

一方向強化材と多層積層複合材の弾性常数の一解析

山 脇 弘 一・植 村 益 次

An Analysis for Elastic Moduli of Unidirectional Fiber-Reinforced and Multilayered Composite Materials

By

Koichi YAMAWAKI and Masuji UEMURA

Abstract: In the previous paper, the authors presented analytical formulae for the elastic moduli of unidirectional fiber-reinforced composite materials. In these expressions, an empirical coefficient such as contiguity factor has been used, which is similar with one proposed by Tsai, but is assumed to be a linear function of fiber volume fraction.

In the present paper, refining the previous research, the analytical formulae are first proposed by considering the square array of reinforced fibers without introducing an empirical factor used in the previous paper. Comparing with the proposed formulae by other authors, these analytical values agree well with the experimental results on glassfiber/epoxy composites which are obtained by the authors.

In addition, the analytical formulae for elastic moduli of multilayered composite, that is, the helical-wound cylinder or the alternating helical and circumferential winding cylinder such as applied to rocket chamber, are proposed by using the elastic moduli of unidirectional fiber-reinforced materials proposed firstly in the present paper. These analytical values show a good agreement with the experimental values on filament-wound cylinders of various sorts of winding angle which are obtained by the authors.

概 要

特に比強度が高いのを利用して、フィラメント・ワインディング (FW) 法によるせんい強化プラスチック材をロケットチャンバへ適用する開発研究が進められてきた。しかし FW 材は剛性が低く、ダイバージェンスなど空力弾性の観点から問題となり、FW 材構造の剛性値を的確に把握することが重要である。本文は以上の目的から FW 材の弾性係数を理論的に解析し、各種の弾性試験を行なって実験値と比較し、両者の良好な一致を得た結果について述べる。

すなわち、まず FW 材の構成材である一方向強化材の直交異方性材料としての弾性常数

について、前報で Contiguity factor という経験係数をせんい含有率の関数として導入した解析式を発表したが、今回さらにせんいの正方配列を考慮した理論式を提示し、せんい含有率の関数として示す式を導く。次にこれら一方向強化材の弾性常数に基づいて、斜交巻き FW 円筒材や、実際の円筒形ロケットチャンバで見られる斜交巻き+周巻き併用構造などの多層積層材の弾性常数の算出式を導びき、各種巻き角度での実験結果と比較した結果を示す。

1. ま え が き

本文はまず一方向に強化した複合材の弾性係数の解析式を導き、実験値および従来の代表的な解析方法と比較検討する。一般に一方向強化材を多方向に積層した複合材の弾性常数は、一方向強化材の弾性常数が知られておれば、比較的容易に求められ、かつ実際の弾性値とよく一致する [1]。したがって、一方向の弾性値を正確に知ることが、最も基礎的なことであるが、強化材において、母材と強化せんいの構成が複雑なため厳密な解を与えることは非常に難しい。もちろんこの問題の重要性からすでに国内外において多くの提案がなされ有用な近似式が得られている。しかし特にせんい含有率が高い強化材については必ずしも実験値との良好な一致が得られていない。

本文は従来の解析法に比べてより厳密な手法を行なったわけではなく、むしろ実際の強化材を非常に簡単なモデルに置き換えて解析した。このように解析して求めた弾性値は、せんいの含有率の低い場合の弾性係数については、従来の諸式の結果とほぼ一致し、高含有率の場合には、従来よりも高くなり、筆者らの行なった実験結果とよい一致を示した。本解析法では簡単なモデルを用いても、強化材に分布する実際の応力、ひずみ状態によく合った仮定を用いることによって実験結果と良い一致をえたと考える [2]。さらに本文の解析法によって求められた一方向強化材の弾性常数に基づき、各種の多層積層板、すなわち斜交ヘリカル巻き積層板、斜交+周方向積層板、多層積層板などの諸弾性常数の算出式を導びき、一方その有用性を確かめるために行なった弾性実験の諸結果と比較検討した。その結果、両者のかなり良い合致が得られ、本解析法および積層板の弾性常数を求める一連の変換式を一般の FW 材積層板に適用して有用であることが確かめられた。

記 号

E ; ヤング率	γ ; せん断ひずみ
G ; せん断剛性率	x, y ; 円筒軸方向および円周方向座標
ν ; ポアソン比	m, f ; 母材 (樹脂) および強化せんい
V ; 体積含有率	(硝子) に関する諸量を示す
σ ; 直応力	L, T ; せんい方向およびせんいに垂直
τ ; せん断応力	方向の諸量を示す
ε ; 直ひずみ	

2. 一方向強化材の弾性常数

一方向強化材の弾性常数については、解析方法、実用性の点から最も代表的な論文として

Hashin [3], Tsai [4], Greszczuk [5] の論文があげられる。まずこれら三者の解析法の特徴を次に簡単にふれ、後述の 2.2 節において筆者らの行なった実験値と比較・検討することによって、本研究の立脚点とする。

まず Hashin らは、Paul [8] の粒子分散系についての弾性常数の解析をせんい分散系に拡張し、Paul と同様に、最小仕事の原理と最小ポテンシャルエネルギー定理より弾性常数の上界と下界を求めている。この Hashin らの解析モデルは、せんい含有率 (V_f) が高い場合、実際の複合材の構成に最も近いものといえるが、本文の Fig. 3 に実験例とともに示すとおり必ずしも一致しない。

Tsai は特にせんい含有率 (V_f) が高い場合、すなわちせんいが互いに接近してきた場合に、Hashin の解析式では実際の値よりも低いことを指摘して、せんいに垂直方向のせんいの連続性を仮定した。そしてせんいに垂直方向のせんいの連続性を表わす連続係数 (Contiguity factor) C を導入し、 $C=0.2$ と考えると実験値とよく一致することを示した。しかし筆者らの検討によると Tsai の用いた連続係数 C もまた V_f の関数と考えるべきであり、事実 Tsai の経験式による値と筆者の実験値は必ずしも一致しない [9]。文献 [1] において筆者らは Tsai の考えと同様に連続係数 C を導入し、筆者らの考えた 2 モデルを合せ考えるとき経験的に C を V_f の一次関数として求めた。しかしこの経験係数 C を用いた解析方法の問題点は、 C の値が経験的に求められ、理論的な説明が明確でない点にある。ただし、せんい方向 (L) のヤング率 (E_L) のみは Hashin の場合と同様、複合則が成り立ち C を含まない式となる。

Greszczuk はせんいの配列を正方配列に仮定し、せんい方向 (L) とせんいに垂直方向 (T) からなる (L, T) 面に垂線 Z をとり、たとえば T -方向のヤング率 (E_T) は Z -方向にわたる平均応力と T -方向の単位長さの総ひずみ量の比で与えられるとした。この場合 σ_T の Z -方向にわたる応力分布は考慮されているが、 T -方向のひずみ分布は強化せんいの内部のひずみ、および母材の内部のひずみはともに一様として考えられている。

