

# 截頭円錐殻の挙動

砂 川 恵

## Behaviors of Truncated Conical Shells

By

Megumi SUNAKAWA

**Abstract:** On the behaviors of truncated conical shells, some results of analytical and experimental investigations carried out at the author's laboratory are reported. First, the linear axisymmetric free flexural vibrations of the shells clamped at one end and having an end-mass at the other are analyzed, and the coupling between the end-mass and the mass of the shell is discussed in detail. The variations of natural frequencies and vibration modes with the end-mass, geometrical and completeness parameters are shown, and the design charts for the natural circular frequency or axial spring constant of the shells are presented over a wide range of geometrical and completeness parameters. Second, on the basis of nonlinear shell theory, the axisymmetric response of the shells to an axial step load is analyzed, and the influence of the mass at the loading end upon the dynamic behavior is clarified. The mechanism of snapping is discussed in detail, and it is pointed out that the snap-through phenomena of the shell are classified into four types depending on magnitudes of the applied load and end-mass. Third, the result of an experimental investigation on the buckling of the imperfect shells under axial compression is described, and it is shown that the empirical formula given by WEINGARTEN et al. can be used conservatively in the design of the shells representing their thickness by the mean value.

## 概 要

薄肉軽構造の一基本要素である截頭円錐殻について、特に端部質量の影響を考慮に入れた自由曲げ振動特性および衝撃的軸圧縮荷重に対する応答に関する理論解析、ならびに母線方向に板厚が変化する場合の静的軸圧縮挫屈荷重に関する実験について述べる。

## 1. ま え が き

軽量構造である薄肉構造物はその自重に比して高い耐荷能力を有するので、航空・宇宙に関連する分野では多年に亘って広く使用されてきた。最近は交通・輸送機械の分野のみでなく種々の地上施設においてもその有用性が高く評価され、重用されている。

構造の軽量化は、その構造方式および使用材料が同一であると、必然的に強度および剛性の低下を伴う。特に薄肉構造では、ある限界の荷重以上になると、剛性低下に起因して起る不安定現象が極めて重要な問題となる。従って、この現象を解明して適切な構造方式および材料を採用することが、構造物に加わる外力をより正確に算定することと共に、その信頼性および安全性の向上に大きく貢献することとなる。

薄肉構造の基本要素としては、薄板、円筒殻、球形殻、円錐殻等が考えられ、これ等の静的および動的挙動に関して、種々の面から研究が進められてきた。

本稿においては、最近筆者の研究室において行われた截頭円錐殻の挙動に関連する二三の解析結果 [1]~[3] について報告する。すなわち、端部質量の影響を考慮に入れた自由曲げ振動特性および衝撃的軸圧縮荷重に対する応答に関する理論解析、ならびに母線方向に板厚が変化する場合の静的軸圧縮挫屈荷重に関する実験について述べる。

記 号

$$D \equiv Eh^3/[12(1-\nu^2)]$$

$E$ : 殻材料のヤング率

$F$ : 応力函数

$$f \equiv Fl_2/D, \text{ 無次元応力函数}$$

$h$ : 板厚

$k$ : 軸方向剛性

$$L \equiv l_2 - l_1$$

$l_1, l_2$ : 第 1 図参照

$M$ : 端板質量

$$m \equiv M/(\pi \rho l_2^2 h \sin^3 \alpha), \text{ 端板質量パラメタ}$$

$P$ : 軸荷重

$$P_{cl} \equiv 2[3(1-\nu^2)]^{-1/2} \pi E h^2 \cos^2 \alpha$$

$P_{cr}$ : 実験挫屈荷重

$P_r$ : 復元挫屈値

$$q \equiv P/P_{cl}$$

$t$ : 時間

$U, W$ : 母線方向および板厚方向変位

$$w \equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2} (W/h)$$

$x, \theta$ : 母線方向および周方向座標

$\alpha$ : 半頂角

$$\gamma \equiv l_1/l_2, \text{ 截頭比}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ : 中位面における母線方向および周方向歪

$$\zeta \equiv (x - l_1)/(l_2 - l_1)$$

$\kappa_x, \kappa_\theta$ : 中位面の母線方向および周方向曲率変化

$$\lambda \equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2} (l_2/h) \cot \alpha, \text{ 形状パラメタ}$$

$\nu$ : 殻材料のポアソン比

- $\xi \equiv \ln(x/l_1)$ , 母線方向無次元座標  
 $\xi_1 \equiv \ln(l_2/l_1) = -\ln \gamma$   
 $\rho$ : 殻材料の密度  
 $\rho_1$ : 第 21 図参照  
 $\tau \equiv [D/(\rho h)]^{1/2} l_2^{-2} t$ , 無次元時間  
 $\tau^*$ : 動座屈後の最初の大変形のピークが現れるまでの時間  
 $\omega$ : 一次の角振動数  
 $\Omega$ :  $\tau$  に対応する無次元角振動数  
 $\Omega_1$ : 一次の無次元角振動数  
 $C_\Omega \equiv \Omega(m/2)^{1/2}/\lambda$ , 角振動数パラメタ  
 $C_{\Omega_1}$ : 一次角振動数パラメタ

## 2. 軸対称自由曲げ振動

截頭円錐殻の自由振動に関する研究はスピーカーの振動問題と関連してラヂオの歴史と同じ古さを持っており, Strutt [4] および Federhoffer [5] による伸なし変形理論による解析に始まる. その後, 自由曲げ振動に関して, Herrmann et al. [6], Seide [7], Lindholm et al. [8], および谷等 [9] により境界条件を考慮に入れた非対称振動解析および実験が行われた. 又, 軸対称振動解析に関しては, Goldberg [10] が一端固定, 他端自由の境界条件に対して冪級数解を得ている.

円錐殻はその頂点が数学的に特異点となるため解析が困難であり, 近年発展した有限要素法による解析の試みはあるものの, 研究結果は上記のように意外に少い.

構造要素としての円錐殻を考えてその動特性を論ずる場合, 円錐殻部の質量と円錐殻以外の部分の質量との慣性連成が重要な問題となってくるが, この点に関する研究報告は筆者の知る限りでは未だ見られない. そこで, 本章においては, 線型振動理論において外部質量との慣性連成が問題となってくる軸対称曲げ振動を取扱い, 外部質量の変化による連成状況の変化を明かにする [1].

解析において, 外部質量は端板質量としてモデル化して取扱い, Mushtari et al [11] が截頭円錐殻の静的軸圧縮撓屈の解析に際して用いた変換を利用し, 殻面に垂直方向の変位を直交性の良好な余弦フーリエ級数により展開して, Rayleigh-Ritz の方法を適用し, 数値解析を行う. 更に, 殻体部質量が端板質量に比較して省略可能な場合に, 広範囲の形状パラメタおよび截頭比に対して, 振動数の実用計算図を示す. 又, 軸方向剛性の膜理論解への漸近過程についても触れることにする.

### 2.1 解 析

第 1 図に示す様な, 一端は固定で他端には質量  $M$  の端板がつき軸方向変位のみ自由である截頭円錐殻を考える.

解析において次の仮定を設ける.

- Ⅰ) 変位は板厚に比較して微小である.
- Ⅱ) 曲げ歪に対しては Donnell 流の近似を行う.

- Ⅲ) initial imperfections は考えない.
- Ⅳ) 材料は Hooke 則に従う.
- Ⅴ) Love-Kirchhoff の仮定が成立する.
- Ⅵ) 断面の扇形の影響は省略する.
- Ⅶ) 面内慣性力および回転慣性は省略する.

本問題に対する幾何学的拘束条件は無次元量を用いて次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \xi=0 \text{ において,} \\ w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi}-\nu f=0, \\ \xi=\xi_1 \text{ において,} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi}-\nu f=0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

適合条件式,  $W$  方向の運動方程式, および自然境界条件は, 無次元量を用いると, それぞれ次の様に表示することができる.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 1 \right) f - \lambda \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

$$\left( \frac{1}{\gamma^2 e^{2\xi}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)^2 w + \lambda \frac{1}{\gamma^2 e^{2\xi}} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3)$$

$\xi=\xi_1$  において,

$$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{\gamma^2 e^{2\xi}} \left( \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w + f - \frac{m}{2\lambda} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \quad (4)$$

幾何学的境界条件式 (1) および力学的境界条件式 (4) を完全に満足する  $w$  についての関数系を考えるのは困難であるので, 以下の様に Rayleigh-Ritz の方法を適用して解析を進めることにする.

まず, 式 (1) を満足する様に,  $w$  を次式で仮定する.

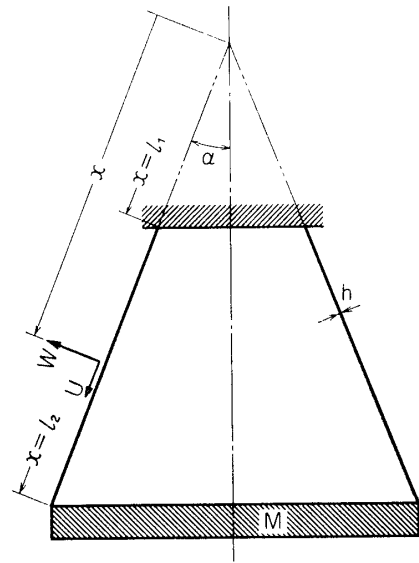
$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_i e_i w_i \cos \Omega \tau, \\ w_i &= C_i \left[ \cos \frac{(i-1)\pi \xi}{\xi_1} - \cos \frac{i\pi \xi}{\xi_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$C_i$  は次式の正規化条件から決定する.

$$\int_0^{\xi_1} w_i^2 \gamma^2 e^{2\xi} d\xi = 1.$$

式 (5) を式 (2) に代入すると,  $f$  が次の様に求められる.

$$\left. \begin{aligned} f &= \sum_i e_i f_i, \\ f_i &= C_i \lambda \left[ a_{i-1} \sin \frac{(i-1)\pi \xi}{\xi_1} - a_i \sin \frac{i\pi \xi}{\xi_1} + d_{i1} e^{-\xi} + d_{i2} e^{\xi} \right], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$



第1図 截頭円錐殻.

ここに,  $a_i = (i\pi/\xi_1)/[(i\pi/\xi_1)^2 + 1]$  であり,  $d_{i1}$  および  $d_{i2}$  は式 (1) を満足する様に定める.

この様にして得られた  $w$  および  $f$  を用いて, 系の全ポテンシャル・エネルギーを  $e_i$  に関して停留させれば, 次の様にマトリックス表示された振動数方程式が求まる.

$$\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} = 0, \quad (7)$$

ここに,  $\mathbf{M} = (m_{ij})$ ,  $\mathbf{K} = (k_{ij})$  で, その要素は次の如きものである.

