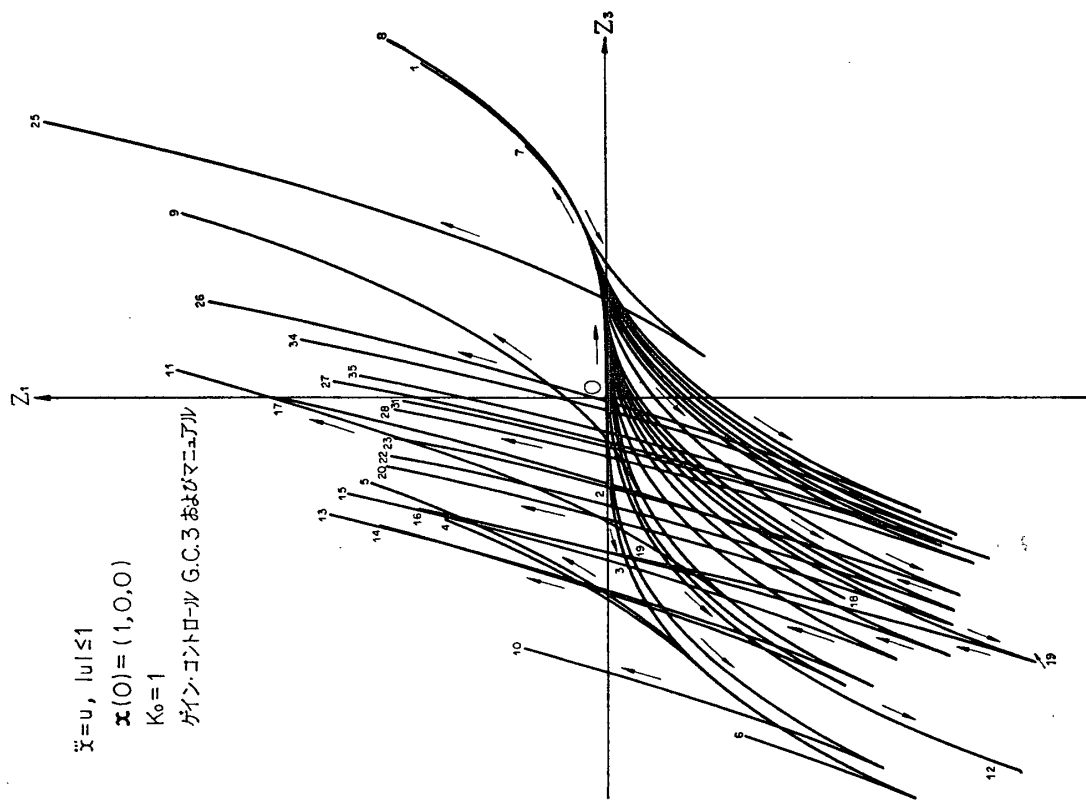
$$u = \text{Sgn}\left(-\eta_3 + \eta_2 t - \frac{\eta_1}{2} \cdot t^2\right) \quad (5 \cdot 14)$$

(η_1, η_2, η_3) が決定さるべき随伴系の初期値である。これら演算式を実現する D. D. A. のプログラムは第 7 図に与えられている。 $|u|=1$ なので u としては不連続に変化するが、 $u dt$ を系内でのデータとして扱い、不連続量の発生をさけることができる。

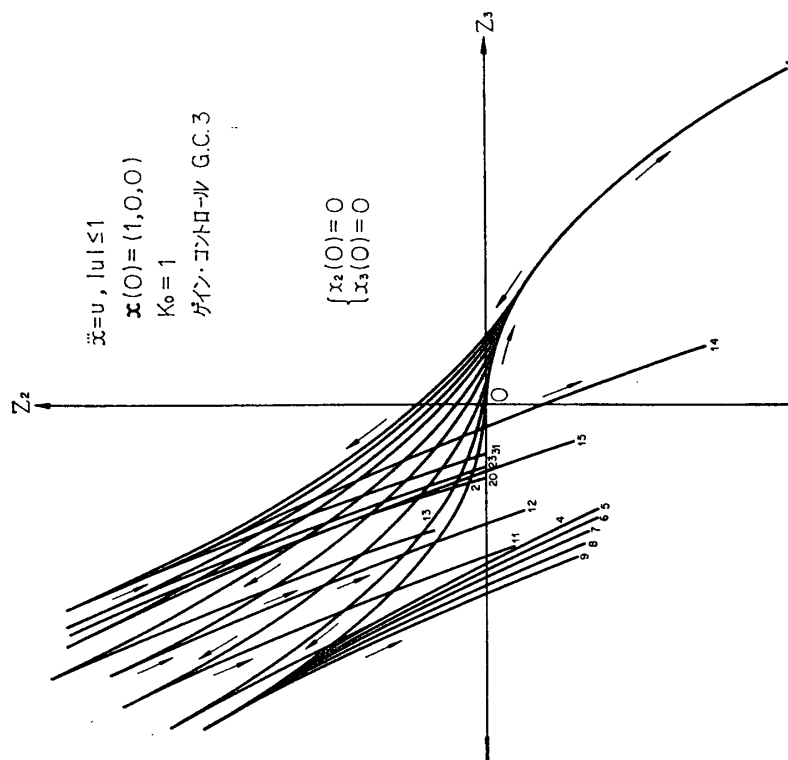
ゲイン・コントロール G. C. 3 を用い $K^0=1$ として計算を実施した。結果が第 25 図と第 26 図に示される。収れんはかなりの困難さを示す。繰り返し数の 5~9 および 17~ ではそれぞれ $Z(t)$ がある直線上を単調にわずかずつ移動していくのが観察される。これはゲイ



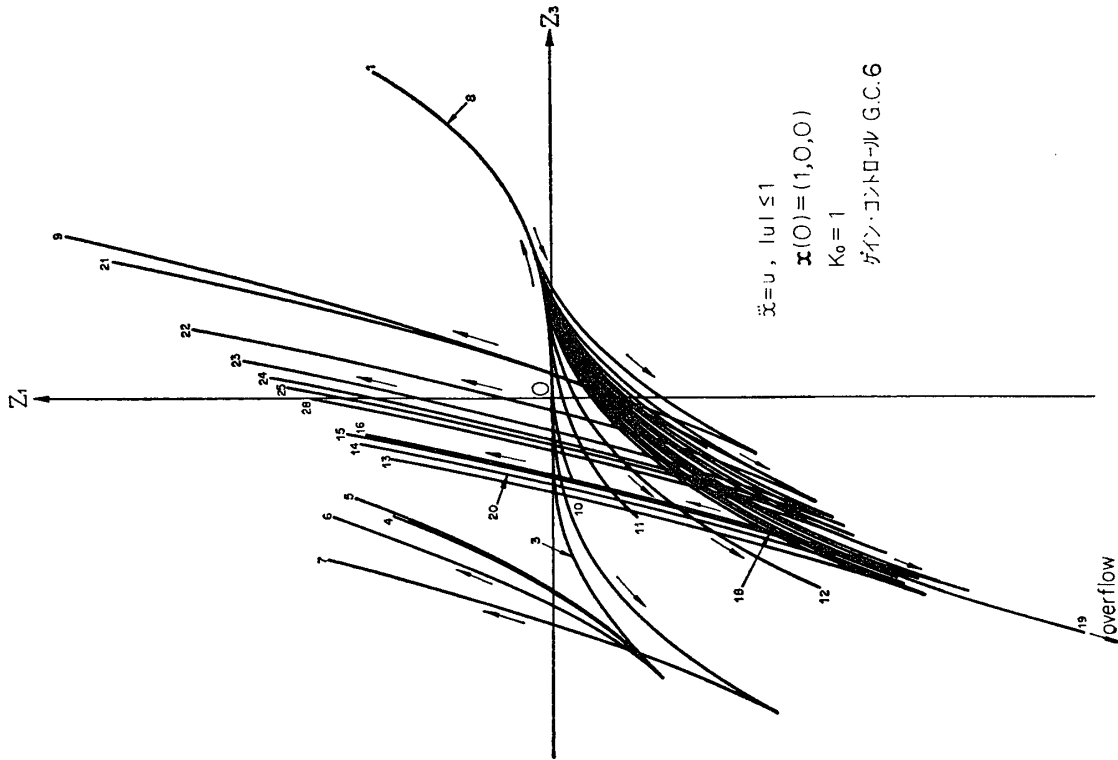
第 26 図 単純二次系の Z 空間での収れん軌跡 (Z_1 - Z_3 面)