次に本文で述べる解析法の基本概念は、たとえば B. Paul [8] の粒子分散系の解析を参考とした。弾性常数の求め方として、たとえば、せんいに垂直方向 (T) のヤング率 (E_T) は、 T -方向の負荷応力 (σ_T) と、 T -方向の平均ひずみの比で与えられるとした。したがって (L, T) 面に垂直な方向にわたっての σ_T の応力分布については、強化せんいの内部、および母材の内部の応力とともに一様として考えており、実際の σ_T の応力分布とは厳密には異なる。

一方 Greszczuk の解析法では応力分布を重視しているため、ひずみ分布が厳密には実際と異なっている。この点が筆者による解析法と大きな違いがある。

2.1 解 析

硝子せんいなどを一方向に並べて強化した一方向強化材は、Fig. 1, 2 に示すような基本モデルにおきかえて各種の弾性常数を解析する。

(1) せんい方向 (L) のヤング率; E_L

一般にせんい方向のヤング率については、次式に示す複合則が成り立ち、実験結果とも良く一致する。

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad (1)$$

(2) せんいに垂直方向 (T) のヤング率; E_T

せんいに垂直な方向の解析法は、従来より種々のモデルを想定して求められているが、ここでは Fig. 1(b) に示すような配列を仮定する。さらにせんいと母材の構成する基本形として、その一部分をとって Fig. 2 に示すものを考え、無次元化を図って寸法を単位長さにとる。この単位容積の強化材において、 T 方向に応力 σ_T が働くとき、それによって生じる伸びひずみは dt の幅の微分部分について次式で与えられる。

$$\varepsilon_T^* = \frac{\sigma_T^*}{E_T^*} = \frac{\sigma_T}{E_T^*} \quad (2)$$

ただし、 $*$ は Fig. 2(a) に示すような dt の幅で微小体積の部分での値を示す。 E_T^* は dt の微小体積での T -方向のヤング率で、素材のポアソン比の違いによる影響を考慮した値である。 E_T^* と強化材の素材剛性との関係は

$$\frac{1}{2} \geq |t| \geq \frac{D}{2}; \quad E_T^* = E_m \quad (3a)$$

$$|t| \leq \frac{D}{2}; \quad E_T^* = K_f V_f^* + K_m V_m^* - \frac{(\nu_f K_f V_f^* + \nu_m K_m V_m^*)^2}{K_f V_f^* + K_m V_m^*} \quad (3b)$$

ただし

$$K_f = E_f / (1 - \nu_f^2), \quad K_m = E_m / (1 - \nu_m^2)$$

で与えられる。 $|t| \leq D/2$ の領域では、 dt の幅の微小体積は Fig. 2(b) のようにモデル化して与えている。また V_f^*, V_m^*, D は次式で与えられる。

$$V_f^* = 2\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - t^2}, \quad V_m^* = 1 - V_f^* \quad (4a)$$

$$D = 2\sqrt{\frac{V_f}{\pi}} \quad (4b)$$

次に T -方向のヤング率 (E_T) を T -方向の直応力 (σ_T) と T -方向の平均ひずみの比で表わすと、(3a), (3b) の両式を考慮して、

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{\sigma_T} \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon_T^* dt = 2 \int_0^{D/2} \frac{1}{E_T^*} dt + \frac{1-D}{E_m} \quad (5)$$

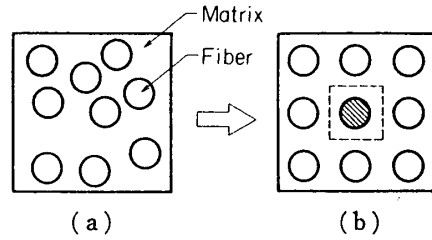


Fig. 1 Composition of matrix and reinforced fibers in composite materials.
(a) Random array (b) Square array

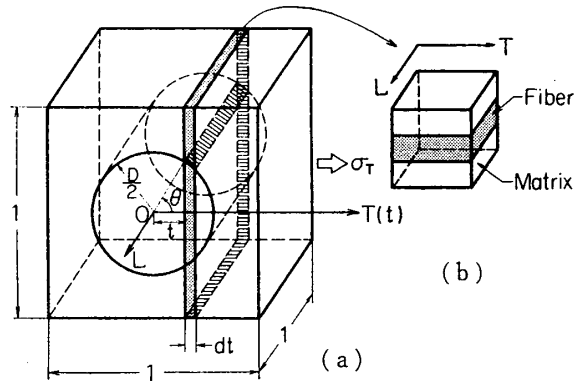


Fig. 2 (a) Basic model of unit volume in unidirectional reinforced material.
(b) Simplified model of infinitesimal width dt in Fig. 2(a).

となる。(5) 式をさらに (3b) 式および $t = D \cos \theta/2$ を用いて, θ に関して積分すると, 次式を得る.

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K_f - K_m}{(K_f - K_m)^2 - (\nu_f K_f - \nu_m K_m)^2} + \frac{1-D}{E_m} - D \left\{ \frac{1}{2G_m} \cdot \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_1^2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha_1^2}}{\alpha_1} + \frac{1-\nu_m}{E_m} \cdot \frac{\alpha_2^2}{1-\alpha_2^2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha_2^2}}{\alpha_2} \right\} \quad (6)$$

ただし

$$\alpha_1 = G_m / (G_f - G_m) D$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{E_m}{1-\nu_m} \right) / \left(\frac{E_f}{1-\nu_f} - \frac{E_m}{1-\nu_m} \right) D \quad (7)$$

(6) 式の右辺の第 3 項は硝子含有率 V_f の小さい範囲では小さいので省略すれば, E_T として次の近似式が得られる.

$$\frac{1}{E_T} \doteq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K_f - K_m}{(K_f - K_m)^2 - (\nu_f V_f - \nu_m V_m)^2} + \frac{1-D}{E_m} \quad (8)$$

(3) ポアソン比; ν_L

せんい方向 (L) の応力に対するポアソン比を上記と同様にして求める. まず Fig. 2 の dt の微小体積において次式が成り立つ.

$$\varepsilon_T^* = -\nu_L^* \varepsilon_L^* = -\nu_L^* \varepsilon_L \quad (9)$$

ただし

$$\frac{1}{2} \geq |t| \geq \frac{D}{2}; \quad \nu_L^* = \nu_m \quad (10a)$$

$$|t| \leq \frac{D}{2}; \quad \nu_L^* = \frac{\nu_f K_f V_f^* + \nu_m K_m V_m^*}{K_f V_f^* + K_m V_m^*} \quad (10b)$$

(10a), (10b) 式を用いると平均的なポアソン比 ν_L は次式で与えられる. したがって,

$$\begin{aligned} \nu_L = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} &= -\frac{1}{\varepsilon_L} \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon_T^* dt = \int_{-1/2}^{1/2} \nu_L^* dt = \frac{D(\nu_f K_f - \nu_m K_m)}{K_f - K_m} \\ &+ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K_f K_m (\nu_m - \nu_f)}{(K_f - K_m)^2} + \nu_m (1-D) \\ &- \frac{K_f K_m^2 (\nu_m - \nu_f)}{2(K_f - K_m)^3 \sqrt{1-\beta^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし

$$\beta = K_m / D(K_f - K_m)$$

(11) 式の右辺の第 3 項は V_f の全域にわたって十分小さいので省略すると, (11) 式は次式のように簡単化される.