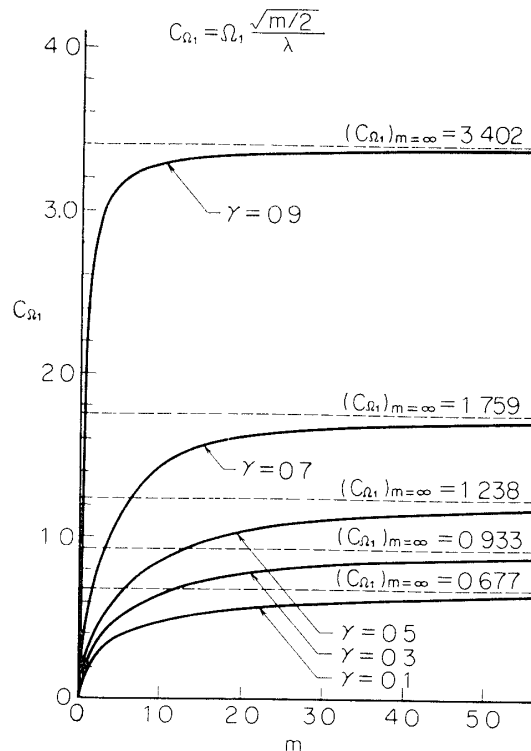
$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_0^{\xi_1} \gamma^2 e^{2\xi} w_i w_j d\xi + \frac{1}{2} m (w_i w_j)_{\xi=\xi_1}, \\ k_{ij} &= -\lambda \int_0^{\xi_1} f_i \frac{dw_j}{d\xi} d\xi + \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{\xi_1} e^{-2\xi} \frac{d^2 w_i}{d\xi^2} \frac{d^2 w_j}{d\xi^2} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

## 2.2 数値計算例

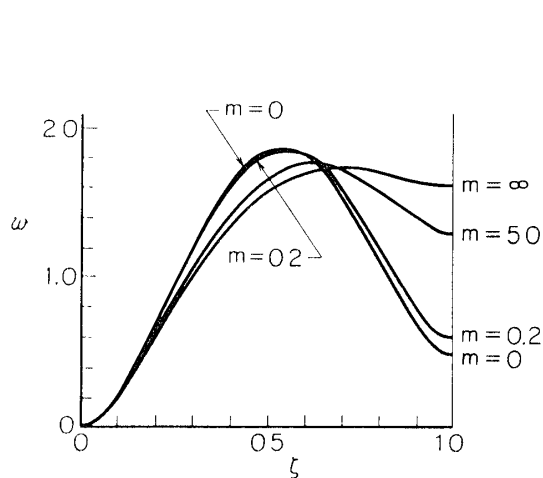
式 (7) で表わされる行列の固有値問題を, 冪乗法により, 形状パラメタ  $\lambda = 0 \sim 7,000$ , 截頭比  $\gamma = 0.1 \sim 0.9$ , 端板質量パラメタ  $m = 0 \sim \infty$  に対して計算を行う. ただし,  $m = \infty$  は殻体部の質量を省略した場合である. なお,  $\nu = 0.3$  とする.

$w$  を式 (5) の形に展開した場合,  $\lambda$  の増大,  $\gamma$  の減少, もしくは  $m$  の減少に従って収束性が悪くなるが, 上記のパラメタの範囲において, 展開項数を 30 項程度とれば最悪の場合でも展開係数の最小値は最大値の 0.1% 以下になる.

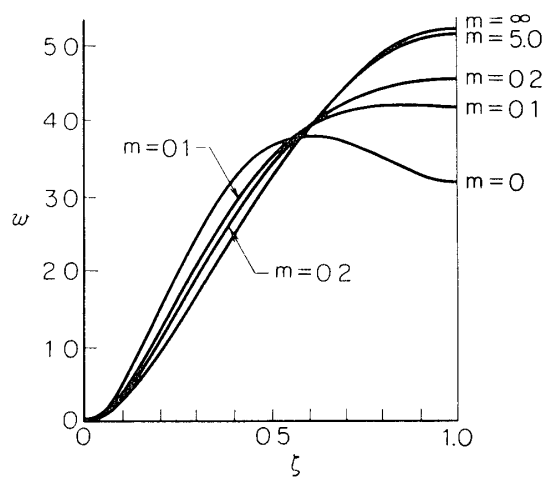
端板質量と殻体部質量との連成状況を, 一次の振動数に対して第 2 図に, 振動モードに対して第 3 図および第 4 図に示す. 第 2 図において,  $C_{\Omega_1}$  は  $i$  次の無次元角振動数  $\Omega_i$  を  $\Omega_i = C_{\Omega_i} \lambda (m/2)^{-1/2}$  の形に書いた場合の係数で, 截頭比が大きくなる程殻体部の質量を省略した解析結果 (破線) に急速に近付くことが分る. このことは振動モードについての第 3 図と第 4 図との比較からも明かである. この点についての数量的比較を, 截頭比  $\gamma$  および形状パラメタ  $\lambda$  に対して, 夫々第 1 表および第 2 表に示す.  $\lambda = 100$  の場合 (第 1 表),  $\gamma$  が 0.1 以上の截頭円錐殻に対して, 端板質量パラメタ  $m$  がほぼ 10 以上になれば, 一次振動数の殻体部質量を考慮した解析結果と考慮しない夫れとの差は 4% 以下になり, 殻体部質量を省略して解析しても実用上差支えないことが示されている. 又第 2 表より, 他の形状パラメタの場合についても同様に取扱ってよいと考えられる. 尚, 截頭比が増大する程殻体部質量の影響が早く消滅するのは, 同一の形状パラメタにおいて截頭比の大きい



第 2 図 1 次振動数におよぼす端板質量の影響,  $\lambda = 100$ .



第3図 1次モードの端板質量による変化,  $\lambda=100$ ,  $\gamma=0.5$ .



第4図 1次モードの端板質量による変化,  $\lambda=100$ ,  $\gamma=0.9$ .

第1表  $m$  による  $C_{Q_1}$  の変化,  $\lambda=100$ .

$\gamma$	5		10		$\infty$
	$C_{Q_1}$	$\beta^*(\%)$	$C_{Q_1}$	$\beta(\%)$	$C_{Q_1}$
0.1	0.625	7.7	6.498	4.0	0.677
0.3	0.865	7.3	8.982	3.7	0.933
0.5	1.159	6.4	1.200	3.1	1.238
0.7	1.705	2.6	1.732	1.0	1.751
0.9	3.377	0.7	3.394	0.2	3.402

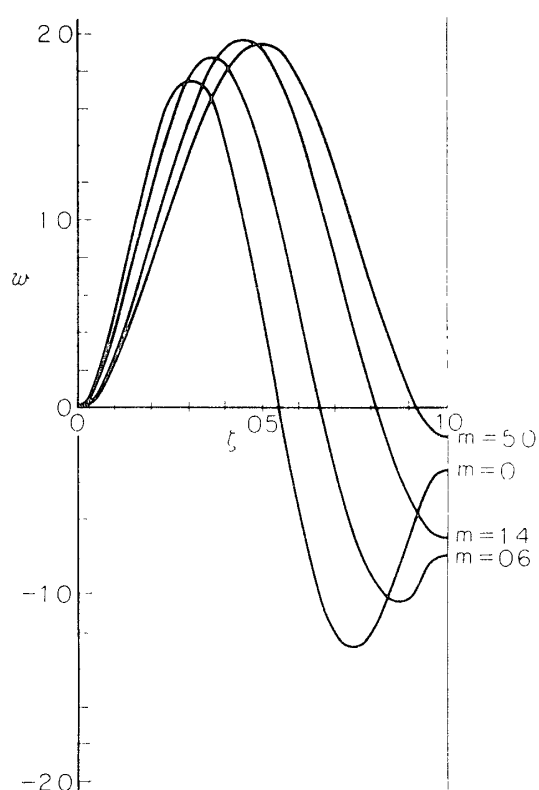
$$* \beta = [(C_{Q_1})_{m=\infty} - C_{Q_1}] / (C_{Q_1})_{m=\infty}$$

第2表  $C_{Q_1}$  と  $\lambda$  との関係,  $m=10$ ,  $\gamma=0.5$ .

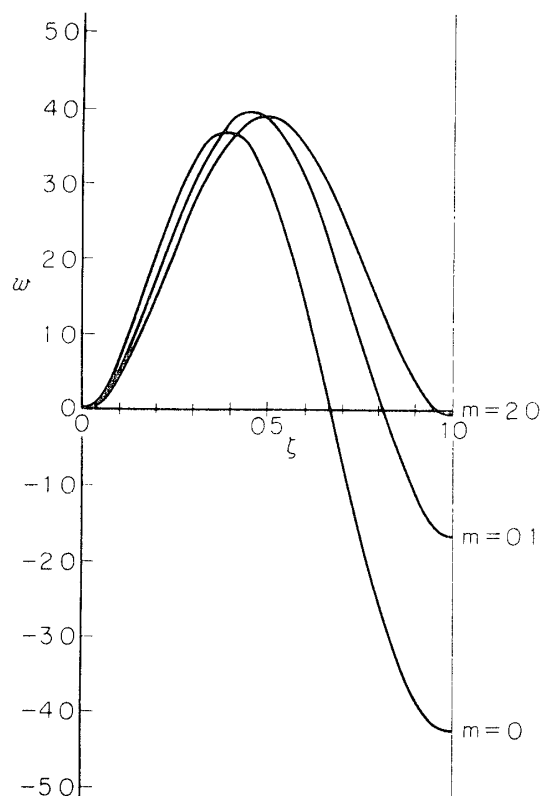
$\lambda$	$C_{Q_1}$	$(C_{Q_1})_{m=\infty}$	$\beta(\%)$
500	1.162	1.215	4.3
1,000	1.158	1.210	4.3
2,000	1.151	1.208	4.7

方が殻体部質量が小さいためである。

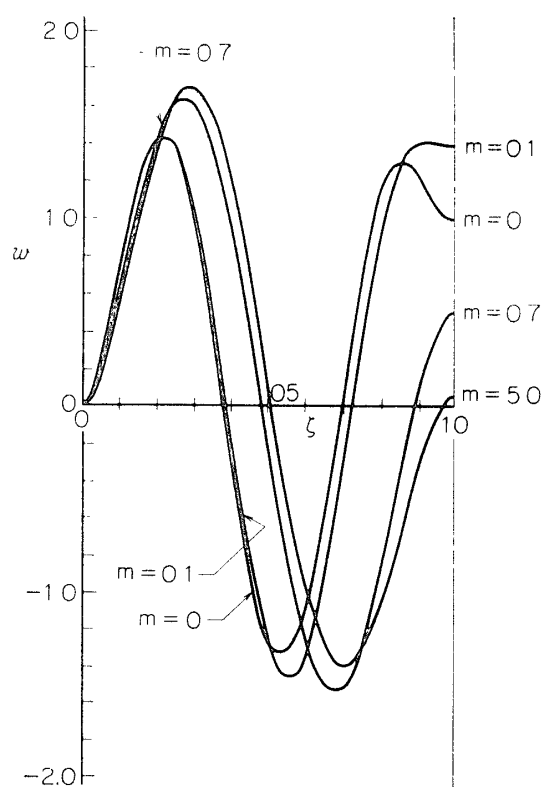
又、端板質量が高次振動に及ぼす影響を検討するために、 $\lambda=100$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $0.9$  の截頭円錐殻の二次および三次振動モードを第5図～第8図に示す。 $n$  次の振動モードは端板質量を増加させるに従い、両端の変位を完全に拘束した場合の  $(n-1)$  次の振動モードへと漸近してゆき、高次振動程それが速いことが分る。このことと一次振動について述べたことから、軸方向変位を許す両端固定の境界条件のもとでは、端板質量パラメタがほぼ 10 以上になれば、一次振動についてのみ調べればよく、高次振動に関しては両端の変位を完全に拘束



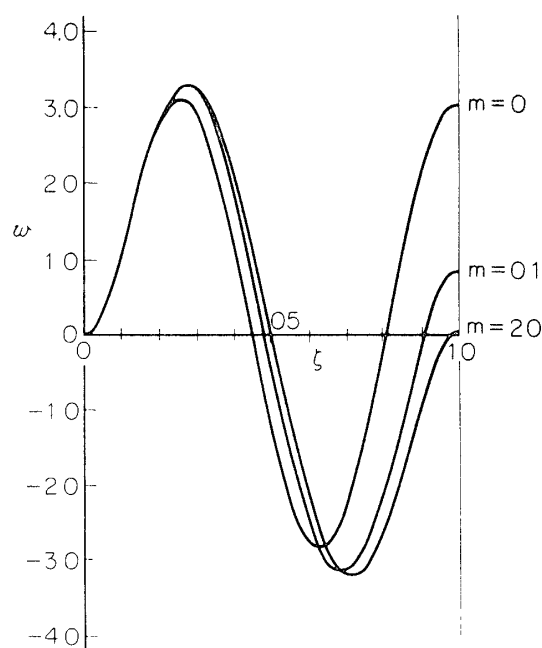
第5図 2次モードの端板質量による変化,  
 $\lambda=100, \gamma=0.5$ .



