

風速変動の不規則化のランダム・サンプリング による研究 (1) 円柱後流

斎 藤 博之助*・佐 藤 浩

Experimental Investigation of Randomization of Regular
Velocity Fluctuations by Random Sampling

1. Wake behind a Circular Cylinder

By

Hironosuke SAITO and Hiroshi SATO

Abstract: In order to acquire quantitative data on the randomization of regular fluctuations a statistical sampler was constructed. It determines the probability density of the finite-time average of random-sampled signals.

Measurements of the probability density were made in the wake of a cylinder at Reynolds number 370.

概 要

規則的変動の不規則化を数量的に表わすために、サンプリング統計器を作製した。これを用いてランダムにサンプルした信号の有限時間の平均値の確率密度を測ることができる。レイノルズ数が 370 の円柱後流を測定し、確率密度分布を求めた。

記 号

d : 円柱の直径 (mm)

$e(t)$: 信号 (volt)

$E(t)$: 信号 $e(t)$ に直流バイアス電圧を加えた信号 (volt)

E_s : 電圧レベルシフト回路で加える電圧の値 (volt)

$\langle e(t) \rangle_{AV.T}$: $\langle e(t) \rangle_{AVERAGE.T}$, 信号 $e(t)$ の T 時間平均値

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} e(t) dt \text{ (volt)}$$

f : 周波数 (Hz)

f_K : 円柱のカルマン渦の放出周波数 (Hz)

f_r : ランダム・サンプリングの平均の繰返し周波数 (Hz)

* 研究生

N : サンプルの総数

$n(a, b)$: $a \leq \langle e \rangle_{AV.T} < b$ をみたす $\langle e \rangle_{AV.T}$ の度数

$P(\langle e(t) \rangle_{AV.T})$: Probability ($\langle e(t) \rangle_{AV.T}$), $\langle e(t) \rangle_{AV.T}$ の確率密度

R : Reynolds number, レイノルズ数 ($U_\infty d / \nu$)

T : 平均化時間 (積分時間) (ms)

T_K : カルマン渦の周期 (ms)

T_r : ランダム・サンプリングにより解析される信号の長さ (min)

T_s : 周期的な信号の周期 (ms)

U : X 方向の局所的平均風速 (m/s)

U_∞ : 一様流の平均風速 (m/s)

u : X 方向の風速の変動成分 (m/s)

u_f : u - 風速変動の周波数 f の成分 (m/s)

X, Y, Z : 円柱の中心を原点とする座標軸, X は流れの方向, Z は円柱の軸方向,

Y は X と Z に直角の方向

σ : 風速変動の実効値で規格化された風速変動の T 時間平均値 $\langle u \rangle_{AV.T}$ の確率密度分布の標準偏差

1. まえがき

層流から乱流への遷移は、多くの場合、微小かく乱の線形不安定によって、ひきおこされる。このかく乱が成長して振幅が大きくなると非線形の干渉によって高調波が発生する。それによって波形は非正弦波的になるが、依然として周期性が残っている。本当の意味の遷移過程は、規則正しく、がい然的な変動が不規則で偶然的な乱れに変って行くところにある。

その不規則化については従来は変動の波形を観察することが多かった。しかし、それは定性的な傾向を与えるのみで、定量的な取扱いを許さない。波数空間におけるエネルギー・スペクトルは、不規則化を線スペクトルから連続スペクトルの変化として表現するが、スペクトルの中には変動の位相関係が含まれていない。一方、速度変動について、速度空間における分布関数を知れば、ある速度の出現の確率を知ることができるが、分布関数には変動の波数に関する情報が全く欠けている。

ここで我々の提案するものは、この両者を含み、かつ不規則度 (randomness) を定量的に表現するもので、速度の変動をランダムに抽出し、それを有限時間で平均した量の確率密度分布である。すなわち、電圧に変換された速度変動 $E(t)$ をランダムな時刻 $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$ に T 時間ずつサンプルし (図1(a)参照)，これらのサンプルを時間積分することにより (図1(b) 参照) 各サンプルの時間平均値

$$\langle E \rangle_{AV.T} \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E(t) dt \quad (t = t_1, t_2, t_3, t_4, \dots)$$

を求め、 $\langle E \rangle_{AV.T, 1}, \langle E \rangle_{AV.T, 2}, \langle E \rangle_{AV.T, 3}, \dots$ の確率密度分布をヒストグラムで表わす (図1(c))，すなわち有限時間平均値 $\langle E \rangle_{AV.T}$ のとりうる値の範囲を適当な等間隔

