

ヨーヨー・デスピン (I)

上杉邦憲・二宮敬虔・大西 晃

Yo-yo Despin (I)

By

Kuninori UESUGI, Keiken NINOMIYA and Akira ŌNISHI

Abstract: The problem of despinning a rotating rigid body by the yo-yo despin device is treated analytically both for the two-dimensional model and for the three-dimensional model. Then an experiment of “the rigid yo-yo” is conducted to verify the theory.

The equations of motion of the system are derived for “the rigid yo-yo” and “the stretch yo-yo” and solved for several specific cases to compare with the experimental results.

The results of the experiment coincide satisfactorily with the theory and this study gives some useful data of the development of the yo-yo despin device.

概 要

あるスピンの数で回転している衛星を所定のスピンの数に減速させるための一手段であるヨーヨー・デスピンについて、その運動の解析と実験がおこなわれた。

運動の解析は、二次元モデル次いで三次元モデルを仮定しておこない、さらに衛星とデスピナー（おもり）とを結ぶケーブルにばねを用いた場合の解析がなされた。

実験は、エア・ベアリングによって浮かせた模擬衛星に直流モータでスピンを与えたのち、ヨーヨー・デスピナーを作動させて、スピン減速率を光学的回転検出器によって測定した。さらに高速度カメラによる写真を実験の解析に使用した。

実験結果と理論値との一致はきわめて良好であり、このスピン減速方式の実用化への基礎的なデータが得られた。

記 号

- α ; 衛星重心とケーブル接点を結ぶベクトル
- D ; ばね式ヨーヨーコイル平均径
- d ; ばね式ヨーヨーばね線径
- d ; 衛星重心面とケーブル巻き付面間の距離
- G ; ばね材横弾性係数
- I ; 衛星本体スピン軸まわりの慣性モーメント

- I_0 ; デスピナー付衛星のスピナー軸まわり慣性モーメント
 I_1, I_2, I_3 ; 衛星の x_1, x_2, x_3 軸まわりの慣性モーメント
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; x_1, x_2, x_3 軸方向の単位ベクトル
 k ; ばね定数
 \mathbf{M} ; 衛星に働くモーメントベクトル
 m ; ヨーヨー質量
 m_w ; おもり一個の質量
 m_{cable} ; ケーブル一本の質量
 N ; ばね式ヨーヨー コイル巻き数
 R ; 衛星半径
 r ; 衛星重心とヨーヨー質量間の距離
 \mathbf{r} ; ヨーヨー質量位置ベクトル
 r_1, r_2, r_3 ; ヨーヨー質量位置ベクトルの x_1, x_2, x_3 軸方向成分
 $r_f = \sqrt{I_0/m}$
 S ; ほどけたケーブルの長さ
 S_1 ; tangential release でスピナー停止させる場合のケーブル長 ($=\sqrt{I_0/m}$)
 S_2 ; radial release でスピナー停止させる場合のケーブル長 ($=r_f - R$)
 S_0 ; ばね式ヨーヨーのケーブル部の長さ
 T ; ケーブルに働く張力
 T' ; スピナー停止時の張力
 \mathbf{T} ; 張力ベクトル
 T_1, T_2, T_3 ; 張力ベクトルの x_1, x_2, x_3 軸方向成分
 t ; 時間
 W ; おもり一個の重さ
 W_{cable} ; ケーブル一本の重さ
 W_{spring} ; ばね一本の重さ
 x_1, x_2, x_3 ; 衛星の重心に原点を持ち、主軸方向に軸をもつ座標系
 X, Y, Z ; 慣性座標系
 α ; ヨーヨー質量スイング角
 α ; ケーブルの面外角
 β ; ケーブルほどけ角
 β ; (図 2-3)
 Γ ; 衛星の首振り角
 γ ; ケーブルと x 軸の成す角 (図 2-3)
 δ ; ばねの伸び
 φ ; 衛星回転角
 ψ ; ケーブル接点方向を示す角度 (図 2-6)
 θ ; 衛星と共に回転する座標系からみたヨーヨー質量の方向を示す角度 (図 2-1)

- ρ ; ケーブル線密度
 Φ ; }
 Ψ ; } オイラー角 (図 2-10)
 Θ ; }
 τ_0 ; ばねに働く最大せん断応力
 ω_0 ; 衛星初期スピン数
 ω ; 衛星角速度ベクトル
 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; 衛星角速度の x_1, x_2, x_3 軸方向の成分
 Ω ; Z 軸と x_3 軸のなす角
 λ ; スピン減速率
 添字
 o ; initial
 i ; initial
 f ; final
 in ; inertial
 opt ; optimal

1. 序 論

1.1 作動原理

スピン安定によって軌道に投入された衛星は、それに搭載された実験機器が作動を開始するに先立ち、そのスピン数を減少ないし停止させる必要のある場合が多い。スピン減速のためのトルクとしては、gravitational torque, radiation pressure, magnetic torque によるものなどもあるが、もっとも一般的な方法は、衛星から何らかの質量を放出することによって得られる reaction torque を利用したものであろう。いわゆるヨーヨー・デスピン方式は、この方法の特殊な例として、放出質量に固体（金属のおもり）を用いたもので、米国の JPL および APL で別個に開発された。

その作動原理はきわめて簡単で、衛星のスピン軸に直交する面内に巻きつけられたケーブルの端につけたおもりを衛星から切り離すと、ケーブルは衛星のスピン方向と同方向にほどけていき、その間にケーブルに働く張力によって衛星のスピンを減速させるためのトルクが生じる。ケーブルがすべてほどけたとき、これも衛星本体から切り離すと、おもりはそれまで衛星の持っていた角運動量を持って飛び去り、衛星は所定のスピン数に減速される。この方式の利点は、1. 機構が簡単であり、2. したがって軽量で、3. 動作が確実で、4. 完全にスピンを停止させる場合にはケーブルの長さは初期スピン数によらないことであろう。また欠点としては、衛星の最終スピン数が零でない場合には、初期スピン数に誤差があるとそれがそのまま最終スピン数の誤差となることにある。この欠点を改善するため衛星とおもりを結ぶケーブルにスプリングを用いたばね式ヨーヨー (stretch yo-yo) も開発されている。なお、ケーブルにピアノ線などを用いた一般のヨーヨー・デスピン方式を以後硬式ヨーヨー (rigid yo-yo) と呼ぶことにする。

1.2 運動解析の歴史

ヨーヨー・デスピナーの運動の理論に関する論文は、1961年以降あいついで発表された。Kershner と Newton は硬式ヨーヨーに関し、スピン軸固定でおもりの運動はスピン軸に直交する面内でおこるとした二次元モデルについて、ケーブルが衛星に接する状態でくり出されている間（以後 phase 1 と呼ぶ）の運動を解析した [1]。Fedor は、ケーブルの張力によって衛星に働く transverse force を減ずるため、ケーブルが全部ほどこけた後もケーブル切断を行わず、それがスイングして（この間を phase 2 と呼ぶ）衛星の半径方向に来たときに切り離す方法を提案した [2]。また彼はケーブルの質量を運動方程式に繰り込む近似式を導いた。Eide と Vaughan は理論と実験によって、デスピナーの設計誤差や衛星の慣性モーメントの測定誤差が結果におよぼす影響を調べた [3]。1961年エクスペローラーⅫ号に搭載されたヨーヨー・デスピナーを作動させたところ、初期スピン数に約30%の誤差があったため最終スピン数にもその誤差がもちこされるという不具合が生じた。この結果硬式ヨーヨーの限界が明らかとなり、1962年 Cornille によってばね式ヨーヨーが提案された [4]。この方式の運動解析は、Fedor によって行なわれ [5]、Mentzer は実験によって最終スピン数が零以外の場合にはばね式ヨーヨーが硬式ヨーヨーにまさることを実証した [6]。

以上の理論はすべて二次元モデルを仮定したものであったが、Collins は1967年、衛星が首振りをしている場合の phase 1 におけるおもりの運動を三次元モデルで解いた [7]。

さて、わが国でもスピン安定によって軌道に投入される科学衛星の実現が間近かにせまっている折から、衛星が軌道にはいった後、このスピンを減速する方法の開発が進められている。本稿は、その一環として筆者らが行なってきたヨーヨー・デスピナー開発計画に関する第1報である。

2. 運動の解析

本章では、硬式、ばね式双方の phase 1, phase 2 における運動の解析を二次元モデルでおこなうと共に、われわれがもちいたデスピナー設計法を述べ、さらにケーブルを衛星のスピン軸に直交し重心を通る面からはずして巻いた場合の運動におよぼす影響を三次元運動方程式によって解明する。

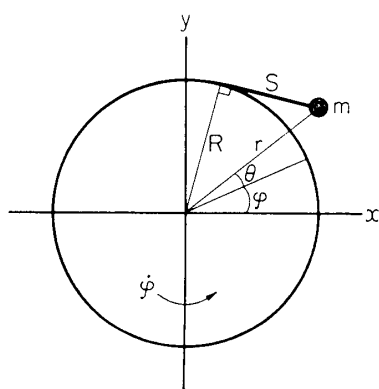


図 2-1 硬式ヨーヨー作動図 (phase 1)

2.1 硬式ヨーヨー

2.1.1 PHASE 1

二次元運動解析では、図 2-1 のように円板状の衛星が円板の軸まわりにスピンしているとする。実際には衛星の並進運動を避けるため円板の中心をはさんで対称の位置に2個のおもりとワイヤーを取付けるのであるが、運動の解析上は、円板の軸を固定としおもりを1個として取扱っても一般性を失わない。図 2-1 より

$$\theta = \frac{S}{R} - \tan^{-1} \frac{S}{R} \quad (1-1)$$

$$r = \sqrt{S^2 + R^2} \quad (1-2)$$

おもりを衛星から切りはなす前のこの系の慣性モーメント（スピン軸まわり）は

$$I_0 = I + mR^2 \quad (2)$$

角運動量およびエネルギーの保存則より

$$I\dot{\varphi} + mr^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta}) = I_0\omega_0 \quad (3-1)$$

$$I\dot{\varphi}^2 + mr^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + m\dot{r}^2 = I_0\omega_0^2 \quad (3-2)$$

以上より

$$\dot{S} = R\omega_0 \quad (4-1)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \frac{I_0 - mS^2}{I_0 + mS^2} \quad (4-2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{S^2}{r^2} \omega_0 \quad (4-3)$$