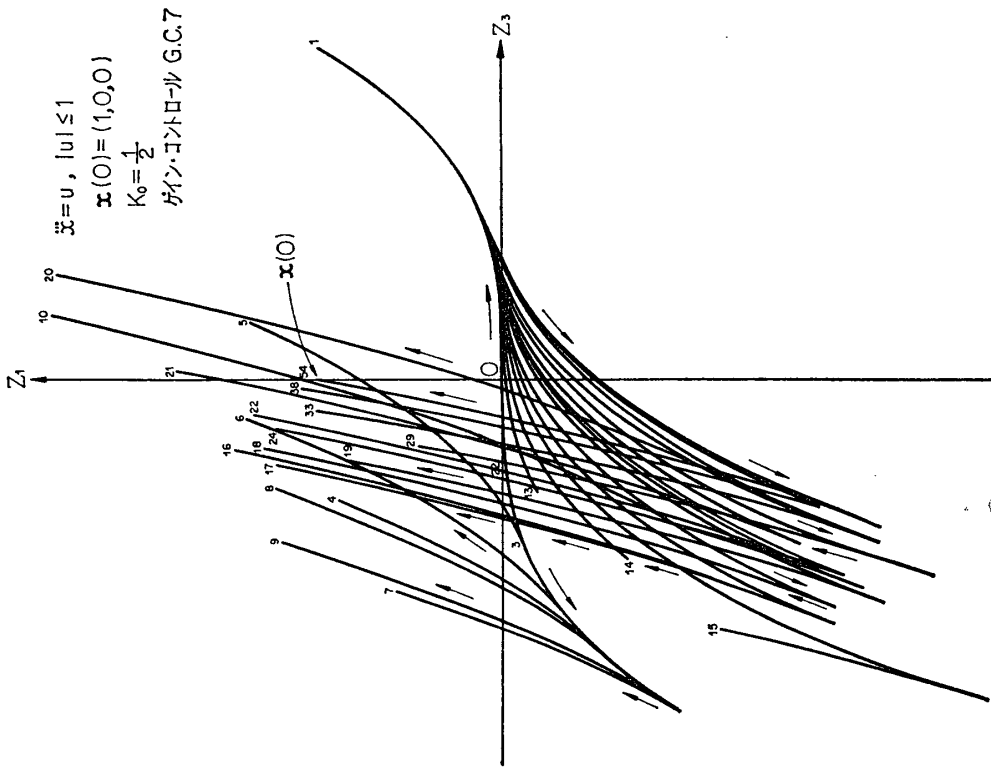
第 27 図 単純三次系の Z 空間での収れん軌跡 (Z_1 - Z_2 - Z_3 面)



第 28 図 単純三次系の Z 空間での収れん軌跡



第 29 図 単純三次系の Z 空間での収れん軌跡



第 30 図 単純三次系の Z 空間での収れん軌跡

ン K の値が小さくなり過ぎてしまったためと考えられる。ゲイン・コントロール G.C. 3 には、ゲイン K を増大させるプロセスは含まれていない。そこでこの付近にきたときにゲインをマニュアルに高めてみた。この結果が第 27 図と第 28 図である。全体として収れんを加速したように思われるので、改めてゲイン・コントロール G.C. 6 を設定した。この実施結果が第 29 図である。第 27 図の結果ほど収れん特性はよくない。第 30 図はゲイン・コントロール G.C. 7 を用いた結果である。この G.C. 7 は本来ロケット運動の場合のために開発されたものである。このゲイン・コントロールによる収れん特性は G.C. 6 を用いた第 28 図よりは良好であるが、G.C. 3 を用いた第 25 図とほぼ同様であって、オンラインで用いるには収束に必要な反復数が多いようである。単に最適制御を決定するということでは十分であろう。

報告されているアナログ・ハイブリッドによる例では、問題が本来の状態空間 (x 空間) で扱われており、これとの境界値誤差の比較は適切ではないが、反復数 60~70 で境界値の誤差が初期値の絶対値 $|x_{(0)}|$ の 0.1 になっているようである。一般に制御系が安定であるとする、 z 空間の量に e^{-At} (A は正の定数) を乗じたものが、状態空間の量と近似されるので z 空間での境界値誤差の方がきびしい扱いを受ける。したがって x 空間 (現実の空間) での境界値の誤差は、 z 空間のそれよりも小さくなる。

5.4 エネルギーに制限のある単純二次系

さきの 2 例では解析的に解ける問題を扱ってきたが、ここでは解析的に解くことの困難な、あるいは解くことができない例としてこの問題を実施する。この種の問題では使用可能のエネルギーが、エネルギーに制限のない問題で要するよりも大きいとこの制限条件は無意味となる。そこで使用できるエネルギーの最大量を、エネルギー制限のない場合に必要となる量の $1/2$ とした。

問題の記述は次のごとくになる。

" $|u| \leq 1$ および $\int_0^F u^2 dt \leq 1$ なる条件のもとで $\ddot{x} = u$ なる方程式で支配される系を $x_{(0)} = (1, 0)$ から最短時間で原点 $x_{(F)} = (0, 0)$ へ移すこと。"

エネルギーに制限のない場合が 5.2 で求めたものであり、対応する問題の解は $F=2$, $\int_0^2 u^2 dt = 2$ である。この問題は対象となる制御系が二次元ではあるが、取り扱いの際には三次元の系として定式化された。また、今までの問題が系の最終状態を状態空間の原点へ持っていく類の問題であったのに対して、原点以外の一点へうつすという特徴もある。

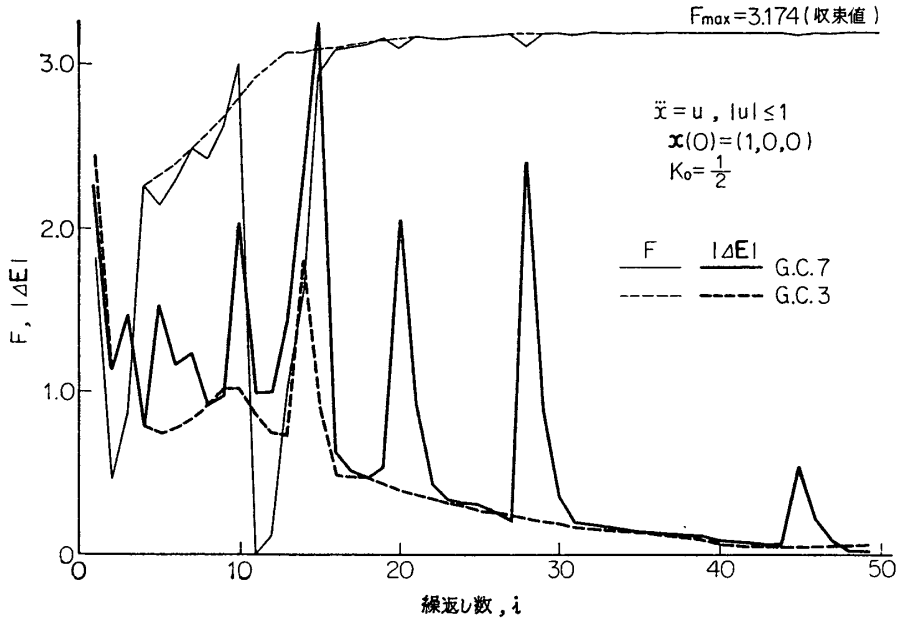
エネルギー制限を第 3 の状態量を導入し三次元の問題として処理する。

$$x_{3(t)} = \int_0^t u^2 dt \quad (5 \cdot 15)$$

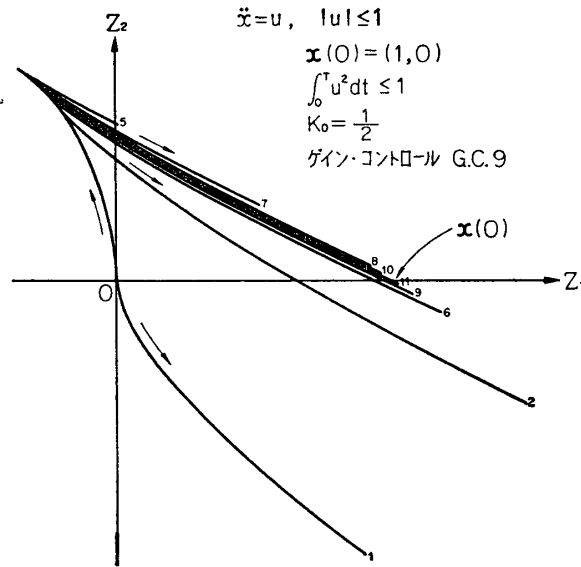
とすると $x_{3(0)} = 0$ であり、また問題の物理的解釈とか可到達集合の概念から $x_{3(F)} = 1$ でなければならない。したがってこの系の終端は原点ではなくなる。