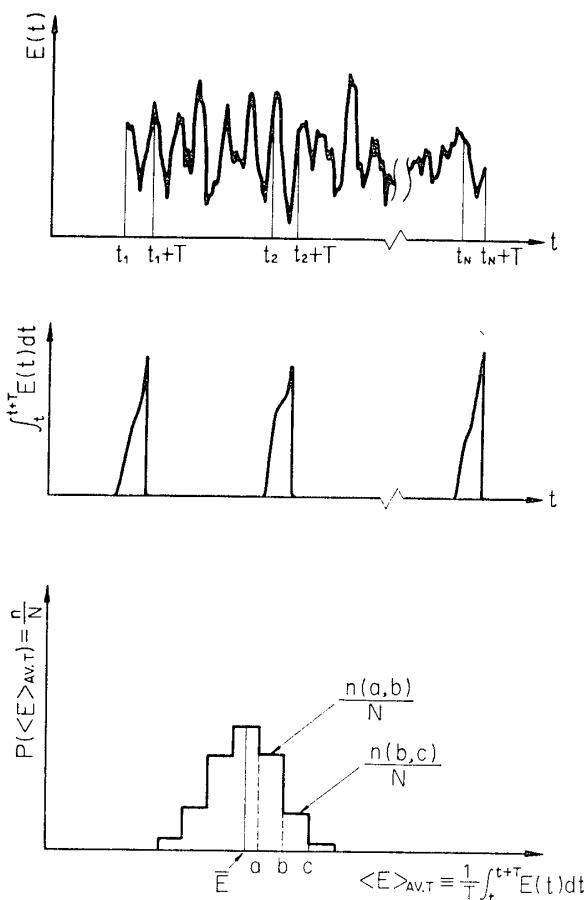


図 1 ランダム・サンプリングの図解

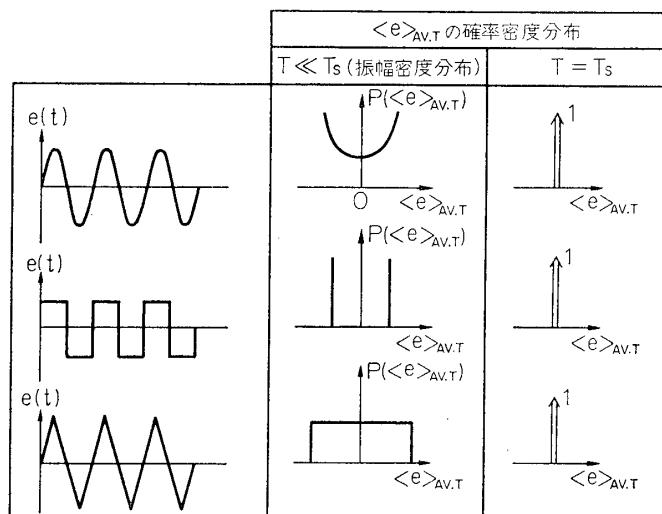
に区切り、各区間にはいる数（度数） n を棒グラフにし、総数 N で割れば確率密度分布の棒グラフがえられる。

有限時間の平均値 $\langle E \rangle_{AV,T}$ の確率密度分布の例として、平均化時間 T が信号の周期 T_s に比べ十分小さい場合（これは振幅密度解析になる）と信号の周期 T_s に等しい場合につき、正弦波、矩形波、三角波の波形とそれに対応する確率密度分布を図示する（図 2）。

2. 実験装置と測定方法

電子装置の概要図と信号として矩形波が送られて来たときの回路の各部における波形を図 3 に示す。

風速 U に比例した線形化回路の出力電圧を 2 チャンネルテープレコーダのチャンネル 1 に記録し、チャンネル 2 には、雑音電圧を振幅弁別器に通してえられる、発生時刻がランダムなパルス列を記録する（図 4）。このときランダム・パルスの平均の繰返し周波数 f_r は振幅弁別器のスレッショルドレベルを調節する

図 2 正弦波、矩形波、三角波の有限時間の平均値 $\langle e \rangle_{AV,T}$ の確率密度分布（平均化時間 T が $T \ll T_s$ と $T = T_s$ の場合）