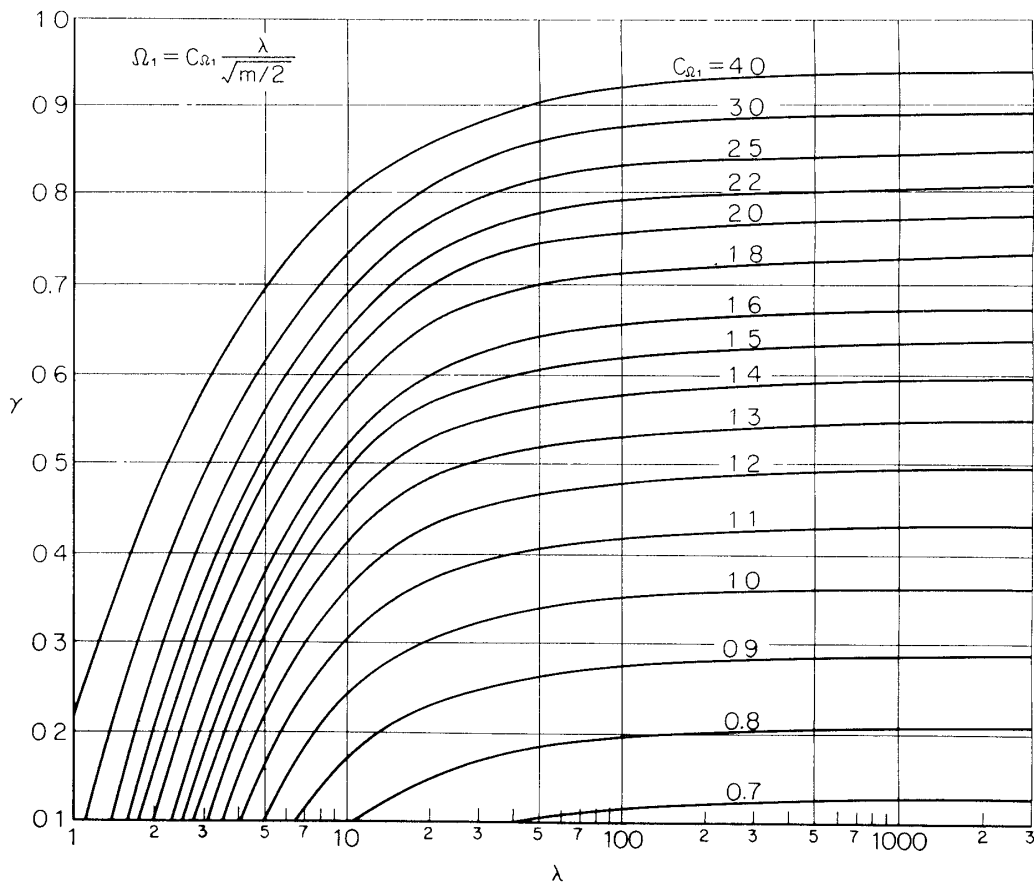
第6図 2次モードの端板質量による変化,  
 $\lambda=100, \gamma=0.9$ .



第7図 3次モードの端板質量による変化,  
 $\lambda=100, \gamma=0.5$ .



第8図 3次モードの端板質量による変化,  
 $\lambda=100, \gamma=0.9$ .

第9図 軸対称固有振動数の計算図表,  $m \geq 10$ .

した場合の結果を用いてよいことが分る。

実際問題としては  $\lambda$  が 10 以上になるのが普通であるから、殻体部質量を省略した場合の一次振動数の計算図を第9図に示す。すなわち、截頭円錐殻の  $\lambda$  および  $\gamma$  が指定されると、第9図から  $C_{\Omega_1}$  が与えられ、この殻の一次角振動数  $\omega$  は次式から求まることになる。

$$\begin{aligned}\omega &= C_{\Omega_1} \lambda (m/2)^{-1/2} [D/(\rho h)]^{1/2} l_2^{-2} \\ &= C_{\Omega_1} \lambda [2\pi D \sin^3 \alpha / (l_2^2 M)]^{1/2}.\end{aligned}\quad (9)$$

また、軸方向剛性  $k$  は次式から  $\omega$  と同様にして求めることができる。

$$k = 2\pi C_{\Omega_1}^2 \lambda^2 \sin^3 \alpha D / l_2^2. \quad (10)$$

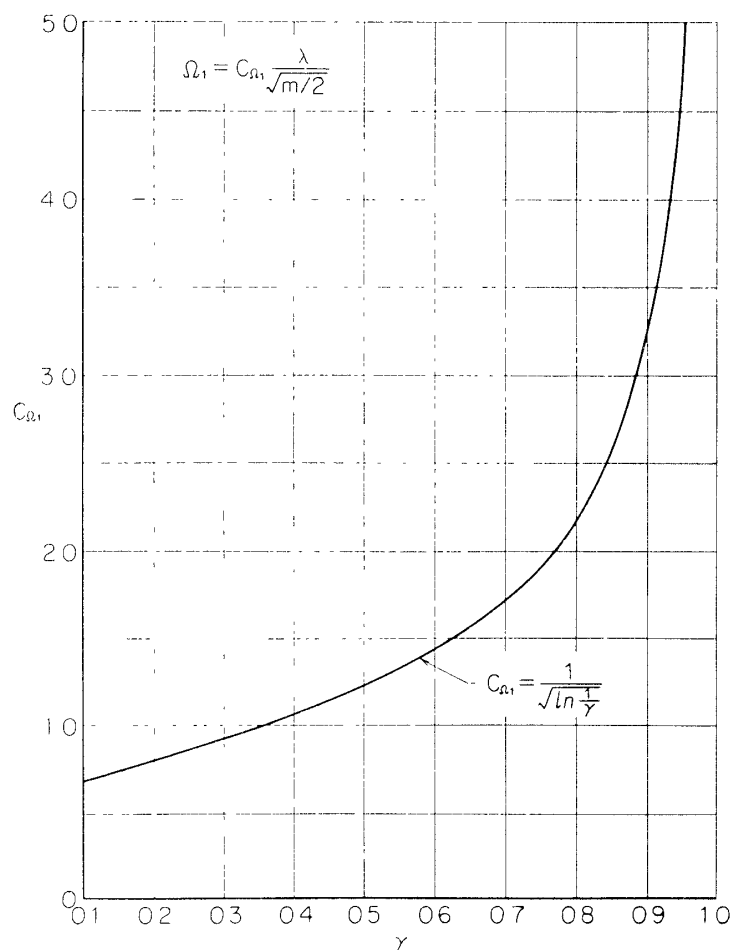
第9図において、 $\gamma$  を一定にして  $\lambda$  を増加させると、 $C_{\Omega_1}$  の値が  $\lambda \leq 100$  で急激に減少して  $\lambda \geq 1000$  でほぼ一定となる。これは  $\lambda$  が小さい領域、すなわち、半頂角がかなり大きい領域では軸方向剛性に対する曲げの寄与が大きい、 $\lambda$  が大きい場合は半頂角が比較的小さいので膜理論解に近付くことを示している。この  $\lambda \geq 1000$  の領域に対する  $C_{\Omega_1}$  を第10図に与えておく。

尚、非対称自由曲げ振動についても計算を行ったが、谷等[9]の結果と全く一致した。

### 2.3 ま と め

本章では、截頭円錐殻の軸対称自由曲げ振動を特に外部質量の影響に着目して解析した。





第 10 図 軸対称固有振動数の計算図表,  $m \geq 10$ ,  $\lambda \geq 1000$ .

まず、基礎方程式を与え、数値解析によって固有振動数および振動モードを求め、それらに及ぼす端板質量、形状パラメタおよび截頭比の影響を明かにした。そして、截頭円錐殻の軸対称一次振動数および軸方向剛性を求める計算図表を与えた。

端板質量の変化の影響はそのパラメタ  $m$  が小さい場合顕著であり、それが 10 以上になれば殻体部質量と端板質量との慣性連成は起らないと考えて取扱ってよいと思われる。このことから、実際の構造物の構造要素として一般に上述の場合に相当する質量が端部に存在している截頭円錐殻の動的軸力に対する応答は一次モードが卓越して現われると考えてよいであろうし、又、衝撃的圧力に対する応答を取扱う場合には両端の変位を完全に拘束して解析することができよう。前者については次章で検討することにする。

### 3. 動的軸圧縮荷重に対する軸対称応答

円錐殻の動的挙動に関する研究は、衝撃外圧を受ける場合について Fulton [12] が取扱ったのが最初であると思われるが、これは動的解析ではなくて、応答モードを 1 自由度的に仮定し、エネルギー障壁を越すために必要な衝撃エネルギーを計算したに過ぎなかった。その

後、動的外圧を受ける場合について、Akkas, et al. [13], 谷 [14] が差分解析を行った程度であり、その構造要素としての有用性にも拘らず、解析が数学的に困難であるため、その動的挙動に関する研究結果は比較的少い。一方、ロケットの打上時等にみられる様な動的軸圧縮荷重下における截頭円錐殻の挙動に関する研究は余りみられない。

本章においては、一端固定、他端では集中質量を有し軸方向変位のみが自由である様な境界条件を有する截頭円錐殻について、ステップ状の動的軸圧縮荷重を受ける場合の動的軸対称挫屈の非線型解析を行い、動的軸圧縮挫屈機構を明かにすることを試みる。又、端板質量の影響を検討し、前章における端板質量の軸対称振動に及ぼす影響に関する結果との比較を行う。更に、動挫屈の限界値と静的軸圧縮挫屈荷重とを比較する。すなわち、応答変位を前章と同様に余弦フーリエ級数により展開し、Hamilton の原理によって有限自由度の非線型連立微分方程式を導き、Runge-Kutta-Gill の方法により数値解析を行う。その結果によって動挫屈機構を検討し、ここで取扱う截頭円錐殻の動挫屈は大きく分類して4つの型になることを述べ、更に、動挫屈の限界値は静的挫屈荷重よりも減少し、端板質量の影響が顕著であることを示す [2]。