ハイブリッド計算への定式化は以下のごとくになる。

$$dZ_1 = t u dt ; \quad Z_{1(0)} = 0 \quad (5 \cdot 16)$$



第 31 図 単純三次系の収れん状況



第 32 図 エネルギーに制限のある単純二次系の Z 空間での収れん軌跡

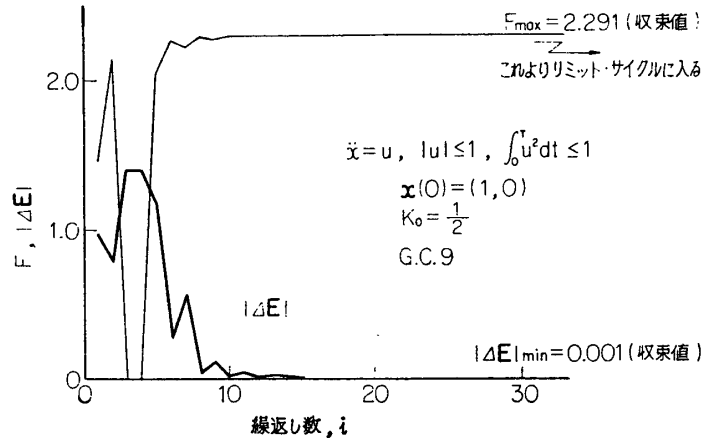
$$dZ_2 = -u dt; \quad Z_{2(0)} = 0 \tag{5.17}$$

$$dZ_3 = -u^2 dt; \quad Z_{3(0)} = 1 \tag{5.18}$$

$$u(t, \eta) = \frac{\eta_1}{2\eta_3} t - \frac{\eta_2}{2\eta_3}; \quad |u| \leq 1 \tag{5.19}$$

η_1, η_2, η_3 は反復法により決定されていく随伴系の初期値である。

第 32 図に Z 空間で $Z(F)$ が $x(0)$ へ収れんしていく状況を示す。ゲイン・コントロール



第 33 図

は G.C. 9 が用いられ, $K_0=1/2$ である. 第 33 図では最適値 F_{\max} と境界値の誤差 $|\Delta E|$ の反復数による変化を示す.

収れんにより次の各値が得られた.

$$F_{\max}=2.291$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (.94254, 1.07983, .455810)$$

5.5 ロケット運動

時変係数をもつ三次系

人工衛星を軌道に乗せる最終段階とか, 人工衛星の会合の制御などの場合から抽象した実際の物理系に近い問題である. 数学的な定式化での特徴は, 系の方程式が時変係数で, かつ定数項を含んでいることである. このような場合は L. W. Neustadt の算法以外では提案されているどの方法も適用が困難である. またこの例題はアナログ・ハイブリッドでは収れんが失敗したと報告された例に近いものである. アナログ・ハイブリッドで失敗した原因は, 演算精度にあると推定されるが, デジタル・ハイブリッドでは完全にカバーしているようであった. アナログ・ハイブリッドで必要となった平方根演算, これは演算精度を半分近くにおとすが, これをデジタル・ハイブリッドでは D. D. A. の特殊機能をつかって避けることができ, 収れんをもたらしたものと考えられる.

問題の記述は以下のごとくである.

"次の連立方程式で規定される系を最短時間で点 $\mathbf{x}_{(0)}=(-1, -1, 1)$ から原点 $\mathbf{x}_{(F)}=(0, 0, 0)$ へ移すときの収れん過程を求め, 最適制御 $\alpha(t)$, 最短時間 F_{\max} および随伴系の初期値ベクトル $\boldsymbol{\eta}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ を定めよ."

$$\dot{x}_1 = A \cos \alpha \quad (5 \cdot 20)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (5 \cdot 21)$$

$$\dot{x}_3 = A \sin \alpha - B \quad (5 \cdot 22)$$

$$\text{ただし } A=0.8/(1-0.1t), B=0.4$$

最適制御は最大原理から次の形のものが得られる.

$$\tan \alpha_{opt(t)} = \frac{\eta_3 - \eta_2 t}{2\eta_1} \quad (5 \cdot 23)$$

$\tan \alpha_{opt(t)}$ から $\sin \alpha_{opt(t)}$ および $\cos \alpha_{opt(t)}$ をつくるのにアナログシステムでは Polar Resolution Technique がつかわれ、平方根演算が現われたが、D. D. A. ではこのような精度の落ちる定式化はさけた。詳細は付録で示す。

決定された $\alpha(t)$ は3種に分けて示される。第1のものはこの問題の定式化どおりのもので、 $A=0.8/(1-0.1t)$ 、 $B=0.4$ である。第2のものは $B=0$ とした場合で、第3の場合ではさらに $A=0.8$ としたものである。ゲイン・コントロールとして G. C. 8 を使い、第2の場合に対して収れん状況を調べた。ゲインの第1試値 K^0 を $1/2$ としたところ、この値は反復ごとに変化することなく、収束も単調であるが緩慢である。ゲイン K を増加させるプロセスが必要であると考えられたので、ゲイン・コントロール G. C. 9 を開発し、以後これを用いた。

第34図～第36図に $\alpha(t)$ と時間 t との関係で収束状況が示される。最適値 F_{max} および境界値の誤差 $|\Delta E|$ の反復数に対する収束過程が第37図に示される。

第34図は第1の場合に対するもので、図上で16回目くらいから収束状態に入った。36回目で $|\Delta E_{(F)}|=0$ となった。20回台で $|\Delta E_{(F)}| \leq 10^{-3}$ となっている。数値による収れん過程を第1表に示す。収束値は以下のごとくである。

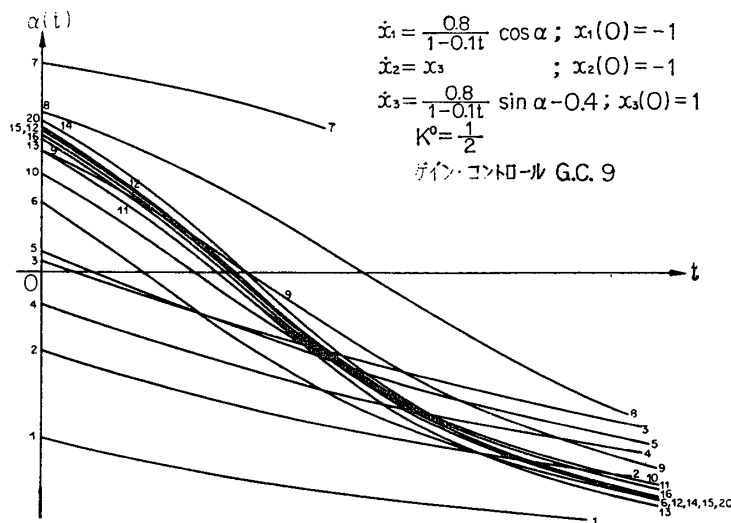
$$F_{max} = 1.4674$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (-.903320, -1.64990, -7.41210)$$

$$\alpha_{(0)} = .687072$$

この場合の z 空間での軌道が第38図～第41図に示される。

第35図は第2の場合に対するものであって、図上で15回目くらいから収束状態に入った。67回目で $|\Delta E_{(F)}|=0$ となった。30回台で $|\Delta E_{(F)}| \leq 10^{-3}$ となっている。収束値は以下のごとくである。



第34図 ロケットの推力角計画 $\alpha(t)$ の収れん状況

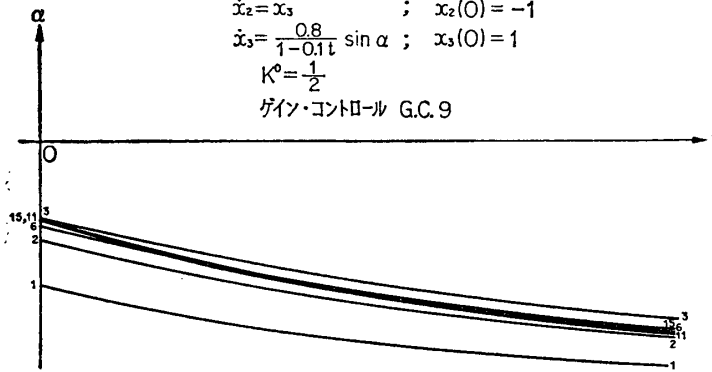
$$\dot{x}_1 = \frac{0.8}{1-0.1t} \cos \alpha ; x_1(0) = -1$$

$$\dot{x}_2 = x_3 ; x_2(0) = -1$$

$$\dot{x}_3 = \frac{0.8}{1-0.1t} \sin \alpha ; x_3(0) = 1$$

$$K^0 = \frac{1}{2}$$

ゲイン・コントロール G.C.9



第 35 図 ロケットの推力角計画 $\alpha(t)$ の収れん状況

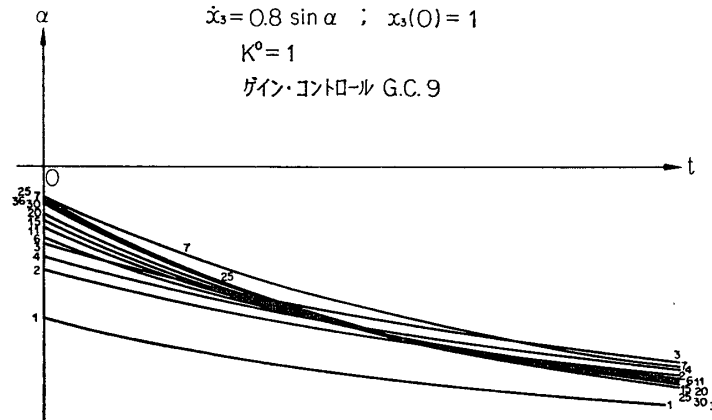
$$\dot{x}_1 = 0.8 \cos \alpha ; x_1(0) = -1$$