$$\nu_L = \frac{D(\nu_f K_f - \nu_m K_m)}{K_f - K_m} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K_f K_m (\nu_m - \nu_f)}{(K_f - K_m)^2} + \nu_m (1-D) \quad (12)$$

さらに K_m/K_f が十分小さいときは, たとえば硝子/エポキシの場合には, $K_m/K_f \doteq 0.047 \doteq 0$ とみなして次の近似式を得る.

$$\nu_L = \nu_f D + \nu_m (1 - D) \quad (13)$$

(4) せんいを含む面, (L, T) 面でのせん断剛性率; G_{LT}

(2), (3) と同様の解法で, (L, T) 面のせん断剛性率を求めると, dt の微小体積に生じるせん断ひずみ γ_{LT}^* は次式で与えられる.

$$\gamma_{LT}^* = \frac{\tau_{LT}^*}{G_{LT}^*} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}^*} \quad (14)$$

τ_{LT} は (L, T) 面に働くせん断応力であり, G_{LT}^* は dt の部分のせん断剛性率であり, 強化材の素材剛性によって次式で与えられる.

$$\frac{1}{2} \geq |t| \geq \frac{D}{2}; \quad G_{LT}^* = G_m \quad (15a)$$

$$|t| \leq \frac{D}{2}; \quad G_{LT}^* = G_f V_f^* + G_m V_m^* \quad (15b)$$

(14), (15) 式より平均的なせん断剛性率 G_{LT} を求めると, 次式で与えられる.

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{\gamma_{LT}}{\tau_{LT}} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{G_{LT}^*} dt = \frac{\pi}{2(G_f - G_m)} + \frac{1-D}{G_m} - \frac{D}{G_m} \cdot \frac{\gamma^2}{\sqrt{1-\gamma^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} \quad (16)$$

ただし

$$\gamma = G_m / D(G_f - G_m)$$

また V_f のあまり大きくない範囲では (16) 式の右辺第 3 項は省略できるので次式の近似式が得られる.

$$\frac{1}{G_{LT}} \doteq \frac{\pi}{2(G_f - G_m)} + \frac{1-D}{G_m} \quad (17)$$

2.2 Hashin, Tsai, Greszczuk, 筆者の解析結果と実験値との比較・検討

Hashin [3], Tsai [4], Greszczuk [5] による一方向強化材の弾性常数を求める解析式および筆者の C を含む経験式 [1] と本文第 2.1 節で述べた本解析式を用い, 硝子/エポキシ複合材について数値計算を行なった. その結果を Fig. 3 に比較して示す. また弾性実験に際しては硝子せんい/エポキシ複合材を用いた. 計算で用いた素材の弾性常数は,

$$\begin{aligned} E_m &= 300 \text{ kg/mm}^2, & E_f &= 7,000 \text{ kg/mm}^2 \\ \nu_m &= 0.36, & \nu_f &= 0.23 \end{aligned} \quad (18)$$

であり, 実験においては硝子含有率 (V_f) を 40~60% に変え, FW 円筒の軸引張・軸圧縮・ねじり・内圧・リング試験などにより, 弾性常数を測定した. この実験は, 筆者らが FW 円筒などを用いて行なったものであるが, 前報 [1] ですでに報告したので実験要領等については省略する. なお, Fig. 3 において, 2.1 で求めた近似式 (8), (12), (17) 式による曲線も破線で図示し, 微小項を省略しない解析解および実験値と比較した.

次に Fig. 3 から, 各種の方法で求めた諸弾性係数を検討する.

(1) E_L ; せんい方向のヤング率については, いずれの解析法も (1) 式の複合則とはほぼ一致し, 実験値とも良い一致を示している.

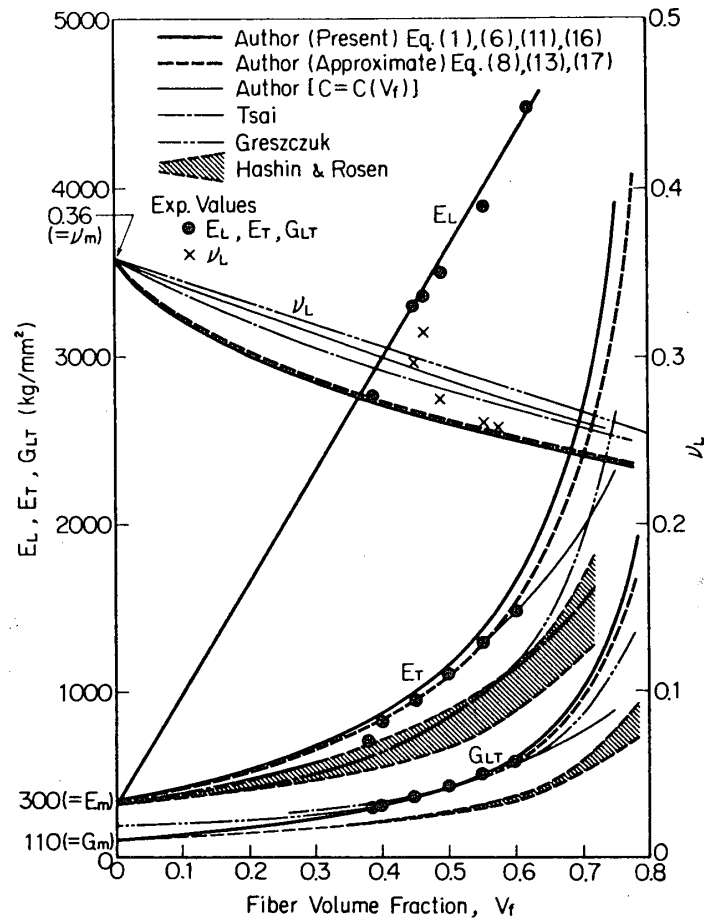


Fig. 3 Relationship between analytical elastic moduli and glassfiber volume fraction, and comparison with experimental results.

(2) E_T ; 実験値は, $V_f \approx 0.4 \sim 0.6$ の範囲では筆者らの本解析値と比較的よく一致し, Tsai, Greszczuk, Hashin の値はかなり低い. また V_f が増すにつれ, 厳密解 (6) 式と近似解 (8) 式との差は大きくなり, 近似解のほうが低い値をとる. しかし V_f が 60% 以下の場合は近似式でも十分よい一致が得られ, 有用と考えられる.

(3) ν_L ; 実験値と比較していずれの諸式とも一致しないが, V_f が高くなるにしたがい筆者の式に近づくようである. しかしポアソン比の実験測定は精度の点で難かしいので今後の信頼性のある実験資料に期待したい. 近似式 (12) 式は (11) 式とほとんど一致する.

(4) G_{LT} , Tsai, Greszczuk, 筆者の諸式はあまり大きな差はみられないが, V_f が増すにしたがい, 筆者の解析値の方がやや大きくなる. 実験値との比較は Hashin の値以外, 非常によく一致しており, 筆者の近似式 (17) 式もまた十分有効であることを示している.

2.3 検 討

以上一方向強化材の弾性常数について検討した結果を述べると次のようになる.