(4)式を解いて

$$S = R\omega_0 t \quad (5-1)$$

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{I_0}{mR^2}} \tan^{-1}\left(\omega_0 \sqrt{\frac{mR^2}{I_0}} t\right) - \omega_0 t \quad (5-2)$$

$$\theta = \frac{1}{R} \left[S - R \tan^{-1} \frac{S}{R} \right] \quad (5-3)$$

$$(S_0 = 0, \varphi_0 = 0, \theta_0 = 0)$$

(4-2)式より $\dot{\varphi} = 0$ になるのは

$$S = \sqrt{\frac{I_0}{m}} \Delta S_1 \quad (6)$$

のときである。このとき衛星のスピンは止まり、さらにそれ以上のケーブルがくり出されると衛星は反対方向に回転を始める。一方ケーブルが S_1 だけくり出されたとき、これも衛星

本体から切り離せば、衛星本体のスピンは停止したままで、おもりはすべての角運動量をもって飛び去ることになる。ここで(6)式に ω_0 が含まれていない点に注意すべきであろう。すなわちスピンを停止させるに必要なケーブルの長さは初期のスピン数によらない。またスピンを完全に停止させるのではなく任意の角速度に減速させる場合に必要なケーブルの長さは、(S_1 で無次元化して)

$$\frac{S}{S_1} = \sqrt{\frac{1 - \omega_f/\omega_0}{1 + \omega_f/\omega_0}} \quad (7)$$

となる。この関係を図2-2に示した。

次にケーブルに働く張力をもとめよう。衛星の中心をはさんで対称におもりをつけた場合、おのおのケーブルに働く張力は

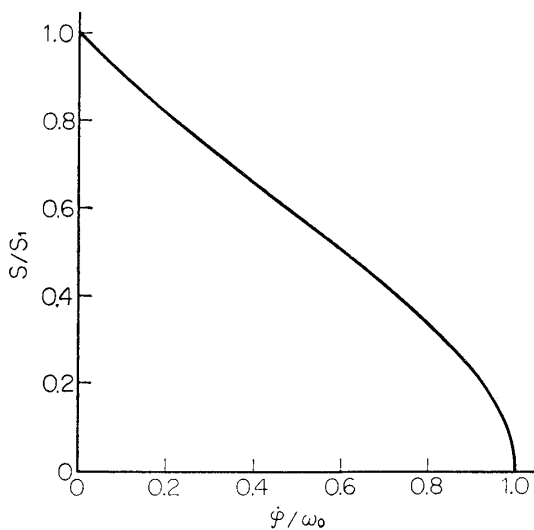


図 2-2 硬式ヨーヨースピンの減速率 (phase 1)

$$T = -\frac{I\dot{\phi}}{2R} \quad (8)$$

(4-1), (4-2) 式より

$$\dot{\phi} = -\frac{4mSI_0R\omega_0^2}{(I_0+mS^2)^2} \quad (9)$$

(8), (9) 式より

$$T = \frac{2mSI_0\omega_0^2}{(I_0+mS^2)^2} = 4\frac{S}{S_1} \left[1 + \left(\frac{S}{S_1} \right)^2 \right]^{-2} T' \quad (10)$$

これより phase 1 における最大張力は

$$T_{\max} = \frac{3}{8} \sqrt{3} m S_1 \omega_0^2 \left(1 - \frac{R^2}{S_1^2} \right) = \frac{3}{4} \sqrt{3} T' \quad \left(\text{at } S = \frac{S_1}{\sqrt{3}} \right) \quad (11)$$

(ただし T' はスピン停止時 ($S=S_1$) の張力)

となる。

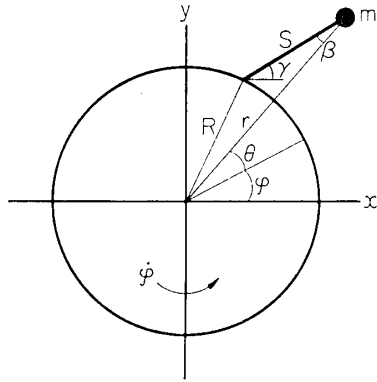


図 2-3 硬式ヨーヨー作動図
(phase 2)

図 2-3 より明らかなように

$$r = R \cos \left(\frac{S}{R} - \theta \right) + \sqrt{S^2 - R^2 \sin^2 \left(\frac{S}{R} - \theta \right)} \quad (12)$$

したがって

$$\dot{r} = \frac{Rr \sin \left(\frac{S}{R} - \theta \right)}{r - R \cos \left(\frac{S}{R} - \theta \right)} \dot{\theta} \quad (13-1)$$

$$\dot{S} = 0 \quad (13-2)$$

(12), (13) 式と (3) 式より

$$\dot{\phi} = \frac{I_0\omega_0 - m\omega_0 r \sqrt{A}}{I + mr^2} \quad (14-1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\omega_0 \sqrt{A}}{r} \quad (14-2)$$

ただし

2.1.2 PHASE 2

前節では、ケーブルが衛星の接線方向にくり出され、所定のスピン数まで減速したところで切りはなされる場合について述べたが、この方法では切断時におけるトルクが大きい、わずかな設計誤差も問題になる可能性がある。そこで図 2-3 に示したように、ケーブルは適当な長さしか接線方向にはくり出さず、その後はケーブルを自由にスイングさせて、ちょうど衛星の半径方向に来たときに切りはなせば生ずるトルクを最小におさえることができるであろう。本節ではこの間の運動について考察を加える。

$$A = \frac{I_0(r^2 - R^2)}{I + (I + mr^2) \frac{R^2 \sin^2\left(\frac{S}{R} - \theta\right)}{\left[r - R \cos\left(\frac{S}{R} - \theta\right)\right]^2}} \quad (14-3)$$

また、スイング角 α については

$$\dot{\alpha} = -\frac{2r^2}{r^2 + S^2 - R^2} \dot{\theta} \quad (14-4)$$

が得られる。

一方 PHASE 2 においてケーブルに働く張力は

$$T = \frac{m}{2} (R\dot{\varphi}^2 \cos \alpha + S\dot{\gamma}^2 + R\dot{\varphi} \sin \alpha) \quad (15-1)$$

$$T = -I\ddot{\varphi}/2 R \sin \alpha \quad (15-2)$$

より、

$$T = \frac{\frac{m}{2} I (R\dot{\varphi}^2 \cos \alpha + S\dot{\gamma}^2)}{I + mR^2 \sin^2 \alpha} \quad (16-1)$$

ただし

$$\dot{\gamma} = \dot{\varphi} + \frac{2r^2}{r^2 + S^2 - R^2} \dot{\theta} \quad (16-2)$$

と表わされる。(14) 式および (16) 式は解析的には解けないが、必要に応じて数値積分を行なえば φ , θ , α , T などを知ることができる。またケーブル切り離しの瞬間すなわちケーブルが衛星の半径方向に来たときに関する考察から、いくつかの、みのり多い結果が得られる。

このとき $\theta = S/R$, $r = R + S$ であり、したがって $\dot{r} = 0$ である。この条件と (14) 式より

$$\dot{\varphi} = \frac{I_0 - mr^2 \sqrt{\frac{I_0}{I} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)}}{I + mr^2} \omega_0 \underline{\Delta} \omega_f \quad (17-1)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{I_0}{I} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)} \omega_0 \underline{\Delta} \dot{\theta}_f \quad (17-2)$$

このときスピンを停止させるのであれば (17-1) 式より

$$r = \sqrt{\frac{I_0}{m}} = S_1 \underline{\Delta} r_f \quad (18-1)$$

あるいは

$$S = \sqrt{\frac{I_0}{m}} - R = S_1 - R \underline{\Delta} S_2 \quad (18-2)$$

すなわち phase 1 の終了時にケーブルを切り離す場合のスピンの停止に必要なケーブル長にくらべ、phase 2 の終了時で切り離す場合には衛星の半径分だけケーブルが短くなる。またこの場合もケーブル長は初期スピン数によらない。(18-1) 式を用いて (17-1) 式を無次元化すると、

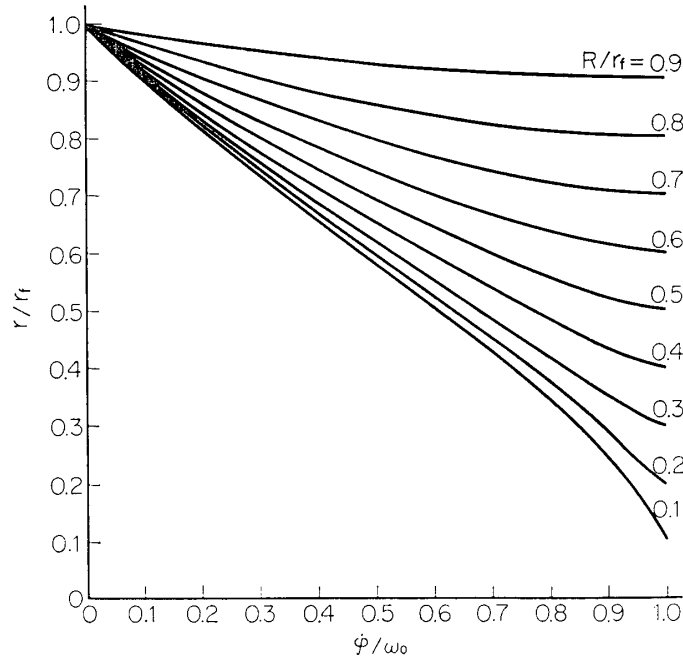


図 2-4 硬式ヨーヨースピナー減速率 (phase 4)

$$\frac{\omega_f}{\omega_0} = \frac{\frac{r_f^2}{r^2} - \sqrt{1 - \frac{R^2}{r_f^2}}}{1 + \frac{r_f^2}{r^2} - \frac{R^2}{r^2}} \Delta\chi \quad (19)$$

すなわち (19) 式が、スピナー減速率をケーブルの長さでデスピナー質量の関数として表わしたものである。図 2-4 にこの関係を R/r_f パラメータにとって示した。

また (7) 式と (18), (19) 式から、 S_2 だけのケーブルがくり出され、スイングをはじめようとする瞬間の衛星のスピナー数 ϕ_1 が求められる。 $\phi_1/\omega_0 = \eta$ とすると、

$$\eta = \frac{1 - (1 - R/r_f)^2}{1 + (1 - R/r_f)^2} \quad (20)$$

すなわちケーブルの長さを S_2 とした場合、ケーブルが衛星に接してほどける間にスピナー数は $\eta\omega_0$ におとされ、さらにスイングしている間に完全なスピナー停止がなされる。

また、phase 2 の終了時における張力は、

$$T_f = \frac{m}{2} r \left[\omega_f^2 + 2\omega_f \dot{\theta}_f + \frac{r}{R} \dot{\theta}_f^2 \right] \quad (20)$$