$$\dot{x}_2 = x_3 ; x_2(0) = -1$$

$$\dot{x}_3 = 0.8 \sin \alpha ; x_3(0) = 1$$

$$K^0 = 1$$

ゲイン・コントロール G.C.9



第 36 図 ロケットの推力角計画 $\alpha(t)$ の収れん状況

Rocket Steer

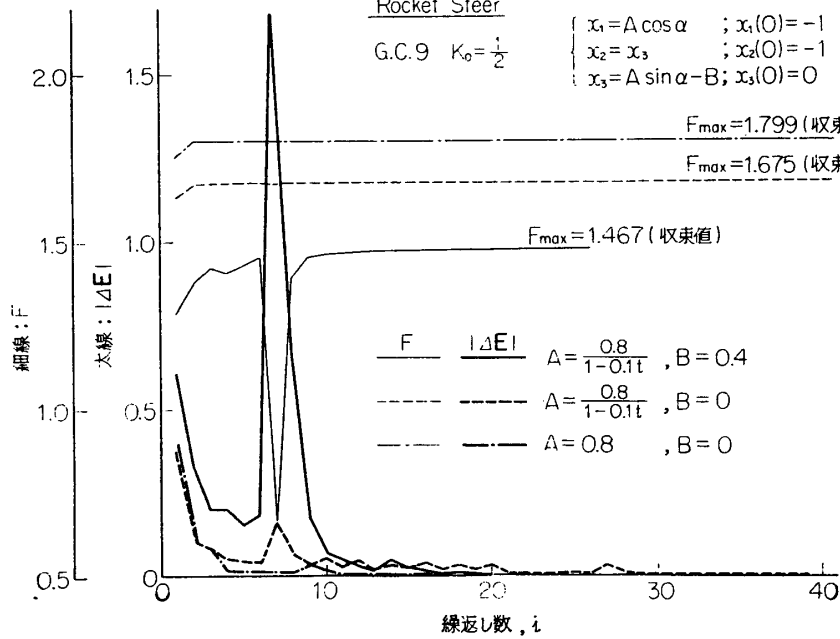
G.C.9 $K_0 = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \alpha ; x_1(0) = -1 \\ x_2 = x_3 ; x_2(0) = -1 \\ x_3 = A \sin \alpha - B ; x_3(0) = 0 \end{cases}$$

$F_{max} = 1.799$ (収束値)

$F_{max} = 1.675$ (収束値)

$F_{max} = 1.467$ (収束値)

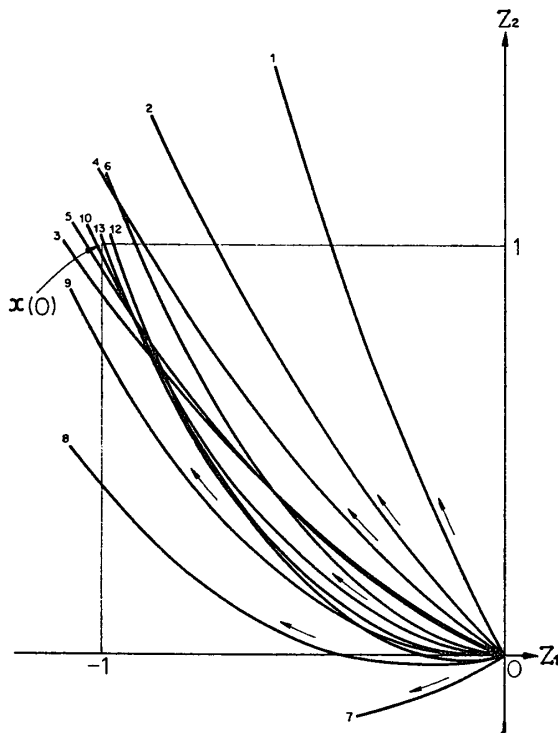


第 37 図

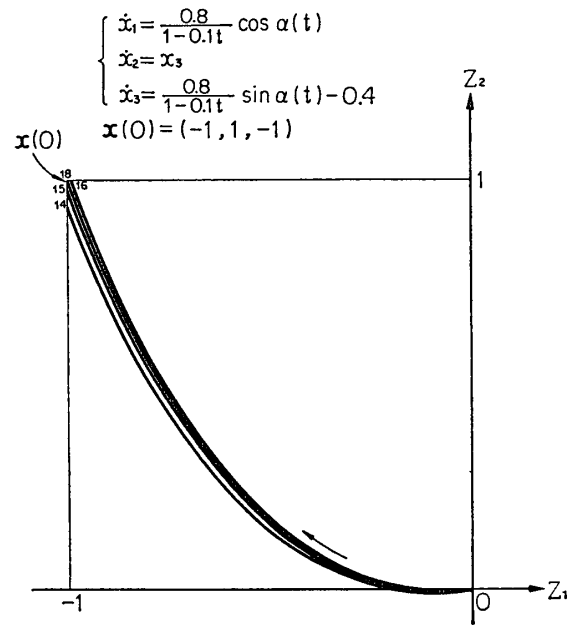
第 1 表 ロケット運動の各値の収束状況

反復数	K	F_{\max}	$ \Delta E $	η_1	η_2	η_3	$\alpha(0)$
1	1/2	1.2897	.6110	-1.0000	-1.0000	1.0000	-.7853
2	1	1.3813	.3385	-1.4167	-1.0303	.5542	-.3729
3	2	1.4212	.2043	-1.6414	-1.0635	-.0835	.0507
4	1	1.4115	.2007	-1.5291	-1.0468	.2354	-.1526
5	2	1.4339	.1550	-1.4906	-1.1787	-1.4233	.0947
6	4	1.4556	.1805	-1.1284	-1.6142	-3.3840	.3296
7	8	0.6730	1.6744	-1.1900	-1.2354	-1.7786	.9812
8	4	1.3943	.6710	-1.1592	-1.4248	-1.0823	.7510
9	2	1.4596	.1785	-1.1438	-1.5195	-.7341	.5707
10	1	1.4628	.0710	-1.1362	-1.5669	-.5601	.4579
11	2	1.4656	.0437	-1.0400	-1.6011	-.6587	.5646
12	4	1.4671	.0377	-.8926	-1.6733	-.7194	.6783
13	2	1.4670	.0268	-.9663	-1.6372	-.6890	.6193
14	4	1.4665	.0543	-.9121	-1.6294	-.7812	.7083
15	2	1.4670	.0213	-.9392	-1.6333	-.7351	.6641
16	1	1.4670	.0165	-.9248	-1.6460	-.7261	.6419
17	2	1.4675	.0085	-.9023	-1.6460	-.7515	.6656
18	4	1.4671	.0118	-.9136	-1.6460	-.7388	.6944
19	2	1.4670	.0056	-.9192	-1.6460	-.7324	.6801
20	1	1.4667	.0054	-.9102	-1.6508	-.7356	.6728
21	2	1.4670	.0034	-.9102	-1.6509	-.7356	.6797
22	1	1.4671	.0041	-.9148	-1.6484	-.7341	.6763
23	2	1.4673	.0021	-.9089	-1.6494	-.7397	.6832
24	1	1.4673	.0029	-.9119	-1.6489	-.7370	.6798
25	2	1.4674	.0014	-.9070	-1.6499	-.7400	.6844
26	4	1.4675	.0005	-.9021	-1.6499	-.7424	.6887
27	2	1.4674	.0005	-.9045	-1.6499	-.7412	.6865
28	4	1.4672	.0001	-.9026	-1.6499	-.7412	.6875
29	8	1.4670	.0006	-.9026	-1.6499	-.7402	.6869
30	4	1.4670	.0004	-.9026	-1.6499	-.7407	.6873
31	2	1.4670	.0001	-.9026	-1.6499	-.7410	.6874
32	4	1.4671	.0003	-.9030	-1.6499	-.7410	.6872
33	8	1.4671	.0025	-.9040	-1.6499	-.7430	.6880
34	4	1.4673	.0004	-.9036	-1.6499	-.7420	.6876
35	2	1.4674	.0002	-.9033	-1.6499	-.7415	.6874
36	1	1.4673	.0000	-.9033	-1.6499	-.7412	.6873