(1) 本文で提案した一方向強化材の弾性常数の解析は必ずしも厳密なものではないが、実験値と比較したところ良好な一致が見られ、簡単で有用な式と思われる。

(2) Fig. 2 に示したモデルによる解析では、硝子含有率は約 80% が限度で、いわゆる六角形配列によれば、90% の含有率まで可能となる。しかし複合材の成形技術および有効性から考えて現在では約 75% までが限度といわれているので [6]、本モデルを用いても一応さしつかえないと考えている。

(3) 筆者らはすでに C (Contiguity factor) を含む経験式で実験値との良好な一致を得ているが [1]、本文で提案した解析方法は、 C の経験係数を必要としない点に利点があると思われる。

(4) 2.1 で求めた微小項を省略した近似解と実験値との比較もかなり良い結果を得ており、微小項を省略しない解析値との差もあまりないので、弾性常数を大体推定するのに有効である。しかし V_f が増すにしたがい、(特に E_T において) 厳密解との差があらわれるようである。

(5) 筆者らの実験値は V_f が 40~60% の範囲で得られたものであるが、将来できれば、さらに高い硝子含有率のものについても比較・検討したい。ただし Fig. 3 に示すように V_f が 70~80% 程度に高くなると (ポアソン比を除いて) 弾性常数の解析値はいずれの式によっても、非常に高い値を示すようになるが、実際の FW 構造においては成形上 V_f があまり高くなると母材とせんいの接着性やせんいの不均一性、空孔の存在等の点から、せんいの補強効果に悪影響をおよぼすと思われる。したがって V_f の非常に高い領域については、従来の解析とは別の因子を考慮しなければならないだろう。

3. 多層積層板の弾性常数

本節では、第 2 章において求めた一方向強化材の弾性常数に基づいて、多方向に一方向強化材を積層した各種の多層積層板の弾性常数を求める。またそれらの解析式が有用であることを実験的に確かめるため、斜交巻き FW 円筒や円筒形ロケットチャンバーなどによる諸弾性試験を行なって解析値と比較する。

3.1 斜交巻き FW 材の弾性常数

3.1.1 解 析

Fig. 4(a), (b) に示すように斜交巻き FW 円筒材は 2 方向に一方向強化材を積層したものと考えられ、斜交する角度が 2α で、2 枚重なった直交異方性板と考えてよい。その主軸は斜交角の 2 等分線の方で、斜交巻き FW 円筒の軸、周方向である。

一枚の直交異方性板の諸弾性常数が知られているとき、これらの板を重ね合せた積層板の弾性常数の解析はすでに求められており [1]、ここでは次にその結果のみを示す。諸記号等については文献 [1] を参照されたい。

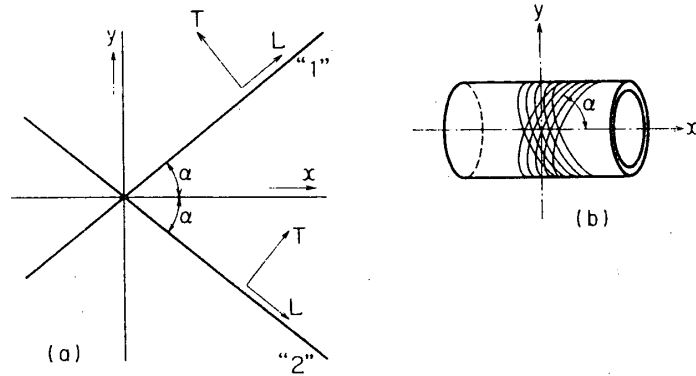


Fig. 4 Coordinate system used for helical-wound laminated material.

〈斜交巻き FW 材の主軸方向の弾性常数〉

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{E_x} &= \frac{1}{E_{x0}} - \chi_0^2 G_{xy0} \\
 \frac{1}{E_y} &= \frac{1}{E_{y0}} - \phi_0^2 G_{xy0} \\
 \frac{\nu_x}{E_x} &= \frac{\nu_y}{E_y} = \frac{\nu_{x0}}{E_{x0}} + \chi_0 \phi_0 G_{xy0} \\
 \frac{1}{G_{xy}} &= \frac{1}{G_{xy0}} - \frac{\chi_0(\chi_0 + \phi_0 \nu_{y0})}{1 - \nu_{x0} \nu_{y0}} E_{x0} - \frac{\phi_0(\phi_0 + \chi_0 \nu_{x0})}{1 - \nu_{x0} \nu_{y0}} E_{y0}
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで, x, y は円筒軸, 周方向を意味し, 添字 “0” を付したものは各層を一枚の直交異方性板と見なしたときの, x, y 軸方向の各層の弾性常数に相当し, 下記の式で表わされる.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{E_{x0}} &= \frac{\cos^4 \alpha}{E_L} + \frac{\sin^4 \alpha}{E_T} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_L}{E_L} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
 \frac{1}{E_{y0}} &= \frac{\sin^4 \alpha}{E_L} + \frac{\cos^4 \alpha}{E_T} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_L}{E_L} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
 \frac{1}{G_{xy0}} &= \left(\frac{1+\nu_L}{E_L} + \frac{1+\nu_T}{E_T} \right) \sin^2 2\alpha + \frac{1}{G_{LT}} \cos^2 2\alpha \\
 \frac{\nu_{x0}}{E_{x0}} &= \frac{\nu_{y0}}{E_{y0}} = \frac{\nu_L}{E_L} (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} \right) \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \\
 \chi_0 &= \left[\frac{\sin^2 \alpha}{E_T} - \frac{\cos^2 \alpha}{E_L} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_L}{E_L} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha \\
 \phi_0 &= \left[\frac{\cos^2 \alpha}{E_T} - \frac{\sin^2 \alpha}{E_L} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_L}{E_L} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha
 \end{aligned}$$

χ_0, ϕ_0 は, 各層で x, y 主軸に関するせん断応力によって主軸方向に直ひずみを生じ, あるいは主軸方向の直応力によってせん断ひずみを生ずることを意味する. したがって素材 (母

材と強化せんい) の弾性常数およびせんいの含有率が与えられれば, 2. で求めた関係式を用いて, 一方向強化材の弾性常数を求めることができ, さらに本節で求めた (19) 式によって, FW 材など積層板の弾性常数を求めることができる.

3.1.2 実 験

2. および (19) 式の諸式が有用であることを実験的に確かめるため FW 円筒について一連の弾性実験を行なった. 以下その実験要領を簡単にのべる.

(1) 試験片

〈製作〉 日東紡績(株) 強化プラスチック研究所

〈成形条件〉 硬化およびアフターキュアを 150°C , 3 時間行なう.

〈樹脂〉 Shell Epikote 828 比重 1.20

〈ロービング〉 GYR-60-FWE 比重 2.56

〈硝子含有率〉, 〈巻き角度〉, 〈板厚〉, 〈内径〉 など成形条件については Table 1 に示す.