このときスピナーが停止した場合には

$$T_{f'} = \frac{m}{2 S_2} r_f^2 \omega_0^2 \quad (22)$$

(22) 式で (21) 式を除して無次元化すると

$$\frac{T_f}{T_{f'}} = \frac{r^2}{r_f^2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \left[\chi^2 + 2\chi \sqrt{\frac{1 - R^2/r_f^2}{1 - R^2/r_f^2}} + \frac{1 + R/r}{1 - R^2/r_f^2} \right] \quad (23)$$

phase 2 の終互時に $\dot{\gamma}$ は最大となり、したがって T_f はまたケーブルがスイングしている間における最大張力となっている。そこで T_f' と phase 1 での最大張力 T_{\max} を比較すると、(22) 式を (11) 式より

$$\frac{T_f'}{T_{\max}} = \frac{4}{9} \sqrt{3} \left(1 - \frac{R}{r_f}\right)^{-2} \left(1 + \frac{R}{r_f}\right)^{-1} \quad (24)$$

(24) 式より $R/r_f > 0.19859$ のとき、phase 2 の終了時にスピンの張力の方が phase 1 における最大の張力より大となる。ただし $\omega_f \neq 0$ の場合にはこの関係は成り立たず、phase 1、phase 2 のいずれで最大の張力が生ずるかは ω_0 、 ω_f などの条件によってさまざまである。

2.1.3 ケーブルの質量

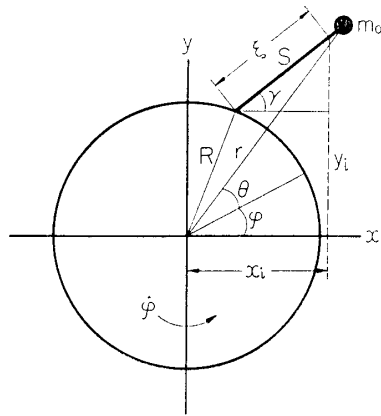


図 2-5 硬式ヨーヨー・ケーブル質量

これまでの議論ではケーブル自身の質量は無視してきたが、デスピナー質量を小さくした場合（このときケーブルは長くなる）などには、ケーブルの質量を無視できなくなる。J. V. Fedor はケーブル質量を運動方程式にとり入れるための近似式を導いている [2] ので、本節ではこれを紹介するにとどめる。

図 2-5 において、座標 (x_i, y_i) にある微小部分のもつ運動エネルギーは、 $1/2 \rho d\xi (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)$ である。一方

$$x_i = R \cos\left(\frac{S}{R} + \varphi\right) + \xi \cos \gamma \quad (25-1)$$

$$y_i = R \sin\left(\frac{S}{R} + \varphi\right) + \xi \sin \gamma \quad (25-2)$$

であり、ケーブル全体の持つ運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} E_{\text{cable}} &= \frac{1}{2} \int_0^S \rho \left(R^2 \dot{\varphi}^2 + 2 R \xi \cos\left(\frac{S}{R} + \varphi - \gamma\right) \dot{\varphi} \dot{\gamma} + \xi^2 \dot{\gamma}^2 \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \rho S \left[R^2 \dot{\varphi}^2 + R S \cos\left(\frac{S}{R} + \varphi - \gamma\right) \dot{\varphi} \dot{\gamma} + \frac{S^2}{3} \dot{\gamma}^2 \right] \end{aligned} \quad (26)$$

(12), (13-1), (16-2) より

$$\begin{aligned} E_{\text{cable}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho S}{3} \left[r^2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + \dot{r}^2 \right] + \frac{1}{2} \rho S \left[\frac{1}{6} (r^2 - S^2 + 3 R^2) \dot{\varphi}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2 r^2 - S^2 - R^2}{3 r^2 + S^2 - R^2} \dot{\varphi} \dot{\theta} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

ケーブル切りはなし寸前においては $\dot{\varphi}$ は小であるから、(27) 式の第 1 項のみを残し、

$$E_{\text{cable}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho S}{3} \left[r^2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + \dot{r}^2 \right] \quad (28)$$

(28) 式より、(3) 式における m を

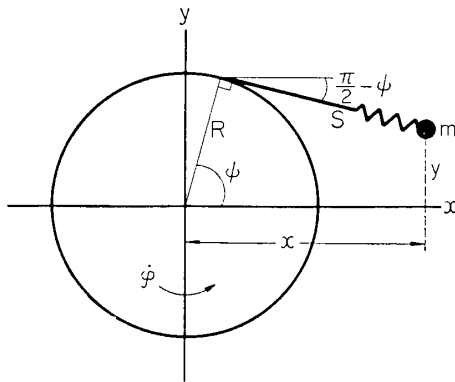
$$m = 2 \left(m_w + \frac{\rho S}{3} \right) = 2 \left(m_w + \frac{1}{3} m_{\text{cable}} \right) \quad (29)$$

とすればよい。ただし m_w はおもりの 1 個の質量で、2 がかかっているのはケーブルを 2 本

用いることを考慮したためである。この(29)式はスピン減速率 χ が小さいときに有効である。

2.2 ばね式ヨーヨー

衛星に搭載された計測機器類は、ある程度の許容誤差をもって所定のスピン数で作動するように設計されているので、この最終スピン数に大きな誤差があることは好ましくない。しかるに硬式ヨーヨーの場合、(19)式より明らかなように、初期スピン数における誤差はそのまま最終スピン数の誤差となる。(ただし最終スピン数が零の場合を除く) またスピン軸まわりの慣性モーメントの不確実性も最終スピン数の誤差の一因となる。これを改善するために考えられたのがばね式ヨーヨーである。その簡単な原理は、正常な作動条件で適当に伸びるように設計されたばねをケーブルに用い、もし初期スピン数が予定と異なった場合は、ばねはこの誤差を補償するように伸びて所定の最終スピン数まで減速させるというものである。



2.2.1 PHASE 1

図2-6に示した座標系をとると、この系の総運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (30)$$

ここで

$$x = R \cos \phi + S \sin \phi \quad (31-1)$$

$$y = R \sin \phi - S \cos \phi \quad (31-2)$$

$$S = R(\phi - \varphi) + \delta \quad (31-3)$$

図2-6 ばね式ヨーヨー作動図 (phase 1) より

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m (S^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\delta}^2 - 2 R \dot{\phi} \dot{\delta}) \quad (32)$$

一方総ポテンシャルエネルギーは

$$U = k \delta^2 \quad (33)$$

したがってこの系のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m (S^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\delta}^2 - 2 R \dot{\phi} \dot{\delta}) - k \delta^2 \quad (34)$$

(34)式より運動方程式

$$\frac{I_0 d\dot{\phi}}{m dt} + RS\dot{\phi}^2 - R \frac{d^2 \delta}{dt^2} = 0 \quad (35-1)$$

$$\frac{d}{dt} (S^2 \dot{\phi}) - RS\dot{\phi}^2 = 0 \quad (35-2)$$

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{2k}{m} \delta - R \frac{d\dot{\phi}}{dt} - S\dot{\phi}^2 = 0 \quad (35-3)$$

が導かれる。

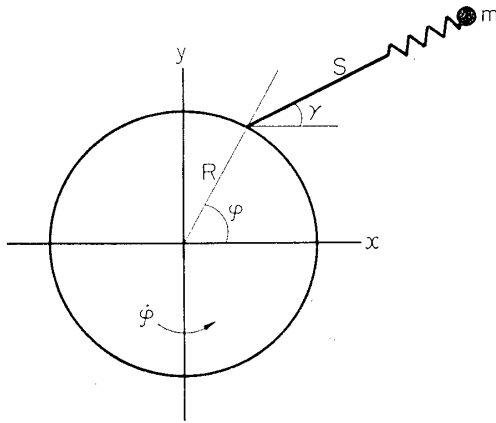


図 2-7 ばね式ヨ-ヨ-作動図 (phase 2)

2.2.2 PHASE 2

図 2-7 に示したこの段階でのラグランジアンは,

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m [R^2 \dot{\varphi}^2 + S^2 \dot{\gamma}^2 + \dot{S}^2 - 2RS\dot{\varphi} \sin(\varphi - \gamma) + 2RS\dot{\varphi} \dot{\gamma} \cos(\varphi - \gamma)] - k\delta^2 \quad (36)$$

これより運動方程式は,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{I_0}{m} \dot{\varphi} - R\dot{S} \sin(\varphi - \gamma) + RS\dot{\gamma} \cos(\varphi - \gamma) \right] + R\dot{S}\dot{\varphi} \cos(\varphi - \gamma) + RS\dot{\varphi}\dot{\gamma} \sin(\varphi - \gamma) = 0 \quad (37-1)$$

$$\frac{d}{dt} [S^2 \dot{\gamma} + RS\dot{\varphi} \cos(\varphi - \gamma)] - R\dot{S}\dot{\varphi} \cos(\varphi - \gamma) - RS\dot{\varphi}\dot{\gamma} \sin(\varphi - \gamma) = 0 \quad (37-2)$$

$$\frac{d}{dt} [\dot{\delta} - R\dot{\varphi} \sin(\varphi - \gamma)] - S\dot{\gamma}^2 - R\dot{\varphi}\dot{\gamma} \cos(\varphi - \gamma) + \frac{2k\delta}{m} = 0 \quad (37-3)$$

となる.

2.2.3 運動方程式の簡単化

ばね式ヨ-ヨ-の運動方程式 (35), (37) 式は取扱いが困難なので, 次のような簡単化がなされる.

(37-1), (37-2) 式より phase 2 での運動量保存の式

$$\frac{I_0}{m} \dot{\varphi} - R\dot{S} \sin(\varphi - \gamma) + RS\dot{\gamma} \cos(\varphi - \gamma) + S^2 \dot{\gamma} + RS\dot{\varphi} \cos(\varphi - \gamma) = \text{const.} \quad (38)$$

が導かれるが, さらに phase 2 終了時 ($\dot{\varphi} = \omega_f$, $\varphi = \gamma$) に (38) 式は

$$\frac{I_0}{m} \omega_f + (S + R)(R\omega_f + S\dot{\gamma}) = \text{const.} \quad (39)$$

となる. またばねの振動を無視するなら, エネルギー保存の式は, phase 2 終了時には

$$\frac{1}{2} I \omega_f^2 + \frac{1}{2} m (R\omega_f + S\dot{\gamma})^2 + k\delta^2 = \text{const.} \quad (40)$$

となり同時に

$$k\delta = \frac{m}{2} (R\omega_f^2 + S\dot{\gamma}^2) \quad (41)$$

が成り立つ. (38)~(41) 式をそのまま解くことはまだ困難なので, さらに次の簡単化がなされる. すなわちばねの長さの微小な変化が最終スピンの数に与える影響は無視できるとして, (39), (40) 式で δ の微小変化に対し $\Delta\omega_f = 0$ とすると,

$$(R\omega_f + S\dot{\gamma}) \Delta\delta + (S + R) \Delta(R\omega_f + S\dot{\gamma}) = 0 \quad (42-1)$$

$$(R\omega_f + S\dot{\gamma}) \Delta(R\omega_f + S\dot{\gamma}) + \frac{2k\delta}{m} \Delta\delta = 0 \quad (42-2)$$

ただし $S=S_0+\delta$, $\Delta S=\Delta\delta$

(42) 式より

$$(R\omega_f + S\dot{\gamma})^2 = 2\frac{k\delta}{m}(R+S) \quad (43)$$

(43) 式を (40) 式に代入して, (右辺は近似的に $I/2\omega_0^2$ とおく) δ について解くと,

$$\delta = \frac{1}{4}[-(S_0+R) + \sqrt{(S_0+R)^2 + \frac{4I}{R}(\omega_0^2 - \omega_f^2)}] \quad (44)$$

(39), (40), (44) 式と $I \approx I_0$ なる近似を用いるとスピンの減速率 χ は,

$$\chi = \frac{\omega_f}{\omega_0} = \frac{I(S+\delta+R) - m(S+R)^3}{I(S+\delta+R) + m(S+R)^3} \quad (45)$$

((45) 式で, $\delta=0$ すなわち硬式ヨーヨーとすると, (19) 式でケーブルの長さが衛星半径にくらべ十分長いとしたときの近似式に一致する.)