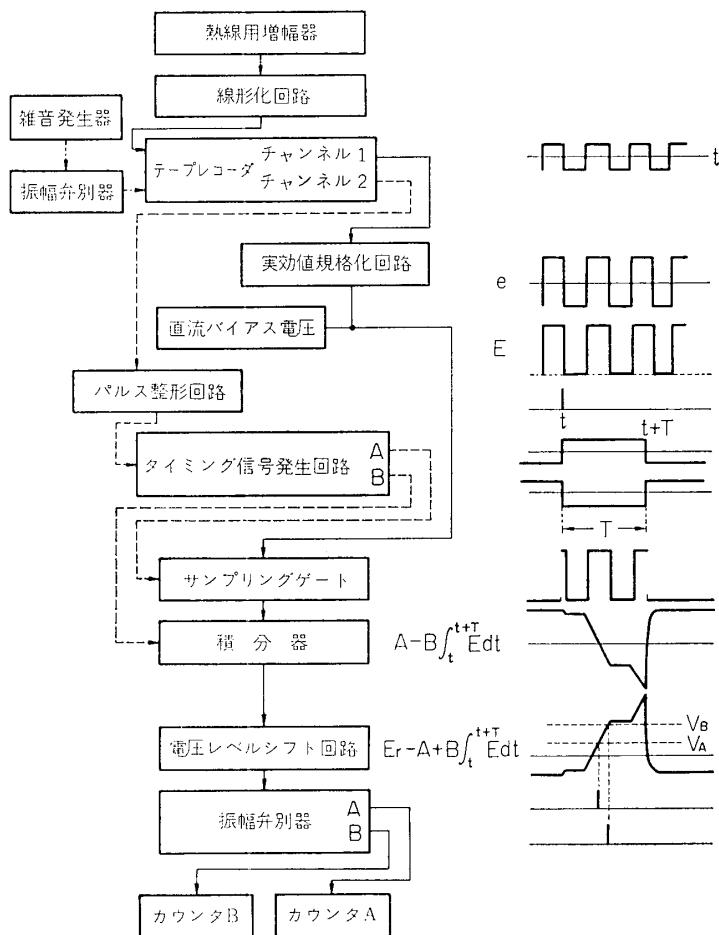


図3 電子装置の概要図

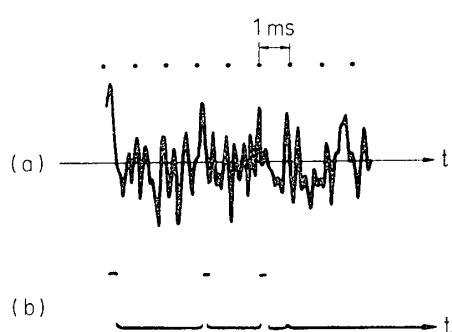


図4 (a) 雜音電圧, (b) 振幅弁別器の出力電圧

ことにより変えることができる。

ランダム・サンプリングは次のように行なう。テープレコーダのチャンネル1, 2を同時に再生する、チャンネル1の信号の再生出力電圧(交流電圧)は実効値(RMS)が一定値になるように増幅または減衰させられ(信号e)、信号電圧が常に正になるように直流バイアス電圧が加えられる(信号E)。

一方チャンネル2のランダム・パルスの再生出力電圧はパルス整形されてタイミング信号発生器をトリガして、幅Tのパルスを発生させる。このパルス幅Tは可変である。このパルスと、位相の反転したパルスをもう一つ用意し、ゲート積分器の制御に都合がよいように電圧、直流レベルを変えた後、これらのパルスの前縁で、サンプリングゲートを開き、後縁で、積分器をリセットする。そして、T時間サンプルされた信号が積分器に送られる。積分器の出力

をトリガして、幅Tのパルスを発生させる。このパルス幅Tは可変である。このパルスと、位相の反転したパルスをもう一つ用意し、ゲート積分器の制御に都合がよいように電圧、直流レベルを変えた後、これらのパルスの前縁で、サンプリングゲートを開き、後縁で、積分器をリセットする。そして、T時間サンプルされた信号が積分器に送られる。積分器の出力

電圧は次のようにあらわされる。

$$A - B \int_t^{t+T} E(t) dt$$

これは単調減少関数であるから、この $t=t+T$ における値から、有限時間の平均値 $\langle E \rangle_{AV,T}$ の分布を知ることができる。電圧レベルシフト回路と振幅弁別器2個とカウンタ2個が分布算出回路を構成する。2個の振幅弁別器が1個の電圧の窓をつくる（弁別器の窓の設定は電圧が正確にわかったの直流電圧を信号として用いることにより行なう）。弁別器への入力電圧が窓の上と下のレベルを越すときに発生するパルス数をそれぞれ計数すれば、その差が窓の中に来た場合の度数を与える。必要な電圧範囲を走査して、確率密度分布を測るには、積分器の出力電圧を (E_r) シフトし、電圧の窓に送り、計数しては、テープレコーダの再生を繰返す。

3. ランダム・サンプリングによる正弦波、矩形波、三角波の解析結果

正弦波、矩形波をランダム・サンプリング法で解析した結果を示す（図5、6）

信号の周波数は4章で述べるカルマン渦の周波数と等しい 290 Hz, 信号の解析時間 T_r は 2.0 min, ランダム・サンプリングの平均の繰返し周波数 $f_r = N/T_r = 1,400$ 回/(2.0 min) = 12 Hz, ヒストグラムの間隔の幅は 1/3 とした。

平均化時間 T を信号の周期 $1/(290\text{ 秒}) = 3.45\text{ ms}$ に等しくとると、ランダム・サンプリングによる有限時間の平均値の確率密度分布は正弦波、矩形波、三角波のいずれの場合もパルス状になる（図5）（図2参照）。横軸は信号の実効値で規格化した有限時間平均値、縦軸は有限時間平均値の確率密度である。

平均化時間を信号の周期の 10 分の 1 にとると ($T = T_s/10 = 0.345\text{ ms}$)、正弦波では、分布は皿型になる（図6）（図2参照）、図6(a) の曲線は正弦波 $x = X \sin \omega t$ の振幅密度分布関数

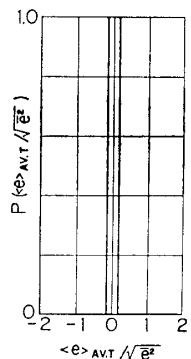


図5 正弦波、矩形波、三角波のランダム・サンプリングによる有限時間 $T=T_s=3.45\text{ ms}$ の平均値の確率密度分布 $T_r=2.0\text{ min}$, $f_r=12\text{ Hz}$