Table 1 試験片の成形条件

試験種目	内 径 (mm)	板 厚 (mm)	巻 き 角 度 (度)	硝子体積 含有量(%)
引 張	75	1	30, 45, 55, 75 90	39~57.5
振 り	75	1, 4	10, 20, 30, 45 75, 90	49~62
内 圧	100	3	15, 25, 40, 50 55, 60, 75, 90	40~60

(2) 試験種目

引張試験, ねじり試験, 内圧試験, リング引張試験, 体積比測定

3.1.3 実験結果との比較・検討

2. で求めた解析式を用いて一方向強化材の弾性常数を求め, 本節の 3.1.1 で求めた関係式 (19) 式により斜交巻き FW 材の弾性常数を数値計算した. ただし素材の弾性常数は一貫して (18) 式に示した値を用いている.

各種の巻き角度 (α) に対する各種の弾性常数值は, 硝子含有率が巻き角度 α によって異なることを考慮して求め, Fig. 5 には E_x, E_y, ν_x, ν_y について, また Fig. 6 には G_{xy} について実験値と比較して示す.

また内圧試験の場合には円筒中央部においては, x -方向, y -方向のひずみ~応力の比;

ε_x/σ_0 , ε_y/σ_0 の実験値が得られる. ε_x/σ_0 , ε_y/σ_0 は, 解析的には次式で与えられる.

$$\frac{\varepsilon_x}{\sigma_0} = \frac{1 - 2\nu_x}{E_x} \quad (20 a)$$

$$\frac{\varepsilon_y}{\sigma_0} = \frac{2 - \nu_y}{E_y} \quad (20 b)$$

$$\sigma_0 = \frac{PR}{2t}$$

P ; 内圧, R ; 円筒半径, t ; 板厚

一方これらの解析式より求めた値と実験値を比較し, Fig. 7(a), (b), Fig. 8(a), (b) に示す. $E_x, E_y, \nu_x, \nu_y, G_{xy}$ の理論値については, Fig. 5, 6 から明らかなように実験値とはかなり

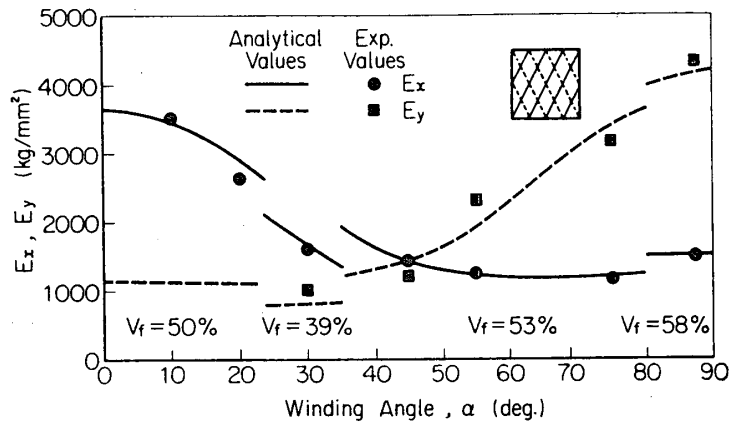


Fig. 5(a) Relationships between Young's moduli E_x, E_y and winding angle α in helical-wound composite cylinders.

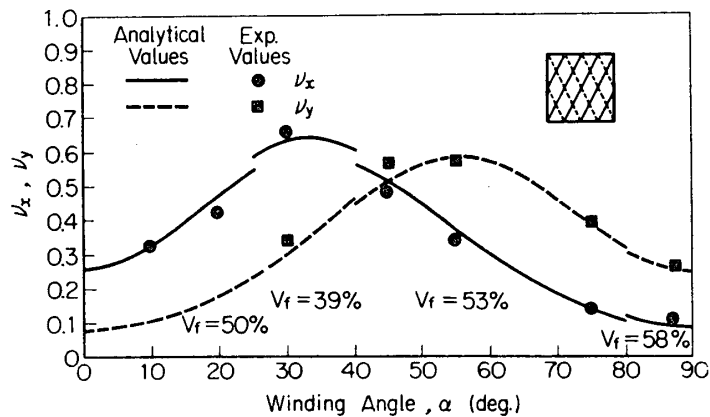


Fig. 5(b) Relationships between Poisson's ratios ν_x, ν_y and winding angle α in helical-wound composite cylinders.

良い一致を得た。特にポアソン比の実測は精度上難かしくバラツキが大きいのが常であるが、比較的妥当な値を得ることができた。また内圧試験による ε_x/σ_0 , ε_y/σ_0 , についても, Fig. 7 に示すようにややバラツキがあるが、傾向としてはかなり良好である。

これらの結果から、第 2 章で述べた解析式や (19) 式の諸式が FW 材に用いて有用であることが確認できた。

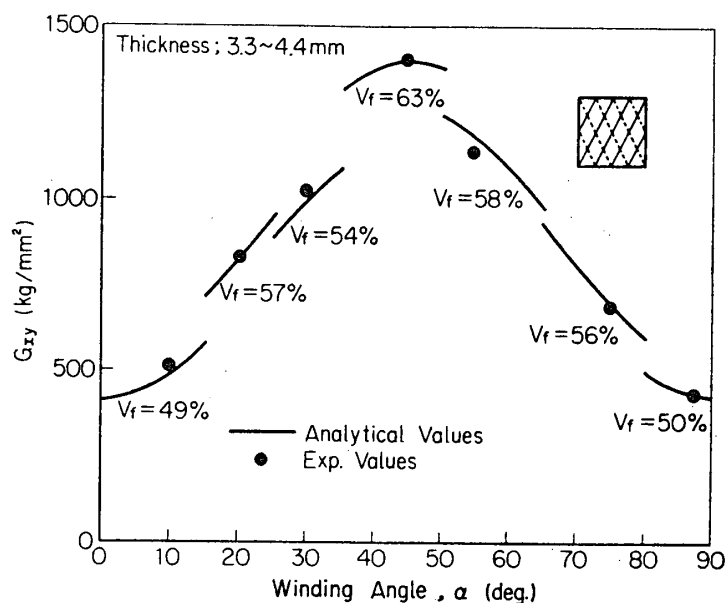


Fig. 6(a) Relationship between shearing modulus G_{xy} and winding angle α in helical-wound composite cylinders.

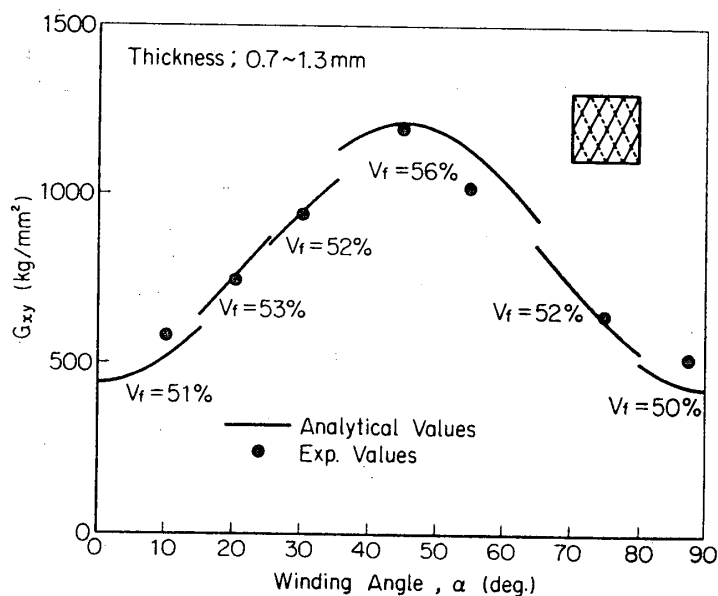


Fig. 6(b) Relationship between shearing modulus G_{xy} and winding angle α in helical-wound composite cylinders.