ここで, ω_0 および δ の微小変化に対し最終スピン数 ω_f の変化が零になるようなばね定数を見出すため, (44) 式より

$$\Delta\delta = \frac{I\omega_0\Delta\omega_0}{k(S+R+3\delta)} \quad (46)$$

一方 (45) 式より

$$(\omega_0^2 - \omega_f^2) \left[\frac{S+R+3\delta}{(S+R)(S+R+\delta)} \right] \Delta\delta = 2\omega_f\Delta\omega_0 \quad (47)$$

(46), (47) 式よりばね式ヨーヨーに用いるばねの最適ばね定数 k_{opt} は,

$$k_{opt} = \frac{\omega_0^2(1-\chi^2)I}{2\chi(R+S)(R+S+\delta)} \quad (48)$$

k が最適値であるとき, (48) 式を (44) 式に代入して

$$\delta = \frac{\chi}{1-\chi}(S_0+R) \quad (49)$$

(49) 式を再び (48) 式に代入して,

$$k_{opt} = \frac{\omega_0^2(1-\chi)^3 I}{2\chi(S_0+R)^2} \quad (50)$$

このときスピンの減速率は,

$$\chi = 1 - \frac{m(S+R)^2}{I} \quad (51)$$

であらわされる. この結果を I をパラメータにとって図 2-8 に示した. これより明らかなように, たとえば初期スピン数に $\pm 20\%$ の誤差があった場合, 硬式ヨーヨーでは最終スピンの誤差も $\pm 20\%$ となるが, ばね式ヨーヨーの場合には 5% 以下の誤差で, しかも $\Delta\omega_0$ が小さい場合には $\Delta\omega_f$ はほとんど零である. またばね式ヨーヨーは, 衛星の慣性モーメントの変動 (不確実性) に対しても硬式ヨーヨーにくらべ, はるかに鈍感であることがわかる. なお (50) 式より, $\chi \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow \infty$, すなわち最終スピン数が零のときには硬式ヨーヨーが最適であることがわかる.

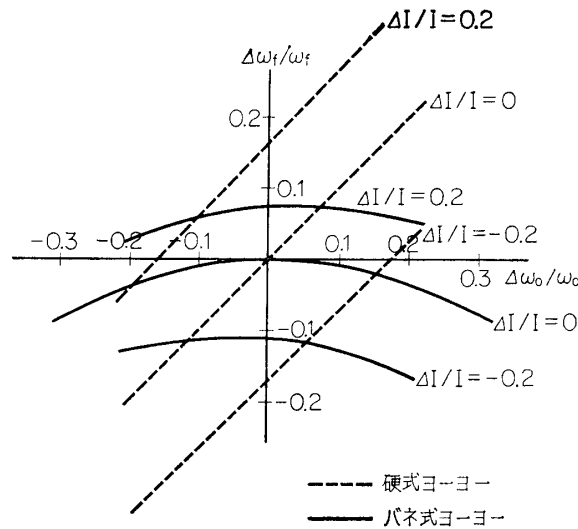


図 2-8 初期スピニング数および慣性モーメントの誤差が最終スピニング数に与える影響

2.3 デスピナーの設計

2.3.1 硬式ヨーヨー・デスピナー質量の決定

スピニング減速率 χ は衛星本体の諸元のほか、デスピナー質量 m と、ケーブル長 S が与えられたとき (19) 式によってあらわれる。一方、実際の設計に際しては χ や S が既知で、その場合に必要となる m を求めることが多いので、(19) 式より m を χ と S の関数としてあらわす。結果は、

$$m = \frac{2I(1-\chi)}{r^2 \left[1 + \left(1 - \frac{2R^2}{r^2} \right) \chi + \sqrt{(1+\chi)^2 - \frac{4R^2}{r^2} \chi} \right] - 2R^2(1-\chi)} \quad (52)$$

(52), (29) 式よりおもり 1 個の重量を

$$W = \frac{m}{2}g - \frac{1}{3}W_{\text{cable}} \quad (53)$$

としてやればよい。

2.3.2 ばね式ヨーヨー・デスピナーの設計

前節同様、衛星諸元 I , R , および χ , S_0 が与えられたとき、デスピナー重量、ばね定数は以下のようにして決められる。

まず (49) 式より δ を求め、(51) 式より得られる

$$m = \frac{I(1-\chi)}{(S_0 + R + \delta)^2} \quad (54)$$

によって m が定まる。次に (50) 式からばね定数 k が求まる。さらにばねの材料、コイル平均径 D , ばね線径 d が決定されると、ばねの有効巻数 (引張りばねだからこれは総巻数に等しい) は、

$$N = \frac{GD}{8C^4k} \quad (55)$$

(ただし $C=D/d$ で 4~15 程度の値にとるのが普通である.)

このときばね材に働く最大せん断応力 τ_0 は

$$\tau_0 = \frac{8Dk\delta}{\pi d^3} \quad (56)$$

で与えられるが、もし決定した D , d に対し τ_0 がばね材の最大許容応力を越えるようなら、あらためて D , d を決めて巻数を求める。しかるにばね式ヨーヨーの場合、巻数やコイル平均径に制限があるので、これらの条件をすべて満足するように設計値を収れんさせるにはかなりの努力を要する。なお、ばねのピッチに特別の制限はないが、 $0.5D$ 以下にとるのが普通である [8].

ばねの設計が終わった段階で、デスピナーのおもり一個の重量は、(54), (29) 式より

$$W = \frac{m}{2}g - \frac{W_{\text{cable}} + W_{\text{spring}}}{3} \quad (57)$$

によって求められる。

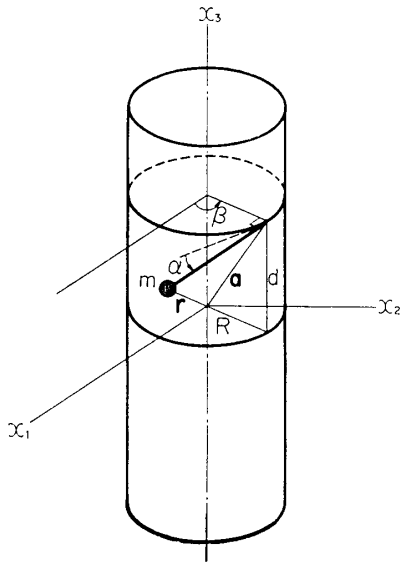


図 2-9 ヨーヨー作動図 (三次元)

2.4 三次元運動解析

衛星の構造上の制限などから、デスピナーを、衛星の重心を通る面内にとりつけられなかった場合には、デスピナー作動時に衛星が首振りをおこして大きく姿勢をくずしたり、あるいはスピン減速自体に失敗することも予想されるが、従来この点の解析はなされていない。そこで本節では図 2-9 に示すように、重心面をはずしておもりを一個つけた場合の phase 1 における運動を考える。

2.4.1 運動方程式

図 2-9 に示したような衛星本体の慣性主軸方向に軸を持った運動座標系 (x_1, x_2, x_3) をとる。

任意の時間において、ほどけたケーブルの長さ S は

$$S = R\beta \quad (58)$$

であり、さらに幾何学的関係から

$$r_1 = R(\cos \beta + \beta \sin \beta \cos \alpha) \quad (59-1)$$

$$r_2 = R(\sin \beta - \beta \cos \beta \cos \alpha) \quad (59-2)$$

$$r_3 = d - R\beta \sin \alpha \quad (59-3)$$

によっておもりの位置が表わされる。

衛星に働くモーメント \mathbf{M} は、

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \times \mathbf{T}$$

であるが、

$$\mathbf{a} = R \cos \beta \cdot \mathbf{i} + R \sin \beta \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \quad (60)$$

$$\mathbf{T} = T(\cos \alpha \sin \beta \cdot \mathbf{i} - \cos \alpha \cos \beta \cdot \mathbf{j} - \sin \alpha \cdot \mathbf{k}) \quad (61)$$

だから

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & -T[(R \sin \alpha \sin \beta - d \cos \alpha \cos \beta) \cdot \mathbf{i} \\ & - (R \sin \alpha \cos \beta + d \cos \alpha \sin \beta) \cdot \mathbf{j} + R \cos \alpha \cdot \mathbf{k}] \end{aligned} \quad (62)$$

したがって Euler 方程式

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 = -T(R \sin \alpha \sin \beta - d \cos \alpha \cos \beta) \quad (63-1)$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = T(R \sin \alpha \cos \beta + d \cos \alpha \sin \beta) \quad (63-2)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = -TR \cos \alpha \quad (63-3)$$

(ただし $I_1 = I_2$ を仮定した)

が導かれる。

一方おもりの運動を慣性空間に対しすると、

$$-T = m \ddot{\mathbf{r}}_{in} \quad (\text{添字 } in \text{ は慣性空間に対する座標であることを示す}) \quad (64)$$

となる。ここで

$$\dot{\mathbf{r}}_{in} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (65-1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{in} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{in} \quad (65-2)$$