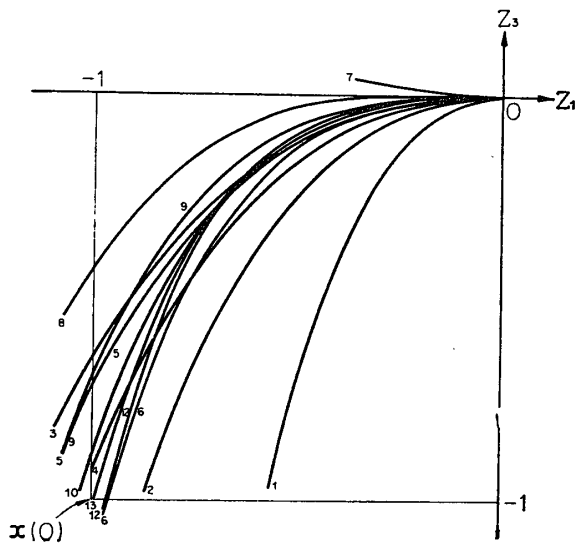
(第 34 図に対応するもの)



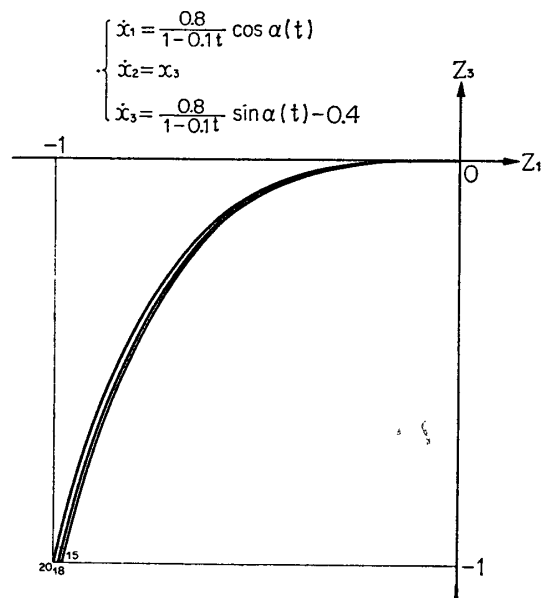
第 38 図 ロケット運動の Z 空間における収れん軌跡 (Z₁-Z₂ 面その 1)



第 39 図 ロケット運動の Z 空間における収れん軌跡 (Z₁-Z₂ 面その 2)



第 36 図に対する Z 空間の軌跡
第 40 図 ロケット運動の Z 空間における収れん軌跡 (Z₁-Z₃ 面その 1)



第 41 図 ロケット運動の Z 空間における収れん軌跡 (Z₁-Z₃ 面その 2)

$$F_{\max}=1.6748$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)=(-1.18131, -1.33740, .188476)$$

$$\alpha_{(0)}=-.158203$$

第 36 図は第 3 の場合に対するものであって、図上で 25 回目くらいから収束状態に入った。67 回目で $|\Delta E_{(F)}|=0$ となった。40 回目で $|\Delta E_{(F)}|\leq 10^{-3}$ となっている。収束値は以下のごとくである。

$$F_{\max}=1.7986$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)=(-1.36010, -1.00878, .549072)$$

$$\alpha_{(0)}=-.383666$$

5.6 計算誤差についての実験的考察

ここでは最大原理から解析的に導かれる正確値を η として用いてシミュレートしたとき、終端で最適値および境界条件にどの程度の機械計算による誤差が残るかということ、および dz の精度 (デジタル化の最小単位) を変えたとき、これが収束状況にどのような影響をおよぼすかについて述べる。5.2 で扱った単純二次系に対して実験的に調査された。計算機内ではデータが 2 進数として表現されているので、記述の正確さを要するところでは 1 部 16 進数 (10~15 を $U\sim Z$ で表わす) を用いてある。

1) η の正確解に対する機械計算による誤差

D. D. A. に G. P. C. により η の更新値がセットされる際には、指定された Y レジスタ

第 2 表 η の正確解に対する誤差 16 進数 (10~15 \rightarrow U~Z)

η_1	η_2	$\Delta E_1(2^{-16})$	$\Delta E_2(2^{-16})$	$2-F_{\max}(2^{-16})$
1. ZZZZ	1. ZZZZ	10	- 8	- 8
1. Z	1. Z	4	0	- 2
1. Y	1. Y	4	0	- 2
1. W	1. W	4	0	- 2
1. 8	1. 8	10	- 8	- 8
1. 0	1. 0	18	- W	- Y
0. X	0. X	1 W	-10	- Z
0. W 88	0. W 88	1 W	-10	- Z
0. W 8	0. W 8	1 W	-10	- Z
0. W	0. W	20	-10	-11
0. 8	0. 8	30	-18	-1 W
0. 4	0. 4	60	-30	-31
0. 2	0. 2		-60	-61
0. W 9*1	0. W 88	-128	138	-10
0. W 88*1	0. W 9	164	-15 W	- Z
0. W 8 W*2	0. W 8 Y 3	70	-60	-10

*1 $\eta_1 \neq \eta_2$ の例

*2 ゲイン・コントロール G.C. 3 で, $K_0 = \frac{1}{2}$ での収束時のデータ

第 3 表 $|\Delta E(F)|$ の反復数による変化

反復数	$dZ=2^{-14}$	$dZ=2^{-12}$	$dZ=2^{-12}$	$dZ=2^{-10}$	$dZ=2^{-8}$
1	1.4140	1.4136	1.4136	1.4121	1.4063
2	1.0643	1.0776	0.6328	1.0735	1.4216
3	1.0773	0.6957	.6236	0.6945	.6741
4	.6962	.1971	.2313	.2040	.1875
5	.1980	.0306	.1072	.0368	.0228
6	.0318	.0110	.0514	.0084	.0457
7	.0110	.0042	.0257	.0084	.0445
8	.0040	.0094	.0121	.0084	.0445
9	.0019	.0095	.0057	.0087	.0445
10	.0023	.0109	.0014	.0087	.0445
11	.0022	.0109	.0025	.0087	.0445
12	.0022	.0109	.0058	.0084	.0445
13	.0022	.0109	.0025	.0084	.0445
14	リミット サイクル	.0109	.0027	.0084	.0445
15		リミット サイクル	.0027	リミット サイクル	.0445
16			.0027		リミット サイクル
17			.0027		
Ko	1/2	1/2	1/1	1/2	1/2

$dZ=2^{-16}$ のものは、第 20 図に示す結果と同じものである。リミット・サイクルへ入ってから、 η の値が確定した。

一におかれる。この Y レジスタは全長が 20 ビットあり、データは上位 19 ビットにおかれ、その最上位のビットは符号である。検定例ではこのレジスタでの小数点の位置は第 3 ビットと第 4 ビットの間におかれている。したがってこのレジスタにおかれる正の最大値はおよそ 4 である。

正確解として解析的に与えられる結果は、最適値に対しては $F(\eta)=2$ と与えられるが、初期値ベクトル η に対しては $\eta_1=\eta_2$ と与えるだけで、値そのものは決定しない。そこで $\eta_1=\eta_2$ に 4 以下の種々の正数を与え、このときの最適値の誤差 $2-F(\eta)$ および境界値の誤差 $|\Delta E(F)|$ の値を調べた。この結果が第 2 表に示される。dt および dZ のデジタル化の最小単位はそれぞれ 2^{-16} および 2^{-14} である。

小数点の位置は変えないので、 $|\eta|$ の値を小さくすることは機械で与えられる精度が有効に使えず、誤差を大きくするのがわかる。

この演算プロセスで収れんということは、リミット・サイクルに入ったということであって、このときリミット・サイクルで与えられる $|\Delta E(F)|$ の最小値より小さな値で反復を打切るように設定すると永久に収れんしない。境界値の点はその点のまわりの球体でおきかえられなければならない。しかも、この球の半径は機械計算の精度にかなり依存することになる。

第 4 表 F_{\max} の反復数による変化

反復数	$dZ=2^{-14}$	$dZ=2^{-12}$	$dZ=2^{-10}$	$dZ=2^{-8}$	
1	1.4141	1.4137	1.4137	1.4126	1.4072
2	1.7228	1.7225	1.9307	1.7188	1.7168
3	1.9139	1.9134	1.9576	1.9097	1.8955
4	1.9944	1.9936	1.9930	1.9912	1.9629
5	1.9995	1.9987	1.9973	1.9944	1.9902
6	1.9997	1.9989	1.9977	1.9976	1.9726
7	1.9998	1.9988	1.9987	1.9946	1.9816
8	1.9995	1.9980	1.9990	1.9946	1.9816
9	1.9998	1.9988	1.9992	1.9958	1.9816
10	1.9997	1.9982	1.9985	1.9976	1.9816
11	1.9997	1.9986	1.9983	1.9958	1.9816
12	1.9997	1.9986	1.9995	1.9977	1.9816
13	1.9997	1.9986	1.9983	1.9958	1.9816
14	リミット サイクル	1.9986	1.9980	1.9975	1.9816
15		リミット サイクル	1.9980	1.9958	1.9816
16			1.9980	1.9958	リミット サイクル
17			1.9980 リミット サイクル	リミット サイクル	
Ko	1/2	1/2	1/1	1/2	1/2