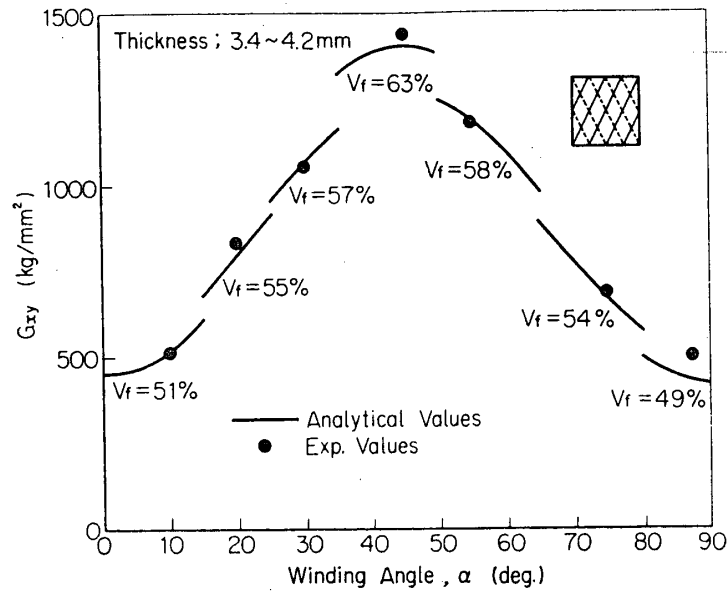


Fig. 6(c) Relationship between shearing modulus G_{xy} and winding angle α in helical-wound composite cylinders.

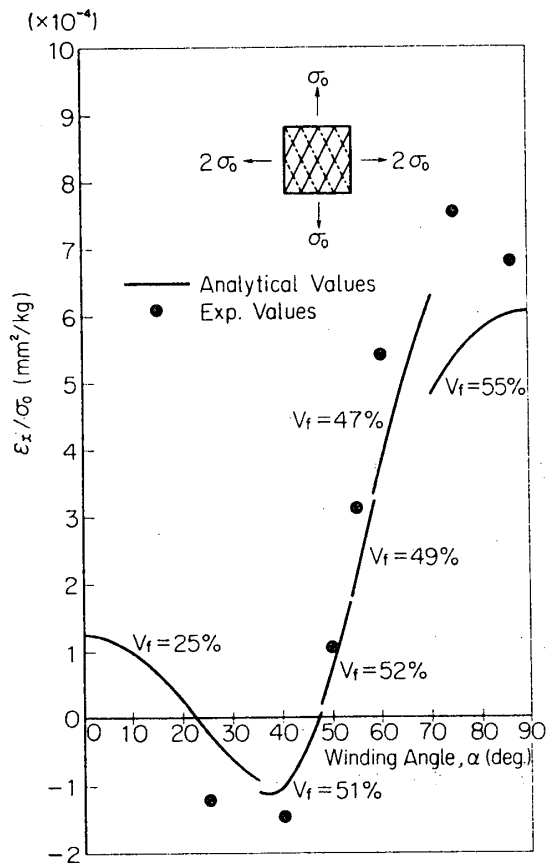


Fig. 7(a) Relationship between axial strain ϵ_x / axial stress σ_0 ratio and winding angle α in helical-wound composite cylinders under internal pressure.

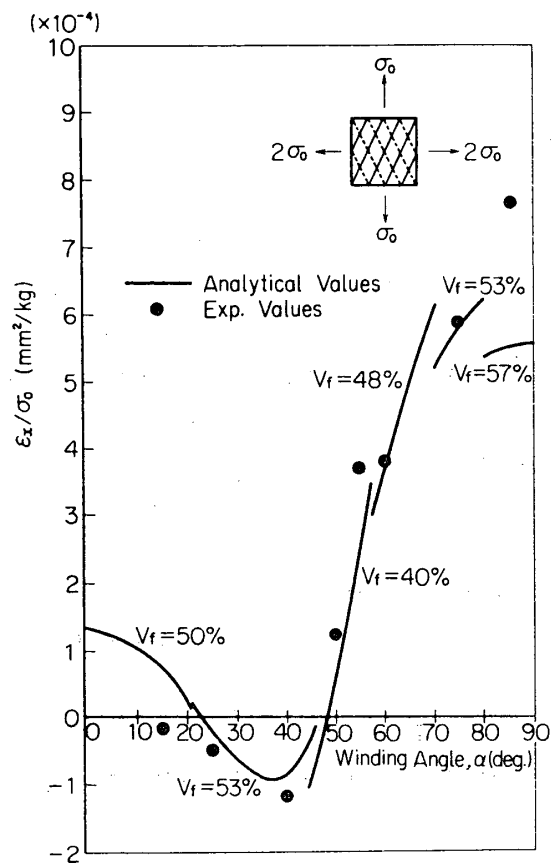


Fig. 7(b) Relationship between axial strain ϵ_x / axial stress σ_0 ratio and winding angle α in helical-wound composite cylinders under internal pressure.

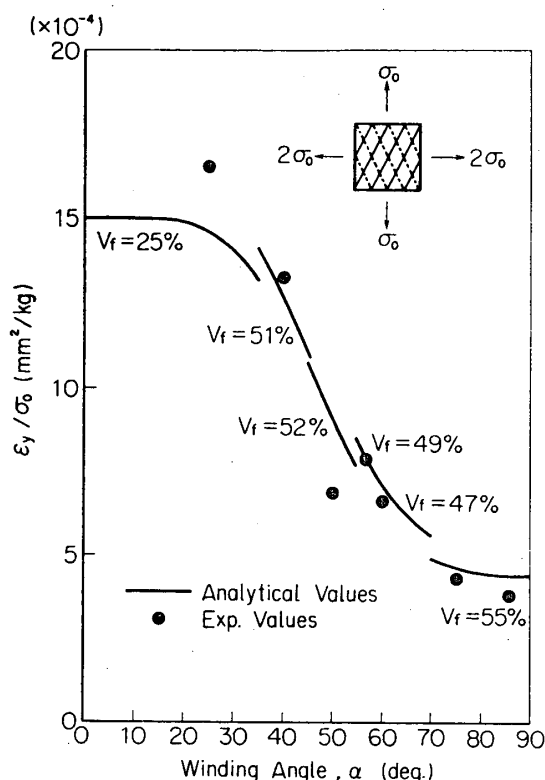


Fig. 8(a) Relationship between circumferential strain ϵ_y /axial stress σ_0 ratio and winding angle in helical-wound composite cylinders under internal pressure.