### 3.1 解 析

前章で考えたのと同じ截頭円錐殻が端板を介して動的軸荷重を受ける場合の応答を解析する (第 11 図)。

解析において以下の仮定を設ける。

- i) 板厚方向変位  $W$  についてのみ 2 次の微小項まで考える。
- ii) } 前章と同じ
- iii) }
- iv) }
- v) }
- vi) }
- vii) }
- viii) 重力の影響は考えない。

本問題の適合条件式は次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 1\right)f - \lambda \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{1}{r e^{\xi}} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 = 0. \quad (11)$$

境界条件は前章において与えた式 (1) と同一である。

$w$  は次式の様に変数分離できると仮定する。ただし、 $w_i(\xi)$  は式 (1) の  $w$  に関する境界条件を満足するものとする。

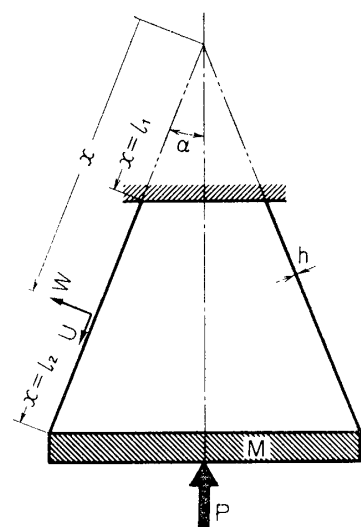
$$w = \sum_i w_i(\xi) g_i(\tau). \quad (12)$$

式 (12) を式 (11) に代入して、応力関数  $f$  を式 (13) の形で求める。

$$f = \sum_i f_i(\xi) g_i(\tau) + \sum_{i,j} f_{ij}(\xi) g_i(\tau) g_j(\tau). \quad (13)$$

ただし、応力関数  $f_i$  および  $f_{ij}$  はそれぞれ境界条件式 (1) を満足する様に求める。

この様にして求められた  $w$  および  $f$  を用い、 $g_i(\tau)$  を変



第 11 図 動的軸荷重を受ける截頭円錐殻。

函数として, Hamilton の原理により, 次の運動方程式が導かれる.

$$\begin{aligned} \sum_i \phi_{n,i} g_i + \sum_i \omega_{n,i} g_i + \sum_{i,j} \mu_{n,i,j} q_i q_j \\ + \sum_{i,j,k} \phi_{n,i,j,k} g_i g_j g_k - 2\lambda^2 q(w_n)_{\xi=\xi_1} = 0, \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (14)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \phi_{n,i} &= \int_0^{\xi_1} \gamma^2 \omega_n w_i e^{2\xi} d\xi + \frac{1}{2} m(w_n w_i)_{\xi=\xi_1}, \\ \omega_{n,i} &= -\lambda \int_0^{\xi_1} f_n \frac{dw_i}{d\xi} d\xi + \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{\xi_1} e^{-2\xi} \frac{d^2 \omega_n}{d\xi^2} \frac{d^2 w_i}{d\xi^2} d\xi, \\ \mu_{n,i,j} &= \frac{1}{2\gamma} \int_0^{\xi_1} e^{-\xi} f_n \frac{dw_i}{d\xi} \frac{dw_j}{d\xi} d\xi - 2\lambda \int_0^{\xi_1} f_{n,i} \frac{dw_j}{d\xi} d\xi, \\ \phi_{n,i,j,k} &= \frac{1}{\gamma} \int_0^{\xi_1} e^{-\xi} f_{n,i} \frac{dw_j}{d\xi} \frac{dw_k}{d\xi} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ただし,  $(\cdot)$  は時間  $\tau$  に関する微分を意味する.

ここで, 式 (1) の  $w$  に関する境界条件を満足する  $w_i$  として, 前章と同様に

$$w_i = C_i \left[ \cos \frac{(\iota-1)\pi\xi}{\xi_1} - \cos \frac{\iota\pi\xi}{\xi_1} \right], \quad (16)$$

を考える. ここに,  $C_i$  は前章と同じ正規化条件から決定される常数である.

式 (16) の  $w_i$  を用いて, 式 (13) の  $f_i$  および  $f_{i,j}$  が式 (11) から次の様に求められる.

$$f_i = C_i \lambda \left[ a_{i-1} \sin \frac{(i-1)\pi\xi}{\xi_1} - a_i \sin \frac{\iota\pi\xi}{\xi_1} + d_{i1} e^{-\xi} + d_{i2} e^{\xi} \right], \quad (17)$$

$$\begin{aligned} f_{i,j} = -\frac{1}{4\gamma} C_i C_j e^{-\xi} \left\{ \sum_{k,l=0,1} (-1)^{k+l} (\iota-k)(j-l) \left( \frac{\pi}{\xi_1} \right)^2 \left[ b_{i+j-k-l} \sin \frac{(\iota+j-k-l)\pi\xi}{\xi_1} \right. \right. \\ \left. \left. + c_{i+j-k-l} \cos \frac{(\iota+j-k-l)\pi\xi}{\xi_1} - b_{i-j-k+l} \sin \frac{(\iota-j-k+l)\pi\xi}{\xi_1} \right. \right. \\ \left. \left. - c_{i-j-k+l} \cos \frac{(\iota-j-k+l)\pi\xi}{\xi_1} + e_{i,j1} e^{2\xi} + e_{i,j2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

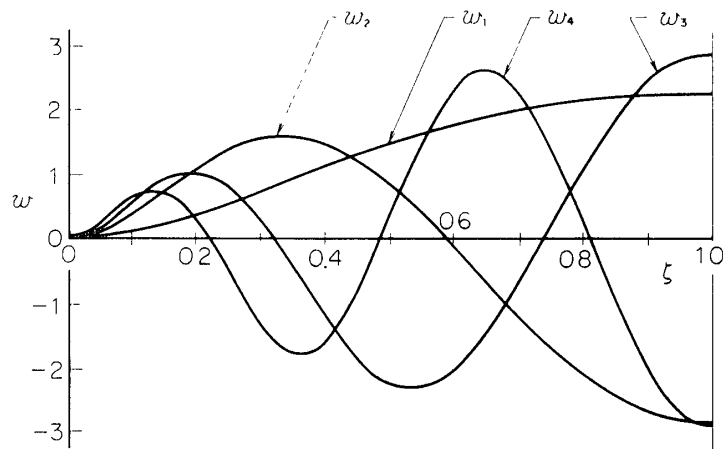
ただし, 式 (18) の  $\sim$  部は  $\iota-j-k+l=0$  の場合  $-\xi/2$  となる. 又,  $a_i, b_i$  および  $c_i$  は次式で与えられる.

$$a_i = \frac{\iota\pi/\xi_1}{(i\pi/\xi_1)^2 + 1}, \quad b_i = \frac{1}{(\iota\pi/\xi_1)[(\iota\pi/\xi_1)^2 + 4]}, \quad c_i = \frac{1}{(\iota\pi/\xi_1)^2 + 4}. \quad (19)$$

式 (17) および式 (18) における  $d_{i1}, d_{i2}, e_{i,j1}, e_{i,j2}$  は積分定数であり,  $f_i$  および  $f_{i,j}$  それぞれが式 (1) の応力函数についての境界条件を満足する様に決定する.

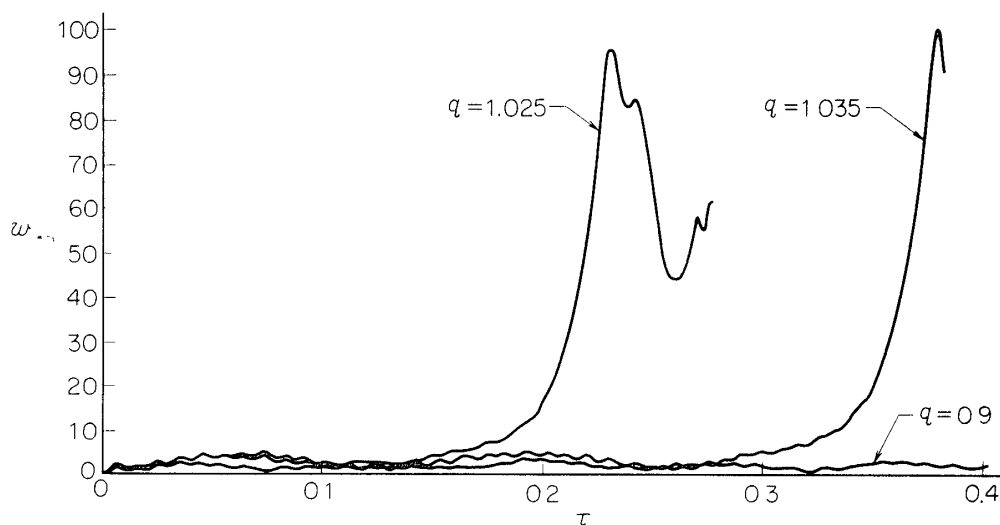
### 3.2 数値計算例

荷重形式としてステップ状に加わる動的軸荷重を考え, 軸対称飛移挫屈が問題となる様な半頂角の大きい截頭円錐殻についての数値解析結果を示す. すなわち,  $\lambda=100$  (たとえば,  $h=1\text{ mm}$ ,  $l_2=300\text{ mm}$ ,  $\alpha=84^\circ 20'$ ),  $\gamma=0.5$ ,  $\nu=0.3$  の殻について数値計算を行い, 軸対称の動的応答および動的軸圧縮挫屈機構を論ずることとする.

第 12 図  $\gamma=0.5$  の場合の各モード.

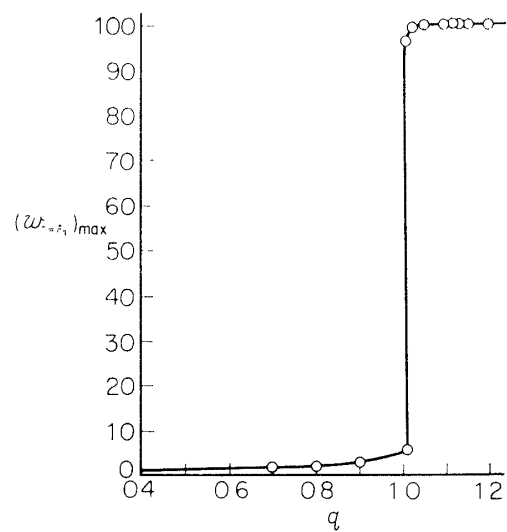
非線型連立方程式 (14) の解法としては, Runge-Kutta-Gill の方法を用い, 初期条件として  $q_i(0)=0$  および  $\dot{q}_i(0)=0$  を採用して, 4 項近似によることにする. この  $w_1 \sim w_4$  のモードを第 12 図に示す. この様な余弦フーリエ級数を用いて応答モードを展開した場合の収束性は比較的良好で, 係数  $q_i$  は全時間に対してほぼ一様に収束し, 第 4 項の係数  $q_4$  は主モードである第 1 項の係数  $q_1$  の数 % 以下である.