$dZ=2^{-16}$ のものは、第 20 図に示す結果と同じものである。リミット・サイクルへ入ってから、 η の値が確定した。

$\eta_1=\eta_2$ の条件が少しでも乱されると境界値には大きな誤差が出るが、最適値の方の誤差にはかわりがないのがわかる。最適値の方が収束が速いためであろう。

2) dZ の精度の収れん状況への影響

D. D. A. でのデータの有機的なつながりから可能な限りの最大の精度を得ようとする、 dZ の最小単位と dt の最小単位の間には、ある種の関係が一意的にできる。現在の場合次の関係が保たれていた。

$$(dZ \text{ の最小単位}) = 2^2 \times (dt \text{ 最小単位})$$

Z の各成分の最大値は $1 \sim 2$ なので、 dZ 最小単位がおおむね相対的な精度を定めるとみなされる。

収れん状況への影響は、第 20 図で与えられる例題を用いて調査された。 dZ の最小単位が 2^{-14} なので、ここでは 2^{-12} 、 2^{-10} 、 2^{-8} として、ゲイン・コントロールは G. C. 3 を用い、 $K^0=1/2$ または 1 として実験が行なわれた。例題の数値の結果もまじえて、第 3 表および第 4 表にその結果を与える。

5.7 シミュレーション結果の総括

1) ゲイン・コントロールによる収れんの高速化

L. W. Neustadt の反復法による最適制御発生の際に、随伴系の初期値ベクトル η の更新則にあるゲイン K を定数としておくと収れんが遅くなる。 K が小さすぎると境界値の誤差 ΔE は単調に 0 に近づくが反復数が多くなる。 K を大きくすると振動が発生して発散しオーバーフローを起す。 これらを防ぐためにゲイン・コントロールを導入して、ゲイン K の値を反復ごとに改めるようにし、収れんを高速化せしめることができた。

2) 解 (収れん値) の特徴

許価基準である最適値への収れんは非常に速く、境界値の収れんは遅い。 どちらの値も解析解とは完全には一致しなかった。 最急上昇法を用いてはいるが、最適値は解析的なそれを越えることはなかった。 最も収れんの悪かったのは初期値 η である。

η には制御プロセスの全行程の情報が濃縮されており、境界値の誤差を小さくするには、かなりの精度が要請された。 これは D. D. A. の Y レジスタにある値の η をセットしておき、これに対応する R レジスタの初期の値をいろいろかえると、収れん過程に影響が現われることから明らかである。 反復ごとの Y レジスタの値が同じでも境界値の誤差は同じにはならなかった。

3) 演算精度と収れん過程

演算精度をいくつか変えて制御過程をシミュレートした結果では、 $X-Y$ プロッタ上の図面 (たとえば Z 空間での軌跡) には目視する限りでは変化がなく、数値結果を調べても収れん状況の初期段階には何らの影響もない。 収れん値に精度に応じた大きな誤差が残った。

4) 機械計算と収れん

機械で与えられる精度が有効につかわれないと、境界値における誤差が増大することが、5.6 の計算誤差の実験的考察の項で確認された。 特定の仕事のみを行なわせる計算機では、固定小数点演算を用いた方が精度および速度からみて有利である。 固定小数点演算では、取り扱う数値の範囲が浮動小数点演算のものに比してはるかに小さく、取り扱う量の正規化が必要になる。 この際各データの予期し得る最大値をあらかじめ見積って、機械語内の小数点の位置を定めることになるが、機械で与えられる精度を有効に使うために、機械語内の上位のけたが遊ばないようにしなければならない。

我々の扱う問題では、評価値 F のとりうる最大値が最適値であってこれを越えることはない。 境界値の誤差 $|\Delta E|$ は演算開始時には必ず $|x_{(0)}|$ である。 ここでは原則として $|x_{(0)}|=1$ として定められた。 この値が収れんが進むにつれて 0 に近づくのであるが、小さくなるにつれて最大値 1 に対する相対値が減少して、機械が与える精度が十分生かされないことになる。 また、問題によっては演算の中間値として $|\Delta E| > 4 \times |x_{(0)}|$ となるものも出てきた。 機械語内での最大値を小さくすると、オーバーフローが発生するがこれは避けねばならない。 随伴系の初期値ベクトル η は更新則を幾何学的に解釈すると明らかのように、反復ごとにその絶対値が必ず増加するので、収れんに要する反復数が多すぎるとやはりオーバーフローを起す可能性がある。

5) 収束に要する実時間

収れんに要する時間は、現実の制御過程が進む時間に比してはるかに速くなければならない。 我々のハイブリッド・システムでの時間の最小単位に相当した現実の経過時間は約 2^{-11} 秒

である。5.2~5.6 で報告された場合で用いた時間の最小単位は、 2^{-14} ~ 2^{-16} 秒であって実時間より 4~8 倍遅い。さらにこれに収れんに必要となる反復数を考慮すると、100 倍くらい遅いことになる。ロケット運動の場合物理的なモデルからの定式化の際のタイム・スケールがあるので、実時間計算の事情はよくなっていく。

計算速度を定めるのは、1. 計算方法 (算法)、2. 境界値誤差の許容限界、3. 回路特性 (Hard ware) である。1. についてはまだ向上の余地がある。2. については最適制御系全体の特性として論ずべきことであり、次章にゆずる。3. については現在の技術水準からいえば、本ハイブリッド・システムの 100 倍位の速さが可能であると考えられる。

6) 収れん法則

計算境界値 $Z(F)$ は、設定境界値 $x_{(0)}$ へ、点 $x_{(0)}$ を通る可到達集合の接平面に沿って近づくが、これは反復試行時の演算停止条件が、

$$f(t, \eta) \equiv \eta \cdot (x_{(0)} - Z(t, \eta)) = 0$$

であるところからくる。これはベクトル η とベクトル $x_{(0)} - Z(t, \eta)$ の直交条件である。収れんの最終段階ではこれを鈍角にするように制御すれば、収束を加速できるかもしれない。

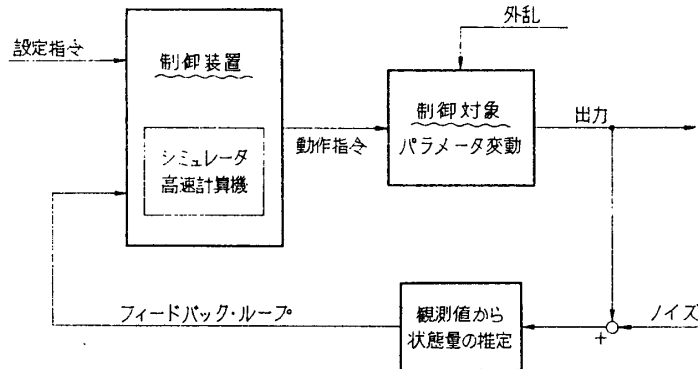
7) G.P.C. と D.D.A. の機能のバランス

D.D.A. で必要となる積分器の数は、対象とする系のダイナミクスと計算の制御に必要なものから定まる。この不足を G.P.C. の機能でおぎなうのは望ましくない。G.P.C. の命令語とのかねあいもあるが、シミュレーションの事例では G.P.C. の磁心記憶装置の容量不足がめだつた。G.P.C. で行なう主要な演算はゲイン・コントロールと η の更新則、および全演算の制御であるが、任意のゲイン・コントロールを入れる余裕は G.P.C. にはなかった。機械の命令語の機能を拡張するか、磁心記憶装置を拡大しなければならない。

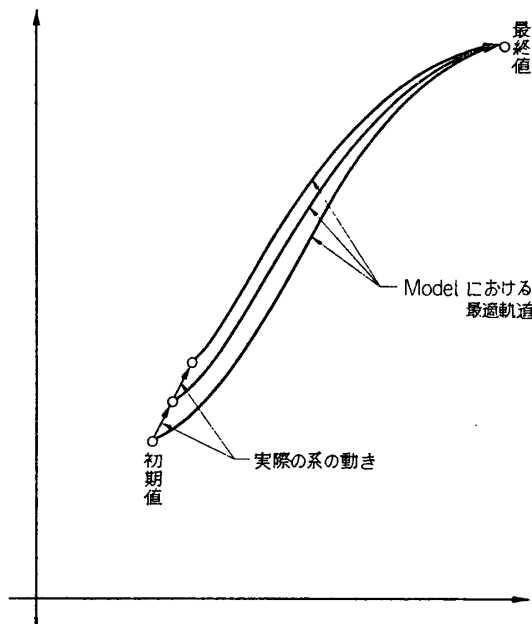
6. 最適フィードバック制御系

最適制御装置の実用化にはフィードバック構造が必要であり、これが最大原理による最適制御の決定に、どのような形で反映していくかについて前章までの結論として述べる。

最適制御には本質的に未来に関する決定が含まれるのである種の予測が必要であり、最大原理では制御対象を決定するパラメータおよび制御系が動作する周辺条件に関する情報が一切既知であること、また制御系を流れる情報が決定論的であるという形に集約される。最適制御は時間の関数として規定されることになる。現実の系では、最適制御の決定に必要なとされた制御系のパラメータを完全に掌握することはできないし、負荷の変動もあり、また決定された最適制御が、そのまま動作信号として制御対象へ加えられるとは限らない。この結果を状態空間で考えると、系の代表点はいくら最適であると期待される制御を加えても、系の初期値で規定される最適軌道上を運動せず、またずれた点を初点とする最適軌道上にも乗らない。系の状態を反映するように最適制御を状態量の関数として決定しなければならない。制御系にフィードバック構造が必要となる。制御対象が二次および三次の線型の制御系では、これらが状態空間内での切替線とか、切替面とかで処理されることが知られているが、一般の n 次の系をこのように扱うことは不可能であろう。