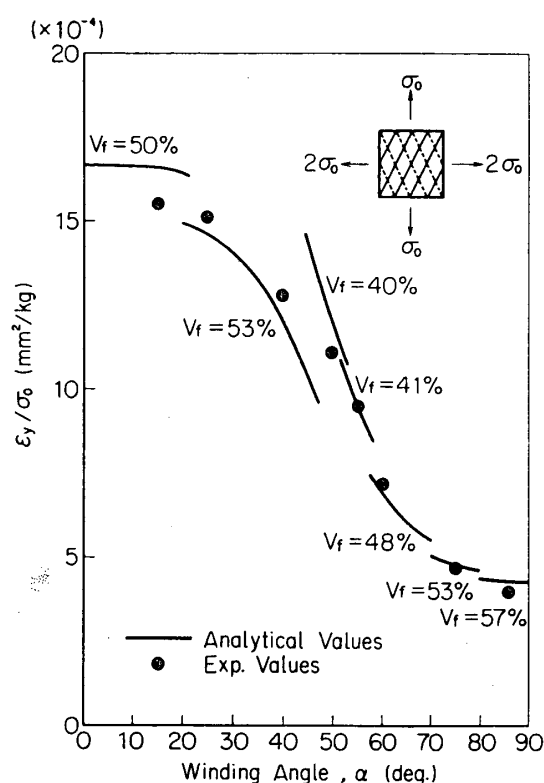


Fig. 8(b) Relationship between circumferential strain ϵ_y /axial stress σ_0 ratio and winding angle in helical-wound composite cylinders under internal pressure.

3.2 斜交巻き十周巻き FW 材の弾性常数

3.1 で述べた積層板は斜交巻き FW 材でみられるように 2 方向に積層 (x 軸に対し $\pm\alpha$ で積層) した板と考えられる。本節では弾性主軸が x 軸, y 軸と一致する各種構成層, たとえば一方向強化材の L -, T -主軸方向が x または y 軸方向と一致する層 (すなわち周巻き層, クロス強化せんいを用いた層) や, 3.1 で述べた斜交巻き層などからなる多層積層板の一般的な弾性常数の解析式を導き, 実際にこのような場合に相当する円筒形ロケットチャンバーなどについてのいくつかの実験結果と比較検討した結果を述べる。

3.2.1 解 析

x 軸, y 軸を複合材各層の弾性主軸とする。 i 番目の構成層内の平面応力, 平面ひずみ成分を

$$\{\epsilon_i\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xi} \\ \epsilon_{yi} \\ \gamma_{xyi} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma_i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xi} \\ \sigma_{yi} \\ \tau_{xyi} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

とすれば, $\{\sigma_i\}$, $\{\varepsilon_i\}$ の間には (19) 式の弾性常数を用いて次式の関係が成り立つ.

$$\{\varepsilon_i\} = [C_i] \{\sigma_i\} \quad (22)$$

$$[C_i] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xi}} & -\frac{\nu_{yi}}{E_{yi}} & 0 \\ -\frac{\nu_{xi}}{E_{xi}} & \frac{1}{E_{yi}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xyi}} \end{bmatrix}$$

ただし, E_{xi} , ν_{xi} 等は, x, y 軸を主軸にもつ i 番目の構成層の弾性常数で (19) 式に添字 “ i ” を付したものである. (22) 式より $\{\sigma_i\}$ を求めると,

$$\{\sigma_i\} = [C_i]^{-1} \{\varepsilon_i\} \quad (23)$$

$$[C_i]^{-1} = \begin{bmatrix} K_{xi} & \nu_{yi} K_{xi} & 0 \\ \nu_{xi} K_{yi} & K_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xyi} \end{bmatrix}$$

を得る. ただし

$$K_{xi} = \frac{E_{xi}}{1 - \nu_{xi}\nu_{yi}}, \quad K_{yi} = \frac{E_{yi}}{1 - \nu_{xi}\nu_{yi}}$$

次に各構成層の相互間には, 次の仮定が成り立つものとする.

(i) 各層における応力と多層 (n 層) 積層板の応力 $\{\sigma\}$ との間には次の関係が成り立つ.

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^n \{\sigma_i\} t_i \quad (24a)$$

ただし t_i : i 番目の層の全板厚に対する板厚比, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$

(ii) 各層間には相互のすべりはなく, 各層の諸ひずみ量は同じである.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_i\} \quad (24b)$$

したがって (23), (24a), (24b) 式より $\{\sigma\}$ は,

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^n [C_i]^{-1} \{\varepsilon_i\} t_i = [C]^{-1} \{\varepsilon\} \quad (25)$$

となり, $[C]^{-1}$ は次式のように表わされる.

$$\begin{aligned} [C]^{-1} &= [C_1]^{-1} t_1 + [C_2]^{-1} t_2 + [C_3]^{-1} t_3 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n K_{xi} t_i & \sum_{i=1}^n \nu_{yi} K_{xi} t_i & 0 \\ \sum_{i=1}^n \nu_{xi} K_{yi} t_i & \sum_{i=1}^n K_{yi} t_i & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n G_{xyi} t_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

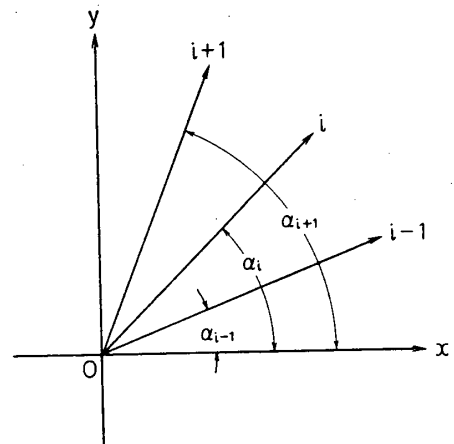


Fig. 9 Laminating direction of each layer in multilayered composite.

(25), (26) 式の関係より, 多層に積層した FW 材の全体としての弾性常数を求めると, 次のような一般式が得られる.

$$E_x = \sum_{i=1}^n K_{x_i t_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \nu_{x_i} K_{y_i t_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^n K_{y_i t_i}} \quad (27 a)$$

$$E_y = \sum_{i=1}^n K_{y_i t_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \nu_{y_i} K_{x_i t_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^n K_{x_i t_i}} \quad (27 b)$$

$$\nu_x = \frac{\sum_{i=1}^n \nu_{x_i} K_{y_i t_i}}{\sum_{i=1}^n K_{y_i t_i}} \quad (27 c)$$

$$\nu_y = \frac{\sum_{i=1}^n \nu_{y_i} K_{x_i t_i}}{\sum_{i=1}^n K_{x_i t_i}} \quad (27 d)$$

$$G_{xy} = \sum_{i=1}^n G_{x y_i t_i} \quad (27 e)$$

なお $\nu_x/E_x = \nu_y/E_y$ の Maxwell の相反定理が多層積層板についても成り立つことは容易にわかる.

3.2.2 実 験

(1) 実験 I 〈斜交巻き十周巻き円筒の弾性常数〉

3.2.1 の解析で求めた多層積層板の 1 例として, 斜交巻き層にさらに周方向に巻いた FW 円筒について, 面内弾性常数を実験的に求め, (27) 式から求めた解析値と比較する.