截頭円錐殻にステップ状の動的軸荷重が加わる場合, 第 13 図に示す様に, その静的な安定点周りの非線型振動が励起される. この静的な安定点には挫屈前の静的安定解に属するものと挫屈後の夫れに属するものとがあり, この 2 種の安定状態の間にはエネルギー障壁が存在するため, 或る値以上の荷重が加えられなければ挫屈後の安定点周りの領域までゆく非線型振動は励起されない. 荷重の大きさとそれが加えられてから或る十分長い時間後の端末部における変位の最大値との関係を求めると, 第 14 図に示す様に, この変位に有限の跳躍が

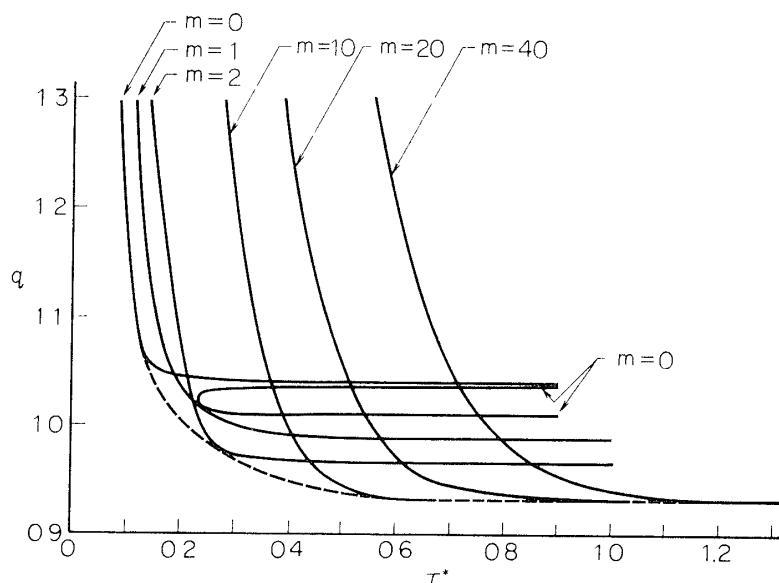
第 13 図 端末応答変位の 1 例,  $\lambda=100$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $m=0$ .

起る荷重が存在する．この様に挫屈後の安定点周りの非線型振動が励起される荷重の最小値を動挫屈の限界値と定義しておく．又，殻体の変形状態がポテンシャル・エネルギー障壁の稜線を通じた時点において動挫屈を起したと定義することにする．

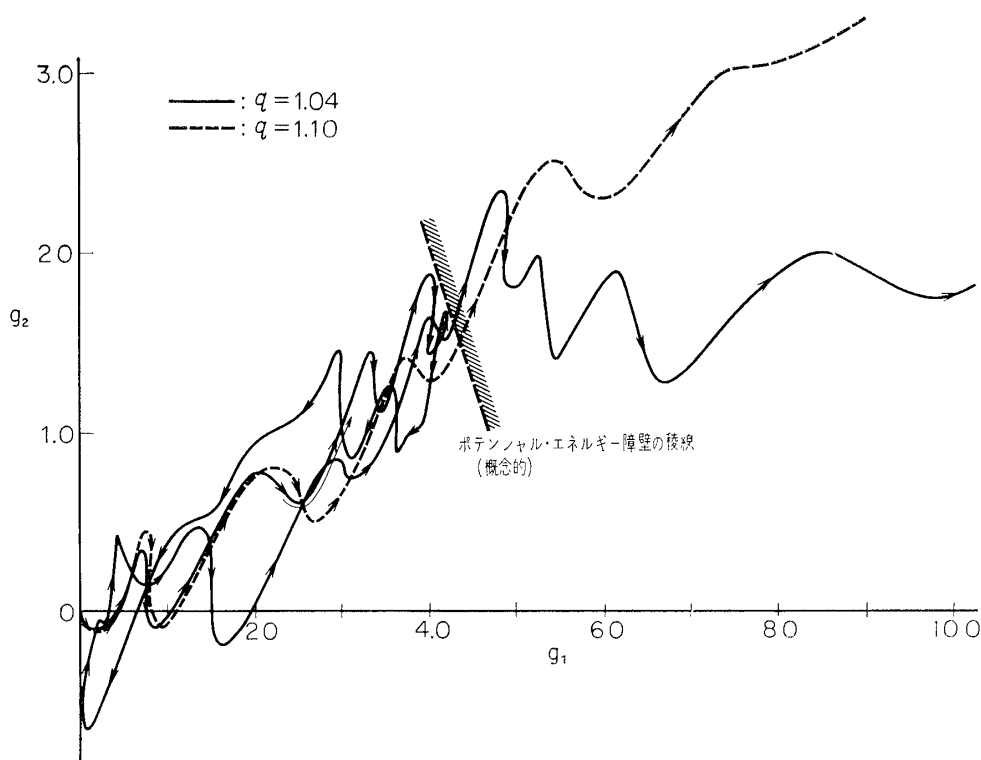
以上の定義のもとに，種々の端板質量パラメタに対して荷重パラメタを変化させて数値計算を行い，動挫屈後の最初の大変形のピークが現れるまでの時間  $\tau^*$  をそれぞれの端板質量パラメタについて第 15 図に示す．計算を行った形状の截頭円錐殻の材料を軟鋼 ( $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\rho=8.05 \times 10^{-10} \text{ kg}\cdot\text{sec}^2/\text{mm}^4$ ) とすると  $t \doteq 0.06\tau$  であり，端板質量の影響を無視できる場合 10 msec 程度で動挫屈が起ることが分る．更に，この時間  $\tau^*$  は荷重の増大に対して単調に減少するとは一概に言えず，端板質量パラメタが微小の場合には，動挫屈が起り難い荷重の領域（たとえば， $m=0$  の場合， $1.03 \lesssim q \lesssim 1.04$ ）が存在する．これに類似の現象は，浅い球形殻の動挫屈 [15] においても示されている．第 16 図は動挫屈が起るまでの変形状態の変化を  $q_1 \sim q_2$  平面に射影したものであり，動挫屈の限界値よりも比較的大きな荷重（たとえば， $q=1.10$ ）の場合には，ポテンシャル・エネルギー障壁の稜線付近において，動挫屈の主モードである第 1 項のモードの連動エネルギーが十分存在しているが，その限界値近傍の荷重（たとえば， $q=1.04$ ）の場合



第 14 図 端末変位の最大値と荷重との関係， $\lambda=100$ ， $\gamma=0.5$ ， $m=0$

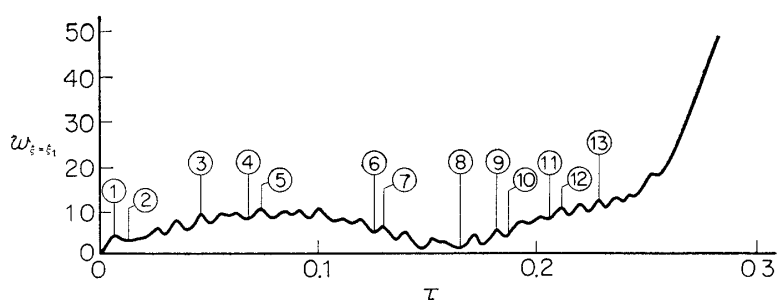


第 15 図  $q$  と  $\tau^*$  との関係， $\lambda=100$ ， $\gamma=0.5$

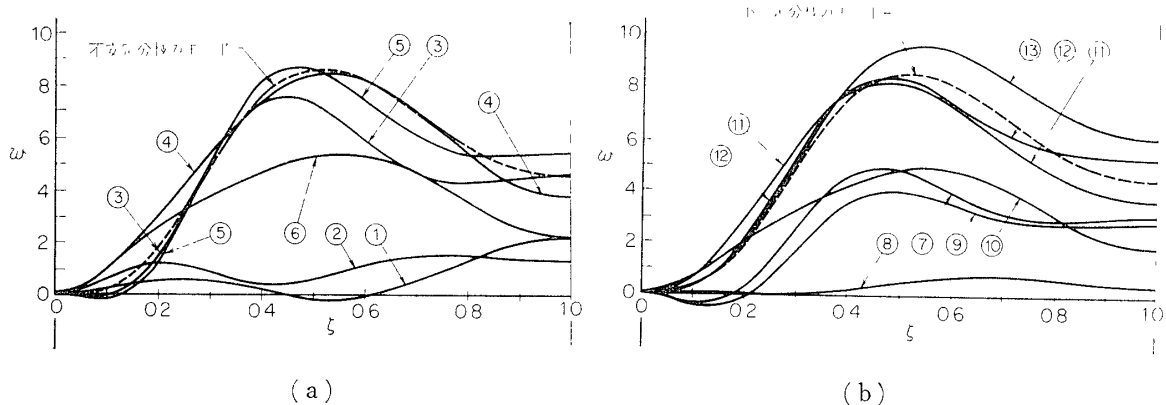


第 16 図 変形経路の  $g_1$ - $q_2$  平面への射影,  $\lambda=100$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $m=0$ .

にはその運動エネルギーが不足し、変形波形の第 1 項モードと第 2 項以降のモードとの間でエネルギーの授受を行いながら、ポテンシャル・エネルギー障壁の低い場所を捜してそこを越え、挫屈に到ることが示されている（概念的に示したポテンシャル・エネルギー障壁の稜線の左側で曲線が逡巡しているのに注意）。すなわち、限界荷重近傍においては、ポテンシャル・エネルギー面の荷重による変化に対して捜し得る障壁の稜線の低い部分が非常に敏感であるため、第 1 回目の変形では捜しきれず、2 回、3 回と繰返し挫屈前の変形領域を運動することにより越え得る点を見付けて挫屈するため、図示の様な領域ができるのである。このことは、第 17 図および第 18 図において、変形波形の時間的变化を見ると更に明かになる。第 17 図は動挫屈限界値近傍の荷重が加わった場合の端末の応答変位の一例であり、



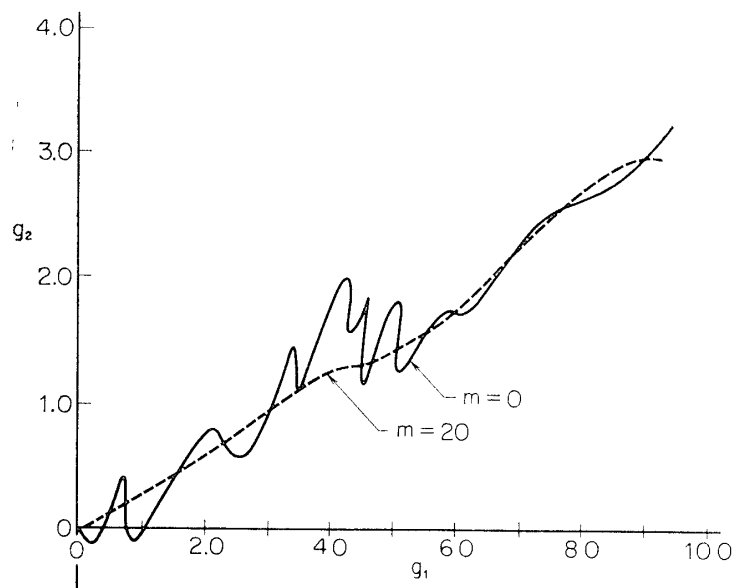
第 17 図 端末応答変位,  $q=1.043$ ,  $\lambda=100$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $m=0$ .



第 18 図 変形モードの時間的变化,  $q=1.043$ ,  $\lambda=100$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $m=0$ .