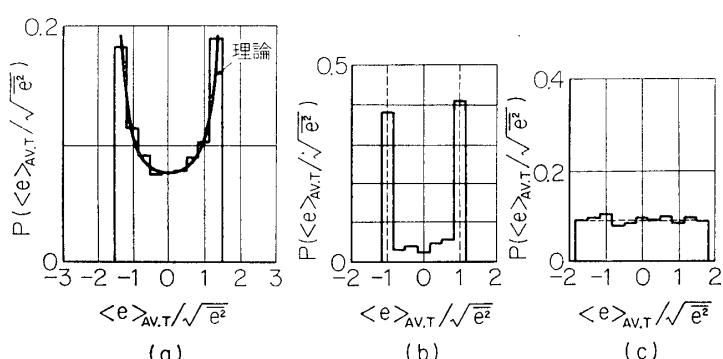


図6 ランダム・サンプリングによる有限時間 $T=T_s/10=0.345\text{ ms}$ の平均値の確率密度分布 $T_r=2.0\text{ min}$, $f_r \approx 11\text{ Hz}$, (a) 正弦波 (b) 矩形波 (c) 三角波

$$P(x) = \begin{cases} (\pi \sqrt{X^2 - x^2})^{-1} & |x| < X \\ 0 & |x| > X \end{cases}$$

から計算した理論的曲線である。

矩形波の測定結果は図6(b) (図2参照) で “L” の形になる。
 三角波の測定結果は図6(c) (図2参照) で “T” の形になる。

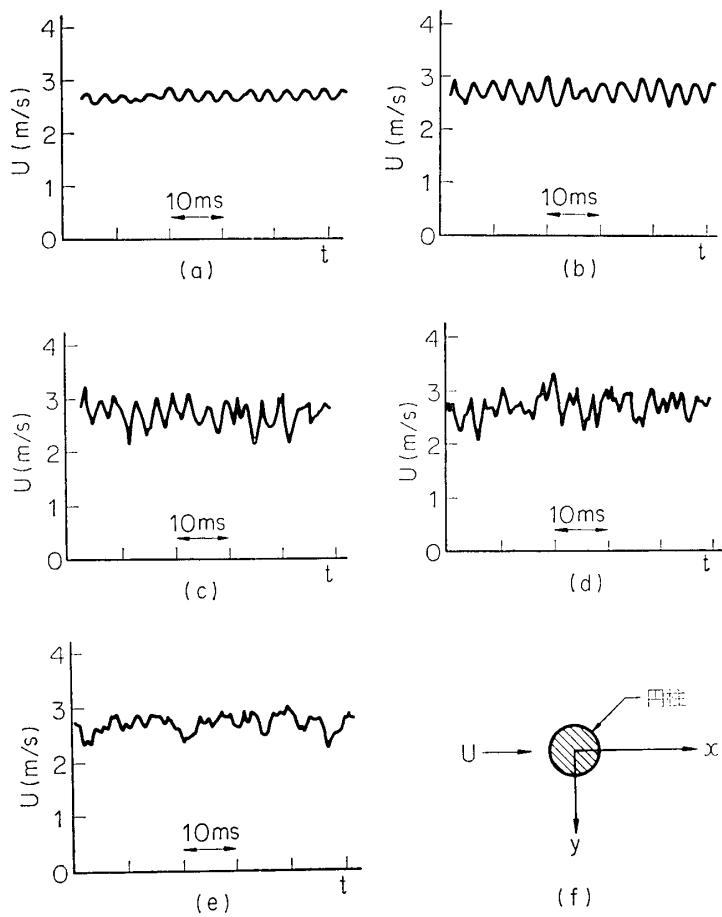
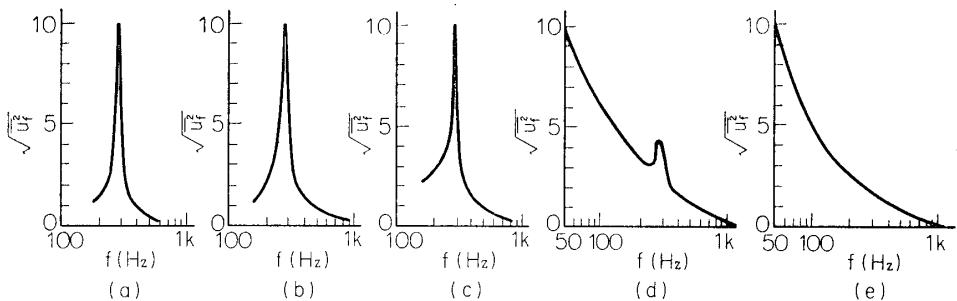


図7 風速 U の波形の下流方向への変化の見本

$R=370$, $d=2.0$ mm, $U_\infty=2.8$ m/s, $f_K=290$ Hz

- a) $x/d=3$, $y/d=2$, $\sqrt{\bar{u}^2}/U_\infty=0.04$
- b) $x/d=6$, $y/d=2$, $\sqrt{\bar{u}^2}/U_\infty=0.05$
- c) $x/d=12$, $y/d=2$, $\sqrt{\bar{u}^2}/U_\infty=0.07$
- d) $x/d=24$, $y/d=2$, $\sqrt{\bar{u}^2}/U_\infty=0.08$
- e) $x/d=48$, $y/d=2$, $\sqrt{\bar{u}^2}/U_\infty=0.05$
- f) X , Y 軸のとり方

図8 円柱の後流の u -風速変動のスペクトルの下流方向への変化

$R=370$ (a) $x/d=3, y/d=2$ (b) $x/d=6, y/d=2$
 (c) $x/d=12, y/d=2$ (d) $x/d=24, y/d=2$
 (e) $x/d=48, y/d=2$