第42図 最適フィード・バック制御系



第43図 最適フィード・バック制御系の状態空間での挙動

最適フィードバック制御系には、第42図に示されるように制御対象の状態が常に最適制御装置に反映させる閉ループがつくられる。さらに制御装置は、最適制御の要求する予測を処理するために内部に、制御対象を数学的にモデル化してシミュレートする計算機を含む計算機系となる。このシミュレータ計算機により、現在までに与えられた情報で、未来の制御過程を予測すると最適制御過程が決定される。これに基づき現在とるべき最適制御が定まり、現実の動作信号として制御対象へ加えられる。これを状態空間で考える(第43図)。まず系は与えられた初期の代表点にある。シミュレータの中で高速にモデルを初期値から最終値まで動かし最適制御過程を決定する。これに基づく最適制御を制御対象に加えると、系の代表点は最適軌道または

この近傍を運動する。この代表点の運動が、最適軌道から大きくずれないうちに、その点での代表点を初期値としてつかって再びシミュレータを働かして、改めて最適制御過程を決定し得られた最適制御を動作信号とする。

このような制御方式は数学的に厳密な意味からは、最適制御とはいいがたいかもしれないが、最適制御過程の再決定の間隔がある程度以上小さくできれば、工学的には十分その目的を達成するものと考えられる。前章のシミュレーション研究で行なわれた最適制御の発生は、このモデルシミュレーションを動かしていることに相当する。観測値から最適制御発生までに時間がかからないとすれば、最適制御装置内にあるハイブリッド計算機は、常に随伴系の初期値 η_{opt} を連続的に発生して最適制御 $u(0, \eta_{opt})$ を形成し、これを制御対象に加えばよいわけであるが、現実的には有限の時間が必要である。この時間が制御系の時定数に

比して小さければ問題とはならないが、一般には対策を講じなければならない。

最適制御計算の高速化には、制御系がフィードバック構造をもつということを利用することもできる。前章で示されたように演算精度を下げても収れん過程はほとんど同じであり、収れん値(D. D. A. の非線型性のゆえにリミット・サイクルに入る)の精度が下るということであった。精度を下げるということは、D. D. A. 演算では各量の最小単位の有機的なつながりから時間の最小単位も大きくする。このことは計算時間を実時間に対して加速することに相当する。この際に起る収れん境界値の精度低下をフィードバック構造でカバーする。すなわち相対精度を常に一定とするようにモデルを修正する。状態空間で論じると、目標点から遠くにはなれているときには、境界値の絶対精度をそれほど要求しないが、系が最終値に近づくと絶対精度が高まるようにする。シミュレーションの結果から明らかのように、最適値自体の収れんはきわめて早く精度にもほとんどよらないので、たとえ境界値の精度があらくても、フィードバック系全体としてサブオプティマルな挙動が期待される。

このような最適フィードバック制御方式には、制御対象の特性変化に対する適応性を含めることも可能である。計算された最適制御を制御装置内にある制御対象のモデルと、実際の制御対象とに同時に加えていき、この出力の差をもって制御対象の変化を知り、モデルを修正させてモデルを制御対象の特性に常に一致させるように制御をすすめることである。このような制御方式は、精度の高く応答速度の速い制御が要求される自動着陸制御系とか、人工衛星の軌道への打ち上げ、軌道上での会合、大気圏への再突入の制御などに適用されるであろう。自動着陸系の場合、最適制御装置を地上施設として超大型のハイブリッド計算機で実施すれば、各航空機が高価な機上装置を必要とせず地上施設で各航空機の性能を識別(Identify)して、滑走路へ誘導し着陸させる。地上施設にしても機種別の特殊装置は不要である。航空交通管制と結びつけて用いられれば好適と考えられる。

謝 辞

本研究は、穂坂 衛教授の指導のもとに遂行され、長期にわたって懇切な指導と力強い激励を受けた。厚く感謝の意を表します。ハイブリッド・システムの組織化にあたっては穂坂研究室所属の大学院学生村田英人氏(現在神戸大学)の全面的な協力を受け、また計算機の稼動に際しては、同じく大学院学生越川和忠氏に診断検査ルーチンおよびユーティリティー・プログラムの作成を依頼した。原稿・図面の整理をお願いした皆川恵子氏はじめご協力願えた当研究室各位に合せて深く感謝の意を表します。

1968年11月8日 航空力学部

参 考 文 献

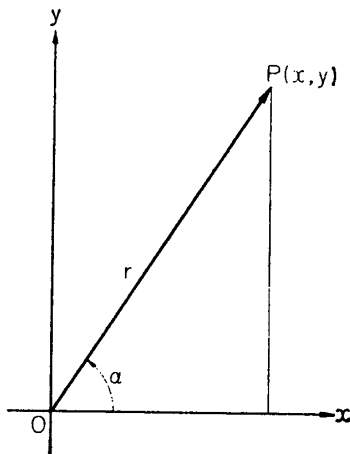
- [1] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mischenko: "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Interscience (a division of John Wiley and Sons), New York 1962 (a translation from Russian).
- [2] L. W. Neustadt: "Synthesizing Time Optimal Control Systems". J. Math. Anal. and Appl., 1 (1960), PP 484-493.

- [3] L. W. Neustadt: "Time Optimal Control Systems with Position and Integral Limits", J. Math. Anal. and Appl., 3 (1961), PP 406-427.
- [4] L. W. Neustadt: "On Synthesizing Optimal Control", Presented at the Second Congress of the International Federation of Automatic Controls, Basel, Switzerland, Sept., (1963).
- [5] 穂坂 衛: "数学式微分解析器の制御工学への応用" 計測 Vol. 8, (1958) PP 775-785.
- [6] J. G. Truxal: "Automatic Control System Synthesis",
- [7] D. W. Bushaw: "Differential Equations with a Discontinuous Forcing Term", Report 469., Experimental Towing Tank, Stevens Institute of Technology, (Jan. 1953), Extract が文献 9にある.
- [8] R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross: "On the Bang-Bang Control Problems", Quat. App. Math. 14., (1957) PP 11-18.
- [9] H. S. Tsien: "Engineering Cybernetics" (1954)
- [10] H. K. Knudsen: "An Iterative Procedure for Computing Time-Optimal Controls", IEEE WESCON Record (1963) PP 1-10.
- [11] Y. C. Ho: "A Successive Approximation Technique for Optimal Control System Subject to Input Saturation: Trans. ASME Paper No. 61-JAC-10 (1961)
- [12] H. Halkin: "Method of Convex Ascent", Computing Method in Optimization Problem, Academic Press (1964), PP 211-240.
- [13] R. Bellman: "Adaptive Control Process"
- [14] E. J. Fadden and Elmer G. Gilbert: "Computational Aspects of the Time-Optimal Control Problem", Computing Methods in Optimization Problems, ibid, PP 167-192.
- [15] B. Paiewonsky and P. J. Woodrow, AIAA Preprint 63-224, Los Angeles, June (1963).
- [16] Elmer G. Gilbert: "The Application of Hybrid Computers to the Iterative Solution of Optimal Control Problems, ibid, PP 261-282.
- [17] B. Paiewonsky, P. Woodrow, W. Brunner and P. Halbert: "Synthesis of Optimal Controllers using Hybrid Analog-Digital Computers", Computing Methods in Optimization Problems, ibid, PP 285-303.
- [18] G. A. Korn and T. M. Korn: "Electronic Analog and Hybrid Computers: Mcgraw Hill, (1964).
- [19] 野田克彦: "ハイブリッド計算機" 計測と制御 Vol. 4, No. 5, (1965) PP 299-309.
- [20] 穂坂 衛ほか: "試作数学式微分解析器について" 昭和 37 年度情報処理学会, 大会予稿 PP 25-26.
- [21] 穂坂 衛, 村田英人: "D. D. A. による関数と図形の発生" 計測と制御 Vol. 4, No. 7 (1965) PP 442-445.