であるから、これを順次各成分に分けてしるしてゆく。まず (59) 式より

$$\dot{r}_1 = r_{1\beta} \dot{\beta} + r_{1\alpha} \dot{\alpha} \quad (66-1)$$

$$\dot{r}_2 = r_{2\beta} \dot{\beta} + r_{2\alpha} \dot{\alpha} \quad (66-2)$$

$$\dot{r}_3 = r_{3\beta} \dot{\beta} + r_{3\alpha} \dot{\alpha} \quad (66-3)$$

ただし

$$r_{1\beta} = R \sin \beta \cos \alpha - r_2 \quad (67-1)$$

$$r_{2\beta} = r_1 - R \cos \beta \cos \alpha \quad (67-2)$$

$$r_{3\beta} = -R \sin \alpha \quad (67-3)$$

$$r_{1\alpha} = (r_3 - d) \sin \beta \quad (67-4)$$

$$r_{2\alpha} = - (r_3 - d) \cos \beta \quad (67-5)$$

$$r_{3\alpha} = -R \beta \cos \alpha \quad (67-6)$$

(65-1) 式より

$$\dot{r}_{1in} = \dot{r}_1 + \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 \quad (68-1)$$

$$\dot{r}_{2in} = \dot{r}_2 + \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \quad (68-2)$$

$$\dot{r}_{3in} = \dot{r}_3 + \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1 \quad (68-3)$$

(66) 式より

$$\ddot{r}_1 = r_{1\beta} \ddot{\beta} + r_{1\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{r}_{1\beta} \dot{\beta} + \dot{r}_{1\alpha} \dot{\alpha} \quad (69-1)$$

$$\ddot{r}_2 = r_{2\beta} \ddot{\beta} + r_{2\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{r}_{2\beta} \dot{\beta} + \dot{r}_{2\alpha} \dot{\alpha} \quad (69-2)$$

$$\ddot{r}_3 = r_{3\beta} \ddot{\beta} + r_{3\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{r}_{3\beta} \dot{\beta} + \dot{r}_{3\alpha} \dot{\alpha} \quad (69-3)$$

ただし (67) 式より

$$\dot{r}_{1\beta} = (R \cos \beta \cos \alpha - r_{2\beta}) \dot{\beta} - (R \sin \beta \sin \alpha + r_{2\alpha}) \dot{\alpha} \quad (70-1)$$

$$\dot{r}_{2\beta} = (r_{1\beta} + R \sin \beta \cos \alpha) \dot{\beta} + (r_{1\alpha} + R \cos \beta \sin \alpha) \dot{\alpha} \quad (70-2)$$

$$\dot{r}_{3\beta} = -R \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (70-3)$$

$$\dot{r}_{1\alpha} = (r_{3\beta} \sin \beta + (r_3 - d) \cos \beta) \dot{\beta} + r_{3\alpha} \sin \beta \dot{\alpha} \quad (70-4)$$

$$\dot{r}_{2\alpha} = ((r_3 - d) \sin \beta - r_{3\beta} \cos \beta) \dot{\beta} - r_{3\alpha} \cos \beta \dot{\alpha} \quad (70-5)$$

$$\dot{r}_{3\alpha} = -R \cos \alpha \dot{\beta} + R \beta \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (70-6)$$

したがって (65-2) 式より

$$\dot{r}_{1in} = \dot{r}_1 + E_1 + F_1 + C_1 \quad (71-1)$$

$$\dot{r}_{2in} = \dot{r}_2 + E_2 + F_2 + C_2 \quad (71-2)$$

$$\dot{r}_{3in} = \dot{r}_3 + E_3 + F_3 + C_3 \quad (71-3)$$

ここで

$$E_1 = \dot{\omega}_2 r_3 - \dot{\omega}_3 r_2 \quad (72-1)$$

$$E_2 = \dot{\omega}_3 r_1 - \dot{\omega}_1 r_3 \quad (72-2)$$

$$E_3 = \dot{\omega}_1 r_2 - \dot{\omega}_2 r_1 \quad (72-3)$$

$$F_1 = \omega_2 \dot{r}_3 - \omega_3 \dot{r}_2 \quad (73-1)$$

$$F_2 = \omega_3 \dot{r}_1 - \omega_1 \dot{r}_3 \quad (73-2)$$

$$F_3 = \omega_1 \dot{r}_2 - \omega_2 \dot{r}_1 \quad (73-3)$$

$$C_1 = \omega_2 \dot{r}_{3in} - \omega_3 \dot{r}_{2in} \quad (74-1)$$

$$C_2 = \omega_3 \dot{r}_{1in} - \omega_1 \dot{r}_{3in} \quad (74-2)$$

$$C_3 = \omega_1 \dot{r}_{2in} - \omega_2 \dot{r}_{1in} \quad (74-3)$$

さらに張力の各成分は,

$$T_1 = -m \dot{r}_{1in} = T \cos \alpha \sin \beta \quad (75-1)$$

$$T_2 = -m \dot{r}_{2in} = -T \cos \alpha \cos \beta \quad (75-2)$$

$$T_3 = -m \dot{r}_{3in} = -T \sin \alpha \quad (75-3)$$

となる。以下を解けばよいが、そのためには $\dot{\beta}$, $\dot{\alpha}$, T を明らかにする必要がある。ここで

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (76)$$

とおいて (63) 式および (66)~(75) 式より a_{ij} , b_i を求めると,

$$a_{11} = r_{1\beta} \quad (77-1)$$

$$a_{12} = r_{1\alpha} \quad (77-2)$$

$$a_{13} = \frac{1}{m} \cos \alpha \sin \beta + \frac{r_3}{I_1} (R \sin \alpha \cos \beta + d \cos \alpha \sin \beta) + \frac{r_2}{I_3} R \cos \alpha \quad (77-3)$$

$$a_{21} = r_{2\beta} \quad (77-4)$$

$$a_{22} = r_{2\alpha} \quad (77-5)$$

$$a_{23} = -\frac{1}{m} \cos \alpha \cos \beta - \frac{r_1}{I_3} R \cos \alpha + \frac{r_3}{I_1} (R \sin \alpha \sin \beta - d \cos \alpha \cos \beta) \quad (77-6)$$

$$a_{31} = r_{3\beta} \quad (77-7)$$

$$a_{32} = r_{3\alpha} \quad (77-8)$$

$$a_{33} = -\frac{1}{m} \sin \alpha - \frac{r_2}{I_1} (R \sin \alpha \sin \beta - d \cos \alpha \cos \beta) - \frac{r_1}{I_3} (R \sin \alpha \cos \beta + d \cos \alpha \sin \beta) \quad (77-9)$$

$$b_1 = -C_1 - F_1 + \frac{I_1 - I_3}{I_1} r_3 \omega_1 \omega_3 - \dot{r}_{1\beta} \dot{\beta} - \dot{r}_{1\alpha} \dot{\alpha} \quad (78-1)$$

$$b_2 = -C_2 - F_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_1} r_3 \omega_2 \omega_3 - \dot{r}_{2\beta} \dot{\beta} - \dot{r}_{2\alpha} \dot{\alpha} \quad (78-2)$$

$$b_3 = -C_3 - F_3 - \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 (r_2 \omega_2 + r_1 \omega_1) - \dot{r}_{3\beta} \dot{\beta} - \dot{r}_{3\alpha} \dot{\alpha} \quad (78-3)$$

これを解いて $\dot{\beta}$, $\dot{\alpha}$, T を求めれば, 次の7元一次常微分方程式が得られる. すなわち

$$\frac{dy_1}{dt} \triangleq \dot{\omega}_1 = -\frac{1}{I_1} [T(R \sin \alpha \sin \beta - d \cos \alpha \cos \beta) - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3] \quad (79-1)$$

$$\frac{dy_2}{dt} \triangleq \dot{\omega}_2 = \frac{1}{I_1} [T(R \sin \alpha \cos \beta + d \cos \alpha \sin \beta) - (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3] \quad (79-2)$$

$$\frac{dy_3}{dt} \triangleq \dot{\omega}_3 = -\frac{1}{I_3} TR \cos \alpha \quad (79-3)$$

$$\frac{dy_4}{dt} \triangleq \dot{\beta} = y_6 \quad (79-4)$$

$$\frac{dy_5}{dt} \triangleq \dot{\alpha} = y_7 \quad (79-5)$$

$$\frac{dy_6}{dt} \triangleq \ddot{\beta} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}^{-1} b_j \quad (79-6)$$

$$\frac{dy_7}{dt} \triangleq \ddot{\alpha} = \sum_{j=1}^3 a_{2j}^{-1} b_j \quad (79-7)$$

ただし

$$T = \sum_{j=1}^3 a_{3j}^{-1} b_j \quad (79-8)$$

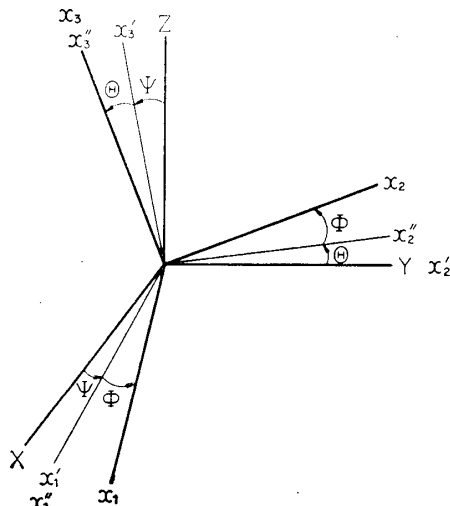


図 2-10 慣性座標系と運動座標系

れば,

(79) 式を数値積分することにより運動の様子を知ることができるが, その前に物理的に興味の深いそのほかの諸量を導入しておく.

まず, 慣性空間に対する衛星の運動を知るため, いわゆるオイラー角を導入する. 衛星はデスピナー作動によって回転運動のみをおこない, 重心の移動はないものとし, 衛星の重心に原点をもつ慣性座標系 (X, Y, Z) を考える. 図 2-10 に示したごとく, まず Y 軸まわりに Ψ だけ回転して得られる座標系を (x_1', Y, x_3') とする. 次に x_1' に軸まわりに Θ だけ回転して得られる座標系を (x_1', x_2'', x_3''') とする. 最後に x_3'' 軸まわりに Φ だけ回転して得られた座標系 (x_1, x_2, x_3) をもって, 本節で考えてきた運動座標系とす

$$\dot{\Phi} = \omega_3 + \omega_1 \tan \Theta \sin \Phi + \omega_2 \tan \Theta \cos \Phi \quad (80-1)$$

$$\dot{\Theta} = \omega_1 \cos \Phi - \omega_2 \sin \Phi \quad (80-2)$$

$$\dot{\Psi} = \omega_1 \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} + \omega_2 \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} \quad (80-3)$$