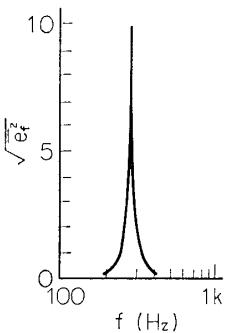


図9 CR 同調周波数分析器の特性

4. 円柱の後流の解析

一様流の風速 U_∞ と円柱の直径 d からなるレイノルズ数 $R=(U_\infty d)/\nu$ が 370 ($U_\infty=2.8 \text{ m/s}$, $d=2.0 \text{ mm}$, $f_K=290 \text{ Hz}$) の場合の円柱の後流を解析した。このレイノルズ数では後流は規則的変動(カルマン渦)から乱流に遷移する。

風速 U の波形の見本と風速変動 u のスペクトルの下流方向(図7(f)参照)への変化を図7, 図8に示す。図9は測定に使用したCR同調周波数分析器(分解できる周波数の差 Δf が同調周波数 f に比例して変る, $\Delta f/f=\text{一定}$)を用いて 290 Hz の正弦波を分析した結果で、この分析器の特性を表わしている。図8の横軸は周波数 f で、縦軸は u -風速変動の周波数成分の実効値 $\sqrt{\bar{u}^2}$ であり、各測定点での最大値を 10 にしてある、したがって異なる x/d におけるスペクトルの絶対値は比較できない。

ランダム・サンプリングによる円柱の後流の測定結果: $T_r=2.0 \text{ min}$, $f_r=12 \text{ Hz}$, ヒストグラムの間隔の幅=1/3とした。

平均化時間 T をカルマン渦の周期 $T_K=3.5 \text{ ms}$ ($f_K=290 \text{ Hz}$) に等しくとった場合のランダム・サンプリングによる有限時間の平均値の確率密度分布をヒストグラムにして、その下流方向への変化を図10に示した。横軸は風速変動の実効値で規格化した有限時間平均値、したがって図10の各図を横軸方向に $x/d=3, 6, 12, 24, 48$ の順に、4, 5, 7, 8, 5倍すれば(図7の各 x 点での $\sqrt{\bar{u}^2}/U_\infty$ の値参照)、横軸は $\langle u \rangle_{AV.T} \times (\text{定数})$ となる。図10(b), (c), (d), (e)の釣鐘型の曲線は各 x 点 ($x/d=6, 12, 24, 48$) でのヒストグラムの標準偏差 σ に対応するガウス分布