次に実験要領を簡単に述べる.

(i) 試験片

〈製作, 成形条件, 素材〉 3.1.2 の (1) 試験片の項を参照

〈巻き角度〉 35°, 40°, 45°

〈硝子含有率〉 約 65% (体積)

〈内径〉 100 mmφ

〈板厚〉 1.32 mm ~ 1.60 mm

〈板厚比〉 周方向巻き層の全体厚に対する比; 約 25%

(ii) 試験種目

(a) 引張試験, (b) ねじり試験, (c) 内圧試験

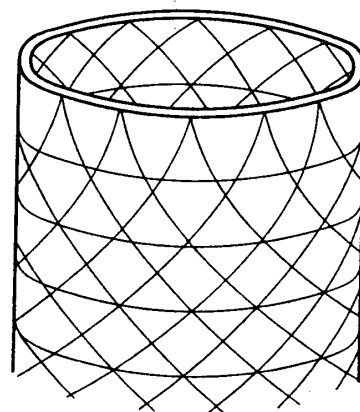


Fig. 10 Helical-wound cylinder with superposed circumferential winding.

(ii) 試験種目……曲げ試験

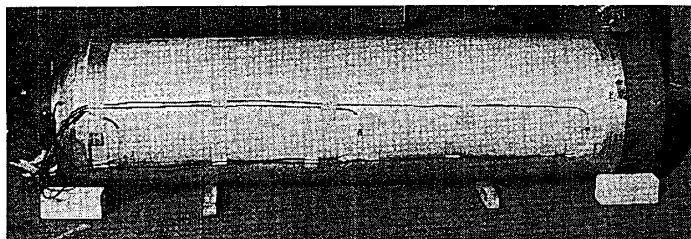


Table 2 FW ロケットチャンバー円筒部の弾性常数

弾性常数	E_x (kg/mm ²)	E_y (kg/mm ²)	ν_x	ν_y	G_{xy} (kg/mm ²)
解析値	2,409	2,701	0.212	0.237	760

値は次の通りである.

$$\left. \begin{array}{l} E_x = 2,350 \text{ (kg/mm}^2\text{)} \\ 2,350 \text{ (")} \\ 2,400 \text{ (")} \\ 2,050 \text{ (")} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{平均} \\ 2,290 \text{ (kg/mm}^2\text{)} \end{array}$$

一方、上述の解析式から求めた解析値と比較して、ひずみ測定の実験結果はやや低い、その原因の一つとして、測定した表面は樹脂で化粧上塗りをしてあるので、FW 材の真のひずみと異なることも考えられる。

4. む す び

本文において FW 構造の弾性常数に関する解析および実験を行なったが、筆者らの行なった解析法は必ずしも FW 材の微視的な力学的挙動を正確にとらえたものでなく、巨視的な直交異方性弾性力学に基づいて求められたものである。しかしながら各種の実験を行なって比較したところ良好な結果が得られた。諸結果をまとめると次のようになる。

(1) FW 材の弾性常数は、厳密には、その力学的メカニズムを微視的な立場から出発して求めるべきであるが、本文では、まず素材の弾性常数に基づく一方向強化材の弾性常数を求めた。2. において求めた一方向強化材の弾性常数の表示式は、筆者らの式 [1] および Tsai の式 [4] に見られるように C (Contiguity factor) を含まなくてもよい利点があり、実験値ともよい一致を得られたので、簡単で有用な解析式と考えられる。

(2) 次に実際の FW 構造としての斜交巻き円筒の弾性常数の解析値は、上述の一方向強化材の弾性常数に基づいて導かれ、たとえば Greszczuk [5], 筆者ら [1] など多くの人々によって求められているが、多種の巻き角度 α に対する実験結果との詳しい比較は Tsai [4], Card [7] らの論文以外にはあまりみられない。しかし本文でわれわれが行なった実験値との比較は、ある程度のバラツキを許せばかなりよい一致を得ており、素材の弾性常数から出発して導いた諸解析式が有効であることが確認できた。

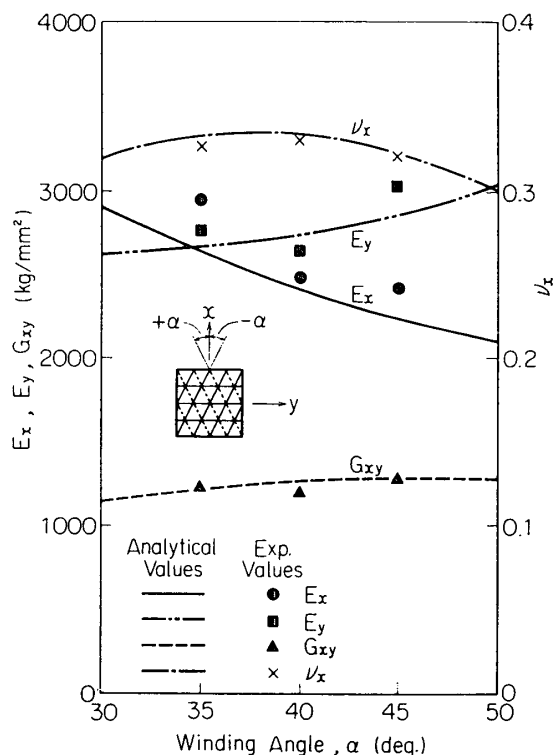


Fig. 11 Relationship between elastic moduli of helical-wound cylinder with superposed circumferential winding and winding angle α .

(3) 多層積層円筒 (ロケットチャンバー) の実験値との比較も良好な合致を得た。また解析式 (27) 式は FW 材の内圧チャンバー等の設計の際に用いて有用であると考え、これらの諸式を用いてロケット飛しょう時の動的安定の検討資料としている。

謝 辞

本文で述べたせんい強化複合材の弾性実験の実施に際しては、植村研究室の井山助手、阿部技官やその他学生などの援助を得た。また試験片については一貫して日東紡強化プラスチック研究所で製作して頂いた。末筆ながらこれらのご好意に対して厚く謝意を表します。

1971 年 2 月 27 日 航空力学部

参 考 文 献

- [1] 植村益次・山脇弘一・阿部慎蔵・井山向史; 東大宇宙研究所報告 Vol. 4, No. 3(B), Oct. (1968)
- [2] 山脇弘一; 第 5 回宇宙航空工学における FRP シンポジウム, 東大宇宙航空研究所主催 (1970. 12)
- [3] Hashin, Z. & Rosen, B. W.; J. Appl. Mech., 31, Jun. (1964) p. 223.
- [4] Tsai, S. W.; NASA CR-71, July (1964)
- [5] Greszczuk, L. B.; Proc. S. P. I. 21st. Conference 8-A (1966)
- [6] 植村益次, 山脇弘一; 日本航空宇宙学会誌 Vol. 15, No. 166, Nov. (1957)
- [7] Card, M. F.; NASA TN D-3110, Nov. (1965)
- [8] Paul, B.; Trans. Metallurgical Society of AIME, Vol. 218 (1970)
- [9] 山脇弘一; 「フィラメント・ワインデング材の剛性と強度について」東京大学工学系修士論文 (1968)