付 録

" $\tan \alpha_{(t)}$ の値から $\sin \alpha_{(t)}$ および $\cos \alpha_{(t)}$ を決定すること。ただし、 $\tan \alpha_{(t)} \equiv (\eta_3 - \eta_2 t) / \eta_1$ とし、 η_1, η_2, η_3 は定数である。"

D. D. A. 化の際の問題は、 dt から $d \sin \alpha_{(t)}$ と $d \cos \alpha_{(t)}$ をつくること、および η_1 と η_3 から $\sin \alpha_{(0)}$ と $\cos \alpha_{(0)}$ とで決定することである。第44図のごとく点 P の座標を極座標 (r, α) および直交座標 (x, y) で定める。ただし、 $y = \eta_3 - \eta_2 t$ であり、 $x = \eta_1$ である。



第44図

1) dt から $d \sin \alpha_{(t)}$ と $d \cos \alpha_{(t)}$ を得ること。

関係式 $x^2 + y^2 = r^2$ からこの式の両辺の微分をとって整理すると、

$$dr = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy$$

が得られる。この式の右辺の第1項は x が定数であるところから0であり、また第2項で $y/r = \sin \alpha$ とすると、

$$dr = \sin \alpha \cdot dy$$

となる。 $dy = -\eta_2 dt$ であるから、 dt から $d \sin \alpha_{(t)}$ と $d \cos \alpha_{(t)}$ とをつくり出す D. D. A. のプログラムは第45図のごとくになる。

2) η_1, η_3 とから $\tan \alpha_{(0)} = \eta_3 / \eta_1$ 、 $r_{(0)} = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}$ なる関係を通じて、 $\sin \alpha_{(0)}$ 、 $\cos \alpha_{(0)}$ および $r_{(0)}$ を決定

すること

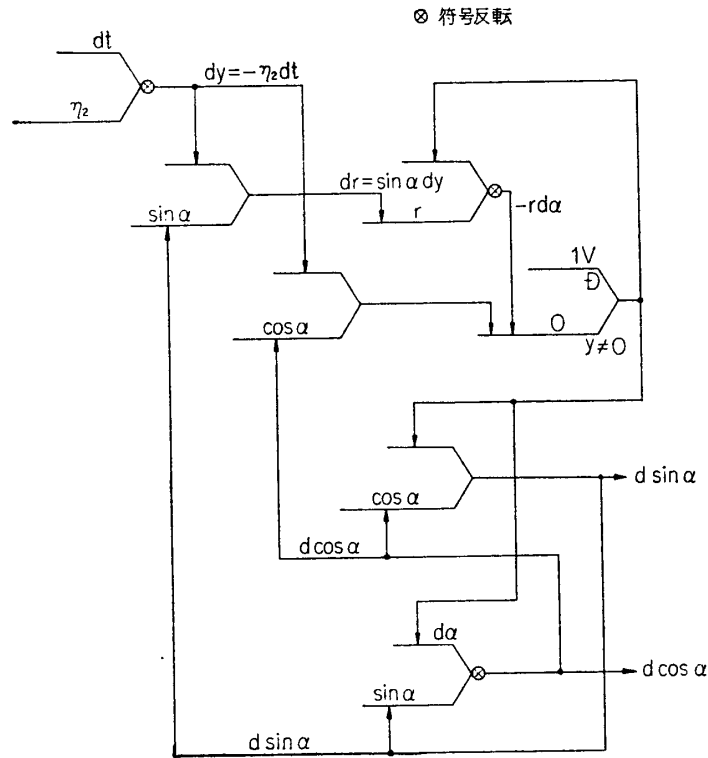
$\tan \alpha_{(0)} = \eta_3 / \eta_1$ を満す $\alpha_{(0)}$ は、 $|\alpha_{(0)}| \leq \pi$ の間に二つあるが、最大原理のハミルトニアン H を最適とするには常に $|\alpha_{(0)}| \leq \pi/2$ を満す。二つの点 P および Q の座標をそれぞれ $(\cos \alpha_{(0)}, \sin \alpha_{(0)})$ 、 (η_1, η_3) とすると、もともと問題の物理的解釈から $\eta_1 < 0$ となるので点 Q は第3または第4象限の点となり、点 P は第1または第2象限の点となって点 Q と点 P とは y 軸に関して互いに反対の位置にある。

D. D. A. での処理の手順は、点 P を点 $(1, 0)$ から半径1の円周上を角 $\alpha_{(0)}$ 回転させて定め、このとき必要となる角 $\alpha_{(0)}$ を $|\eta_3|$ が常に減少する方向に0となるまで点 Q を半径 $r_{(0)} = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}$ の円周上を回転させてつくる。この結果の点 Q の x 座標の絶対値が $r_{(0)}$ を与える。D. D. A. のプログラムを第46図に示す。

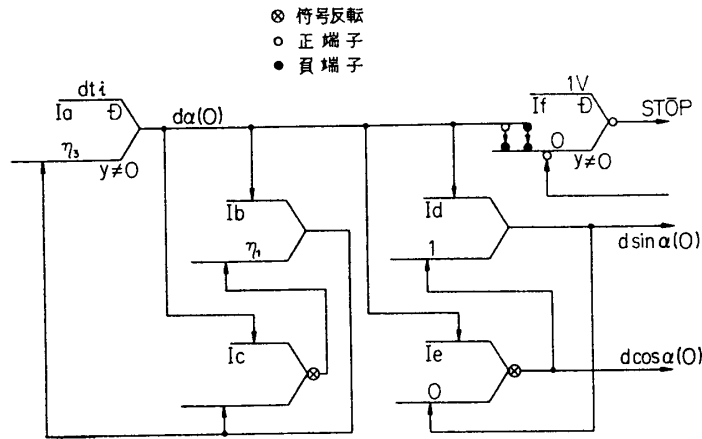
I_a の Y レジスタにある η_3 が0となるまで、 I_a は $d\alpha_{(0)}$ を η_3 と同じ符号のパルスで出す。この $d\alpha_{(0)}$ を使って、 I_b, I_c で点 $Q(\eta_1, \eta_3)$ を角 $\alpha_{(0)}$ 回転させ、点 $(-\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}, 0)$ とし、同時に I_d, I_e で点 $(1, 0)$ を回転させて点 $P(\cos \alpha_{(0)}, \sin \alpha_{(0)})$ をつくる。 I_e の η_3 が0となったことを I_f の出力で知る。

3) D. D. A. オペレーション

D. D. A. のオペレーションは初期値発生モードと演算モードとの二つよりなり、それぞれが割り込み信号をつかって G. P. C. のプログラムの制御下にコントロールの受けわたしを行なう。

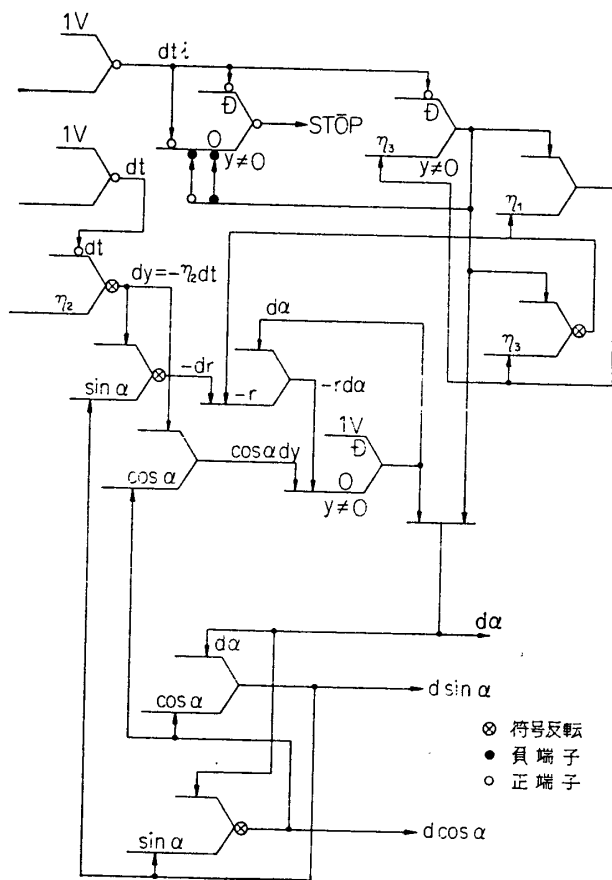


第 45 図 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 発生プログラム



第 46 図 初期値設定プログラム

D. D. A. に与えられる第一次の初期値は、 η_1, η_2, η_3 であって、2) で示された初期値発生プログラムを働かせて、以後の計算に必要なとなる $r(\omega), \cos \alpha(\omega), \sin \alpha(\omega)$ を設定する。 $\alpha(\omega)$ の回転がおわると D. D. A. から G. P. C. への割り込み信号が起って、G. P. C. のプログラムが実行され、演算モードで更に必要となる値があれば、これをセットするなどの初期設定が行なわれ、D. D. A. を演算モードとして走らせる。これらを総括した D. D. A. のプ



第 47 図 プログラム全図

プログラムを第 47 図に示す。第 1 次初期値として、 $-r$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ にはそれぞれ η_1 , 0 , 1 をセットしておく。