$$N(0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

より計算した曲線である。

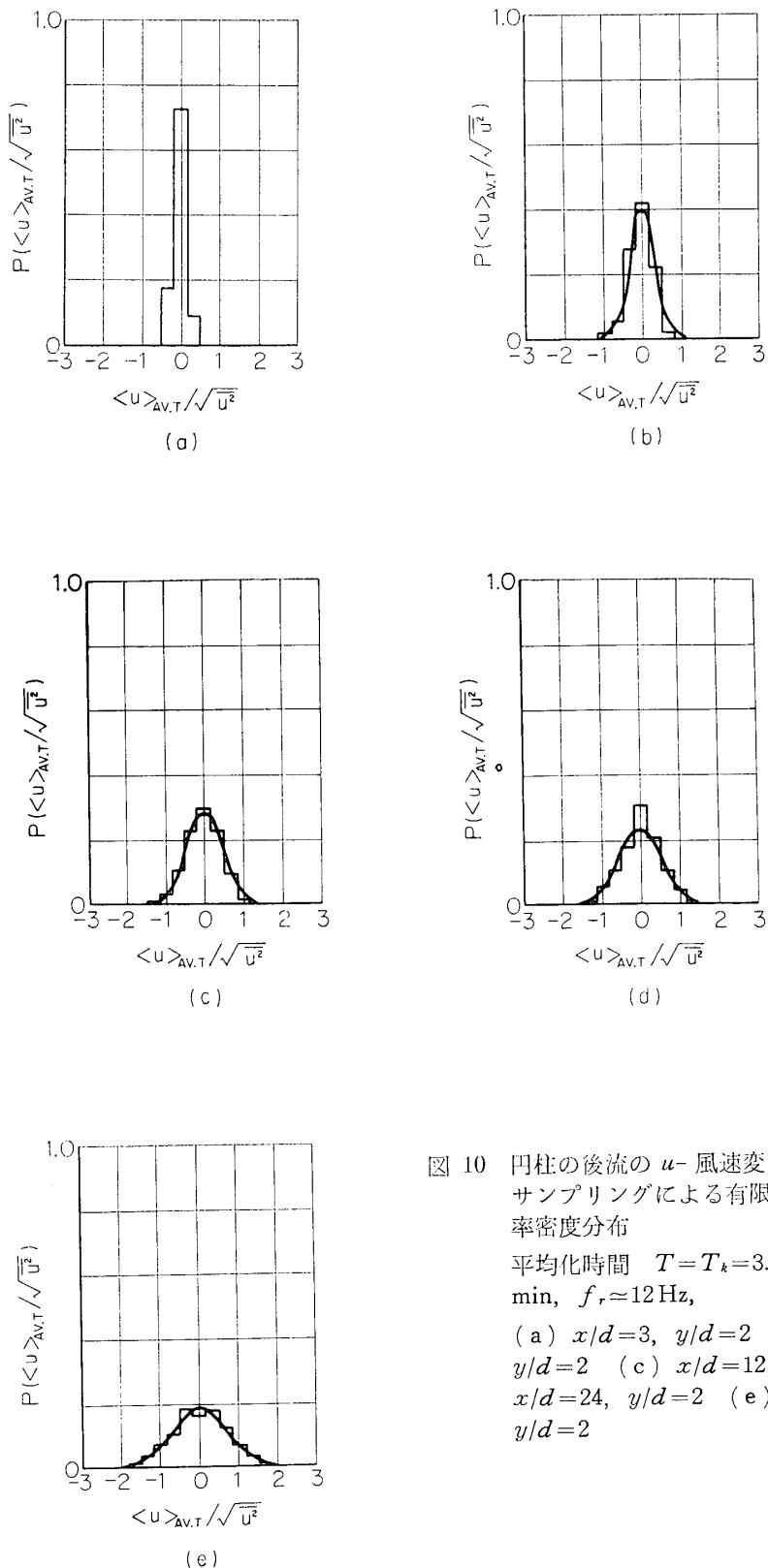


図 10 円柱の後流の u - 風速変動のランダム・サンプリングによる有限時間平均値の確率密度分布
平均化時間 $T = T_k = 3.5$ ms, $T_r = 2.0$ min, $f_r = 12$ Hz,
(a) $x/d = 3, y/d = 2$ (b) $x/d = 6, y/d = 2$
(c) $x/d = 12, y/d = 2$ (d) $x/d = 24, y/d = 2$ (e) $x/d = 48, y/d = 2$

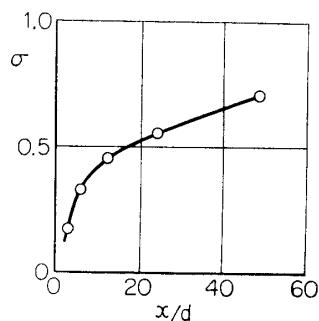


図 11 風速変動の実効値で規格化された有限時間 ($T=T_k$) の平均値 $\langle u \rangle_{AV,T}/\sqrt{\bar{u}^2}$ の確率密度分布(図10)の標準偏差 σ の円柱からの距離による変化

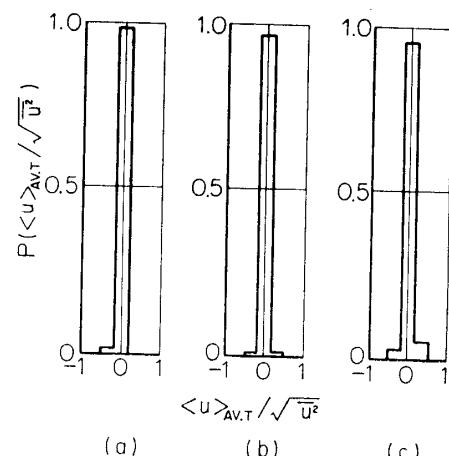


図 13 円柱の後流の u -風速変動のランダム・サンプリングによる有限時間平均値の確率密度分布
平均化時間 $T=10T_k=35\text{ ms}$,
 $T_r=2.0\text{ min}$, $f_r\simeq 9.0\text{ Hz}$
(a) $x/d=3$, $y/d=2$ (b)
 $x/d=12$, $y/d=2$ (c) $x/d=48$, $y/d=2$

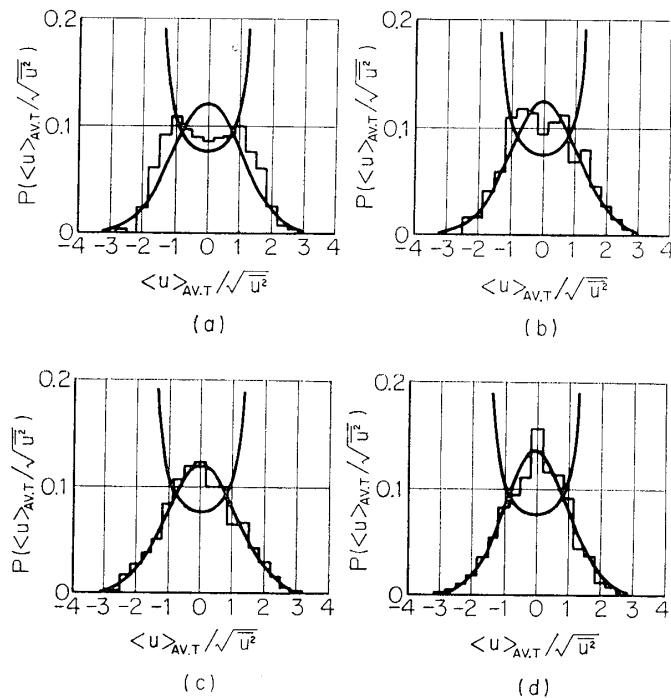


図 12 円柱の後流の u -風速変動のランダム・サンプリングによる有限時間平均値の確率密度分布
平均化時間 $T=T_k/10=0.35\text{ ms}$, $T_r=2.0\text{ min}$, $f_r\simeq 12\text{ Hz}$
(a) $x/d=3$, $y/d=2$ (b) $x/d=6$, $y/d=2$
(c) $x/d=12$, $y/d=2$ (d) $x/d=48$, $y/d=2$