の関係が成り立つ。いま重心の運動は無視しているから、衛星の対称軸 x_3 と慣性系 Z 軸とのなす角 Ω は

$$\Omega = \arccos(\cos \Psi \cos \Theta) \quad (81)$$

であらわされる。

次に衛星の首振り角すなわち対称軸と角運動量ベクトルのなす角 Γ は、

$$\Gamma = \arctan\left(\frac{I_1 \omega_{12}}{I_3 \omega_3}\right) \quad (82)$$

ただし

$$\omega_{12} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

であらわされる。次節以降では (79) 式に (80) 式を加え、10 元の方程式を与えられた初期条件のもとで解くことにする。

2.4.2 初期条件

おもりを切りはなす瞬間に満たされるべき条件は、 $\beta_i = 0$, $r_i = 0$ である。この時点で α は定義されないが、 $\beta_i = 0$, $r_i = 0$ より $\alpha_i = 0$ となる。これより (76) 式の係数行列の各項は α_{23} を除いてすべて零となる。したがって $t=0$ のときには $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\beta}$ が (76) 式からは得られないので、これらは後に他の諸量が決定されてから導くことにする。本稿ではケーブルが重心面に巻かれていない場合の影響を調べるのが目的であるから、衛星の初期角速度を

$$\omega_{1i} = \omega_{2i} = 0 \quad (83-1)$$

$$\omega_{3i} \neq 0 \quad (83-2)$$

とする。

以上の諸量が決定されると

$$\dot{\beta}_i = \omega_{3i} \quad (84-1)$$

$$\dot{\alpha}_i = 0 \quad (84-2)$$

$$T_i = 0 \quad (84-3)$$

が導かれる。次に $\ddot{\beta}_i$, $\ddot{\alpha}_i$ を求める。

(76) 式をさらに微分して

$$\dot{b}_{3i} = \dot{a}_{31i} \dot{\beta}_i + \dot{a}_{32i} \dot{\alpha}_i \quad (85-1)$$

$$\dot{b}_{1i} = \dot{a}_{11i} \dot{\beta}_i + \dot{a}_{12i} \dot{\alpha}_i \quad (85-2)$$

(85) 式と (78-1), (78-3) 式の時間微分より

$$\ddot{\alpha}_i = 0 \quad (86-1)$$

$$\ddot{\beta}_i = 0 \quad (86-2)$$

さらにオイラー角については、

$$\dot{\Phi}_i = 0 \quad (87-1)$$

$$\dot{\Psi}_i = 0 \quad (87-2)$$

$$\theta_i = 0 \tag{87-3}$$

とする。すなわち $t=0$ で、運動座標系 (x_1, x_2, x_3) は慣性座標系 (X, Y, Z) に一致するようにとられる。

2.4.3 計算結果と検討

(79)~(82) 式を初期条件 (83)~(87) のもとで数値積分して得られた結果を図 2-11~2-17 に示した。衛星およびデスピナーの諸元としては、一例として次の値を用いた。

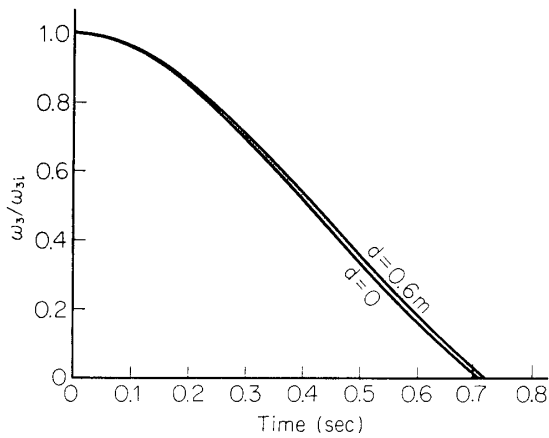


図 2-11 スピン数

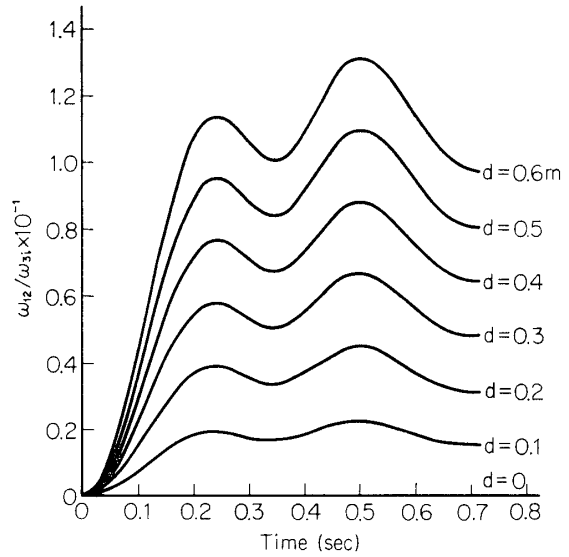


図 2-12 衛星の対称軸に直交する軸まわりの回転数

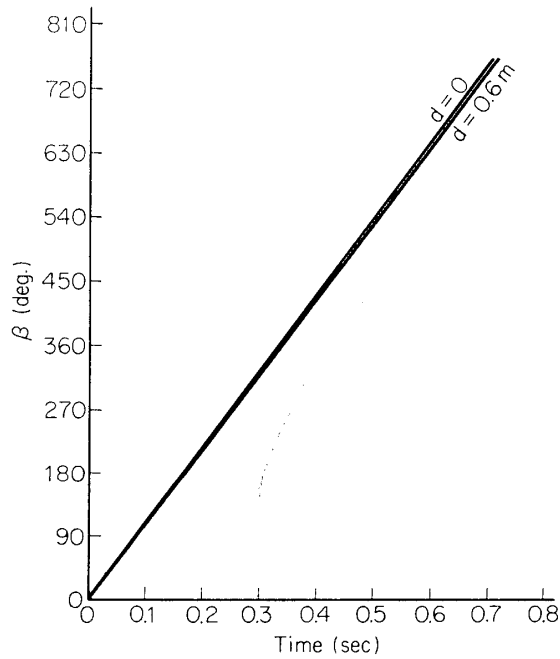


図 2-13 ほどけ角

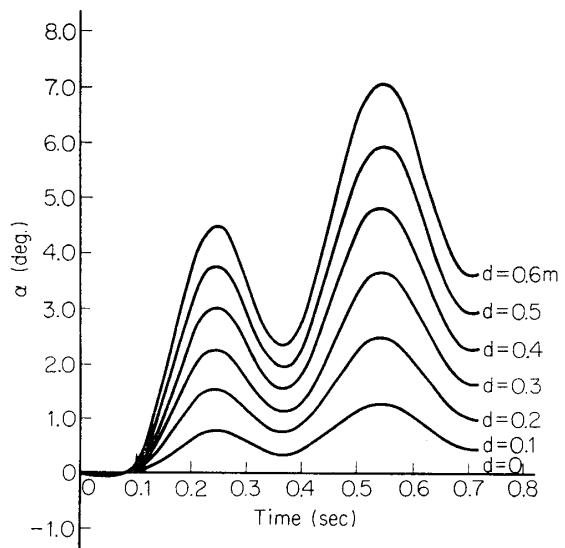


図 2-14 面外角

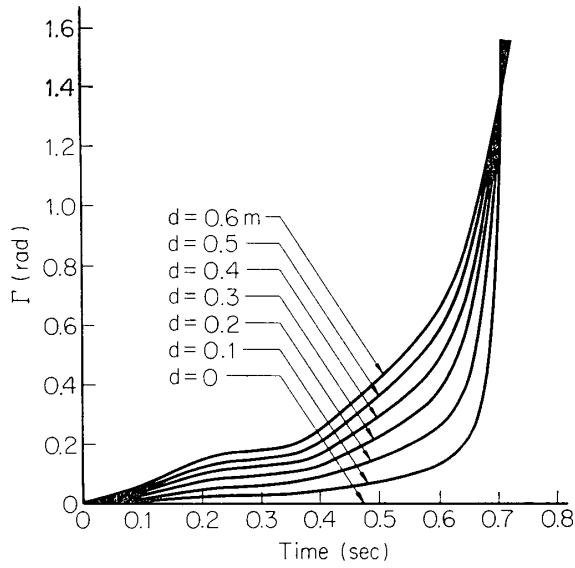


図 2-15 くび振り角

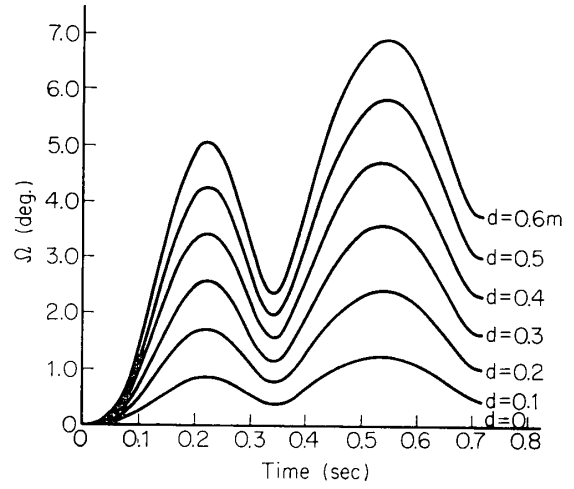


図 2-16 衛星対称軸と慣性系 Z 軸とのなす角

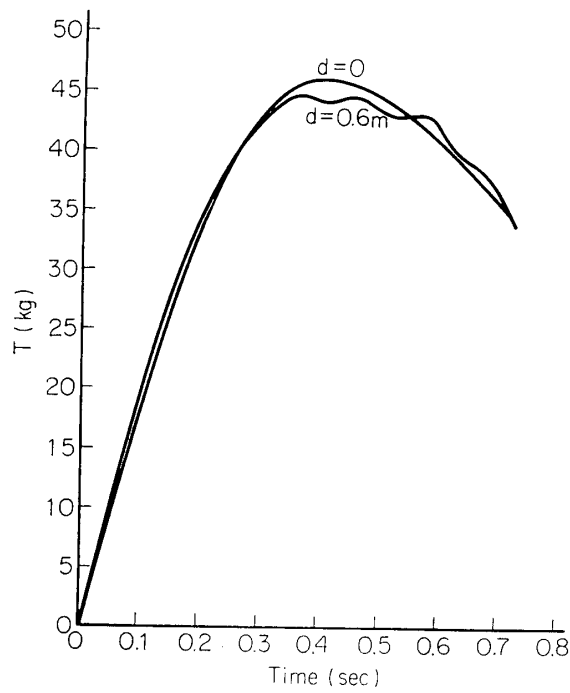


図 2-17 ケーブル張力

$$R = 0.375 \text{ m}$$

$$I_1 = I_2 = 0.6 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$$

$$I_3 = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$$

$$m = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 / \text{m}$$

$$\omega_{3i} = 6\pi (3c/c)$$

計算は宇航研 HITAC 5020 F を用いて行ない、微分方程式の解法には Runge-Kutta-Gill 法、(76) 式の解法には掃出法を用いた。積分は $\omega_3=0$ になるか、他の物理的に起り得ない状態になるまで行なわれた。たとえば面外角 α が 90° を越えたり、ケーブルのほどけ角 β が減少を始めたりする場合である。ただしここではケーブル巻き付け面を重心面から 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60 cm はずした場合について計算したが、そのような事態はおこらず、いずれもスピンは零に達した。