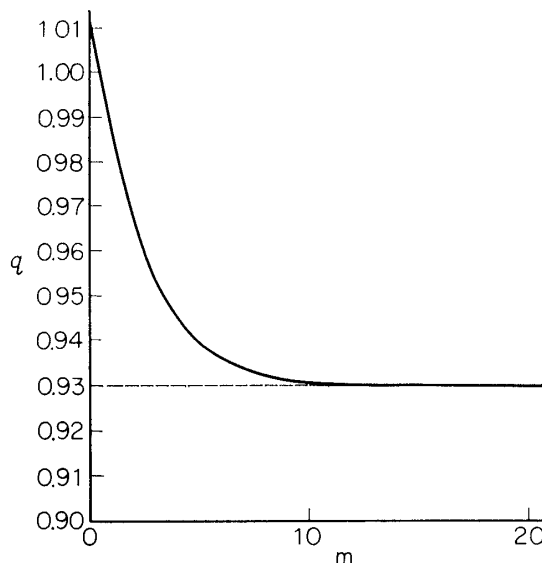
第 18 図は第 17 図で示される番号の時点における変形モードを示したものである. 第 18 図において,  $\tau=0.068\sim 0.074$  においては,  $0.5\leq\zeta\leq 0.8$  の領域の変形量は減少して第 1 項モードの成長がとめられているのに対し,  $\tau=0.212\sim 0.228$  にかけては,  $0.5\leq\zeta\leq 1.0$  の領域の変形量が増大して第 1 項モードが成長しているのが見られる.

一方, 端板質量が増加すると, 鼓体部の質量の影響が小さくなって運動が 1 自由度的なものに近付くため, モード間のエネルギーの授受は問題とならなくなる. そのため, 第 19 図に示す様にスムーズに挫屈へと向い, 第 15 図に示される様に, 動挫屈後の変位の最初のピークが現れるまでの時間  $\tau^*$  は荷重に対して単調減少となるものと考えられる. すなわち, 端板質量が大きい場合と微小な場合とでは, 動挫屈限界値近傍の荷重による挫屈機構は質的に異ってくる.



第 19 図 変形経路の  $q_1-q_2$  平面への射影,  $q=1.05$ ,  $\lambda=100$ ,  $\gamma=0.5$ .

20 分割差分による非線型解析を行った結果、動挫屈限界値は、端板質量パラメタの増大により、軸対称静的挫屈荷重  $q = 1.13$  よりも 11% ( $m=0$ ) ~ 18% ( $m=10$ ) 減少することが第 20 図に示されている。すなわち、動挫屈限界値は端板質量の増加に伴い単調に減少し、端板質量パラメタ  $m$  が 0~5 の領域でこの減少は急激であり、10 以上では限界値は殆ど一定となる。 $m$  が 10 程度以上になると殻体部質量の影響が非常に小さくなることは、前章において線型振動における端板質量と殻体部質量との連成状況について得た結果と一致している。端板質量により限界値が減少するのは興味深いことであり、挫屈安定化の役割を果たしている殻体部質量の慣性力の効果が端板質量の増大により減殺されてゆくためであろう。



第 20 図 動挫屈限界値に及ぼす端板質量の影響,  $\lambda=100$ ,  $\gamma=0.5$ .

### 3.3 ま と め

本章では、ステップ状の動的軸圧縮荷重を受ける浅い截頭円錐殻の軸対称の挙動を端板質量の影響をも考慮して解析した。この殻の動挫屈機構は、荷重および端板質量の大きさにより、次の 4 つの型に分類されると考えてよいであろう。

#### (1) 荷重が動挫屈限界値近傍の場合

- 1) 端板質量が微小な場合：変形波形のモード間のエネルギー授受により、ポテンシャル・エネルギー障壁の低い所を捜して越すことにより、動挫屈が起る。
- 2) 端板質量が大きい場合：応答は 1 自由度的となり、変形モードと端板質量との間のエネルギー授受により、スムーズに動挫屈が起る。
- 3) 端板質量が上記の中間の場合：変形波形の各モードおよび端板質量の間のエネルギー授受により動挫屈が起る。

#### (2) 荷重が動挫屈限界値よりかなり大きい場合

ポテンシャル・エネルギー障壁の稜線近傍において、各変形モードの運動エネルギーが十分存在するため、モード間のエネルギー授受は動挫屈にとって二次的なものとなる。又、端板質量が大きい場合は (1), 3) と同様である。

又、截頭円錐殻の動挫屈の限界値は、本数値計算で対象とした殻体形状の場合、端板質量の増加とともに静的挫屈荷重よりも 11~18% 減少する。この減少の度合は  $m=0\sim5$  において急激で、 $m\geq 10$  では限界値はほぼ一定である。このことは、逆に端板質量を一定にして考えれば、 $m$  の減少すなわち殻体部質量の増大につれて動挫屈限界値が上昇することであり、殻体部質量が動挫屈に対して挫屈安定化の効果を持っており、その効果は  $m=0\sim5$  で顕著であることを示している。



#### 4. 静的軸圧縮挫屈に関する一実験例

円錐殻の弾性安定に関する研究の歴史は比較的浅く、1932 年に提出された徳川 [16] の外圧による截頭円錐殻の挫屈に関する実験的研究が最も古いものと思われる。現在截頭円錐殻の軸圧縮挫屈に関して古典挫屈値と呼ばれているものは、Seide [17] により 1956 年に提出された。その後、Kobayashi [18], Baruch et al. [19] および Tani et al. [20] により、非対称挫屈および面内境界条件を考慮に入れた解析が行われ、Seide により与えられた理論値は両端固定の境界条件の場合に対して良い評価基準となることが示された。

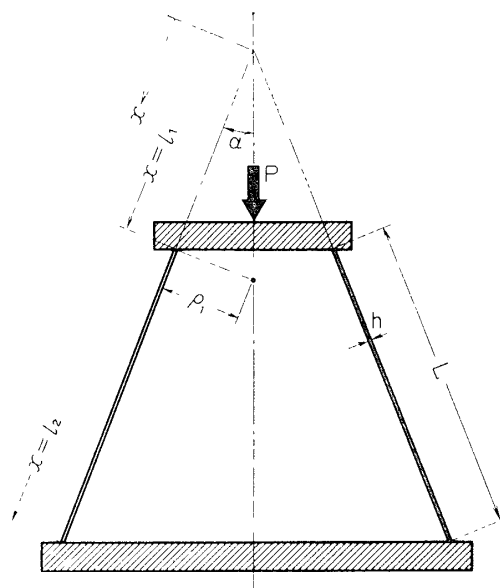
一方、実験結果に関する報告は極めて少い。Weingarten et al. [21] は mylar および鋼板を巻いて作製した試験片を用いて軸圧縮挫屈実験を行い、その実験挫屈荷重の下限界線を与える経験式を示した。この実験結果および経験式に示されている様に、 $\rho_1/h$  (第 21 図参照) の増大に伴い実験値は古典挫屈値よりも急激に低くなり、そのバラツキは非常に大きい (第 28 図参照)。この点を説明する要因としては、初期不整、荷重の偏心、境界条件、残留応力、挫屈前変形等に殻体の耐荷能力が非常に敏感であることが考えられる。最近では試験片および実験の精度も向上し、Arbocz [22] は銅メッキにより作製した継目無しの試験片を用いて、古典挫屈値の 60~80% でバラツキのすくない実験値を得た。

設計資料としては、この様にして得られるものの他に、統計的にバラツキている挫屈荷重の下限界線の適用範囲に対する実験的保証が重要である。この下限界線については前述の Weingarten et al. のほかに Schiffner [23] の理論的研究があるが、何れも初期不整としては中央面の不整を考えるにとどまり、板厚が変化する場合の合理的な処理方法については不明である。そこで本章においては、板厚が母線方向にほぼ直線的に変化する継目無しの截頭円錐殻を用いて静的軸圧縮実験を行い、その挫屈値を検討する。そして、平均板厚を板厚の代表値として実験挫屈荷重を整理して Weingarten et al. の経験式との関係を論じ、更に、挫屈変形の成長および伝播についても調べることにする [3]。

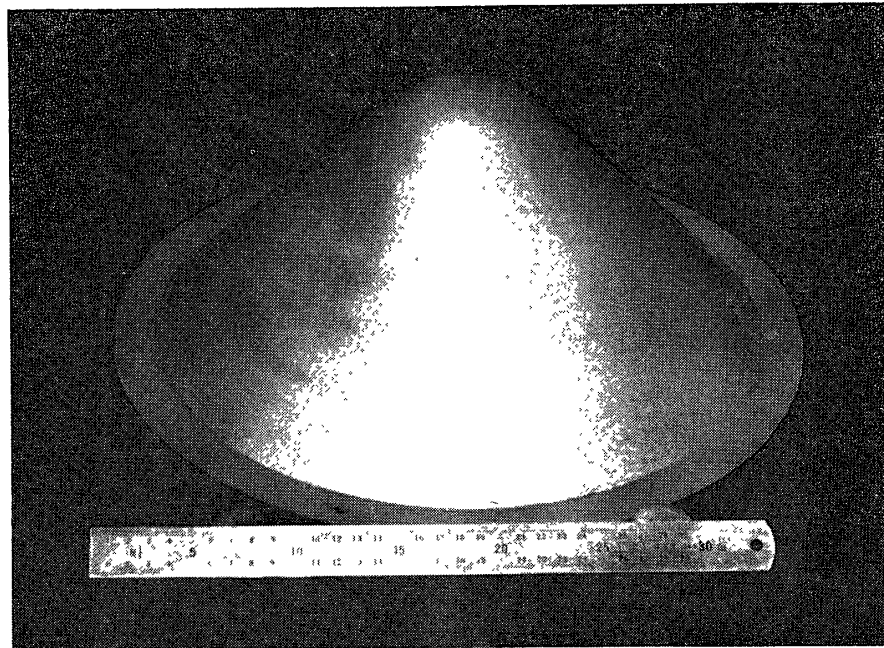
##### 4.1 試験片

###### (1) 試験片の作製

試験片は PMMA 板材から高温真空成形法により作製した。この方法は部分球形殻を作製する場合に筆者の研究室において採用し良好な結果を得ているもの [24] と同一である。この成形過程において最も注意が必要なのは成形温度とその所要時間とであり、この二要素が試験片の不均一度にかなりの影響を及ぼす。成形品から均一度の良くない両端を適当な長さ



第 21 図 軸荷重を受ける截頭円錐殻



第 22 図 成形された試験片.