各ヒストグラムの標準偏差 σ の下流方向への変化を図 11 に示した。

平均化時間 T をカルマン渦の周期 T_K の 10 分の 1 にとると ($T=T_K/10=0.35\text{ ms}$) (図 12 参照) 下流にゆくにつれ、皿型の部分のある分布から釣鐘型の分布に変る。図 12(a), (b), (c), (d) の皿型の曲線はカルマン渦の周波数と等しい周波数 (290 Hz) の正弦波の振幅密度分布曲線である (図 6(a) の曲線と同じ)。釣鐘型の曲線は各ヒストラグラムの標準偏差 ($\sigma=1.0$) に対応するガウス分布曲線である ($x/d=3, 6, 12, 48$ での σ の値は 1.1, 1.05, 1.1, 1.0 である)。

平均化時間 T がカルマン渦の周期の 10 倍 ($T=10T_K=35\text{ ms}$) のときは、ヒストグラムはいずれも高さ 1 のパルス状になる (図 13)

5. 考 察

正弦波、矩形波、三角波のランダム・サンプリングによる解析: (3 章参照)

有限時間平均値の確率密度分布を理論的に簡単に計算できる正弦波、矩形波、三角波の場合をこのランダム・サンプリング法で解析した結果が図 5, 図 6 である。

平均化時間 T を信号の周期 T_s に等しくとする場合 ($T=T_s$) は、有限時間平均値 $\langle e \rangle_{AV.T_s}$ は周期的信号の一周期にわたる平均値となり、信号の波形、平均操作を始める時刻に無関係に、一定値になることに対応して、その確率密度分布をヒストグラムで表わしたグラフは高さ 1 のパルス状になる (図 5)。

平均化時間 T を信号の周期 T_s の 10 分の 1 にとる場合は ($T=T_s/10$)、正弦波では有限時間平均値 $\langle e \rangle_{AV.T_s/10}$ の確率密度分布は皿型 (図 6(a)) になり、正弦波の振幅密度分布の理論曲線とよく一致する。このことは正弦波では、 $\langle e \rangle_{AV.T_s/10}$ の分布は振幅分布とみなせることを示す。

矩形波では ($T=T_s/10$)、振幅密度分布の理論曲線は図 6(b) の破線のように “L” 型になる。測定結果が +1 と -1 の間で左右の山の 10 分の 1 程度の値であるのは、平均化時間 T が $T=T_s/10$ であることにより、サンプルが矩形波の立上りと立下りの部分を含む確率が 10 分の 1 になるからである。

三角波では ($T=T_s/10$)、予想されるように (図 6(c) の破線) 有限時間平均値 $\langle e \rangle_{AV.T_s/10}$ のとりうる値の範囲内ではほぼ一定である。

以上の周期関数に対する測定結果から、サンプリングの総数 $N=1,400$ ($T_r=2.0\text{ min}$ より $f_r=N/T_r=12\text{ Hz}$) が 290 Hz の周期的信号に対して十分に大きいこと、この装置の解析結果の誤差は数パーセント以内とみなせることがわかる。

円柱の後流の解析:

風速変動 (u) の波形 (図 7) とスペクトル (図 8) の下流方向への変化をみると、円柱からの距離 x/d が 3, 6, 12 まではほぼ規則的な風速変動が $x/d=24$ ではかなりランダムになり、 $x/d=48$ では規則性が全く消えて乱流になっていることがわかる。

平均化時間 T がカルマン渦の周期に等しい場合 ($T=T_K$) のランダム・サンプリングによる有限時間平均値の確率密度分布は (図 10 参照)、円柱からの距離が増加し、ランダム化が進むにつれて、周期関数に対応するパルス状から、釣鐘型のガウス分布にしたがって、

左右に拡散してゆく。この分布の広がり方は図11にみるように x/d が 12 くらいまで急速で、その後 48 までほぼ一定の割合で増加している。この σ ($\langle u \rangle_{AV. T_K} / \sqrt{\bar{u}^2}$ の集合の確率密度分布の標準偏差) が風速変動のランダム化を定量的に表わしている。そして乱流の乱れのエネルギーが減衰しはじめても、この風速変動の実効値で規格化された $\langle u \rangle_{AV. T_K} / \sqrt{\bar{u}^2}$ の確率密度分布の標準偏差 (σ) は低周波成分の相対的増加が続く限り増加するが、変動の実効値で規格化された振幅密度分布の標準偏差がとる値(1)を越すことはない。

振幅密度分布(平均化時間 T が $t = T_K/10$ のランダム・サンプリングによる有限時間平均値の確率密度分布)(図12)は $x/d = 3$ では正弦波に対応する皿型の部分が存在し、 $x/d = 48$ ではガウス分布をしている。 $x/d = 6, 12$ では皿型からガウス分布への移行の中間の分布になっている。この $\langle u \rangle_{AV. T_K} / \sqrt{\bar{u}^2}$ の分布の広がり(標準偏差 σ)が流れの方向に変化していないくて、 $\sigma = 1$ であるのは、この分布が振幅分布に相当していて、かつ風速変動の実効値で規格化されているからである。