図 2-11, 13, 17 より明らかなように、スピン減速率、ほどけたケーブルの長さ、ケーブルの張力に関しては $d=0$ (これは二次元モデルでの解析結果と全く一致する) と $d=0.6$ の場合の差は小さく、巻き付け面を重心面からはずしたことによる影響はあまり認められない。また衛星のスピン軸が、デスピナー作動中、初期の方向 (Z 軸) と成す角 Ω は 5° 程度であり (図 2-16)、したがって面外角 α も高々 10° 以内である。(図 2-14)

一方図 2-14 に見るごとく首振り角は、 d の影響を大きく受け、スピンを停止させた場合 $d=0$ 以外では、図 2-12 に示したような角速度をもって衛星はタンブリングをおこすことになる。

本稿で行なった解析は一つの case study にすぎないので断定的なことは言えないが、ケーブル巻き付け面を重心面から多少はなしても、デスピンに失敗するおそれは少ないが、 $\chi=0$ のとき、タンブリングが残る点についてはさらに考察が必要であろう。なお今後の課題として、 $\omega_{12i} \neq 0$ すなわちデスピナー作動開始前に衛星が首振りをしている場合についても検討の要がある。

3. 硬式ヨーヨーの実験

実験の目的は、ヨーヨー・デスピナー開発のための基礎的な資料を得ることにあり、radial release 型の硬式ヨーヨーで実験を行なった。

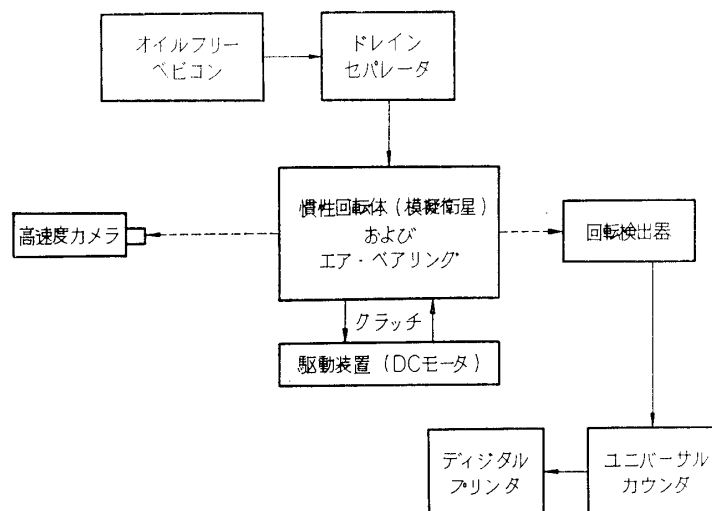


図 3-1 ブロック図

3.1 実験装置

図 3-1 に実験装置のブロック図を示す。模擬衛星は、ドイレンセパレータから空気軸受に送られる空気（約 1 気圧）によって低摩擦で保持される。衛星のスピンは、クラッチを介して直流モータによって与え、電源電圧を調節して所望の回転数を得る。この回転数は光電式回転検出器で検出され、ユニバーサル・カウンターにより計測されて、その結果は測定時刻と共にデジタル・プリンターで印字記録される。さらに高速度カメラによって、デスピナー作動状況を撮影することにより、カッタ作動の同時性、ケーブルの解ける様子、おもりの飛び去り方などを観察する。

図 3-2 に実験用部品の写真を示した。①は模擬衛星（慣性回転体）で、アルミ鋳物製で底のついた円筒形をしており、その諸元は、半径 148mm、高さ 185.4mm、重量 3.6kg、スピン軸まわりの慣性モーメントは $0.00676 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$ である。②はヨーヨー質量（おもり）で、これにヨーヨー・ケーブル(0.2mmφ ピアノ線)が取り付けられている。③は radial release がなされるようにケーブルを衛星にとりつけるためのフック、④はおもり固定取付用の 2mmφ のステンレス棒、⑤はおもり切断用カッタ、⑥はタイマー、⑦はカッタ点火用電源のニッケルカドミウム電池（端子電圧 8V）である。

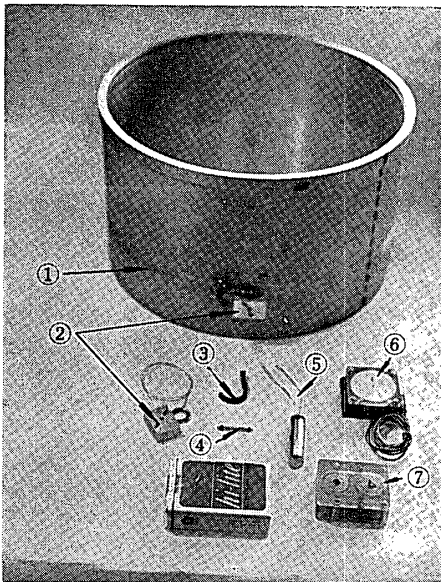


図 3-2 実験器具

図 3-4 にヨーヨー質量の取付け状態を示した。衛星が所定のスピンの数に達した後タイマーによってあらかじめ設定された秒時にカッタが作動して、おもり固定用のステンレス棒を切断し、同時にデスピナーが始まる。

図 3-3 カッタの構造を示した。重量は 1 個約 26g で、2mmφ のステンレス丸棒を容易に切断する能力を持つ。作動は 1A 以上の電流でおこなわれ、点火玉がダブルになっているため斉発性は良好である。また発火時間のばらつきは約 2m sec で、本実験の場合問題はない。内部気体の漏れを防ぐため二重の O リングを使用した。したがって

図 3-3 カッタの構造を示した。重量は 1 個約 26g で、2mmφ のステンレス丸棒を容易に切断する能力を持つ。作動は 1A 以上の電流でおこなわれ、点火玉がダブルになっているため斉発性は良好である。また発火時間のばらつきは約 2m sec で、本実験の場合問題はない。内部気体の漏れを防ぐため二重の O リングを使用した。したがって

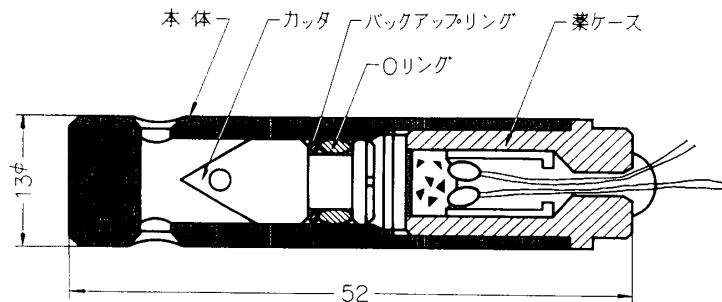


図 3-3 カッタ

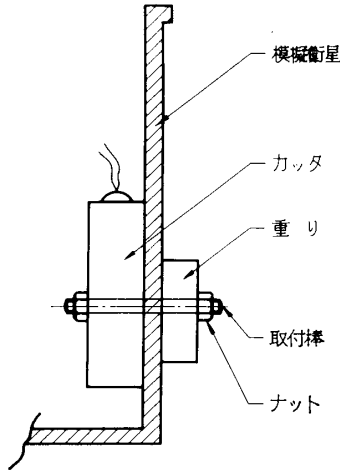


図 3-4 重り取付図

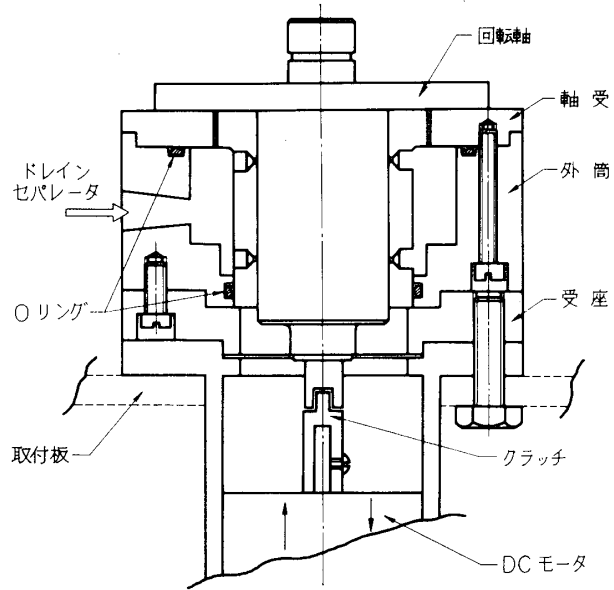


図 3-5 空気軸受

実際の衛星にこのカッタを用いるには、この点問題があり、現在改善中である。

図 3-5 は、スラスト空気軸受の断面図である。衛星に取付ける回転軸の慣性モーメントは $0.764 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$ で、これは衛星本体にくらべ十分小さい。また空気抵抗および軸受摩擦による回転数のダンピングは、近似的に回転速度 ω に比例すると考えられ、自由回転運動の方程式はこの場合、 $I \cdot d\omega/dt = -\mu\omega$ と表わされる。 $(\mu$ は摩擦係数) われわれが使用した空気軸受に衛星をのせた状態での実測によれば $\omega = \omega_0 e^{-0.0012t}$ であった。これより μ を求めると $\mu = 0.000083 (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1})$ となる。いま、デスピン開始時のスピンの数を $3c/c$ とすると、このときのダンピングトルクは $T = -\mu\omega = -0.0016 (\text{kg} \cdot \text{m})$ となる。一方ケーブルの張力による平均的デスピントルクは (10), (16) 式などから、約 $0.3 (\text{kg} \cdot \text{m})$ 程度となるから、ダンピングトルクはデスピントルクにくらべ 1% 以下であると予想される。

表 3-1 実験結果

実験番号	おもり×個数 (g)	ヨーヨー質量 m (g/m/sec ²)	初期スピン数 ω_0 (c/c)	最終スピン数 ω_f (c/c)	スピン減速率 χ
1	17.50×2	3.587	4.05	1.02	0.251
2	17.50×2	3.587	2.40	0.60	0.250
3	17.50×1	1.792	3.17	1.75	0.553
4	17.50×1	1.792	3.17	1.75	0.553
5	6.90×2	1.424	4.07	2.47	0.606
6	6.90×2	1.424	3.22	1.95	0.606
7	6.90×1	0.712	3.20	2.48	0.776

3.2 実験結果と検討

下に模擬衛星およびデスピナーの諸元をしるした。

諸 元	
<u>模 擬 衛 星</u>	
半 径	$R=0.148\text{ m}$
慣性モーメント	$I=0.00676\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2$
<u>デ ス ピ ナ ー</u>	
ケーブル長	$S=0.915\text{ m}$ (0.2φ ピアノ線)
ケーブル重量	$W_{\text{cable}}=0.23\text{ g}$
おもり重量	$W=17.50\text{ g}$ 6.90g (1個につき)