丈切断して截頭円錐殻試験片を作製する．成形品の一例を第 22 図に示す．

#### (2) 板厚測定

実験に用いた円錐殻の半頂角は  $45^\circ$  である．前項で述べた過程により作製した試験片は，大半径端末付近で厚く小半径端末付近で薄くなっている．その度合は成形温度によっても異なり，20 箇余りの予備成形の結果， $125^\circ\text{C}$  前後の成形温度において板厚にあまり関係なく一番小さくなることが判った．

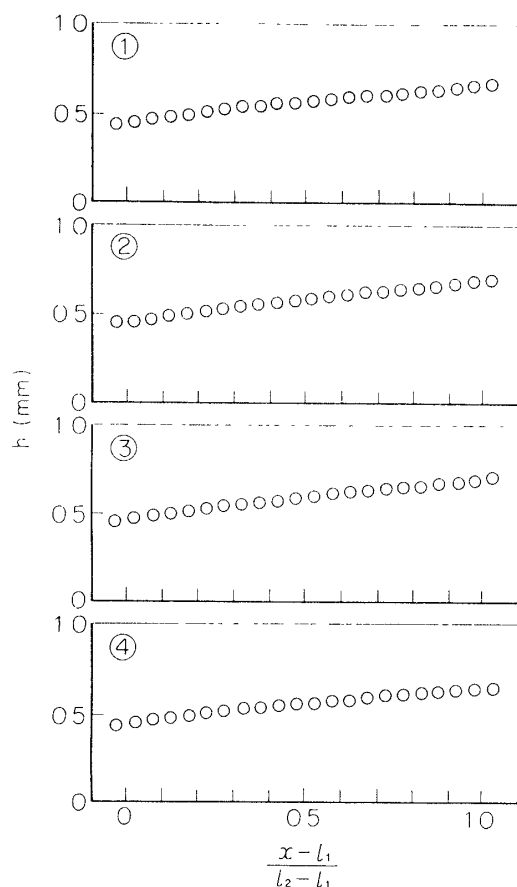
板厚の測定には有効測定値が  $1/100\text{ mm}$  のダイヤル・ゲージを組込んだ板厚測定器を使用し，測定点において手により摂動を加えて最小値をその点の板厚とした．測定点は  $5\text{ mm}$  間隔で選び，測定結果によると板厚は周方向にはほぼ均一で母線方向にほぼ直線的に変化している．測定結果の一例を第 23 図に示す．尚，第 23 図における測定位置は円錐殻を周方向に 4 等分する母線に沿っており，測定後第 27 図に示す様に抵抗線式歪ゲージを貼る．

#### (3) 試験片の固定

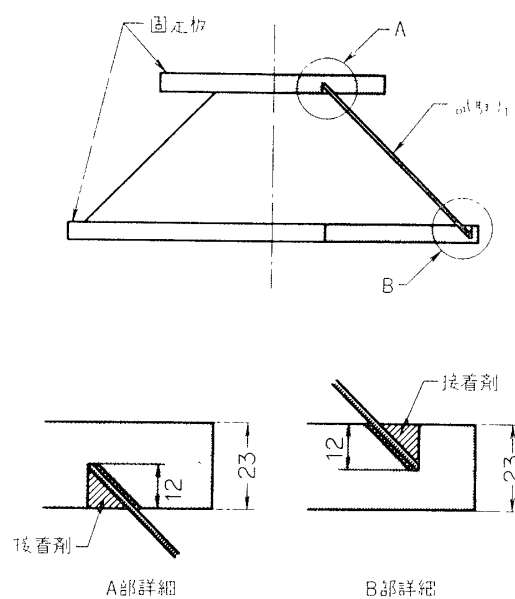
試験片は，第 24 図に示す様に，アルミニウム鋳物製の固定板の  $V$  溝に接着剤を流込んで固定する．この接着剤としては，接着強度，常温硬化性，流動性，硬化時間，硬化の際の体積変化率，経年変化等を考慮して，エポキシ系のものを採用した．接着の際，円錐殻の軸線と固定板とを直交させるためにガイドを用い，更に，接着剤の硬化後に残留応力が存在しない様に，上部円板を釣上げて荷重が入らない様にした．

#### (4) 材料特性

試験片に使用した PMMA は粘弾性特性を有する材料である．筆者の研究室での測定結果 [25] によれば， $15^\circ\pm 1^\circ\text{C}$  において，準静的に荷重を加えた場合のヤング率は  $E=314\text{ kg/mm}^2$  である．ポアソン比は  $\nu=0.4$  と仮定する．



第 23 図 板厚測定結果の 1 例, A 0801.



第 24 図 試験片の固定方法.

#### 4.2 静的軸圧縮挫屈実験および結果

挫屈実験は、板厚のみが異なりその他の諸寸度は同一の 8 箇の試験片について、クロスヘッドの変位制御型の試験機\*を用いて行った。クロスヘッドの変位速度は 0.4 mm/min 以下とし、又、高分子材料の物性値は温度に対して敏感なため、実験中の室温は  $15^{\circ} \pm 1^{\circ}\text{C}$  に保った。実験状態を第 25 図に示す。

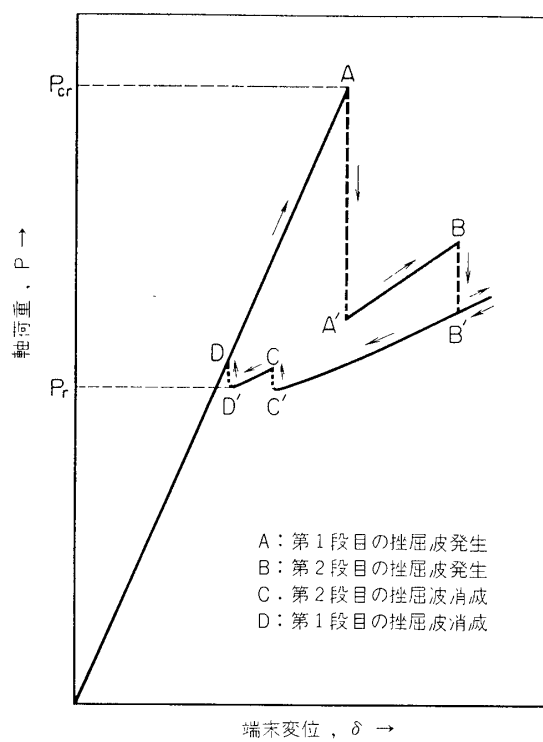
試験片への軸荷重は、曲げ荷重がかからない様に、クロスヘッドに取付けられた圧縮用ロードセルからロードセル受皿および球面座を介して伝達した。又、荷重の偏心を防止するために、第 27 図に示す様に、4 枚の抵抗線式歪ゲージを同一円周上の 4 等分点に母線方向に貼り、その歪量が挫屈前において同一になる様にロードセルと試験片との相対位置を決定した。この様に挫屈前の歪がほぼ軸対称になる様に調整した場合、周方向に対して挫屈波が一樣に発生し、挫屈荷重も最大値を示した。

挫屈波は小半径端末部に近い部分に 1 段発生し、周方向波数は 7~9 であって板厚が薄い程多い。又、更にクロスヘッドを下げると第 1 段目の挫屈波の間下方に第 2 段目の挫屈波が発生した。その様子を第 26 図および第 27 図に示す。尚、荷重を加え始めてから挫屈す

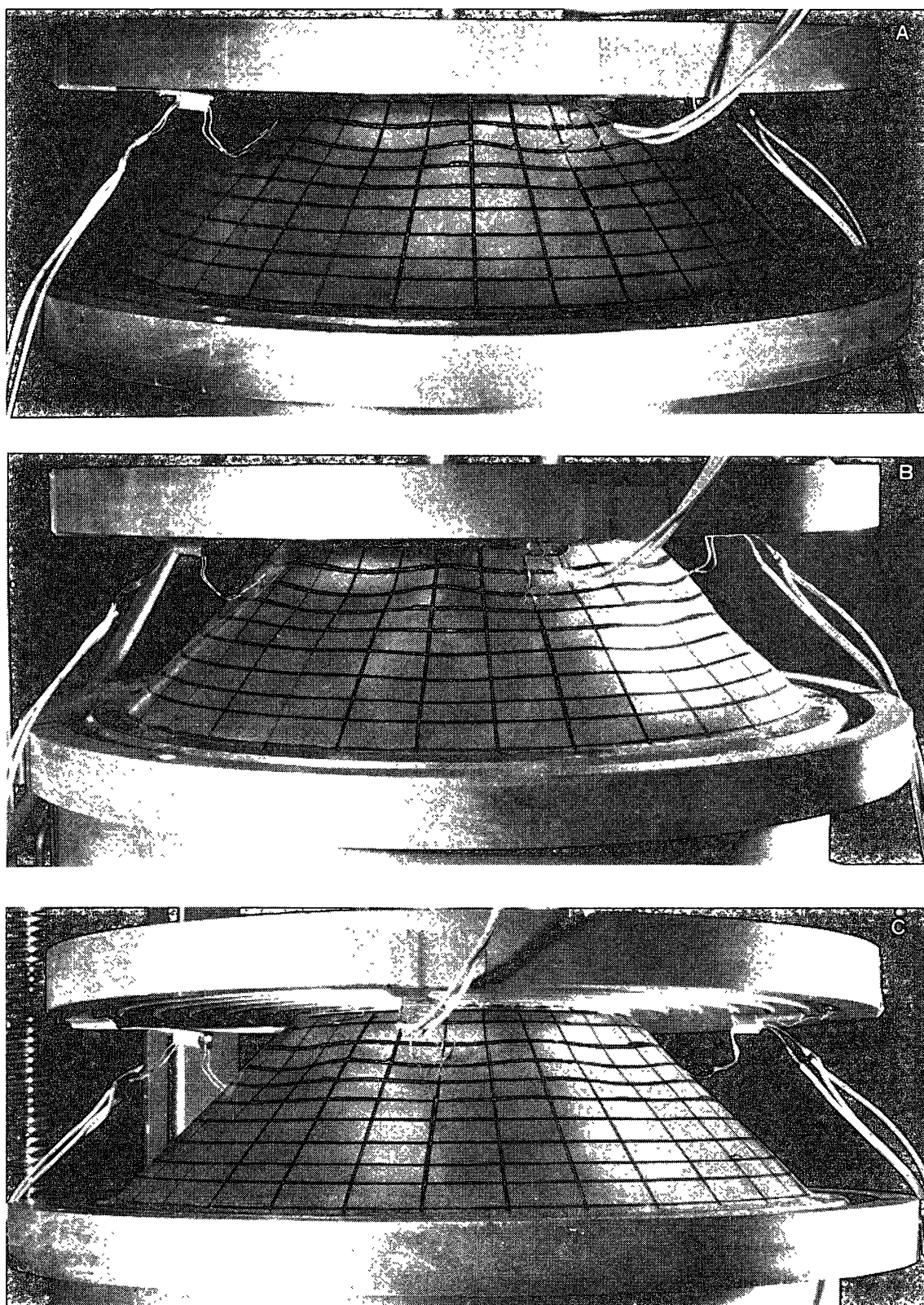
\* 材料部 河田・小林両研究室の御高配による。



第 25 図 実験状態.



第 26 図 軸荷重と端末変位との関係の実験例 (スケッチ).



第 27 図 挫屈波形, A 0801 (記号は第 26 図と対応する).

第 3 表 挫屈荷重の実験結果

$$L/\rho_1=1.06, l_1/l_2=0.49, \alpha=45^\circ, E=314 \text{ kg/mm}^2, \nu=0.4.$$

試験片番号	$\bar{h}(\text{mm})$	$\rho_1/\bar{h}$	$P_{cr}(\text{kg})$	$P_{cr}/P_{cl}$	$P_r(\text{kg})$	$P_r/P_{cl}$	$h_{\max}(\text{mm})$	$P_{cr}/P_{cl}$
A 0501	0.32	298	53(9)	0.83	27	0.42	0.36	0.65
A 0601	0.38	250	75(9)	0.82	37	0.41	0.44	0.61
A 0801	0.55	171	164(8)	0.87	94	0.50	0.64	0.65
A 0802	0.55	173	192(8)	0.95	106	0.60	0.65	0.67
A 0901	0.58	163	206(8)	0.99	113	0.52	0.69	0.71
A 0951	0.63	151	247(7)	0.99	119	0.48	0.75	0.70
A 1001	0.69	138	254(7)	0.86	138	0.42	0.80	0.64
A 1201	0.83	115	312(7)	0.98	243	0.57	0.96	0.73

(注)  $\bar{h}$ : 平均板厚,  $P_{cr}$ : 実験挫屈荷重,  $P_{cl} \equiv 2[3(1-\nu^2)]^{-1/2} \pi E h^2 \cos^2 \alpha$ ,  
 $P_r$ : 復元挫屈値,  $h_{\max}$ : 最小板厚が存在する母線に沿う大半径端末部の板厚,  
( ) 内: 周方向波数.