平均化時間がカルマン渦の周期の 10 倍($T = 10 T_K$)のときは $\langle u \rangle_{AV. 10T_K}$ の分布はパルス状になり(図13)、普通の平均値 \bar{u} を与える。

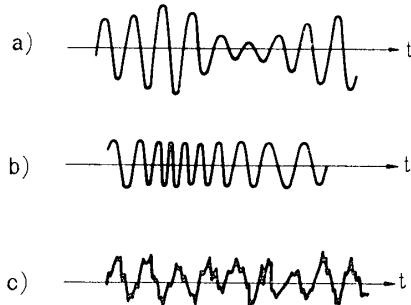


図14 (a) 振幅変調(AM) (b) 周波数変調(FM) (c) 正弦波的変動プラス振幅の小さい高周波の雑音

カルマン渦が乱流に遷移するときのランダム化の現象は少くなくとも初期では、次の三つにモデル化できる。

- (A) ランダムな低周波信号による振幅変調, AM (Amplitude Modulation) (図14(a))
- (B) ランダムな低周波信号による周波数変調, FM (Frequency Modulation) (図14(b))
- (C) 正弦波的風速変動プラス振幅の小さい高周波の雑音, S+N (Sine Wave+Noise) (図14(c))

これらのランダム化のモデルと円柱後流の

- (イ) スペクトル分布
 - (ロ) 振幅密度分布
 - (ハ) 平均化時間がカルマン渦の周期に等しい場合のランダム・サンプリングによる有限時間平均値 $\langle u \rangle_{AV. T_K}$ の確率密度分布、以下 $\langle u \rangle_{AV. T_K}$ の分布と略す。
- との関係は、次のようになる。

- (イ) のスペクトル分布は、(A) の AM, (B) の FM (C) の S+N により少ししか広がらない。
- (ロ) の振幅分布は、(A) の AM により、分布の中央のへこみは小さくなり、左右の山は、すそをひくようになる。(C) の S+N では、分布の左右の山が少し小さくなり、その分だけ、中央のへこみがあがり、すそができる。(B) の FM では分布は変わらない。
- (ハ) の $\langle u \rangle_{AV. T_K}$ の分布は、(B) の FM により、広がり、(A) の AM で少し広がるが、(C) の S+N によっては変わらない。

以上の観点から円柱の後流の解析結果を比較検討すると、円柱からの距離 x/d が 3 ではスペクトル分布、 $\langle u \rangle_{AV.T_K}$ の分布は風速変動が周期的であることを示している（図 8(a)、図 10(a)）、振幅分布は（図 12(a)）、中央に皿型の部分を残しているがその左右で、正弦波の場合のように急に減少することなく、長いすそをひいている。これは上述の (A) AM がすでにかなり作用しているからである。

円柱からの距離 x/d が 6, 12 において、スペクトル分布は変動の周期性が維持されていることを示している（図 8(b)(c)）のに、振幅分布（図 12(b), (c)）と $\langle u \rangle_{AV.T_K}$ の分布（図 10(b), (c)）はランダム化の進行を示唆している。すなわち上述の (A) AM と (C) S+N により、振幅分布は中央のへこみが小さくなり、左右に、すそをひく、(A) AM, (B) FM により、 $\langle u \rangle_{AV.T_K}$ の分布が広がる。かように、スペクトル分布よりも、振幅分布と $\langle u \rangle_{AV.T_K}$ の分布の方が円柱後流のランダム化の情報をより多く与えてくれる。

ランダム・サンプリングによる測定のパラメータである平均化時間 T と有限時間平均値 $\langle u \rangle_{AV.T_K}/\sqrt{\bar{u}^2}$ とその確率密度 $P(\langle u \rangle_{AV.T}/\sqrt{\bar{u}^2})$ からなる空間で考えると、円柱後流のランダム化の進行（円柱からの距離 x/d の増加）にともない、曲面が $\langle u \rangle_{AV.T}/\sqrt{\bar{u}^2}$ 軸方向に拡散してゆくように見える。この曲面は、 $T=T_K$ の断面ではパルス状分布から釣鐘型のガウス分布にしたがって広がり、 $T=T_K/10$ （振幅分布）の断面では正弦波に対応する分布に特有の皿型のへこみを残した分布から、広がることなく、釣鐘型のガウス分布に移行してゆく。 $T=10T_K$ の断面ではパルス状分布を保つ。

6. 結論

円柱後流の規則的風速変動の不規則化を研究するために、風速変動のスペクトル分布と振幅密度分布関数を同時に測定した。この二つの情報は波形についての的確な情報を与える。さらに有限時間平均値の確率密度分布関数を流れの方向に測りランダム化を定量的に決定することができた。これにより今まで定性的であったランダム化の現象を定量的に議論することができるようになった。

謝辞

本研究を遂行するに当り、助言、援助、示唆をしてくださった研究室の恩田善雄氏、松田右氏、西岡通男氏、斎藤隆雄氏、田中航二氏に深く感謝いたします。

1970年3月2日 航空力学部