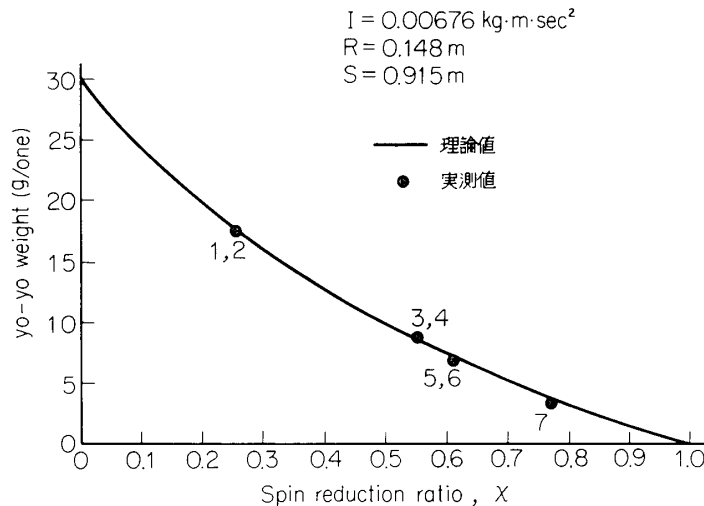


図 3-6 スピン減速率へデスピナーおもり重量

表 3-1 に光電式カウンターによるスピン減速率の測定結果を示した。おもりは、実験番号 1, 2, 5, 6 では衛星の重心をはさんで対称の位置に一個ずつ計二個取付け、実験番号 3, 4, 7 では片側に一個だけ取付けた。

表 3-2 より明らかながとく、同一条件での実験の再現性はきわめて良好であった。またスピン減速率とデスピナー質量との関係は初期スピン数によらないことも実証された。この関係を示したのが図 3-6 である。(理論値は (52) 式によって求めた。)

この実験は、空気による回転速度のダンピング、エアベアリングの軸受摩擦、重力の影響など、理論とはかなり異なる環境下で行なったにもかかわらず、理論値との一致はほぼ満足すべきものであった。また、おもりを一個しか用いなかった場合と二個の場合の差異は認められなかった。

図 3-7 に実験番号 1 の諸元を用いて第 2 章で述べた方法によって運動の解析を行なった結果を示した。これに対応する実験値は高速度カメラによるフィルムから読み取る関係上、衛星の回転角 ϕ と作動時間に関するものしか得られなかったが、デスピナー作動終了時以外

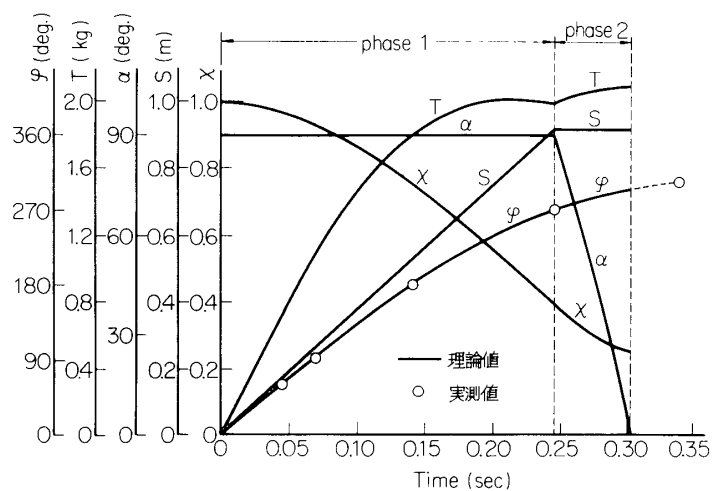
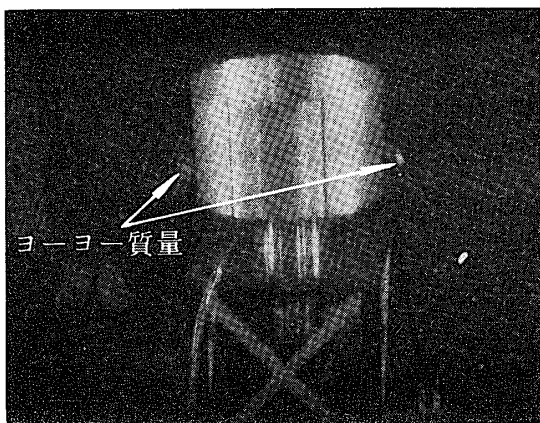
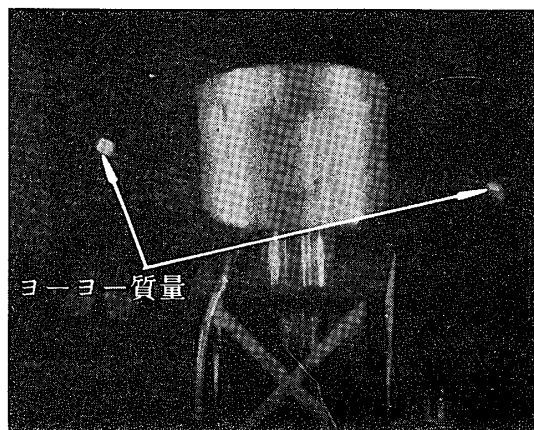
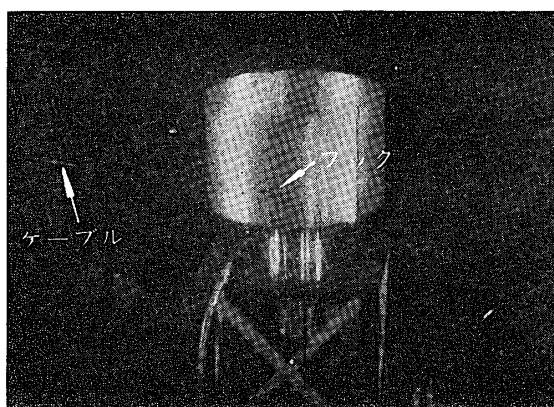
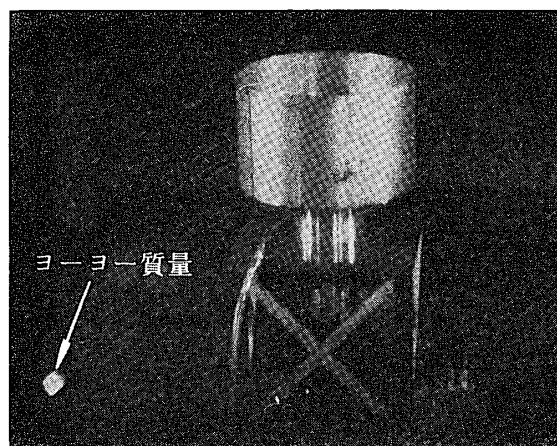


図 3-7 実験番号 1 におけるデスピナーの運動

図 3-8 カッタ作動直後 ($t=10$ m sec)
(撮影速度 1000 コマ/秒)図 3-9 phase 1 ($t=83$ m sec)
(撮影速度 1000 コマ/秒)図 3-10 phase 1 → phase 2 ($t=246$ m sec)
(撮影速度 1000 コマ/秒)図 3-11 phase 2 ($t=290$ m sec)
(撮影速度 1000 コマ/秒)

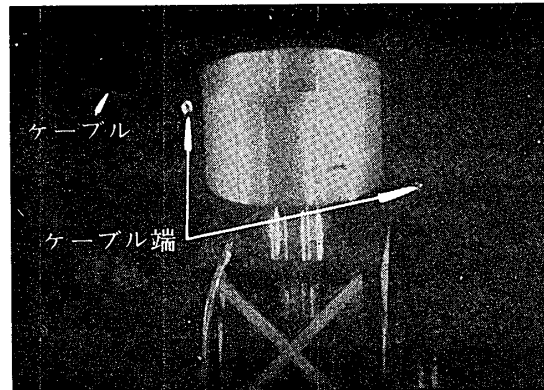


図 3-12 ケーブル切りはなし直後 ($t=347$ m sec)
(撮影速度 1000 コマ/秒)

は理論によく一致している。作動時間が理論より約 40 m sec のびた原因は、ケーブルを衛星本体にとめているフックが衛星本体よりとび出していたために切り離しが遅れたためと考えられる。図 3-8~3-12 は各 phase における運動の様子を示した写真である。

4. 結 論

本稿ではヨーヨー・デスピンの二次元および三次元モデルでの運動解析法を示すと共に、基礎的実験を行なったが、初期のデスピナー設計段階においては二次元モデルによる運動の解析が十分有効であり、デスピナーがほぼ理論どおりの運動をすることを期待できる。

また三次元モデルによって、ケーブル巻付面を衛星重心面から極度に離さないかぎりスピンの減速は十分可能であることが判明したが、その場合タンプリングが残るため、スピン停止後に行なう姿勢制御や、衛星があらかじめ持っていた首振りなどを考慮した検討が必要となろう。

今後のヨーヨー・デスピンの開発計画としては、ばね式ヨーヨーの実験、三次元モデルの実験を行なう一方、実際の衛星に使用するためのケーブルカッタの開発（気密性の向上と環境試験）などがあり、その一部はすでに進行中で、後日第 2 報として報告の予定である。

謝 辞

本稿を終るにあたり常に適切な示唆・激励・ご指導をいただいた秋葉助教授、林 助教授、高速度カメラの借用を快諾して下さった砂川助教授と撮影を手伝っていただいた市田助手、エアベアリングの設計に協力して下さった工学部機械工学科堀研究室の田中助手、および実験装置の作製に努力された工作工場の方々、ケーブルカッタを製作された帝国火工品 K. K. に深く感謝いたします。

1969 年 11 月 25 日 宇宙工学

参 考 文 献

[1] Kershner, R. B., Newton, R. R.: "Attitude control of artificial satellites" chap. 14 of

- Space astrophysics (W. Liller, ed.) McGraw-Hill, p. 205-218 ('61)
- [2] Fedor, J. V.: "Theory and design curves of a yo-yo despin mechanism for satellites" NASA TND-708 ('61)
 - [3] Eide, D. G., Vaughan, C. A.: "Equations of motion and design criteria for the despin of a vehicle by the radial release of weights and cables of finite mass" NASA TN D-1012 ('62)
 - [4] Cornille, H. J.: "A method of accurately reducing the spin rate of a rotating spacecraft" NASA TND-1420 ('62)
 - [5] Fedor, J. V.: "Analytical theory of the stretch yo-yo for de-spin of satellites" NASA TND-1676 ('63)
 - [6] Mentzer, W. R.: "Analysis of the dynamic tests of the stretch yo-yo de-spin system" NASA TND-1902 ('63)
 - [7] Collins, R. L. Jr., "A three-dimensional analysis of a tangential yo-yo despin device on a rotating body" NASA TND-3848 ('67)
 - [8] 吉沢武男編「機械要素設計」裳華房 p. 117-120