るまでに要した時間は 1 分程度であった.

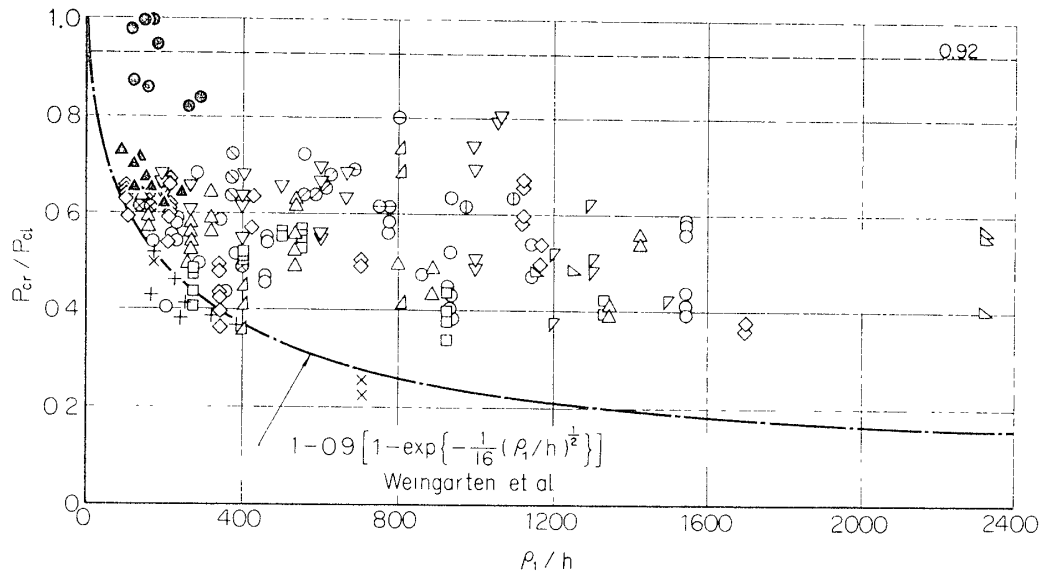
この様にして得られた実験挫屈荷重  $P_{cr}$  を第 3 表に示す. これらの値は夫々の試験片につき繰返し挫屈実験を行って得られた挫屈荷重の高い方から 3 箇採用してその値を平均したものであり, 最大値のみを採用した場合と殆ど差はなかった. この結果を試験片の最も薄い板厚が存在する母線に沿っての平均板厚  $\bar{h}$  を持つ等厚截頭円錐殻に対する古典理論値  $P_{cl}$  を用いて無次元化し, 現在までに報告されている実験結果および Weingarten et al. [21] による経験式とともに第 28 図に示す. Kobayashi の解析 [18] および Weingarten et al. の実験等によると, 一樣板厚の場合においても挫屈は小半径端末寄りに発生するので, 本実験で検討した試験片の様に小半径端末に近い方が板厚の薄い場合, 平均板厚による  $P_{cl}$  を用いての整理では Weingarten et al. の経験式の下側に出ることも予想されるが, 本実験結果は極めて高く, かつそのバラツキも小さく, これまでに等厚截頭円錐殻に対して得られている解析結果  $P_{cr}/P_{cl} \approx 0.92$  の近傍にある. 又, 最も極端になる様な, すなわち, 板厚が最大である大半径端末部における値  $h_{\max}$  を代表値として整理した結果も同時に示しておく. 尚, PMMA 材の遅延時間は 14 秒であり, 負荷速度の影響を考慮すると 10% 程度挫屈値を過大評価していることも考えられるが, この点を勘案しても, 上記の経験式により安全側に見積ることができる.

更に, 挫屈時における挫屈変形の成長過程を見るために, 試験片に貼布した前記の歪ゲージを用いて, 挫屈瞬間における歪を測定した. それによると, 第 29 図に示す様に, ①の歪ゲージ付近に発生した挫屈変形が誘因となり, 周方向に伝播しながら変形が成長することが分る. この挫屈変形が周方向全面に現れるのに 1 秒程度かかっており, この場合, クリープ状変形の進行が挫屈変形領域の拡大を支配している様に思われる.

尚, 除荷の際の復元挫屈値  $P_r$  (第 26 図) も測定し, 第 3 表に示しておく.

### 4.3 ま と め

本章においては, 板厚が母線方向にほぼ直線的に変化する截頭円錐殻の軸圧縮挫屈に関す

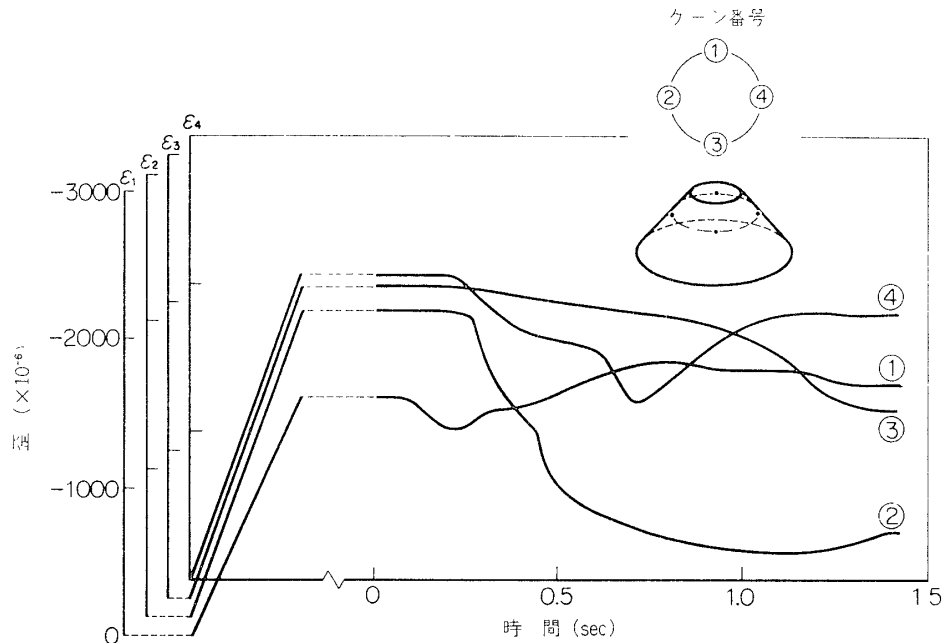


Semi-Apex Angle	5°	10°	15°	20°	25°	30°	40°	45°	60°	75°
PMMA <sup>a)</sup>								⊙ ▲		
Myler <sup>b)</sup>		□		△		○		◇	▽	
Steel <sup>b)</sup>						△			▽	△
Nickel <sup>c)</sup>				+			×			
Copper <sup>d)</sup>	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙					

a) Sunakawa et al  
 b) Weingarten et al  
 c) Lackman et al  
 d) Arbocz

○  $P_{cl}(\bar{h}_f)$   
 ▲  $P_{cl}(h_{max})$

第 28 図 座屈値の実験結果.



第 29 図 座屈時における歪測定結果, A 0801 (番号は第 23 図と対応する)

る一実験結果について述べた。そして、板厚が極端に変化する様な場合を除いて、軸圧縮挫屈荷重は、最も板厚の薄い母線に沿っての平均板厚を代表値として使用すれば、Weingarten et al. の経験式により安全側に与えられることが示された。ただし、上記経験式の適用範囲を拡げるためには、本実験で用いた半頂角  $45^\circ$  以外の殻について更に実験を行う必要があることは論を俟たない。

## 5. あ と が き

本報告においては、薄肉軽構造の一基本要素である截頭円錐殻の挙動に関する研究、すなわち、特に端部質量の影響を考慮に入れた自由曲げ振動特性および衝撃的軸圧縮荷重に対する応答に関する理論解析、ならびに母線方向に板厚が変化する場合の静的軸圧縮挫屈荷重に関する実験、によって得られた二三の知見について述べた。

各章の最後に夫々の結論をまとめてあるので、それらをここに重複して記さないことにする。

薄肉構造の採用される分野は今後益々拡大される事と思われるが、その挙動特に動的荷重に対する安定問題に関する検討は未だに不十分な点が多い。構造の安全性の確保のためにも今後一層の研究が進められることを期待したい。

尚、本研究における数値計算は、本研究所の HITAC 5020 F を用いて倍精度で行った。

昭和 48 年 3 月 31 日 航空力学部

## 文 献

- [1] 児島一雄, 砂川 恵: 日本航空宇宙学会誌, **20** (昭 47), 469.
- [2] 児島一雄, 砂川 恵: 同上, **20** (昭 47), 575.
- [3] 児島一雄, 市田和夫, 砂川 恵: 同上, **21** (昭 48), 32.
- [4] Strutt, M. J. O.: Annalen der Physik, **17** (1933), 729.
- [5] Federhoffer, K.: Proc 5th Internat. Congr. Appl. Mech., (1938), 719.
- [6] Herrmann, G. & Mirsky, I.: Jour. Aero/Space Sci., **7** (1958), 451.
- [7] Seide, P.: Israel Jour. Tech., **3** (1965), 50.
- [8] Lindholm, U. S. & Hu, W. C. L.: Internat. Jour. Mech. Sci., **8** (1966), 561.
- [9] 谷 順二, 八巻 昇: 日本機械学会論文集, **36** (昭 45), 1648.
- [10] Goldberg, J. E.: Proc. 9th Internat. Congr. Appl. Mech., **7** (1963), 333.
- [11] Mushtari, K. L. M. & Sachenkov, A. V.: NASA TM 1433, (1958).
- [12] Fulton, R. E.: Jour. Appl. Mech., **32** (1965), 129.
- [13] Akkas, N. & Bauld, N. R.: Internat. Jour. Mech. Sci., **13** (1971), 689.
- [14] 谷 順二: 第 21 回応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭 46/10), 123.
- [15] 熊井 規, 砂川 恵: 日本航空宇宙学会誌, **19** (昭 46), 452.
- [16] 徳川武定: 造船協会雑纂, No. 125 (昭 7), 151.
- [17] Seide, P.: Jour. Appl. Mech., **23** (1956), 625.
- [18] Kobayashi, S.: NASA CR-707, (1967).



- [19] Baruch, M., Harari, O. & Singer, J.: Jour. Appl. Mech., **37** (1970), 384.
- [20] Tani, J. & Yamaki, N.: AIAA J., **8** (1970), 568.
- [21] Weingarten, V. I., Morgan, E. J. & Seide, P.: AIAA J., **3** (1965), 500.
- [22] Arbocz, J.: NASA CR-1162, (1968).
- [23] Schiffner, K.: DLR FB 66-24, (1966).
- [24] 砂川 恵, 市田和夫・日本航空宇宙学会誌, **21** (昭 48), 263.
- [25] 熊井 規, 砂川 恵 東京大学宇宙航空研究所報告, **8-2(B)** (昭 47/6), 355.
- [26] Lackman, L. & Penzien, J.: Jour. Appl. Mech., **27** (1960), 458.